

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Farid Gamgami
aus Dortmund

Tag der mündlichen Prüfung: 18.7.2007

**Stabilitätsverhalten
massereicher Population-III-Sterne**

**Gutachter: Prof. Dr. Werner M. Tscharnuter
Prof. Dr. Rainer Spurzem**

Zusammenfassung

Ein Charakteristikum der ersten Sterneneration nach dem Urknall – der sogenannten Population-III-Sterne – ist ihre große Masse. Untersuchungen zu ihrer Entstehung sagen Massen von bis zu $1000 M_{\odot}$ voraus. Dies hängt mit einem weiteren Merkmal dieser Sterne zusammen; sie sollen sich aus primordialem Gas gebildet haben, welches bis auf Spuren von Lithium nur aus Wasserstoff und Helium bestand. Es stellt sich die Frage, ob diese postulierten Gebilde überhaupt stabil sind. Zur Beantwortung dieser Frage wurde zunächst eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. Diese ergab, daß Population-III-Sterne mit Massen größer als $350 M_{\odot}$ zu Anfang ihrer Hauptreihenentwicklung instabile Moden aufweisen. Als Ursache der Instabilität konnte der ϵ -Mechanismus identifiziert werden. Ferner wurde eine positive Korrelation zwischen Instabilität und der Masse des Sterns gefunden. Sowohl Anwachsrate (2000 a – 8000 a) als auch Dauer ($2 \cdot 10^5$ a – $4 \cdot 10^5$ a) der Instabilität nehmen mit der Masse zu. Eine hydrodynamische Simulation ist notwendig, um die Auswirkungen der instabilen Moden auf den Stern zu untersuchen. Es stellte sich heraus, daß der ϵ -Mechanismus bei den untersuchten massereichsten Sternen ($550 M_{\odot}$ und $750 M_{\odot}$) die äußeren Schichten auf Fluchtgeschwindigkeit beschleunigt. Die Ergebnisse zeigen jedoch einen eruptiven Massenverlust, der sich höchstwahrscheinlich zyklisch ($\sim 10^4$ a) wiederholt.

Abstract

The first generation of stars, the so called population III stars, are known to be very massive. Current theories for the formation of these objects predict masses up to $1000 M_{\odot}$. This is because chemical composition of primordial gas is able to inhibit fragmentation below these masses. This gas consisted mainly of hydrogen and helium with a slight amount of lithium. It's worthwhile to pose, and follow, the question as to whether these stars are stable objects. To answer this, we performed a linear stability analysis, which shows that population III stars with masses above $350 M_{\odot}$ suffer indeed from unstable modes. We demonstrated that the ϵ -mechanism drives this instability during the beginning of the main-sequence evolution phase. A striking feature of the instability is its positive correlation with the mass of the star. The e-folding time (2000 a – 8000 a) and the endurance ($2 \cdot 10^5$ a – $4 \cdot 10^5$ a) of unstable modes increase with increasing mass. To understand the impact of unstable modes on the star, we performed hydrodynamical simulations. This calculation demonstrated that the outer layers of the more massive stars ($550 M_{\odot}$ and $750 M_{\odot}$ in this study) reach escape velocity and hence eject their outer shells. Moreover, the results show an eruptive mass loss which repeats in cycles of about 10^4 a.

*Alles ist vielleicht nicht klar,
nichts vielleicht erklärlich,
und somit, was ist, wird war,
schlimmstenfalls entbehrlich.*

Chr. Morgenstern (1871 – 1914)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
----------	-------------------	----------

2	Instabilitätsmechanismen	5
2.1	Ein kurzes historisches Präludium	5
2.2	Der ϵ -Mechanismus	6
2.3	Der κ -Mechanismus	7
2.4	Ledouxs Idee	8

3	Sternstruktur	11
3.1	Sternentwicklungsgleichungen	11
3.2	Zustandsgleichung	13
3.3	Materialfunktionen	13

4	Lineare Stabilitätsanalyse	15
4.1	Die linearen Pulsationsgleichungen	16
4.2	Das Arbeitsintegral	20
4.3	Die adiabatische Approximation	22
4.4	Matrixverfahren	23
4.5	Quasi-Adiabasis	28
4.6	Lineare nichtadiabatische Analyse	30
4.7	Validierung der Programme	31

5	Ergebnisse der linearen Analyse	37
5.1	Pulsationsperiode	37
5.2	Instabilitäten	38
5.3	Nichtadiabasis vs. Quasi-Adiabasis	49

6	Hydrodynamik in sphärischer Symmetrie	53
6.1	Lagrange-Formalismus	53
6.2	Erhaltungsgleichungen	55
6.3	Numerische Viskosität	58
6.4	Zusammenfassung aller relevanten Gleichungen	59
6.5	Diskretisierung und Lösungsalgorithmus	59
6.6	Randbedingungen	63
7	Technische Strategien	65
7.1	Relaxierung der Hintergrundmodelle	65
7.2	Anregung der Pulsation	66
7.3	Konsequenzen der kleinen Anwachsrate	67
8	Nichtlineare Entwicklung instabiler Moden	73
8.1	$750 M_{\odot}$ und $550 M_{\odot}$	73
8.2	$450 M_{\odot}$ und $350 M_{\odot}$	83
9	Zusammenfassung	87
	Literaturverzeichnis	91
	Danksagung	95

Kapitel 1

Einleitung

Eine seit Mitte des 20. Jahrhunderts in der stellaren Astrophysik diskutierte und bis jetzt offen gebliebene Frage lautet: Gibt es eine obere Massengrenze der Sterne und, falls ja, was sind die bestimmenden Faktoren? Es ist empirisch belegt, daß Population-I-Sterne einer anfänglichen Verteilungsfunktion (IMF, initial-mass-function) gehorchen. Im Falle der ersten Sternengeneration im Universum (Population-III-Sterne) ist die IMF nicht bekannt. Großskalige Sternentstehungssimulationen von Bromm et al. (1999) lassen primordiale Sterne mit bis zu $1000 M_{\odot}$ durchaus denkbar erscheinen. In beiden Fällen (primordiale und gegenwärtige Sterne) bleibt die Frage zu klären, weshalb es eine obere Massengrenze gibt und im speziellen Kontext primordialer Sterne, bei welchen Massen sie sich befindet? Die hierfür verantwortlichen Mechanismen können vielfältig sein. Es könnte sich um Prozesse während der Akkretion handeln, wie die Bildung von Jets durch die ein Teil der Masse ans interstellare Medium zurückgegeben wird. Derartige Vorgänge zu quantifizieren, ist äußerst kompliziert, da die dynamische Entwicklung einer kollabierenden Wolke unter Berücksichtigung der Fragmentation bis zur Bildung des Vorhauptreihensterns konsistent verfolgt werden muß. Ein anderer Weg, die Frage der oberen Massengrenze anzugehen, ist zu prüfen, ob diese Gebilde per se stabil sind oder ob es nicht intrinsische Instabilitäten gibt, die die anfängliche Konfiguration zerstören. Eine solche intrinsische Instabilität liefert der ϵ -Mechanismus.

Der ϵ -Mechanismus wird in Kapitel 2 näher erläutert. Es sei aber vorab gesagt, daß es sich hierbei um eine vibrationelle Instabilität handelt, getrieben durch das nukleare Brennen im Zentrum. Ein schwingender Stern ähnelt dann einem Dieselmotor; mit jeder Kompression findet aufgrund von erhöhten Temperatur- und Druckwerten eine verstärkte Energieproduktion im Zentrum statt. Mechanisch gesehen, entspricht dies einer erzwungenen Schwingung.

Angeregt durch Ledoux's Arbeiten (Ledoux, 1941) führten Schwarzschild & Härm (1959) die erste Untersuchung hinsichtlich des ϵ -Mechanismus durch. Nach ihren Rechnungen sind Population-I-Sterne, die massereicher als $65 M_{\odot}$ sind, vibrationell instabil. Da jedoch schon zu jener Zeit Sterne mit deutlich höheren Massen bekannt waren, argumentierten die Autoren, die Instabilität führe nicht zur kurzfristigen Zerstörung des Sterns, sondern zu einem stetigen Massenverlust, bis der Stern in den stabilen Bereich

zurückkehrt. Die Autoren konnten zeigen, daß die Instabilität mit größer werdender Masse an Stärke zunimmt. Dieses Ergebnis motivierte zu der Behauptung, daß Sterne, die massereicher als $100 M_{\odot}$ sind, sich selbst zerstören, sobald das nukleare Brennen zündet bzw. die Alter-Null-Hauptreihe erreicht worden ist. Die durchgeführte Rechnung bestand jedoch aus einer linearen Stabilitätsanalyse¹, deren Aussagen nur für kleine Amplituden Gültigkeit besitzen. Vorhersagen über den Betrag des Massenverlustes oder gar das Schicksal massereicher Sterne ($M > 100 M_{\odot}$) kann eine lineare Analyse nicht machen. Somit handelt es sich bei dieser Argumentation um eine rein qualitative Argumentation. Soll das gezeichnete Bild vom stetigen Massenverlust rechnerisch geprüft werden, ist eine hydrodynamische Simulation des schwingenden Sterns notwendig. Nur auf diesem Wege läßt sich die Massenverlustrate quantifizieren. Diesem Problem widmete sich Appenzeller (1970). Er betrachtete einen homogenen $130 M_{\odot}$ -Stern mit sonnenähnlicher Zusammensetzung (Wasserstoffmassenanteil $X = 0.7$, Heliummassenanteil $Y = 0.27$ und $Z = 0.03$ für die restlichen schweren Elemente), der infolge des ϵ -Mechanismus vibrationell instabil ist. Gemäß seiner Untersuchung erreicht ein solcher Stern einen quasi-stationären Zustand mit einer konstanten Massenverlustrate, $\dot{M} = 4 \cdot 10^{-5} M_{\odot} \text{a}^{-1}$, wodurch die beiden offenen Fragen (Größe des Massenverlustes und Schicksal sehr massereicher Sterne) beantwortet und quantifiziert werden konnten. Es muß aber hervorgehoben werden, daß Appenzeller (1970) die nukleare Energieproduktion nur in linearisierter Form (nach Hofmeister et al. 1964) betrachtete und ferner darauf angewiesen war, die Pulsation des Sterns künstlich anzufachen. Neben der simplen Behandlung der Energieproduktion wird vor allem die künstliche Energiezufuhr („artificial energizing“) vom Autor als zumindest bedenklich gewertet.

Gegenstand dieser Arbeit ist das Stabilitätsverhalten massereicher primordialer Sterne (Population-III-Sterne). Insbesondere soll der Frage nachgegangen werden, ab welcher Sternmasse der ϵ -Mechanismus in der Lage ist, die Pulsation anzufachen und welche Auswirkungen dies auf den Stern hat (Massenverlust, obere Massengrenze etc.). Die Gliederung der Arbeit richtet sich nach jener Fragestellung. In Kapitel 2 werden die beiden wichtigsten Instabilitätsmechanismen beschrieben. Kapitel 3 faßt die hydrostatischen Sternentwicklungsgleichungen zusammen, die in dieser Arbeit nicht gelöst werden und daher nur kurz Erwähnung finden. Die Linearisierung der Sternentwicklungsgleichungen stellt die mathematische Grundlage der linearen Stabilitätsanalyse dar und wird in Kapitel 4 durchgeführt. Kapitel 5 faßt die Ergebnisse der linearen Analyse zusammen. Die hierauf folgenden Kapitel (6 – 8) widmen sich der hydrodynamischen Simulation. In Kapitel 6 wird ein System aller notwendigen Gleichungen zur vollständigen Beschreibung einer eindimensionalen Sternpulsation aufgestellt. Die Notwendigkeit der Relaxierung der Hintergrundmodelle und die richtige Wahl der Anfangsbedingung sind Teil wichtiger Vorbetrachtungen, die in Kapitel 7 gemacht werden. Schließlich werden die Ergebnisse der hydrodynamischen Simulation in Kapitel 8 diskutiert. In der Zusammenfassung wird ein Gesamtbild des Stabilitätsverhaltens von Population-III-Sternen gezeichnet.

Dies ist – nach Kenntnis des Autors – die erste Arbeit, welche sich dem Stabilitätsverhalten primordialer Sterne in ganzer Breite widmet. Baraffe et al. (2001) haben

¹Es sei angemerkt, daß nicht der volle Satz der linearen Pulsationsgleichungen gelöst wurde, sondern lediglich eine quasi-adiabatische Analyse durchgeführt wurde. Vgl. Kapitel 4 und 5.

zwar zuvor schon die lineare Stabilität von Population-III-Sternen untersucht, eine hydrodynamische Simulation blieb aber aus. Stattdessen wurde im Stile früherer Arbeiten (Schwarzschild & Härm, 1959) versucht, das weitere Schicksal des Sterns in qualitativer Weise vorherzusagen.

Kapitel 2

Instabilitätsmechanismen

2.1 Ein kurzes historisches Präludium

Während sich die Beschäftigung der Astronomen mit veränderlichen Sternen bis ins späte 19. Jahrhundert eher auf Buchhaltung und phänomenologische Klassifizierung beschränkte, wurde gegen Ende des 19. Jh. auch dieser Zweig der stellaren Astrophysik von dem in der Astronomie einsetzenden Verlangen ergriffen, die Beobachtungen mit Hilfe grundlegender physikalischer Gesetze zu verstehen. Bevor sich Astronomen jedoch der Frage nach den Instabilitätsmechanismen zuwandten, mußte der Kampf um die Lösung eines anderen Problems ausgefochten werden, und zwar ging es um die Frage, ob es sich bei der beobachteten periodischen Helligkeitsvariabilität mancher Sterne um ein intrinsisches Phänomen handele oder ob sie zu den Bedeckungsveränderlichen gehöre. August Ritter, der sich intensiv mit sphärisch symmetrischen Gaskörpern beschäftigte, leitete die Periode-Dichte-Relation schwingender homogener Gaskugeln her (Ritter, 1879). Er war wahrscheinlich der erste, der darauf hinwies, daß es sich bei manchen variablen Sternen um radial pulsierende Gassphären handeln könnte¹. Karl Schwarzschild (1900) fand heraus, daß die Helligkeitsveränderung von η Aql von einer kontinuierlichen Veränderung in der Farbe und des Spektraltyps begleitet ist. Die Einbeziehung dieses Erkenntnis in das Doppelsternmodell bereitete große Schwierigkeiten. Schließlich wurden sogar Mehrfachsysteme herangezogen, um die asymmetrischen Lichtkurven von Cepheiden zu erklären.

Das Konzept der Bedeckungsveränderlichkeit als Ursache der Variabilität war so stark bei den Astronomen verankert, daß Brunt (1913) trotz einer gründlichen Zusammenfassung aller schwerwiegenden Probleme dieses Modells das Konzept als solches nicht in Frage stellte². Plummer (1913), welcher sich zuvor noch intensiv dem Bedeckungsmodell gewidmet hatte, zog 1914 – 35 Jahre nach A. Ritter – die Möglichkeit in Betracht, daß die Variabilität zumindest bei bestimmten Klassen von Objekten intrinsischer

¹August Ritter war von 1870 bis 1899 Professor für Ingenieursmechanik an der RWTH Aachen. Bis auf eine Erwähnung seiner Arbeit in Robert Emdens Monographie „Gaskugeln“, hat Ritters astrophysikalische Arbeit keine nachhaltige Wirkung auf die damaligen Astronomen gehabt.

²Daß die anderen Sterne des postulierten Mehrfachsystems nicht im Spektrum erschienen, hat dem Bedeckungsmodell nicht geschadet.

Natur sein kann, und durch die radiale Pulsation der Sternatmosphäre erzeugt wird. Es ist jedoch H. Shapley anzurechnen, der in seiner bahnbrechenden Veröffentlichung (Shapley, 1914) zeigte, daß im Doppelsternmodell der postulierte Begleitstern innerhalb der sichtbaren Lichtquelle liegen muß. Diese Erkenntnis und die von H. Leavitt & Pickering (1912) gefundene Periode-Leuchtkraft-Relation machten die radiale Pulsation zu einem ernsthaften Erklärungsmodell. Jedoch konnten weder Shapley noch Leavitt einen Mechanismus zur Aufrechterhaltung der Pulsation nennen. Dies war der Grund, warum namhafte Astrophysiker, wie Vogt (1921), Jeans (1925) und Hoyle & Lyttleton (1943), noch lange Zeit das Doppelsternmodell vertraten. Diesem Problem sollte sich später eine ganze Generation von Astrophysikern widmen, angefangen mit Eddington (1918), über Edgar (1933), Cowling (1934) und Ledoux (1941) ohne eine zufriedenstellende Antwort geben zu können. Eddington hat in seinen frühen Arbeiten zwei potentielle Mechanismen hervorgehoben. Beim ersten handelt es sich um die nukleare Energieproduktion als mögliche Quelle der Pulsation. Diese treibende Kraft hat unter der Bezeichnung ϵ -Mechanismus Eingang in die Literatur gefunden. Die zweite Quelle zur Aufrechterhaltung der Pulsation hängt mit der Opazität der Sternmaterie zusammen und wurde von Eddington *Ventil-Mechanismus* genannt. Heute nennt man diese Quelle κ -Mechanismus. Eddington (1941) glaubte durchweg, daß es der ϵ -Mechanismus ist, der die Cepheiden pulsieren läßt. Die wirklichen Vorgänge im Innern der Cepheiden blieben verborgen, bis es schließlich Zhevakin (1953) und Cox (1958) gelang, die zweite Helium-Ionisationszone als treibende Region im Stern zu identifizieren. Nach der gründlichen numerischen Analyse von δ Cepheiden durch Baker & Kippenhahn (1962) war jeder Zweifel ausgeschlossen, daß die Pulsation durch die Modulation des Strahlungsflusses durch das „andersartige“ Verhalten der Opazität – nämlich eine Erhöhung dergleichen bei steigender Temperatur – in der Ionisationszone (Eddingtons Ventil-Mechanismus!) erzeugt und aufrechterhalten wird. In den nächsten Abschnitten soll etwas genauer auf die oben genannten Mechanismen eingegangen werden.

2.2 Der ϵ -Mechanismus

Denkt man sich eine anfänglich in Ruhe befindliche Massenschale des Sterns mit den Zustandsgrößen T_o und P_o adiabatisch komprimiert, erhöhen sich Druck und Temperatur dieser Schale ($T_k > T_o$, $P_k > P_o$). Bei anschließender Expansion der Schale sinken beide Zustandsgrößen unter den anfänglichen Wert, als die Massenschale noch in Ruhe war ($T_e < T_o$, $P_e < P_o$). Die Massenschale vollführt eine harmonische Schwingung und gleicht einem schwingenden Zylinder-Kolben-System (vgl. Kippenhahn 1994). Eine reale Schwingung ist jedoch stets nichtadiabatisch!

Befindet sich die genannte Massenschale im Inneren des Sterns, wo Kernfusion stattfindet, nimmt bei jeder Kompression mit der Temperatur auch die nukleare Energieproduktionsrate zu. In parametrisierter Form lautet sie:

$$\epsilon_{\text{nuc}} \propto \rho^n T^s. \quad (2.1)$$

Dies hat zur Folge, daß die rücktreibende Kraft infolge dieser Energiezufuhr größer ist als im adiabatischen Fall. Die Schwingung wird angefacht. Der ϵ -Mechanismus gleicht daher

der Funktionsweise eines Dieselmotors. Die Temperatursensitivität hängt vom Fusionszyklus ab. Für Hauptreihensterne reicht der Exponent s von 4–17. Es ist unmittelbar einsichtig, daß die Stärke des ϵ -Mechanismus von der Temperatursensitivität abhängt. Der ϵ -Mechanismus wirkt überall, wo nukleares Brennen stattfindet, stets anfachend und ist bestrebt, den Stern in Schwingung zu versetzen.

2.3 Der κ -Mechanismus

Dieser Mechanismus ist ebenfalls mit Hilfe des Modells der adiabatisch schwingenden Massenschale zu verstehen, wenn der Strahlungsfluß mit in Betracht genommen wird. Die Massenschale wird vom Strahlungsfluß im Stern durchsetzt. Ändert sich die Opazität der Sternmaterie während der Pulsation, hat das direkte Folgen für das Schwingungsverhalten des Sterns. Beim κ -Mechanismus spielt daher die Abhängigkeit der Opazität von den thermischen Größen eine entscheidende Rolle. Er kann auf die Ungleichung

$$\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln P}\right)_{\text{ad}} = \kappa_P + \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{\text{ad}} \kappa_T \quad \begin{cases} < 0 & \text{stabil} \\ > 0 & \text{instabil} \end{cases} \quad (2.2)$$

reduziert werden, welche ein lokales Kriterium darstellt. Die logarithmische Ableitung der Temperatur nach dem Druck bei adiabatischer Zustandsänderung wird mit dem Symbol ∇_{ad} abgekürzt. Die Ungleichung (2.2) sagt aus, daß, falls die Opazität einer Massenschale bei einer adiabatischen Kompression zunimmt, die Massenschale einen anfachenden Beitrag zur Gesamtpulsation des Sterns leistet. Physikalisch bewirkt die Zunahme der Opazität ein „Einfangen“ der Strahlung und somit auch ein „Aufheizen“ der Massenschale, wodurch die rücktreibende Kraft schließlich größer wird als es im adiabatischen Limit der Fall wäre. Die Massenschale schwingt somit instabil. Nimmt man eine Kramers-Opazität an mit $\kappa \sim P^\beta T^\alpha$ und den Exponenten $\beta \sim 1$, $\alpha \sim -4.5$, wobei der genaue Wert von der Zusammensetzung abhängt, und geht ferner von einer radiativen Schichtung mit $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$ aus, liefert die Bedingung (2.2) den Wert -0.8 , was einem stabilen Verhalten entspricht. In weiten Teilen des Sterns werden daher infinitesimale Störungen durch den κ -Mechanismus gedämpft und nicht angefacht. Die Situation ändert sich, wenn der Stern Ionisationszonen besitzt. Die Kompressionswärme in einer teilweise ionisierten Region führt nur zu einem geringen Temperaturanstieg, da die Anzahl der Freiheitsgrade beträchtlich vermehrt wird. Hierdurch sinkt der stabilisierende Anteil in (2.2), nämlich $\nabla_{\text{ad}} \kappa_T$. Die Ionisationszone hat dabei auf beide Terme einen Einfluß: Zum einen sinkt ∇_{ad} (≤ 0.22). Zum anderen nimmt der Exponent α der Opazität ab, was einem zunehmenden κ_T entspricht. Bei manchen Variablen (z.B. β Cephei, δ Scuti) nimmt κ_T sogar positive Werte. Man spricht dann von einem „Opazitätsbuckel“ im κ -Gebirge.

Die vorhergehende Diskussion zeigt, daß der κ -Mechanismus – ganz im Gegensatz zum ϵ -Mechanismus – sowohl dämpfend als auch anfachend wirken kann. Ob der Stern als ganzes instabil pulsiert, hängt davon ab, ob die anfachenden Regionen die Dämpfung der restlichen überwinden. Im speziellen Fall des κ -Mechanismus ist die Lage der Ionisationszonen von entscheidender Bedeutung (vgl. Kippenhahn 1994).

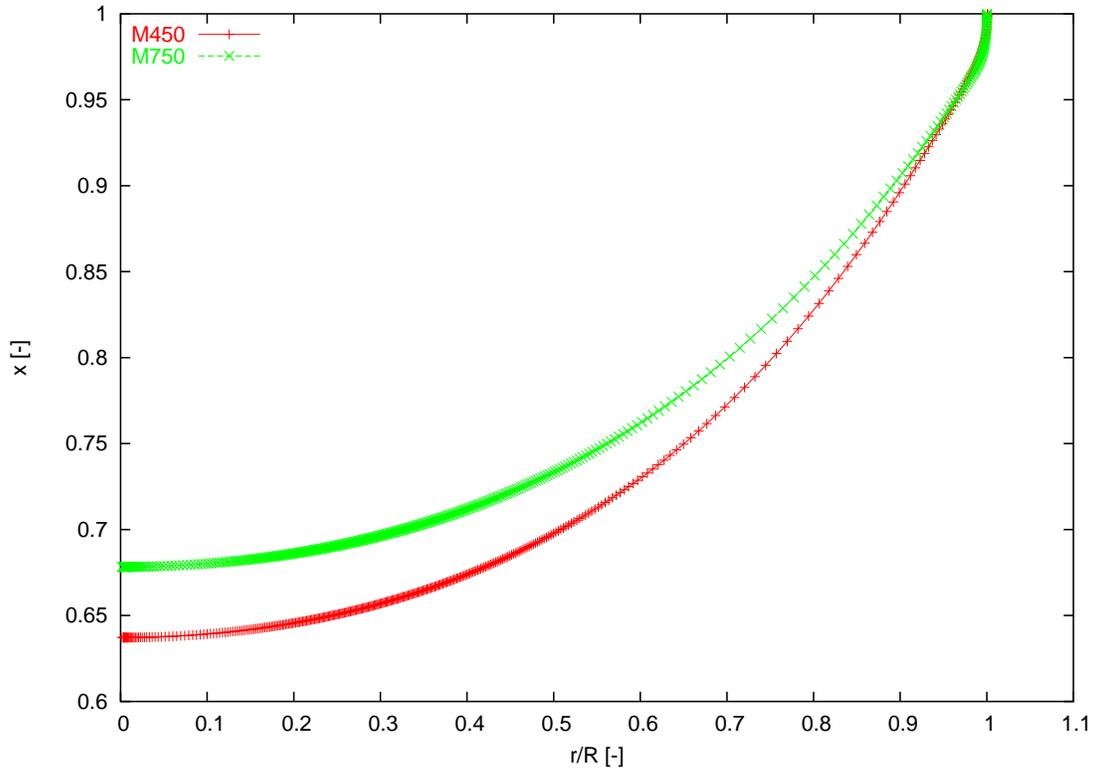


Abbildung 2.1: Relative Auslenkung der Fundamentalmode über dem normierten Radius für zwei Sternmodelle mit $450 M_{\odot}$ und $750 M_{\odot}$ zum Zeitpunkt der maximalen Kontraktion.

2.4 Ledouxs Idee

Die veränderlichen Sterne machen nur einen geringen Anteil aller Sterne aus. Die überwiegende Mehrzahl der Sterne weisen, abgesehen von nichtradialen Pulsationen kleiner Amplitude, wie sie bei unserer Sonne zu beobachten sind, keine starke radiale Pulsation auf. Da aber der ϵ -Mechanismus stets wirkt, muß dieser offensichtlich gedämpft werden. Ledoux (1941) ist der Frage nachgegangen, unter welchen Umständen dieser Instabilitätsmechanismus in der Lage ist, die Dämpfung, welche vornehmlich in der Hülle stattfindet, zu überwinden. Um Ledouxs Gedankengang verfolgen zu können, ist es notwendig, sich die Eigenschwingung eines Stern zu vergegenwärtigen. In Abbildung 2.1 ist die relative Auslenkung $x = \delta r/R$ für zwei Sternmodelle aufgetragen, die in der Fundamentalen schwingen. Die Amplitude wurde willkürlich an der Oberfläche auf den Wert 1 normiert³. Die absolute Auslenkung bzw. Störung nimmt zum Zentrum hin ab, für die in Kapitel 4 und 5 folgende Stabilitätsanalyse ist vor allem der relative Wert von Bedeutung. Ledoux erkannte, daß mit steigendem Strahlungsdruck die Pulsation des Sterns homologen Charakter erhält, das heißt, das Verhältnis von relativer Amplitude im Zentrum zu der an der Oberfläche hat nahezu den Wert eins. Bei einer reinen homologen Pulsation ist der Wert gleich 1 (vgl. Kippenhahn 1994). Der Strahlungsdruck,

³Eine eingehende Diskussion findet sich in Kapitel 4.

welcher hierfür verantwortlich ist, nimmt mit der Masse zu (Ledoux, 1941). Dieses Verhalten der Sternpulsation veranlaßte Ledoux zu folgendem Schluß: Mit zunehmender Sternmasse nähert sich die Pulsation dem homologen Limit. Hierdurch steigt die Anfachung durch den ϵ -Mechanismus, wodurch dieser die Dämpfung schließlich überwinden kann. Es bleibt die Frage zu beantworten, bei welcher Grenzmasse dies der Fall ist.

Betrachtet man vor dem Hintergrund des bisher Gesagten über die Population-III-Sterne, kommt man zu dem Schluß, daß bei diesen Sternen nur der ϵ -Mechanismus wirkt. Dies hat zwei Gründe: Zum einen bildeten sie sich aus Material, welches frei von Metallen ist, da in der Standard-Urknall-Nukleosynthese keine Elemente schwerer als Lithium gebildet werden können (Olive, 2000). Zum anderen sagt die Fragmentationstheorie voraus, daß, bedingt durch die Abwesenheit von schweren Elementen, die Kühlung der kollabierenden Wolke ineffizient ist, wodurch der Übergang vom isothermen zum adiabatischen Kollaps sehr früh eintritt. Dies hat zur Folge, daß die Fragmentation der primordialen H_2 -Molekülwolke stoppt. Es entstehen sehr massereiche Sterne mit hohen Effektivtemperaturen. Ionisationszonen – und somit steile Gradienten in der Opazität – sind höchstens in den äußersten Sternschichten zu finden.

Population-III-Sterne sind somit zur genauen Untersuchung des ϵ -Mechanismus prädestiniert.

Kapitel 3

Sternstruktur

Die Sternmodelle, die in dieser Arbeit hinsichtlich ihrer Stabilität untersucht werden, wurden mit einem Sternentwicklungsprogramm für Population-III-Sterne erstellt, welches C. W. Straka im Rahmen seiner Promotion in Heidelberg entwickelt hat (Straka, 2002). Es handelt sich hierbei um die zeitliche Entwicklung eines isolierten Sterns, der weder rotiert noch ein starkes Magnetfeld besitzt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Sternentwicklungsgleichungen nicht gelöst. Sie werden jedoch in Kapitel 4 mittels eines geeigneten Störansatzes einer Linearisierung unterzogen, um die für die lineare Analyse notwendigen linearen Pulsationsgleichungen (4.5–4.8) zu erhalten. Daher sollen sie hier nur kurz Erwähnung finden. Eine detaillierte Diskussion findet sich bei Kippenhahn (1994).

3.1 Sternentwicklungsgleichungen

Die Sternentwicklungsgleichungen haben die Masse $m := m_r$, die vom Radius r eingeschlossen ist und die Zeit als unabhängige Variable. Die Masse als unabhängige Variable zu wählen, bedeutet physikalisch, daß die zeitliche Entwicklung der Eigenschaften (Druck, Temperatur, innere Energie etc.) einer Massenschale verfolgt wird. Der Ort der betreffenden Massenschale ändert sich mit der Zeit. Dieses Konzept ist in der Hydrodynamik als *Lagrangesche Beschreibungsweise* bekannt. Eine eingehende Diskussion dieser Koordinatenwahl findet sich in Kapitel 6.

Der mechanische Part:

Die Massenkugel $m_r \equiv m$ ist gleich dem Integral der Dichte über das Kugelvolumen. Die Massengleichung drückt diese Beziehung in differentieller Form aus:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}. \quad (3.1)$$

Das 2. Newtonsche Axiom, angewandt auf eine Massenschale, liefert die Impulsgleichung, deren Zeitmaß die dynamische Zeitskala τ_{dyn} ist. Der Trägheitsterm in der Impulsgleichungen wird bei einer Sternentwicklungsrechnung in der Regel vernachlässigt, weil die

Strukturänderung des Sterns sich auf nuklearer thermischer Zeitskala, τ_{nuc} bzw. τ_{KH} , vollziehen und, bis auf Extremzustände in den Endphasen der Sternentwicklung, stets $\tau_{\text{nuc}} \gg \tau_{\text{KH}} \gg \tau_{\text{dyn}}$ gilt. Es wird somit angenommen, daß der Stern sich im quasihydrostatischen Gleichgewicht befindet. In der Pulsationstheorie ist der Trägheitsterm, sofern nicht das säkulare Stabilitätsverhalten von Interesse ist, nicht zu vernachlässigen;

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

Es mag verwundern, daß die Poissongleichung $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ keine Erwähnung findet. Dies liegt daran, daß sie sich im sphärisch symmetrischen Fall auf die Massengleichung (3.1) reduzieren läßt. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, indem man die Poissongleichung einmal integriert und die Definition der Massenvariablen $m := r^2 G^{-1} \partial\Phi/\partial r$ einsetzt. Die Massengleichung, welche trivial anmuten mag, verkörpert nicht nur die Massenerhaltung (im Lagrange-Formalismus) sondern beinhaltet auch die Information, daß es sich bei einem Stern um ein selbstgravitierendes System handelt.

Der thermische Part¹:

Die erste thermische Gleichung des Sternaufbaus stellt die Energiegleichung dar. Sie stellt die Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf eine Massenschale dar, was einer Energiebilanzierung entspricht. Die nukleare Energieproduktion ϵ_{nuc} ist stets eine Wärmequelle, die Neutrinoverluste ϵ_ν wirken stets als Wärmesenke. Die letzten beiden Terme auf der rechten Seite geben an, wie sich der Wärmegehalt der Massenschale bei Kompression bzw. Expansion ändert; daher können sie als Wärmesenke oder -quelle fungieren. Die Summe der rechten Seite bestimmt den Gradienten der Leuchtkraft²;

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Die dimensionslose Temperaturkompressibilität δ ist in Kapitel 4 definiert. Die zweite thermische Gleichung wird Energietransportgleichung genannt. Die Leuchtkraft setzt sich aus einem radiativen und einem konvektiven Anteil zusammen, $L = L_{\text{rad}} + L_{\text{konv}}$. Je nachdem wie groß die jeweiligen Anteile der Leuchtkraft sind, stellt sich ein bestimmter Temperaturgradient ein:

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla. \quad (3.4)$$

Für den Fall, daß der gesamte Energietransport durch Strahlung erfolgt, lautet ∇ :

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa P l}{m T^4}. \quad (3.5)$$

Ist die betreffende Region im Stern konvektiv instabil, muß ∇ mittels eines Konvektionsmodells bestimmt werden.

¹Das nukleare Netzwerk ist nicht Teil der linearen Analyse und wird aus diesem Grund hier nicht besprochen.

²In der Wärmelehre ist es üblich von der Divergenz des Wärmestroms \vec{F} zu sprechen. Dieser steht mit dem Gradient der Leuchtkraft in folgender Weise in Zusammenhang: $\frac{1}{\rho} \text{div } \vec{F} = \frac{\partial l}{\partial m}$

3.2 Zustandsgleichung

Die Sternentwicklungsgleichungen sind ohne die Zustandsgleichung, welche die thermodynamischen Größen miteinander verknüpft, kein geschlossenes System. Bei optisch dicker Sternmaterie sind Gas und Strahlungsfeld eng gekoppelt. Aus diesem Grund kann die Sternmaterie als ein Komposit aus einem idealen Teilchengas und einem Photonengas angesehen werden. Der Gesamtdruck setzt sich aus einem Gas- und einem Strahlungsanteil zusammen (vgl. auch die Ausführungen in Kapitel 6):

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4. \quad (3.6)$$

Hierbei sind \mathcal{R} die Gaskonstante, μ das Molekulargewicht und a die Strahlungskonstante. Letzteres hängt mit der Lichtgeschwindigkeit c und der Stefan-Boltzmann-Konstante σ zusammen, $a = 4\pi\sigma/c$. Die spezifische innere Energie, E , setzt sich in gleicher Weise zusammen. Sie ist die Summe aus der inneren Energie des Gases, der Strahlungsenergie und der Ionisierungsenergie:

$$E = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mu} T + \frac{a T^4}{\rho} + E_{\text{ion}}. \quad (3.7)$$

Es sollte angemerkt werden, daß der diskutierte Satz Gleichungen nur im statischen Diffusionslimes Gültigkeit besitzt. Dieses ist dann gegeben, wenn die Entwicklungszeit des Sterns groß gegenüber der mittleren Freilaufzeit des Photons ist $\tau_{\text{entw}} \gg l_{\text{ph}}/c$ (Straka, 2002). Ist dies nicht gewährleistet, dürfen Strahlungsenergie und Strahlungsimpuls nicht in dieser Weise (über den Druck und die innere Energie) in die Impuls- und Energiegleichung einbezogen werden. Eine separate Bilanzierung ist dann erforderlich.

3.3 Materialfunktionen

Als Materialfunktionen tauchen in den Sternentwicklungsgleichungen die Opazität, κ , das mittlere Molekulargewicht, μ , und die nukleare Energieproduktion, ϵ_{nuc} , auf. Jede dieser Größen ist durch zwei Zustandsvariablen und die chemische Zusammensetzung eindeutig bestimmt. Das mittlere Molekulargewicht, wie auch die Ionisierungsenergie werden mittels der Saha-Gleichung berechnet. Zur Bestimmung der nuklearen Energieproduktion $\epsilon_{\text{nuc}}(\rho, T, X_i)$ muß ein passendes Netzwerk der thermonuklearen Reaktionen simultan zu den Sternentwicklungsgleichungen gelöst werden. Das Netzwerk von C.W. Straka beinhaltet alle für die Hauptreihe relevanten Reaktionen. Diese sind im wesentlichen die pp-Kette, der 3α -Prozeß und der CNO-Zyklus. Die Opazität steht in tabellarischer Form zu Verfügung und stammt aus dem „opacity project“ von Seaton et al. (1994).

Kapitel 4

Lineare Stabilitätsanalyse

Aber nicht jede Lösung der Bewegungsgleichungen, selbst wenn sie exakt ist, kann in der Natur verwirklicht werden. Die Strömungen, die in der Natur verwirklicht sind, müssen nicht nur die hydrodynamischen Gleichungen erfüllen, sondern sie müssen auch noch stabil sein.

Landau & Lifschitz (1966)

Wechselwirkende Prozesse sind häufig in Natur und Technik anzutreffen. Sie bilden komplexe Systeme, die entsprechend ihrem Ursprung von vielfältiger Art sein können. Die mathematische Modellierung dieser komplexen Systeme führt in der Regel auf partielle Differentialgleichungen. Die zugrundeliegenden Gleichungen bergen eine Mannigfaltigkeit an Lösungen, wobei auch solche darunter zu finden sind, die in der Natur keine bzw. keine dauerhafte Entsprechung finden. Während das vorwiegende Interesse der Mathematiker darin liegt, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen, sind angewandte Forscher vor allem an der Stabilität bzw. der Realisierbarkeit der Lösung interessiert. Die Stabilitätsuntersuchung gibt Aufschluß darüber, ob das System in der Natur unter den gegebenen Randbedingungen vorkommt oder nicht. Hierbei wird zwischen linearer und nichtlinearer Stabilitätsuntersuchung unterschieden. Anhand der linearen Analyse kann festgestellt werden, ob infinitesimale Störungen, die in der Natur stets vorhanden sind, angefacht werden, und hierdurch das System schließlich aus dem Gleichgewicht bringen. Falls das System linear instabil ist, ist eine nichtlineare Untersuchung unumgänglich, wenn die zeitliche Entwicklung der Instabilität in Erfahrung gebracht werden soll. Es ist zu beachten, daß das Stabilitätsverhalten eines komplexen Systems durch eine lineare Untersuchung nur teilweise charakterisiert wird (Drazin, 1981)¹.

In diesem Kapitel sollen die linearisierten Gleichungen der Sternentwicklung hergeleitet werden. Anschließend wird aus ihnen die wichtige adiabatische Approximation gewonnen. Der Lösungsweg der approximierten Gleichungen soll eingehend in Abschnitt 4.3 diskutiert werden, da eine Verallgemeinerung desselben den Lösungsalgorithmus des kompletten Satzes der linearisierten Gleichungen ergibt. In Abschnitt 4.4 wird eine alternative Methode (Quasi-Adiabasis) vorgestellt mit deren Hilfe eine Stabilitätsaussage gemacht werden kann.

¹An dieser Stelle sei an die Hagen-Poiseuille-Strömung erinnert, welche linear stabil ist, jedoch im Experiment bei Reynoldszahlen von maximal 10^4 turbulent wird.

4.1 Die linearen Pulsationsgleichungen

Um eine lineare Stabilitätsanalyse durchführen zu können, muß eine stationäre Lösung der Erhaltungsgleichungen vorliegen. Die Sternmodelle, deren Stabilität geprüft werden soll, sind nicht im strengen Sinne stationär, weil sie sich auf thermischer Zeitskala entwickeln. Wie in Kapitel 3 im Zusammenhang mit der Impulsgleichung diskutiert, wurde bei den Sternentwicklungsrechnungen wegen des Zeitskalenunterschiedes zwischen dynamischen und thermischen Prozessen ($\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{KH}}$) von einem quasihydrostatischen Stern ausgegangen. Da das Zeitmaß der Sternpulsation ebenfalls die dynamische Zeitskala ist, ist die Stationarität des Hintergrundmodells in diesem Zeitfenster erfüllt². Die zu untersuchenden Sternmodelle werden im weiteren Verlauf der Arbeit schlicht als Hintergrundmodelle bezeichnet. Alle Größen des Hintergrundmodells werden mit einem tiefergestellten Index „0“ gekennzeichnet. Die Hintergrundmodelle entstammen einer eindimensionalen Sternentwicklungsrechnung und sind daher sphärisch symmetrisch. In der linearen Analyse wird die diskrete konzentrische Aufteilung der Sternmodelle übernommen. Der Stern besteht somit – numerisch betrachtet – aus aneinander liegenden Kugel- bzw. Massenschalen.

Die Linearisierung der Sternentwicklungsgleichungen folgt dem Lagrangeschen Störansatz von Cox (1979),

$$\Phi(m, t) = \Phi_0(m) + \Phi'(m, t). \quad (4.1)$$

Φ_0 stellt eine beliebige abhängige Variable des Hintergrundmodells und Φ' die zu Φ_0 überlagerte infinitesimale Störung. Der infinitesimale Charakter der Störung;

$$\Phi'/\Phi_0 \ll 1, \quad (4.2)$$

ermöglicht es, Terme höherer Ordnung zu vernachlässigen, so daß sich schließlich ein lineares System ergibt. Das Wesentliche am Lagrangeschen Störansatz ist, daß die Änderung der Größe Φ einer bestimmten *Massenschale* und nicht an einem bestimmten *Ort* (Eulersche Betrachtungsweise) berechnet wird. Daher sind die Zeit t und die von einer Kugelschale eingeschlossenen Masse m die unabhängigen Variablen.

Die Störung ist von willkürlicher Art. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wurde in dieser Arbeit für die Störung ein *Normalmoden-Ansatz* gewählt:

$$\Phi'(m, t) = \delta\Phi(m)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (4.3)$$

Dies ist zulässig, da eine beliebige infinitesimale Störung als unendliche Summe von Eigenmoden geschrieben werden kann. Bei der Größe $\delta\Phi(m)$ handelt es sich um die Eigenfunktion, und ω gibt die Eigenfrequenz der Mode an. Die Amplitude der Eigenfunktion wird in der Regel auf den Oberflächenwert normiert, $\delta\Phi(m) = \phi(m)\Phi_0(m = M)$. Die allgemeine Form des Störansatzes lautet demnach:

$$\Phi(m, t) = \Phi_0(1 + \phi(m)e^{i\omega t}). \quad (4.4)$$

²Chandrasekhar spricht in diesem Zusammenhang von „slowly varying in time“ (Chandrasekhar, 1961)

Setzt man diesen Störansatz für alle vorkommenden abhängigen Variablen,

$$\begin{aligned} r(m, t) &= r_0(1 + x(m)e^{i\omega t}), \\ P(m, t) &= P_0(1 + p(m)e^{i\omega t}), \\ l(m, t) &= l_0(1 + \lambda(m)e^{i\omega t}), \\ T(m, t) &= T_0(1 + \theta(m)e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

in die Sternentwicklungs-, Zustands- sowie Materialgleichungen, welche in Kapitel 3 vorgestellt wurden ein, ergeben sich die linearen Pulsationsgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r_0^3 \rho_0} (-3x - \alpha p - \delta \vartheta), \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial m} = -\frac{1}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial m} \left[p + \left(4 + \frac{\omega^2 r_0^3}{Gm} \right) x \right], \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial m} = \frac{\epsilon_0}{l_0} (\epsilon_P p + \epsilon_T \vartheta - \lambda) - \frac{i\omega P_0 \delta}{l_0 \rho_0} \left(\frac{\vartheta}{\nabla_{\text{ad}}} - p \right), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r_0^4 P_0} \nabla_{\text{rad}} [\kappa_P p + (\kappa_T - 4)\vartheta + \lambda - 4x]. \quad (4.8)$$

Terme höherer Ordnung in den Störgrößen wurden vernachlässigt. Berücksichtigt wurde, daß das Hintergrundmodell $(r_0(m), P_0(m), l_0(m), T_0(m))$ eine Lösung des hydrostatischen Teils der Gleichungen ist. Die Abkürzungen haben die folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\partial \ln \rho_0}{\partial \ln P_0} \right)_{T_0} & \delta &= - \left(\frac{\partial \ln \rho_0}{\partial \ln T_0} \right)_{P_0} \\ \nabla_{\text{ad}} &= \left. \frac{d \ln T_0}{d \ln P_0} \right|_{\text{ad}} & \nabla_{\text{rad}} &= \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa_0 l_0 P_0}{m T_0^4} \\ \epsilon_P &= \left(\frac{\partial \ln \epsilon_0}{\partial \ln P_0} \right)_{T_0} & \epsilon_T &= \left(\frac{\partial \ln \epsilon_0}{\partial \ln T_0} \right)_{P_0} \\ \kappa_P &= \left(\frac{\partial \ln \kappa_0}{\partial \ln P_0} \right)_{T_0} & \kappa_T &= \left(\frac{\partial \ln \kappa_0}{\partial \ln T_0} \right)_{P_0}. \end{aligned}$$

4.1.1 Randbedingungen

Zentrum

Fordert man, daß die Lösung der Pulsationsgleichungen im Zentrum regulär bleibt, ergeben sich die Randbedingungen für das Zentrum in strikter Weise:

$$3x + \alpha p + \delta \vartheta = 0 \quad m = 0, \quad (4.9)$$

$$\epsilon_0 (\epsilon_P p + \epsilon_T \vartheta - \lambda) - i\omega \frac{P_0 \delta}{\rho_0} \left(\frac{\vartheta}{\nabla_{\text{ad}}} - p \right) = 0 \quad m = 0. \quad (4.10)$$

Die erste Randbedingung (4.9) wird *innere mechanische* und die zweite (4.10) *innere thermische* Randbedingung genannt. Technisch ist $m = 0$ nur schwerlich und zudem nicht

notwendigerweise zu realisieren. Daher besteht das Zentrum des Sterns aus einer homogenen Kugel. Das Verhältnis der Zentralkugelmasse zur Gesamtmasse des Sterns beträgt lediglich 10^{-7} , so daß die aufgestellten Randbedingungen mit genügender Genauigkeit verwendet werden können.

Oberfläche

Die Bestimmung der Randbedingungen an der Oberfläche ist nicht ohne Annahmen über die Atmosphäre des Sterns möglich. Es ist üblich, die Einhaltung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes an der Oberfläche zu verlangen. Die linearisierte Form lautet:

$$2x - l + 4t = 0. \quad (4.11)$$

Diese Beziehung wird *äußere thermische* Randbedingung genannt. Es mag kritisiert werden, daß das Stefan-Boltzmann-Gesetz nur in der Photosphäre gilt, wo – von innen kommend – die optische Tiefe auf $\tau = 2/3$ abgefallen ist und ab da die Strahlung frei entweichen kann. Während der Pulsation ist die $(\tau = 2/3)$ -„Fläche“ nicht ständig in ein und derselben Massenschale erfüllt, wodurch die Bewegung der Fläche $\tau = 2/3$ einen Schlupf gegen die Pulsation hat. Dieser Effekt spielt jedoch wegen der vorausgesetzten infinitesimalen Natur der Störung keine Rolle.

Die letzte benötigte Randbedingung hängt mehr noch als die zuvor erwähnte Gl. (4.11) von den Annahmen über die Atmosphäre ab, da die Randbedingung des Sternmodells nicht mit den physikalischen Randbedingungen des Sterns übereinstimmt. Somit ergeben sich je nach Annahmen über die Sternatmosphäre vier mögliche Randbedingungen:

$$p = 0, \quad (4.12)$$

$$p + 4x = 0, \quad (4.13)$$

$$p + (4 + 3\sigma^2)x = 0, \quad (4.14)$$

$$\alpha p - \delta\theta = 0. \quad (4.15)$$

Ausgangsgleichung der ersten drei Bedingungen ist der Impulssatz, angewandt auf die Sternatmosphäre. Unter bestimmten Annahmen ergeben sich vereinfachte Formen der resultierenden Bewegungsgleichung, deren Linearisierung die oben genannten Bedingungen ergeben. Praktisch gesehen, denkt man sich die Sternatmosphäre der Masse m_a in einer dünnen Schicht komprimiert, die selbst zu keinen zusätzlichen inneren Schwingungen in der Lage sein soll. Die Bewegungsgleichung dieser dünnen Massenschale lautet dann:

$$m_a \frac{d^2 R}{dt^2} = 4\pi R^2 P - \frac{GMm_a}{R^2}. \quad (4.16)$$

Das Hintergrundmodell erfüllt die hydrostatische Grundgleichung:

$$4\pi R_0^2 P_0 = \frac{GMm_a}{R_0^2}.$$

P_0 ist hier der Außendruck des Sterns, der diesen gegen die Schwerkraft der Atmosphäre unterstützt.

Zu Bedingung (4.12)

Das Gewicht der Atmosphäre soll sich während der Pulsation nicht ändern. Der Außendruck bleibt dann ebenfalls konstant, was einer verschwindenden Lagrangeschen Druckstörung entspricht;

$$\begin{aligned}\frac{GMm_a}{R^2} &= \frac{GMm_a}{R_0^2} = \text{konst.} \\ P &= P_0, \\ p &= \frac{\delta P}{P_0} = 0.\end{aligned}$$

Zu Bedingung (4.13)

Die Atmosphäre schwingt mit dem Stern mit, sie soll jedoch keine Trägheit besitzen. Man spricht von einem *instantanen hydrostatischen Gleichgewicht*. Formal heißt das, daß der Trägheitsterm in Gleichung (4.16) entfällt. Die Linearisierung liefert schließlich die zweite mögliche Randbedingung;

$$\begin{aligned}4\pi R^2 P &= \frac{GMm_a}{R^2}, \\ p + 4x &= 0.\end{aligned}$$

Zu Bedingung (4.14)

Die Atmosphäre darf Trägheit besitzen. Die vollständige Bewegungsgleichung der Atmosphäre (4.16) wird linearisiert:

$$\begin{aligned}m_a \frac{d^2 R}{dt^2} &= 4\pi R^2 P - \frac{GMm_a}{R^2}, \\ p + (4 + 3\sigma^2) x &= 0.\end{aligned}$$

Zu Bedingung (4.15)

Die letzte Bedingung (4.15) entspricht einer verschwindenden Lagrangeschen Dichtestörung und wurde von Baker & Kippenhahn (1965) zur Modellierung der Pulsation von δ Cepheiden verwendet. Gemeinhin wird in der Literatur (Gautschy & Glatzel, 1990) die Meinung vertreten, wonach die unbefriedigende Mehrdeutigkeit in der äußeren mechanischen Randbedingung nur einen geringen Einfluß auf das Resultat der linearen Analyse hat. Daß dies nicht immer der Fall ist, wird in Kapitel 5 (S. 44) behandelt.

Die Spezifizierung der Randbedingungen macht das Differentialgleichungssystem zu einem wohldefinierten *Randeigenwertproblem* vierter Ordnung mit ω als Eigenwert³. Zu beachten ist die Komplexwertigkeit des Systems. Approximationen und Lösungswege werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

³Die Begriffe „Eigenwert“ und „Eigenfrequenz“ werden hier synonym gebraucht.

4.1.2 Stabilität

Als Lösung des Differentialgleichungssystem erhält man zu jeder komplexwertigen Eigenfrequenz ($\omega = \omega_r + i\omega_i$) vier komplexwertige Eigenfunktionen (x, p, λ, ϑ). Diese Menge, bestehend aus einer Eigenfrequenz und vier Eigenfunktionen, wird im weiteren als Mode bezeichnet. Über die Stabilität einer Mode gibt allein das Vorzeichen des Imaginärteils der Eigenfrequenz Auskunft, $\text{sign}\{\text{Im}(\omega)\}$. Sind alle Moden bis auf eine instabil, ist das gesamte System instabil! Nach dem Separationsansatz (4.3) ist eine Mode

stabil	falls	$\omega_i > 0$
indifferent	falls	$\omega_i = 0$
instabil	falls	$\omega_i < 0$.

Ist der Realteil der Eigenfrequenz gleich null und handelt es sich um eine instabile Mode, so entfernt sich das gestörte Modell exponentiell von der stationären Lösung. Ist hingegen bei einer instabilen Mode der Realteil der Eigenfrequenz ungleich null, dann beginnt das System mit wachsender Amplitude zu schwingen. Diesen Fall bezeichnet Eddington (1926) als „overstable“. In der deutschen Literatur spricht man von einem vibrationell instabilen oder einem pulsationsinstabilen Modell.

Der Imaginärteil macht nicht nur eine Aussage über die Stabilität eines Modells, sondern auch über die Zeitskala, auf der sich Anregung oder Dämpfung vollziehen. Diese Zeitskala wird Anwachs- bzw. Dämpfungszeit genannt. Sie folgt aus der bekannten Beziehung:

$$\tau_e = \frac{2\pi}{|\omega_i|}. \quad (4.17)$$

Die Anwachszeit (Dämpfungszeit) – im Englischen treffend *e-folding time* genannt – gibt die Zeit an, die nötig ist, damit die Amplitude einer Schwingung auf das e-fache des Ausgangswertes ansteigt (abfällt).

4.1.3 Schwingungsperiode

Die Pulsationsperiode ist durch den Realteil der komplexwertigen Eigenfrequenz gegeben und berechnet sich gemäß

$$\Pi = \frac{2\pi}{\omega_r}. \quad (4.18)$$

4.2 Das Arbeitsintegral

Die Ermittlung des Imaginärteil der Eigenfrequenz ω_i einer Schwingungsmode reicht vollkommen aus, um das globale Stabilitätsverhalten des Sterns zu charakterisieren. Möchte man zusätzlich wissen, wo die treibenden bzw. dämpfenden Regionen lokalisiert sind, ist die differentielle Form des Arbeitsintegrals ein unersetzliches Hilfsmittel. Betrachtet wird ein infinitesimales Volumen ΔV mit der Masse Δm , das zwischen zwei konzentrischen Sphären eingeschlossen ist. Die Arbeit, die diese Massenschale an ihre Umgebung verrichtet oder erfährt, soll im folgenden quantifiziert werden. Ausgehend von der Definition der

Volumenänderungsarbeit $dW = PdV$, erhält man folgenden Zusammenhang:

$$\Delta W = \oint P_r \Delta \dot{V}_r dt, \quad (4.19)$$

mit

$$\begin{aligned} P &= P_0 (1 + pe^{i\omega t}) & r &= r_0 (1 + xe^{i\omega t}) \\ \dot{V} &= 4\pi r_0^2 \dot{r} & \dot{r} &= i\omega r_0 x e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Integration und anschließende algebraische Manipulation (Baker & Kippenhahn, 1962) von Gleichung (4.19) liefern die differentielle Form des Arbeitsintegrals:

$$\frac{dW}{d \ln P_0} = W' = 4\pi^2 P_0 r_0^3 C_w \operatorname{Im}(p^* d). \quad (4.21)$$

Der ortsabhängige Koeffizient C_w faßt Sternstrukturgrößen zusammen, und die Dichte wurde in gleicher Weise (4.4), wie die anderen unabhängigen Variablen linearisiert,

$$C_w = \frac{P_0 r_0}{Gm \rho_0}, \quad \rho = \rho_0 (1 + de^{i\omega t}).$$

Der Index „r“ bezeichnet den Realteil, das hochgestellte Sternchen (*) den konjugiert komplexen Wert der betreffenden Größe. Ist W' in einer Massenschale negativ, wirkt sie dämpfend auf die Gesamtpulsation. Ist W' hingegen positiv, verrichtet sie Arbeit an den angrenzenden Massenschalen und wirkt anfachend auf die Gesamtpulsation. In Analogie zu einer Wärmekraftmaschine (Baehr, 1996) läßt sich sagen, daß die Massenschale im ersten Fall einen linksläufigen Kreislauf (dämpfend) im P - V -Diagramm beschreibt, im zweiten Fall einen rechtsläufigen (anfachend).

Nach Gleichung (4.21) ist eine Phasenverschiebung ($\phi_v \neq 2n\pi, n = 1, 2, \dots$) zwischen der Druckstörung und der Dichtestörung notwendig, damit eine Massenschale dämpfend oder anregend wirken kann:

$$\operatorname{Im}(p^* d) = \operatorname{Im}(\sqrt{p^2 d^2} e^{i(-\phi_p + \phi_d)}), \quad (4.22)$$

$$= \sqrt{p^2 d^2} \sin(\phi_v). \quad (4.23)$$

Man sieht ferner, daß eine Region die Pulsation treibt, falls die Phasenverschiebung größer null $\phi_v > 0$ ist. Das heißt, daß der maximale Druck in einer Massenschale der maximalen Kompression nachläuft $\phi_d > \phi_p$. Ob die anfachenden Regionen die Dämpfung des restlichen Sterns überwinden können, zeigt sich, wenn Gleichung (4.21) über den gesamten Stern integriert wird:

$$W = \int_{\text{Stern}} W' d \ln P_0 \begin{cases} < 0 & \text{stabil} \\ > 0 & \text{instabil} \end{cases} \quad (4.24)$$

Das hier vorgestellte Arbeitsdifferential wird in Abschnitt 4.5 und in Kapitel 5.2.3 noch einmal aufgegriffen.

4.3 Die adiabatische Approximation

Eine Vereinfachung der Pulsationsgleichungen (4.5)–(4.8) ist möglich. Hierbei nimmt man an, daß die Zustandsänderung während der Pulsation in jeder Massenschale adiabatisch verläuft:

$$P = C\rho^{\gamma_{\text{ad}}}. \quad (4.25)$$

Der Adiabatenexponent γ_{ad} ist eine Materialgröße, die aus dem Verhältnis von isobarer Wärmekapazität c_P zu isochorer Wärmekapazität c_V gebildet wird. Der Störansatz (4.4) liefert dann die linearisierte Form der Adiabatenbeziehung:

$$p = \gamma_{\text{ad}}d. \quad (4.26)$$

Die Vereinfachung besteht darin, daß die mechanischen Gleichungen (Massengleichung (4.5) und Impulsgleichung (4.6)) vom thermoenergetischen Teil (Energiegleichung (4.7) und Energietransportgleichung (4.8)) der Pulsationsgleichungen entkoppeln. Durch die Hinzunahme der linearisierten Adiabatenbeziehung ergeben sich schließlich zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten p (Druckstörung) und x (Ortsverschiebung):

$$\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r_0^3 \rho_0} \left(-3x - \frac{p}{\gamma_{\text{ad}}} \right), \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial m} = -\frac{1}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial m} \left[p + \left(4 + \frac{\omega^2 r_0^3}{Gm} \right) x \right]. \quad (4.28)$$

Die mechanischen Gleichungen werden in der Regel zu einer Gleichung zweiter Ordnung in einer Variablen zusammengefaßt. Hierzu eliminiert man die Druckstörung aus der Impulsgleichung (4.28), indem die Massengleichung (4.27) nach p aufgelöst wird. Es ergibt sich schließlich Gleichung (4.29), die lineare adiabatische Wellengleichung genannt wird. In der Literatur ist das Akronym *LAWE* (=linear adiabatic wave equation) geläufig;

$$(r_0^4 P_0 x')' + \frac{r_0^4 \rho_0}{\gamma_{\text{ad}}} \left[\omega^2 + \left(4 - 3\gamma_{\text{ad}} \frac{g_0}{r_0} \right) \right] x = 0. \quad (4.29)$$

Das Hochkomma ($'$) bezeichnet Ableitungen nach dem Radius ($\partial/\partial r_0$). Diese Ableitung steht nicht im Widerspruch zum Lagrangeschen Formalismus. Es gilt nämlich die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial r_0} = 4\pi r_0^2 \rho_0 \frac{\partial}{\partial m}. \quad (4.30)$$

Eine Massenschale ist demnach durch den Radius zum Zeitpunkt $t = t_0$ gekennzeichnet, obwohl sich ihr Radius im Laufe der Zeit infinitesimal ändern kann. Es gilt, $r = r(r_0(m, t_0), t)$. Die lineare adiabatische Wellengleichung stellt wie der volle Satz der Pulsationsgleichungen ein Randeigenwertproblem dar. Im Unterschied zum vollen Satz besitzt sie jedoch besondere Eigenschaften. Sie gehört zur Klasse der Sturm-Liouville-Probleme. Für diese gilt (Kippenhahn, 1994):

- Es gibt nur abzählbar unendlich viele Eigenwerte.
- Die Eigenwerte ω_n^2 sind reell, haben keinen Häufungspunkt in \mathbb{R} und können daher in aufsteigender Folge geordnet werden; $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 \dots$ mit $\omega_n^2 \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

- Die Eigenfunktion x_0 des kleinsten Eigenwertes hat keinen Knoten im Intervall $0 < r < R$ (Fundamentalmode bzw. Fundamentale), während Eigenfunktionen mit $n > 0$ genau n Knoten besitzen (n -ter Oberton).
- Das System der normalisierten Eigenfunktionen ist vollständig und erfüllt die Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^R r_0^4 \rho_0 x_m x_n dr_0 = \delta_{mn} \quad m \neq n.$$

Der letzte Punkt ist äquivalent zu der Aussage, daß zwei Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig sind. Eine mathematisch ausführliche Diskussion des Sturm-Liouville-Problems findet sich bei Meyberg (2001).

Dank der genannten Eigenschaften ist die Identität der gefundenen Mode sichergestellt. Ferner ist von gewichtiger Bedeutung, daß aufgrund des Ordnungsschemas stets bekannt ist, ob sich zwischen zwei gefundenen Moden eine dritte verbirgt, welche bei der Suche übergangen wurde. Die lineare adiabatische Wellengleichung (4.29) besitzt nur für Sternmodelle konstanter Dichte ($\nabla\rho \equiv 0$) eine analytische Lösung. Obwohl dieser Fall unrealistisch ist, kann er sehr hilfreich sein, Tendenzen auch nichtadiabatisch pulsierender Sterne zu studieren. Für die Eigenfrequenz der Fundamentalen des homogenen Sterns folgt nach Cox & Giuli (1968):

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi}{3} G \rho_0 (3\gamma_{\text{ad}} - 4). \quad (4.31)$$

Man erkennt hier zweierlei: Zum einen die bekannte Periode-Dichte-Beziehung für pulsierende Sterne,

$$P = \frac{2\pi}{\omega_0} \propto \frac{1}{\sqrt{G\rho_0}}, \quad (4.32)$$

zum anderen ist zu sehen, daß die Frequenz mit kleiner werdendem γ_{ad} abnimmt und für den Fall $\gamma_{\text{ad}} < 4/3$ sogar negativ wird. Der Druckgradient ist dann nicht mehr in der Lage die Gravitationskraft zu kompensieren.

Schwarzschild (1941) hat die lineare adiabatische Wellengleichung für ein Hintergrundmodell mit polytroper Schichtung – diese sog. Polytropen werden in Abschnitt 4.7 vorgestellt – mit einem Schießverfahren gelöst. Seine Arbeit war Ausgangspunkt für die Methodenentwicklung zur Lösung der vollständigen Pulsationsgleichungen (4.5)–(4.8).

4.4 Matrixverfahren

Gängige Programme (Baker & Kippenhahn, 1962) zur nichtadiabatischen linearen Stabilitätsanalyse benötigen einen Schätzwert für den vollen Satz Gleichungen, der der linearen adiabatischen Analyse (Lösung der LAWE) entnommen wird. Dieser Schätzwert

stellt eine Menge, bestehend aus Eigenfrequenz und Eigenfunktionen, dar. Wenn der Schätzwert – wegen nichtadiabatischer Effekte – zu sehr von der realen Mode abweicht, liegt er nicht mehr im Konvergenzradius der gesuchten Mode, und der Algorithmus findet keine Lösung. Ferner müssen nicht alle realen (d.h. nichtadiabatischen) Moden ein adiabatisches Pendant besitzen, so daß für diese kein Schätzwert vorliegt. Die ersten Schwierigkeiten mit dieser vereinfachenden Vorgehensweise traten bei der Untersuchung von wasserstoffarmen Kohlenstoff-Sternen auf (Saio et al., 1984). Es war daher ein Teilbestreben der vorliegenden Arbeit, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem sich die Pulsationsgleichungen ohne Vorinformation lösen lassen, und so die oben geschilderten immanenten Defizite anderer Verfahren zu vermeiden.

Das *Schießverfahren* zur Lösung der LAWE läßt sich zur Lösung der kompletten Pulsationsgleichungen nicht in *natürlicher* Weise erweitern. Eine nach demselben Prinzip funktionierende Verfahren ist die sog. Riccati-Methode, die von Scott (1973) eingeführt und von Davey (1977) erweitert wurde. W. Glatzel und A. Gautschy wendeten diese Methode erstmals in der stellaren Stabilitätsanalyse an (Gautschy & Glatzel, 1990). Die grundlegende Idee der Riccati-Methode besteht darin ein lineares gewöhnliches Gleichungssystem erster Ordnung, welches ein Randwertproblem beschreibt, in ein nichtlineares – numerisch stabiles – Anfangswertproblem umzuwandeln.

Eine weitere Möglichkeit, den vollen Satz der nichtadiabatischen Pulsationsgleichungen ohne Schätzwert zu lösen, welche in dieser Arbeit Verwendung findet, stellt das *Matrixverfahren* dar⁴. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß es formal keinen Unterschied macht, ob es auf die adiabatische Approximation oder auf den realistischen, nichtadiabatischen Fall angewandt wird. Daher soll das Matrixverfahren zunächst für die lineare adiabatische Analyse vorgestellt werden. Hierzu geht man nicht von der adiabatischen Wellengleichung (4.29) aus, sondern von den Gleichungen (4.27) und (4.28), die ein homogenes Differentialgleichungssystem bilden:

$$\frac{\partial}{\partial \ln P_0} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 & \frac{C_1}{\gamma_{\text{ad}}} \\ -4 + C_2\omega^2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Anstelle der Masse wurde – dem üblichen Vorgehen in der Literatur folgend – der Druck des Hintergrundmodells als Koordinate gewählt. Die Transformation von Massekoordinate zu Druckkoordinate geschieht mit Hilfe der hydrostatischen Grundgleichung,

$$\frac{d}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi P_0 r_0^4} \frac{d}{d \ln P_0}. \quad (4.34)$$

Für die Verwendung des Druckes als Koordinate gilt die gleiche Argumentation wie für die des Radius (S. 22). Die Koeffizienten C_i sind durch das Hintergrundmodell gegeben und lauten:

$$C_1 = \frac{P_0 r_0}{Gm \rho_0} \quad C_2 = -\frac{r_0^3}{Gm}.$$

⁴Ein demselben Prinzip folgendes Verfahren wurde von Castor (1971) vorgestellt. Anstelle eines Gleichungssystem mit 4 gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung geht Castor von einem System mit 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus. Das hier vorgestellte Matrixverfahren wurde unabhängig von Castors Arbeit entwickelt.

Das Matrixverfahren basiert darauf, daß das homogene Differentialgleichungssystem in ein inhomogenes umgewandelt wird. Hierzu wird die äußere mechanische Randbedingung durch die Normierung der Eigenfunktion $x(m)$ am Außenrand ersetzt. Zusammen mit der inneren mechanischen Randbedingung, kann das obige System für eine gegebene Eigenfrequenz ω gelöst werden,

$$\begin{aligned} \text{Zentrum :} \quad & 3\gamma_{\text{ad}}x - p = 0, \\ \text{Oberfläche :} \quad & x = 1. \end{aligned}$$

4.4.1 Numerik und Lösungsstrategie

Das Differentialgleichungssystem (4.33) wird auf einem durch das Hintergrundmodell vorgegebenem Gitter diskretisiert. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, für die Massengleichung eine *linksseitige* ($m_i > m_{i-1}$)

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \ln P} \right|_i \doteq \frac{x_i - x_{i-1}}{\ln P_i - \ln P_{i-1}}, \quad (4.35)$$

und für die Impulsgleichung eine *rechtsseitige* Differenzbildung zu wählen

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \ln P} \right|_i \doteq \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln P_{i+1} - \ln P_i}. \quad (4.36)$$

Die Diskretisierung ist von erster Ordnung, was für diese Zwecke völlig ausreichend ist⁵. Es folgt ein tridiagonales Gleichungssystem, das mit einem Bandmatrizenlöser invertiert werden kann:

$$\mathbf{A}(\omega)\vec{u} = \vec{b}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x_i \\ p_i \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Es wurde bis jetzt vorausgesetzt, daß die Eigenfrequenzen a priori bekannt sind. Dies ist selbstverständlich nicht der Fall. Zur Bestimmung der Eigenfrequenz dient eine der vier möglichen äußeren mechanischen Randbedingungen (4.12–4.15), welche nicht mehr Teil des Gleichungssystems ist. Eine Schwingungsmode des Sterns ist gefunden, falls ihre Eigenfrequenz und ihre Eigenfunktionen diese Randbedingung, RB, erfüllen;

$$\text{RB}(\omega, x, p) \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.38)$$

Um die Eigenmoden zu finden, ist eine Strategie notwendig, die robust ist und Konvergenz verspricht. Der hier gewählte Algorithmus sieht wie folgt aus:

⁵Das Symbol \doteq wurde von Bulirsch eingeführt und sagt aus, daß der Abbruchfehler von erster Ordnung ist (z.B. Stoer & Bulirsch 1990).

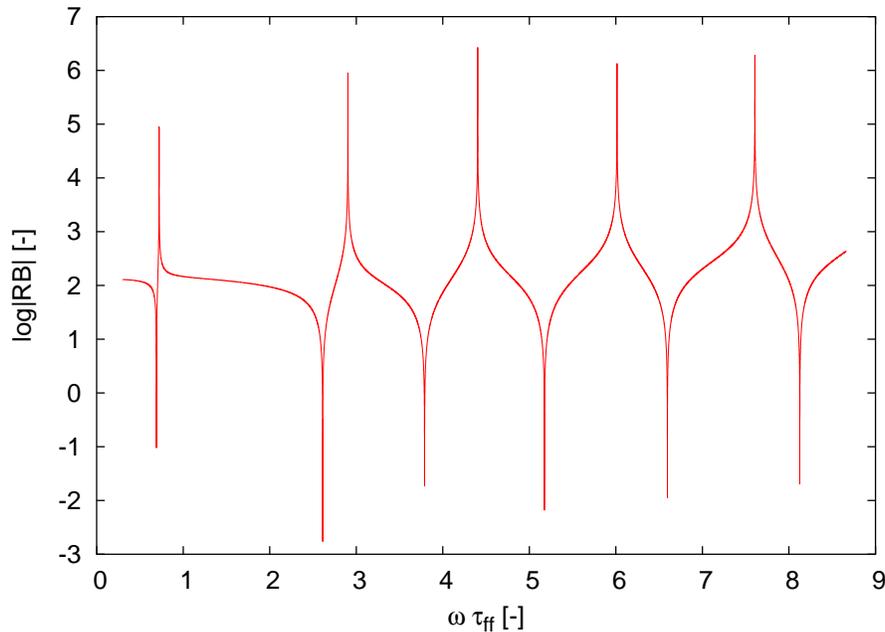


Abbildung 4.1: Jedes Minimum des Logarithmus des Absolutwertes des Residuums steht für eine Schwingungsmode. Die Frequenz wurde mit Hilfe der Freifallzeit (Gl. (5.1)) dimensionslos gemacht.

- Es wird eine Strecke im Frequenzraum abgetastet. Hierbei wird ein Intervall abgesteckt und bei vordefinierter⁶ Frequenzweite $\Delta\omega$ diskretisiert. Das lineare Gleichungssystem wird dann für jeden Frequenzgitterpunkt gelöst. Je feiner die Abtastung, desto größer die Sicherheit, daß keine Mode im vorgegebenem Frequenzintervall übergangen wird.
- An Orten wo $\log|\text{RB}(\omega, x, p)|$ ein Minimum aufweist, kann sich eine Eigenmode verbergen.
- Die Abtastung wird um die Minima wiederholt, und
- mittels des Sekantenverfahrens kann die Eigenfrequenz bis zur gewünschten Genauigkeit iterativ verbessert werden.

Die oben genannten vier Punkte sind im Flußdiagramm 4.2 noch einmal veranschaulicht. Dieses Verfahren ist in natürlicher Weise auf den vollständigen Satz Gleichungen erweiterbar. In Abbildung 4.1 ist eine solche Abtastung zu sehen. Aufgetragen ist der Logarithmus des Absolutwertes der Bedingung (4.38) über der dimensionslosen Eigenfrequenz (5.1). Mit feiner werdender Abtastung nimmt die Ausprägung der Minima zu. Jedes der sechs Minima gibt den ungefähren Ort der Mode an. Demnach befinden sich im Frequenzintervall $0.5/\tau_{\text{ff}} < \omega < 8.5/\tau_{\text{ff}}$ die ersten 6 Moden (die Fundamentalmode und die ersten 5 Obertöne). Die Frequenz der Fundamentalmode ist, weil es sich um eine akustische Schwingungsmode handelt, stets in der Umgebung der Freifallzeitfrequenz zu finden.

⁶In dieser Arbeit war es ausreichend eine feste Frequenzweite zu verwenden. Die Rechengeschwindigkeit kann jedoch bei variabler Schrittweite erhöht werden.

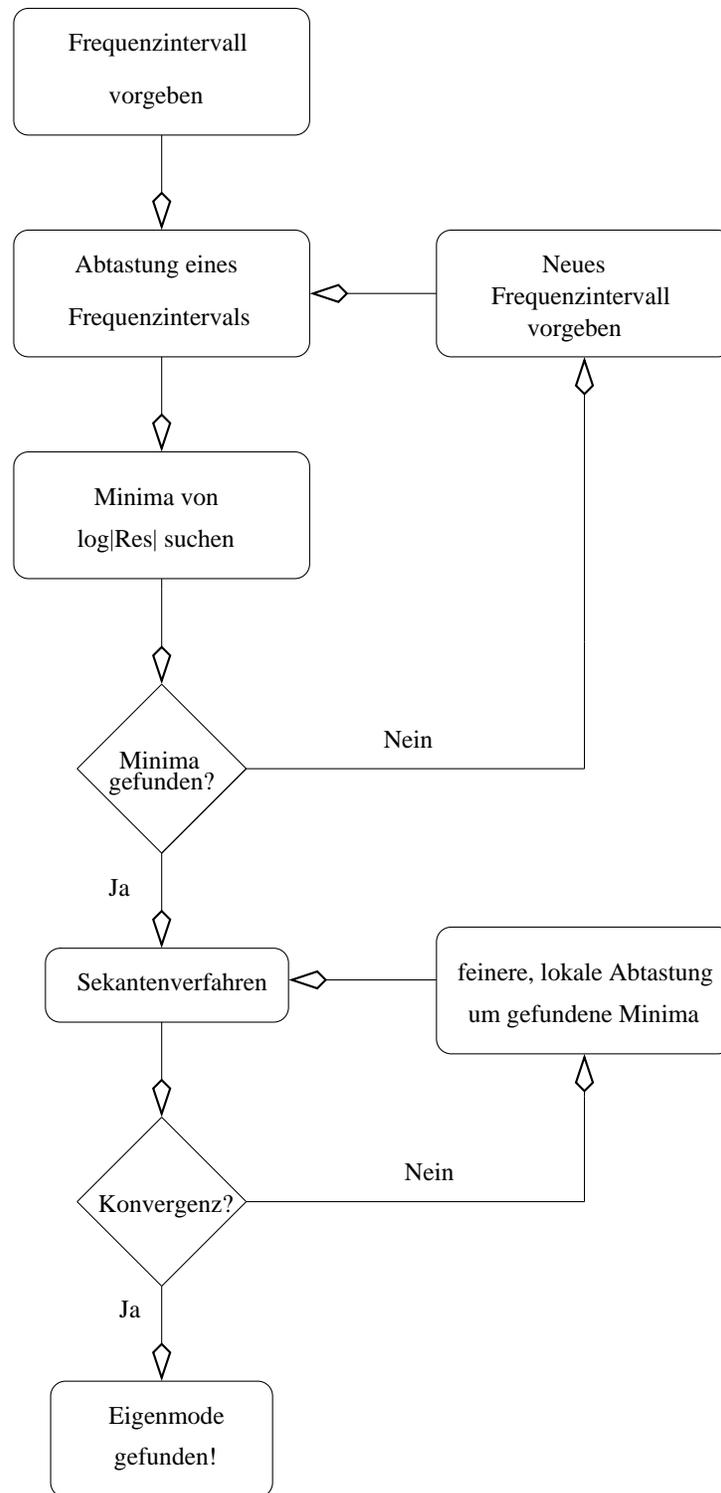


Abbildung 4.2: Flußdiagramm zum Algorithmus des Matrixverfahrens (siehe Text).

4.5 Quasi-Adiabasie

Da alle Eigenwerte in der adiabatischen Näherung rein reell sind (vgl. Sturm-Liouville-Theorem, S. 22), kann streng genommen keine Aussage über die Stabilität eines Sterns gemacht werden. In der vollen Betrachtung des Pulsationsproblems entscheidet das Wechselspiel zwischen der Mechanik und der Thermodynamik über Stabilität oder Instabilität. Physikalisch gesehen, werden in der adiabatischen Approximation nichtadiabatische Effekte unterdrückt, wodurch die in einer Massenschale entstehende Kompressionswärme weder durch vermehrte Abstrahlung vermindert (Dämpfung) noch durch Energieproduktion oder gestiegene Absorption vergrößert (Anfachung) werden kann. Wird das Arbeitsdifferential einer Massenschale ausgewertet, erhält man das gleiche Resultat: Die Schwingung ist weder gedämpft noch angefacht. Diese Erkenntnis kann auch gewonnen werden, ruft man sich in Erinnerung, daß Dämpfung und Anfachung durch das Vorzeichen der Phasenverschiebung zwischen Druck- und Dichtestörung bestimmt sind. Bei adiabatischer Zustandsänderung (4.26) sind Druck und Dichte jedoch stets in Phase. Die Phasenverschiebung ist daher null,

$$p = \gamma_{\text{ad}} d, \quad \phi_v = \phi_d - \phi_p = 0. \quad (4.39)$$

Diese Eigenschaft adiabatischer Pulsation kann rechnerisch leicht demonstriert werden, wenn man die Arbeit pro Massenschale, die während eines Zyklus verrichtet oder aufgenommen wird,

$$\frac{dW}{dm} = - \oint \frac{\delta q}{dt} dt, \quad (4.40)$$

auswertet⁷. Dieses Differential kann mit Hilfe des Energiesatzes ausgewertet werden;

$$\frac{\delta q}{dt} = \frac{dl}{dm} - \epsilon_{\text{nuc}}. \quad (4.41)$$

Hierzu werden die Leuchtkraft L und die nukleare Energieproduktion ϵ in vorgegebener Weise (4.4) linearisiert:

$$l = l_0 (1 + \lambda e^{i\omega t}), \quad \epsilon_{\text{nuc}} = \epsilon_0 (1 + \epsilon e^{i\omega t}). \quad (4.42)$$

Betrachtet man den Realteil von (4.40) ergibt sich für die Arbeit pro Massenschale der Ausdruck:

$$\frac{dW}{dm} = - \oint \cos(\omega t) \left(\frac{d(l_0 \lambda)}{dm} - \epsilon_0 \epsilon \right) dt = 0. \quad (4.43)$$

Wegen des Separationsansatzes (4.42) ist der Klammerausdruck auf der rechten Seite unabhängig von der Zeit, so daß die Integration über eine Pulsationsperiode null ergibt.

Daß es dennoch möglich ist, etwas über das Stabilitätsverhalten eines Sterns, basierend auf der adiabatischen Analyse, auszusagen, hat Eddington (1926) demonstriert.

⁷Zu beachten ist, daß die Wärmemenge, δq , kein totales Differential besitzt, sondern von der Prozeßführung abhängt.

Sein Kunstgriff besteht darin, das Arbeitsdifferential in zweiter Ordnung auszuwerten. Hierzu nahm er den 2. Hauptsatz der Thermodynamik zum Ausgangspunkt

$$\oint \frac{ds}{dt} dt = \oint \frac{1}{T} \frac{\delta q}{dt} dt = 0 \quad (4.44)$$

Setzt man für die Temperatur den Realteil des Stör-Separationsansatzes $T = T_0(1 + \vartheta \cos(\omega t))$ ein und führt eine Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied durch, liefert die rechte Seite:

$$\oint \frac{1}{T_0} (1 + \vartheta \cos(\omega t)) \frac{\delta q}{dt} dt = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{1}{T_0} \oint \frac{\delta q}{dt} dt = \frac{1}{T_0} \oint \vartheta \cos(\omega t) \frac{\delta q}{dt} dt \quad (4.46)$$

Der Zusammenhang (4.46) ist von 2. Ordnung! Dies ist leicht einzusehen, vergegenwärtigt man sich, daß ϑ von erster Ordnung ist und $\delta q/dt$ nach der Linearisierung ebenfalls Terme von erster Ordnung enthält. Die Auswertung der rechten Seite von Gleichung (4.46) liefert ein Integral, das im Gegensatz zu (4.43) nicht verschwindet:

$$W' = - \oint \vartheta \cos^2(\omega t) \left(\frac{d(l_0 \lambda)}{dm} - \epsilon_0 \epsilon \right) dt. \quad (4.47)$$

Die Arbeit pro Masseneinheit der i -ten Massenschale während eines Zyklus ergibt sich schließlich zu:

$$W'_i = \frac{\pi}{\omega} \vartheta_{\text{ad}} \epsilon_0 (\epsilon_P p_{\text{ad}} + \epsilon_T \vartheta_{\text{ad}}) - \vartheta_{\text{ad}} \lambda \epsilon_0 - \vartheta_{\text{ad}} l_0 \frac{d\lambda}{dm}. \quad (4.48)$$

Dieser Ausdruck kann berechnet werden, wenn die Leuchtkraftstörung und ihre räumliche Ableitung bekannt sind. Die Leuchtkraftstörung λ ist in der adiabatischen Approximation streng genommen gleich null $\lambda = \lambda_{\text{ad}} = 0$. Mit Hilfe der linearisierten Energie-transportgleichung (4.8) ist es jedoch möglich mit Ergebnissen der adiabatischen Analyse ($x_{\text{ad}}, p_{\text{ad}}, \vartheta_{\text{ad}} = p_{\text{ad}} \nabla_{\text{ad}}$) eine Leuchtkraftstörung zu berechnen und somit die Abweichung von der Adiabase zu bestimmen;

$$\lambda = \frac{P_0}{\nabla_{\text{ad}} P'_0} \vartheta'_{\text{ad}} + 4x_{\text{ad}} - \kappa_P p_{\text{ad}} + (4 - \kappa_T) \vartheta_{\text{ad}}, \quad (4.49)$$

Die Anwachszeit τ_e einer Pulsation kann wie beim harmonischen Oszillator aus dem Dämpfungskoeffizienten χ bestimmt werden. Es gilt:

$$E_{\text{ges}} = \frac{\omega^2}{2} \sum \delta r(m)^2 \Delta m_i, \quad (4.50)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \frac{W\omega}{E_{\text{ges}}}, \quad (4.51)$$

$$\tau_e = \frac{1}{\chi}. \quad (4.52)$$

W bezeichnet das Arbeitsintegral mit $W = \sum W'_i \cdot \Delta m_i$.

4.6 Lineare nichtadiabatische Analyse

Die Lösung des vollen Gleichungssystems erfolgt in ähnlicher Weise wie das der adiabatischen Näherung. Weil es sich jedoch um ein komplexwertiges System handelt, müssen einige Punkte beachtet werden. Die aufgelisteten Eigenschaften des Sturm-Liouville-Problems (Abschnitt 4.3) gehen in der vollen nichtadiabatischen Untersuchung verloren. Es kann nie mit absoluter Sicherheit gesagt werden, ob in einem zu untersuchenden zweidimensionalen Frequenzspektrum eine Mode übersehen wurde. Wie in der adiabatischen Analyse findet auch hier eine Normalisierung statt, und die äußere mechanische Randbedingung dient als Kriterium dafür, ob es sich bei der gefundenen Mode um eine Eigenmode handelt. Die Diskretisierung ist ebenfalls von erster Ordnung und folgt dem Schema:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial x}{\partial \ln P} \right|_i &\doteq \frac{x_i - x_{i-1}}{\ln P_i - \ln P_{i-1}} && \text{linksseitigeDifferenz,} \\
 \left. \frac{\partial p}{\partial \ln P} \right|_i &\doteq \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln P_{i+1} - \ln P_i} && \text{rechtsseitigeDifferenz,} \\
 \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \ln P} \right|_i &\doteq \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}{\ln P_{i+1} - \ln P_i} && \text{rechtsseitigeDifferenz,} \\
 \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \ln P} \right|_i &\doteq \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{\ln P_i - \ln P_{i-1}} && \text{linksseitigeDifferenz.}
 \end{aligned}$$

Das sich ergebende Gleichungssystem lautet dann:

$$\mathbf{A}(\omega) \vec{u} = \vec{b}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x_i \\ p_i \\ l_i \\ \vartheta_i \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Die Matrix $\mathbf{A}(\omega)$ hat nicht mehr wie im adiabatischen Fall eine tridiagonale Gestalt. Die Bandstruktur bleibt allerdings weiter erhalten, sie besitzt vier obere und vier untere Nebendiagonalen. Dieses komplexwertige algebraische Gleichungssystem wurde mit dem Algebra-Programm IMSL gelöst. Die Komplexwertigkeit macht die Abtastung eines zweidimensionalen Frequenzraumes notwendig. In Abbildung 4.3 ist eine solche Abtastung für die erste Eigenmode eines instabilen Sternmodells zu sehen. Die Frequenzen σ_r (Realteil) und σ_i (Imaginärteil) sind dimensionslose Größen, skaliert mit der Freifallzeit (5.1). Zu sehen ist qualitativ der gleiche Verlauf wie bei der Abtastung des eindimensionalen Frequenzintervalls im adiabatischen Fall; Polstelle und Minimum liegen dicht beieinander. Das Minimum in $\log|\text{RB}|$ ist auf einen kleinen Bereich um die Eigenfrequenz beschränkt. Eine Abtastung bei konstantem σ_i fernab von dem der Eigenfrequenz (Rand der $\log|\text{RB}|$ -Fläche parallel zu σ_r Achse) zeigt kein Minimum. Diese Beschränkung im Frequenzraum kann das Auffinden der Eigenwerte erheblich erschweren.

Der Algorithmus zur Auffindung der Eigenwerte unterscheidet sich im Prinzip nicht

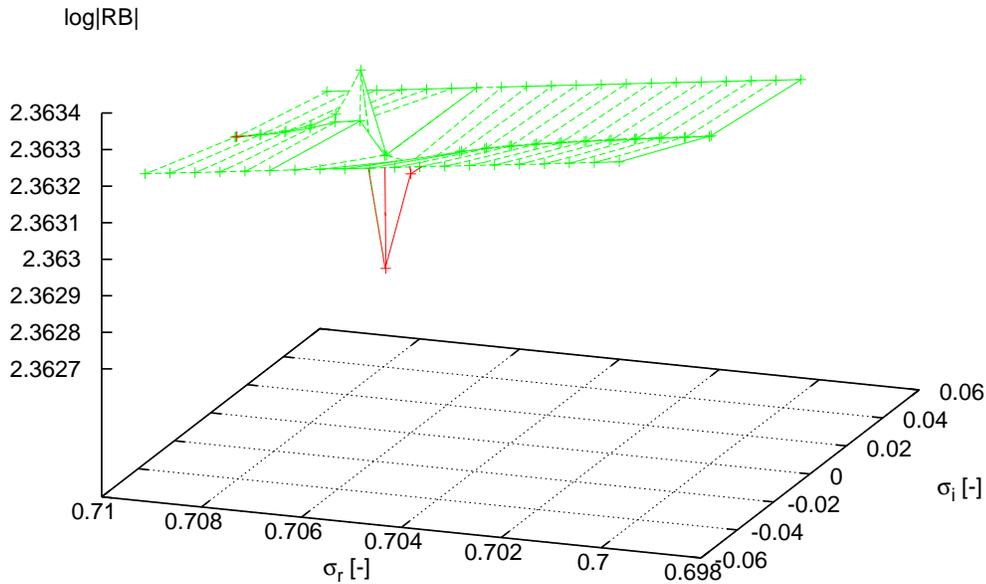


Abbildung 4.3: Zu sehen ist die $\log|RB|$ -Fläche, aufgetragen über einen zweidimensionalen Frequenzbereich $\Delta\sigma_r \times \Delta\sigma_i$. Das Minimum markiert die Lage eines Eigenwertes. Die Frequenzanteile (σ_r, σ_i) sind dimensionslos (Gl. (5.1)).

von dem in der adiabatischen Analyse. Wird anstatt eines Frequenzintervalls $\Delta\sigma_r$ ein zweidimensionaler Frequenzraum $\Delta\sigma_r \times \Delta\sigma_i$ vorgegeben, kann das Flußdiagramm 4.2 übernommen werden.

4.7 Validierung der Programme

Ausgangspunkt zur Validierung der Programme ist die Arbeit von Schwarzschild (1941), der das Schwingungsverhalten eines Sterns mit polytroper Schichtung und dem Polytropenindex $n = 3$ (das sog. „Standardmodell“) untersuchte. Sterne mit polytroper Schichtung werden auch kurz Polytropen genannt. Man gewinnt sie bei vorgegebenem Index n , indem man die Lane-Emden-Gleichung löst.

Lane-Emden-Gleichung

Die Beschreibung des Sternaufbaus gründet auf 4 Säulen:

1. Der Stern ist ein selbstgravitierendes Objekt. D.h. das Gravitationspotential, Φ , wird durch die Dichteverteilung des Sterns bestimmt:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho. \quad (4.54)$$

2. Der Stern befindet sich im hydrostatischen Gleichgewicht:

$$\nabla P = -\rho\nabla\Phi. \quad (4.55)$$

3. Der Temperaturverlauf muß bekannt sein, was die Kenntnis der Art des Energietransportes und der Energieerzeugung voraussetzt.
4. Die Zusammensetzung der Sternmaterie muß hinreichend bekannt sein, um eine gültige Zustandsgleichung angeben zu können.

Vor allem die mit dem Energietransport zusammenhängenden Prozesse erschweren die Erfassung des Sternaufbaus erheblich und machten sie bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts unmöglich. Man kann diese Problematik umgehen, und ein einfaches aber aussagekräftiges Sternmodell erhalten, wenn man die zentrale Annahmen einführt, daß ein *polytropher* Zusammenhang zwischen der Temperatur- und der Druckschichtung existiert,

$$P(r) \propto T(r)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (4.56)$$

Das γ hier darf nicht mit γ_{ad} verwechselt werden⁸: Soll es sich zum Beispiel um ein isothermes Sternmodell, bestehend aus einem einatomigen idealen Gas, handeln, ist $\gamma = 1$ und der Adiabatenexponent $\gamma_{\text{ad}} = 5/3$. Mit Hilfe des Polytropenexponenten γ kann der Temperaturgradient festgelegt werden, ohne Kenntnis der thermoenergetischen Prozesse in einem Stern. Im Zusammenhang mit der idealen Gasgleichung gilt:

$$P(r) = C\rho(r)^\gamma. \quad (4.57)$$

C wird Polytropenkonstante genannt, obwohl sie nur dann einen festen Zahlenwert annimmt, wenn die Zustandsgleichung von barotroper Art ist. In diesem Fall besteht C aus Naturkonstanten. Für den Fall, daß die Zustandsgleichung von der Form $P = P(\rho, T)$ ist, wie die ideale Gasgleichung, ist C ein freier Parameter, der sich zwar von Stern zu Stern unterscheidet aber innerhalb eines Stern konstant ist⁹. Substituiert man den Druck mit Gl. (4.57), ergibt sich schließlich ein System von zwei Differentialgleichungen mit zwei Unbekannten, (ρ, Φ) ;

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma C\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}, \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (4.59)$$

⁸Bei Weißen Zwergen kann es zu Verwechslungen kommen, da die Zustandsgleichung eine barotrope Form hat, $P = P(\rho)$

⁹Falls C , wie beim Weißen Zwerg, durch Naturkonstanten festgelegt ist, verliert das System einen Freiheitsgrad. Die Festlegung eines Wertes, z.B. der Masse, legt alle anderen auch fest. Hieraus folgt auch Chandrasekhars bekannte Masse-Radius-Relation

Die beiden Gleichungen werden in der Regel zu einer einzigen zusammengefaßt. Hierzu wird Gl. (4.58), für den Fall $\gamma \neq 1$, integriert:

$$\rho = \left(-\frac{\Phi}{(n+1)C} \right)^n. \quad (4.60)$$

Es ist üblich, den Polytropenindex n einzuführen:

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (4.61)$$

Setzt man Gl. (4.60) in die Poissongleichung (4.59) ein, erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der Unbekannten Φ :

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \left(-\frac{\Phi}{(n+1)C} \right)^n. \quad (4.62)$$

Werden noch die dimensionslosen Größen,

$$w = \frac{\Phi}{\Phi_z} = \left(\frac{\rho}{\rho_z} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (4.63)$$

$$z = Ar, \quad \text{mit} \quad A = \frac{4\pi G}{(n+1)^n C^n} \Phi_z^{n-1}. \quad (4.64)$$

eingeführt, ergibt sich schließlich aus Gl. (4.59) die bekannte *Lane-Emden-Gleichung*:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + w^n = 0. \quad (4.65)$$

Der tiefgestellte Index z bezeichnet Größen im Zentrum. Die Lane-Emden-Gleichung stellt ein Anfangswertproblem dar und kann ausgehend von den Regularitätsbedingungen im Zentrum;

$$w(0) = 1, \quad (4.66)$$

$$w'(0) = 0, \quad (4.67)$$

bis an die Oberfläche, das heißt, wo w die erste Nullstelle aufweist, integriert werden. Eine ausführliche Diskussion polytroper Sternmodelle findet sich bei Chandrasekhar (1939).

Adiabasie

Schwarzschild hat die lineare adiabatische Wellengleichung (4.29) mittels eines Schießverfahrens gelöst und die Ergebnisse der ersten vier Obertöne tabellarisch veröffentlicht. Diese beiden Punkte,

- das Sternmodell kann durch die Lane-Emden-Gleichung gewonnen werden,
- die Ergebnisse der linearen Analyse stehen in tabellarischer Form zur Verfügung,

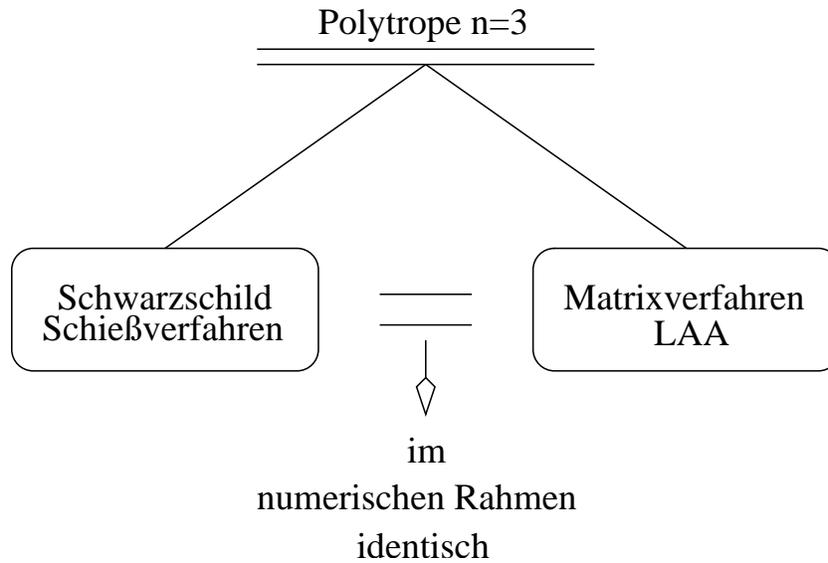


Abbildung 4.4: Zur Validierung des Matrixverfahrens für die lineare adiabatische Analyse (LAA) wurde eine Polytrope mit dem Index $n = 3$ gerechnet. Das Resultat stimmt mit den Ergebnissen Schwarzschilds überein.

prädestinieren die Arbeit von M. Schwarzschild als Grundlage der Programmvalidierung. Um das Matrixverfahren der adiabatischen Analyse zu überprüfen, wurde zunächst ein polytropes Sternmodell (das Standardmodell) durch Integration der Lane-Emden-Gleichung ermittelt und erneut einer Eigenwertanalyse unterzogen. Die erhaltenen Ergebnisse unterschieden sich von Schwarzschild (1941) nur im numerischen Rahmen, wie untenstehender Tabelle zu entnehmen ist.

Tabelle 4.1: Die ersten 5 Eigenmoden ω^2 , berechnet für unterschiedliche Stützstellenzahlen k und mit den Werten von Schwarzschild (1941) gegenübergestellt. Die angegebene Fehlermarge ist der gleichen Veröffentlichung entnommen.

		0. Mode	1. Mode	2. Mode	3. Mode	4. Mode
Schwarzschild	$k = 83$	0.05882	0.19139	0.36480	0.58630	0.8554
Gamgami	$k = 88$	0.05880	0.19140	0.36480	0.58630	0.8559
Gamgami	$k = 1005$	0.05880	0.19130	0.36475	0.58610	0.8552
Gamgami	$k = 6891$	0.05880	0.19123	0.36450	0.58578	0.8547
Maximaler Fehler	\pm	0.00003	0.00010	0.00040	0.00200	0.0060

In Tabelle 4.1 ist deutlich die Abhängigkeit der höheren Obertöne von der numerischen Auflösung zu sehen, wohingegen der Eigenwert der Fundamentalmoden schon ab 90 Gitterpunkten eine Sättigung erreicht. Dies ist leicht einzusehen, vergewärtigt man sich, daß der vierte Oberton vier Nullstellen besitzt und die Eigenfunktion dementsprechend starke Krümmungen aufweist. Die Güte der Auflösung der Eigenfunktion kann daher den resultierenden Eigenwert entscheidend beeinflussen.

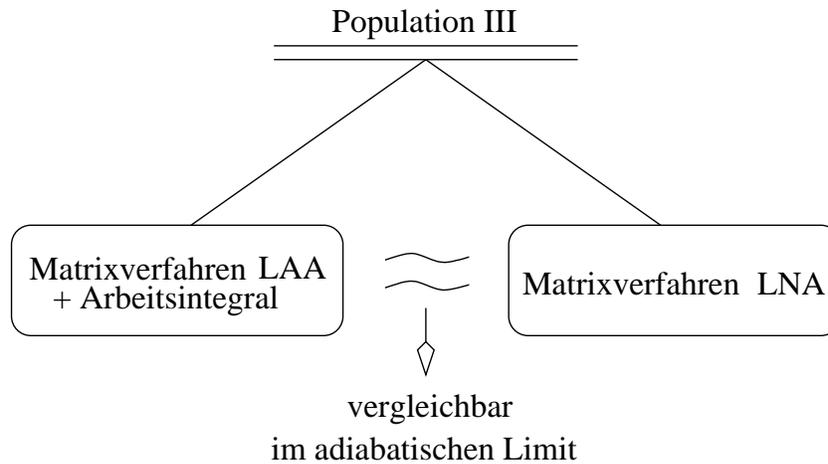


Abbildung 4.5: Mit Hilfe des validierten Matrixverfahrens für die adiabatische Analyse (LAA) kann nun das verallgemeinerte Verfahren für die nichtadiabatische Untersuchung (LNA) überprüft werden.

Nichtadiabasie

Nachdem die Tauglichkeit des Matrixverfahrens sichergestellt worden ist, kann mit Hilfe der adiabatischen Approximation die lineare nichtadiabatische Analyse (LNA) bewertet werden. Da der thermoenergetische Part des Sterns in der Lane-Emden-Gleichung nicht berücksichtigt wird, müssen beide Verfahren auf ein realistisches Sternmodell angewandt werden. Verwendet wurde ein Population-III-Stern. Die lineare adiabatische Analyse (LAA) liefert, wie in Abschnitt (4.3) eingehend diskutiert, nur den Realteil der Eigenfrequenz. Um jedoch auch den Imaginärteil des Eigenwertes der LNA zu beurteilen, wurde mittels der Ergebnisse der adiabatischen Analyse das Arbeitsdifferential (4.47) gelöst, aus dem eine Anwachsrate ermittelt werden kann.

Es kann nicht mehr verlangt werden, daß die Resultate im numerischen Rahmen identisch sind, weil nichtadiabatische Effekte je nach zugrundeliegendem Sternmodell groß sein können. Im Falle aber, daß die Pulsation am adiabatischen Grenzfall liegt, sollten sowohl Realteil (Pulsationsperiode) als auch Imaginärteil (Anwachsrate) der Eigenfrequenzen vergleichbar sein. In Kapitel 5 werden Ergebnisse dieses Vergleiches vorgestellt.

Darüber hinaus wurden zur Validierung des linearen nichtadiabatischen Programmes Vergleichsrechnungen mit der Riccati-Methode unternommen. Gegenstand der Untersuchung war u.a. ein β Cepheide, bei dem die ersten zwei Obertöne instabil sind. Der Abgleich fand dank der Unterstützung von Herrn W. Glatzel (Astrophysikalisches Institut Göttingen) statt. Das Matrixverfahren war in der Lage, die Instabilitäten zu finden. Die Abweichungen, die sich im Imaginär- und Realteil ergaben, sind in Abbildung 4.7 für drei verschiedene Auflösungsgrade zu sehen. Bei beiden Frequenzanteilen nimmt die Abweichung mit größer werdender Auflösung des Hintergrundmodells ab. Sie unterscheiden sich jedoch in ihrer Sensitivität hinsichtlich der Auflösung, da die prozentuale Abweichung im Imaginärteil größer ist als die im Realteil. Das Vorzeichen und die

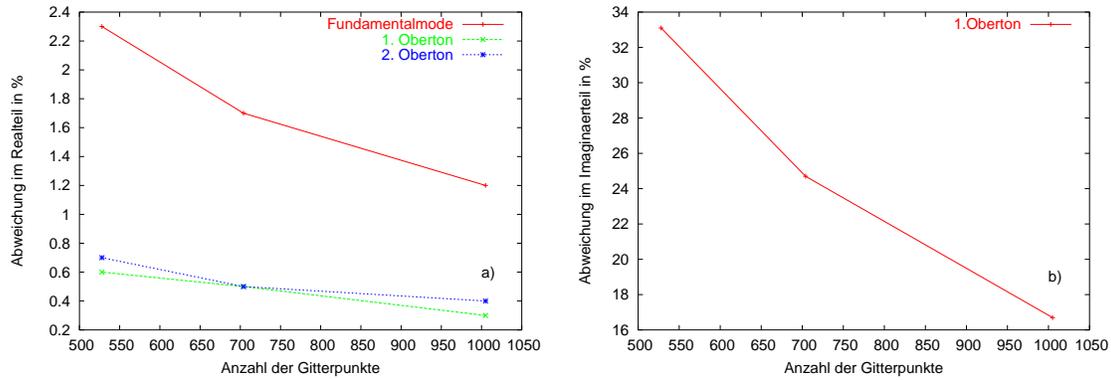


Abbildung 4.6: Vergleich der Riccati-Methode mit dem Matrixverfahren bei unterschiedlicher Auflösung des Hintergrundmodells. a) prozentuale Abweichung in der Schwingungsperiode (Realteil), b) Abweichungen in der Anwachsrate (Imaginärteil). Mit zunehmender Auflösung des Hintergrundmodells nehmen die Abweichungen in beiden Frequenzteilen ab.

Größenordnung des Imaginärteils stimmten stets überein. Der Grund für die Abweichung liegt darin, daß die Riccati-Methode, weil sie zur Klasse der Schießverfahren gehört, naturgemäß mit variabler Ortsschrittweite operiert, während das Matrixverfahren an einer vordefinierten räumlichen Auflösung – gegeben durch das Hintergrundmodell – gebunden ist. Durch die adaptive Schrittweite kann die Riccati-Methode „Opazitätsbuckel“ räumlich besser auflösen. Die Stabilitätsanalyse kann merklich hiervon abhängen.

Kapitel 5

Ergebnisse der linearen Analyse

Das Stabilitätsverhalten von Population-III-Sternen hinsichtlich infinitesimaler Störungen ist Gegenstand dieses Kapitels. Die Sternmodelle wurden von C.W. Straka (Porto, Portugal) zu Verfügung gestellt und sind Teil einer vollständigen Sternentwicklungsrechnung (Straka, 2002). Die Entwicklungswege dieser Sterne im H-R-Diagramm sind in Abbildung 5.9 aufgetragen. Die Lösungsmenge einer Mode, gewonnen mittels der Pulsationsgleichungen (4.5–4.8), besteht aus einem komplexwertigen Eigenwert und den vier komplexwertigen Eigenfunktionen. Im Gegensatz zu Kapitel 4 ist die Eigenfrequenz in der folgenden Diskussion eine dimensionslose Größe. Für die Gewichtung wurde die Freifallzeit, die hier anders als üblich ($\tau_{\text{ff}} = \sqrt{3\pi/(32G\bar{\rho})}$) definiert ist, gewählt. Es gilt der Zusammenhang:

$$\sigma = \omega \cdot \tau_{\text{ff}}, \quad \tau_{\text{ff}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\bar{\rho}}}. \quad (5.1)$$

Die wesentliche Physik steckt in der Eigenfrequenz. Daher befaßt sich der erste Teil 5.1 dieses Kapitels mit dem Realteil der Eigenfrequenz $\text{Re}(\sigma) = \sigma_r$, welcher die Schwingungsperiode des Sterns angibt, und Abschnitt 5.2 mit dem Imaginärteil $\text{Im}(\sigma) = \sigma_i$, der eine Aussage über die Anwachs- bzw. Dämpfungsrate der Schwingungsamplitude macht. Insbesondere soll auch eine Gegenüberstellung der verschiedenen massereichen Sterne in den ersten beiden Abschnitten erfolgen. In Abschnitt 5.3 die Frage aufgeworfen, ob auch wirklich der ϵ -Mechanismus für die gefundenen Instabilitäten verantwortlich gemacht werden kann. Im letzten Teil des Kapitels findet ein Vergleich der quasiadiabatischen Untersuchung mit der nichtadiabatischen statt, in dessen Zusammenhang auch der Frage nach der Stärke der Abweichungen von der Adiabasie nachgegangen wird. In der weiteren Diskussion wird, sofern nicht Gegenteiliges ausdrücklich hervorgehoben ist, nur die Fundamentalmode eines Sternmodells betrachtet. Der Grund hierfür wird in Abschnitt 5.2.1 erläutert.

5.1 Pulsationsperiode

In Abbildung 5.1b ist die zeitliche Änderung der Pulsationsperiode Gl.(4.18) auf der linken Achse und die Änderung der mittleren Dichte auf der rechten Achse für den $450 M_{\odot}$ -Stern während der Vor- und Hauptreihenphase aufgetragen. Man sieht deutlich,

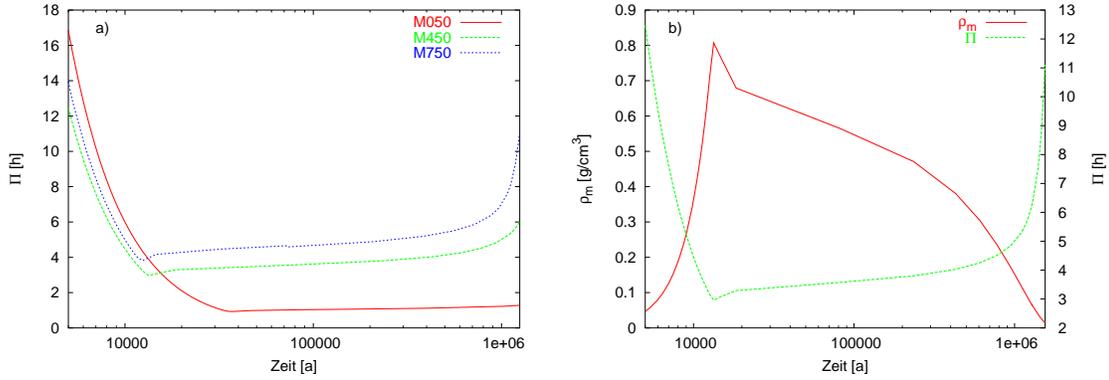


Abbildung 5.1: a) Gegenüberstellung von Pulsationsperiode und mittlerer Dichte des $450 M_{\odot}$ -Stern. b) Vergleich der Pulsationsperioden von drei Sternmassen. Der Beginn der Zeitzählung ist willkürlich in die Vorhauptreihenphase gelegt

daß mit kleiner werdender mittlerer Dichte die Pulsationsperiode zunimmt und umgekehrt. Die Periode-Dichte-Relation (4.32) ist demnach evident und bei allen untersuchten Sternen zu finden. Ausgehend von der Vorhauptreihe, kontrahiert der Stern auf thermischer Zeitskala und erreicht eine maximale mittlere Dichte. Im Hertzsprung-Russell-Diagramm weist dann die Effektivtemperatur ein Maximum auf und leitet die Hauptreihenentwicklung ein. Die Vorgänge im Sterninneren in der Phase der maximalen Kontraktion sind entscheidend für das Stabilitätsverhalten und werden in Abschnitt 5.2.5 näher diskutiert. Die Pulsationsperiode ist nicht unabhängig von der Sternmasse. Abbildung 5.1a illustriert exemplarisch an drei Sternen unterschiedlicher Masse ($50 M_{\odot}$, $450 M_{\odot}$ und $750 M_{\odot}$) die mit der strukturellen Entwicklung einhergehende zeitliche Änderung der Pulsationsperiode. Sie ist bei massereicheren Sternen größer als bei masseärmeren. Dieses Verhalten kann mit Hilfe der Homologie-Beziehungen erklärt werden. Hiernach nimmt die mittlere Dichte mit zunehmender Masse des Sterns ab, was gemäß der Periode-Dichte-Relation (4.32) eine Zunahme der Pulsationsdauer zu Folge hat. Die Annahme der Homologie ist erlaubt, da die betreffenden Modelle homogen sind und am Anfang ihrer Hauptreihenentwicklung stehen. Eine zweite Erklärungsmöglichkeit geht auf den Einfluß des mittleren Adiabatenexponenten zurück. Die Periode-Dichte-Relation, wie sie sich für den homogenen Stern ergibt, lautet:

$$\frac{1}{\Pi} \propto \frac{4\pi}{3} G \rho_0 (3\gamma_{\text{ad}} - 4). \quad (5.2)$$

Demnach steigt die Pulsationsdauer mit fallendem mittlerem Adiabatenexponent. Welcher der beiden Einflüsse a) mittlere Dichte oder b) mittlerer Adiabatenexponent den Trend dominiert, wurde nicht quantifiziert.

5.2 Instabilitäten

Die lineare Analyse hat ergeben, daß Population-III-Sterne mit einer Anfangsmasse, die größer ist als $350 M_{\odot}$, gegenüber infinitesimalen Störungen vibrationell instabil sind. Eine

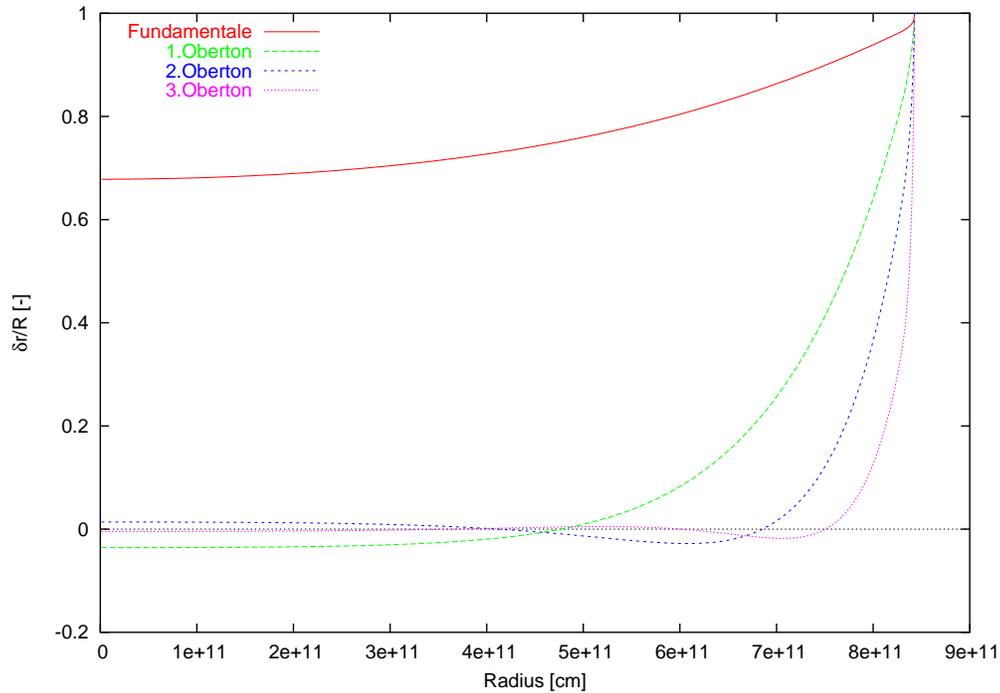


Abbildung 5.2: Eigenfunktionen der Fundamentalen und der ersten 3 Obertöne eines instabilen Modells. Zu beachten ist der Zentralwert der Stör-Amplitude und die Anzahl der Knotenpunkte.

infinitesimale Störung wächst somit exponentiell an. In der weiteren Diskussion steht die Anwachsrates τ_e (4.17) im Mittelpunkt.

5.2.1 Die Fundamentalmode

In der vollen nichtadiabatischen Analyse besitzt stets nur die Fundamentalmode einen negativen Imaginärteil, wenn es sich um ein instabiles Sternmodell handelt. Alle Moden höherer Ordnung sind stabil. Das ist eine direkte Folge der relativen Amplitude der Eigenfunktion im Zentrum. Abbildung 5.2 zeigt die ersten 3 Moden eines instabilen Modells, angefangen mit der Fundamentalen. Je größer die Ordnung der Mode, desto kleiner ist die zentrale relative Amplitude. Das hat zur Folge, daß die Stärke des ϵ -Mechanismus, der die einzige Ursache für Instabilitäten bei Population-III-Sternen ist, stark abnimmt, wodurch die Dämpfung der Hülle die Gesamtbilanz dominiert. Die oben gemachten qualitativen Aussagen sind in Tabelle 5.1 quantifiziert. Hierin sind die Pulsationsdauer Π , die di-

Tabelle 5.1: Pulsationsperiode Π in Stunden, dimensionslose Anwachsrates σ_i und relative Auslenkung $|\delta r_c/R|$ bzw. Störung im Zentrum der ersten vier Moden.

	0. Mode	1. Mode	2. Mode	3. Mode
Π [h]	3.8	1.3	0.9	0.74
σ_i [-]	$-8.9 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$7.6 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-4}$
$ \delta r_c/R $ [-]	0.67	0.035	0.013	0.0046

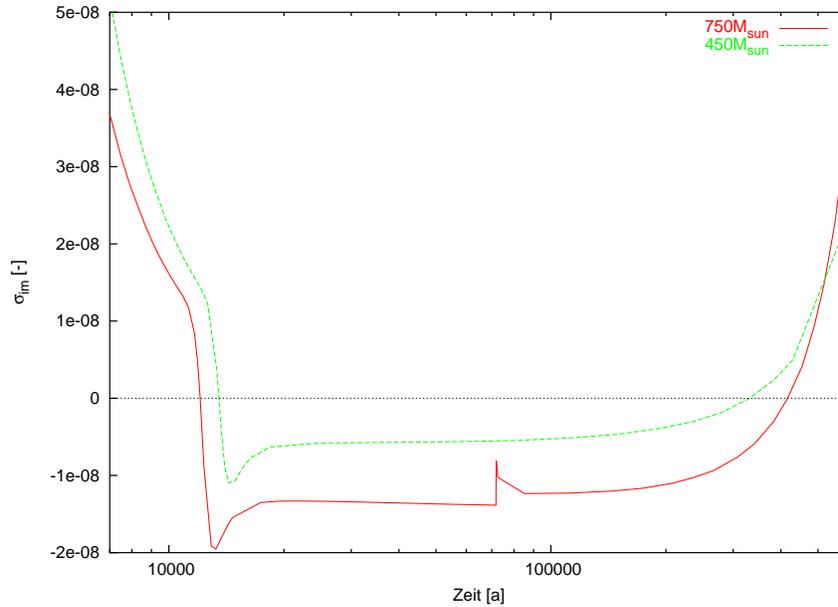


Abbildung 5.3: Imaginärteil des Eigenwertes über der Entwicklungszeit für zwei Sterne unterschiedlicher Masse.

mensionslose Anwachs- bzw. Dämpfungsrate σ_i und die relative normierte Störampplitude im Zentrum $|\delta r_c/R|$ aufgelistet. Die Pulsationsdauer nimmt, wie zu erwarten war, mit der Ordnung der Mode ab. Die beiden letzten Zeilen stehen in engem Zusammenhang. Bei Moden höherer Ordnung ist der stets vorhandene ϵ -Mechanismus nicht in der Lage die Dämpfung zu überwinden. Mit kleiner werdender zentraler Störampplitude nimmt die Dämpfungsrate zu.

5.2.2 Massenspektrum

In Abbildung 5.3 ist die zeitliche Sequenz des Imaginärteils für zwei Sterne mit unterschiedlichen Massen zu sehen. Beide Verläufe ähneln einander sehr. Die Sterne werden linear instabil, sobald sie in die Hauptreihenphase treten, und stabilisieren sich, bevor sie diese wieder verlassen. Die Zeitspanne, in der die Sterne instabil sind, ist beim massereicheren Stern größer. Zudem ist die Anwachsrate beim $750 M_\odot$ -Stern durchgehend kleiner als beim masseärmeren Stern. Daß die Masse ein bestimmender Parameter des Stabilitätsverhaltens massereicher Sterne ist und die oben genannten Korrelationen sich über das hier untersuchte Massenspektrum erstrecken, wird in den Abbildungen 5.4a und 5.4b verdeutlicht. Damit läßt sich folgender Zusammenhang festhalten:

- Massereichere Sterne sind einen längeren Zeitraum ihrer Hauptreihenphase pulsationsinstabil gegenüber infinitesimalen Störungen.
- Die Stärke¹ der Instabilität nimmt mit der Sternmasse zu.

¹Als Maß für die Stärke der Instabilität eines Sterns wurde vereinfachend das Minimum des Imaginärteils gewählt.

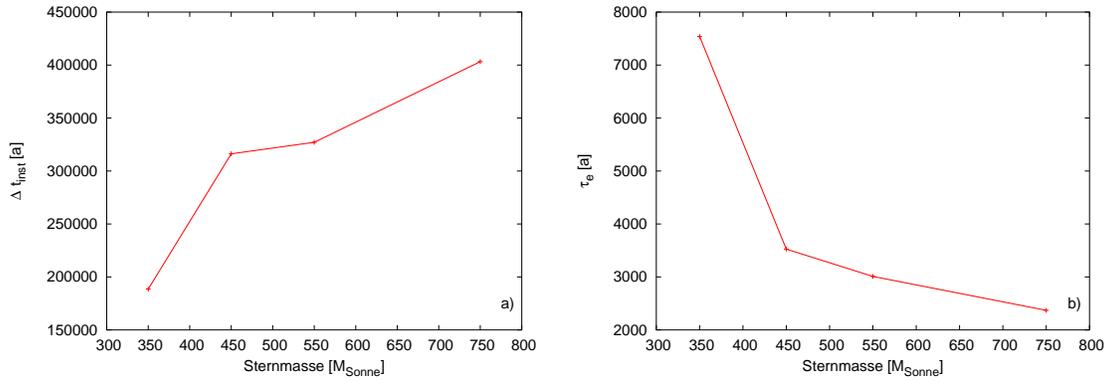


Abbildung 5.4: a) Dauer der instabilen Phase der untersuchten Sterne. Eine Korrelation mit der Masse ist deutlich erkennbar. b) Stärke (minimale Anwachszeit) der Instabilität nimmt mit der Masse der Sterne zu.

Diese Korrelation wurde erstmals von Ledoux (1941) vorhergesagt und von Schwarzschild & Härm (1959) rechnerisch nachgeprüft, als sie den ϵ -Mechanismus bei Population-I-Sternen mittels der quasiadiabatischen Approximation untersuchten. Es ist auffallend, daß die instabile Phase bei allen betroffenen Sternen zusammenhängend ist, d.h. sie werden nicht von stabilen Zuständen („Zonen der Ruhe“) unterbrochen. Die Korrelation zwischen Dauer bzw. Stärke der Instabilität ist nicht verwunderlich, wenn man die Verläufe der Eigenfunktionen betrachtet. Abbildung 5.5 zeigt die Eigenfunktion der Fundamentalen für drei Sterne mit unterschiedlichen Massen zum Zeitpunkt maximaler Kontraktion des Hintergrundmodells. Die relative Auslenkung im Zentrum nimmt deutlich mit der Masse zu. Hierfür ist der Strahlungsdruck verantwortlich, dessen Anteil am Gesamtdruck mit zunehmender Masse steigt und den mittleren Adiabatenexponenten reduziert. Der Homologiegrad der Pulsation steigt ebenfalls, und die Bedingungen für den ϵ -Mechanismus, die Dämpfung der Hülle zu überwinden, verbessern sich (vgl. Kapitel 2.4). Die zeitliche sprunghafte Änderung der Anwachsrate des $750 M_{\odot}$ -Sterns in Abbildung 5.3 ist auf Vorgänge in der Struktur des Hintergrundmodells zurückzuführen. Ein morphologisch gleicher Verlauf findet sich bei der Zentraltemperatur und der nuklearen Energieproduktionsrate. Die lineare Analyse spiegelt demnach die Struktur des zugrundeliegenden quasistatischen Sternmodells – u.a. jede Unsicherheit darin – in jeder Hinsicht wider.

5.2.3 Der ϵ -Mechanismus als Ursache der Instabilität

In Kapitel 2 wurde argumentiert, daß bei Population-III-Sternen nur der ϵ -Mechanismus als anfachende Kraft in Frage kommt. Daß dies wirklich zutrifft, soll in diesem Abschnitt demonstriert werden. Hierbei gibt es zwei unabhängige Argumentationslinien: Die erste stützt sich auf das Arbeitsintegral, die zweite gründet auf einer Modifikation der linearen Analyse.

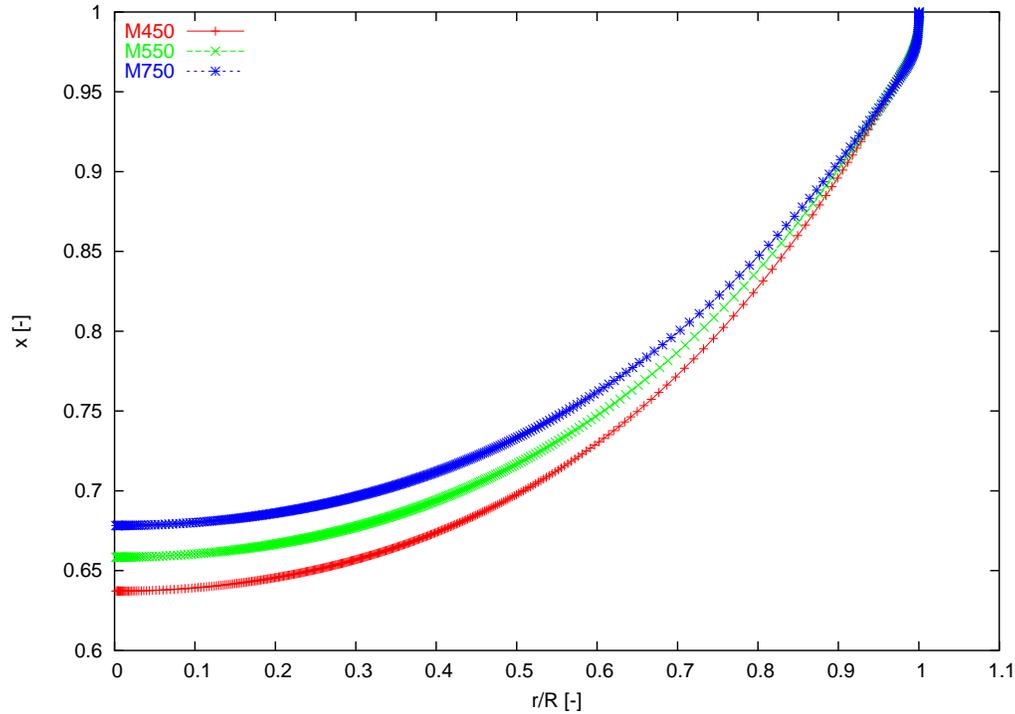


Abbildung 5.5: Relative Auslenkung der Fundamentalmode über dem normierten Radius für drei Sternmodelle mit $450 M_{\odot}$, $550 M_{\odot}$ und $750 M_{\odot}$ zum Zeitpunkt der maximalen Kontraktion.

Arbeitsintegral

Berechnet man das Arbeitsintegral eines instabilen Sternmodells, ergibt sich ein Verlauf, wie in Abbildung 5.6 dargestellt. Es handelt es sich um das kumulative Arbeitsintegral. Hierbei wird die Arbeit einer jeden Massenschale, beginnend im Zentrum, aufaddiert. Das Vorzeichen des Arbeitsintegrals an der Oberfläche gibt schließlich an, ob es sich um eine instabile oder stabile Mode handelt:

$$W_{\text{kum}}(r) = \sum \frac{dW}{dr} \Delta r. \quad (5.3)$$

Die Steigung des kumulativen Arbeitsintegrals gibt das lokale Stabilitätsverhalten an. Die blaue Kurve ergibt sich für ein stabiles Sternmodell. Die anfachende Region befindet sich im Zentrum (positive Steigung), die Dämpfung findet in der Hülle statt. An der Oberfläche nimmt das Arbeitsintegral einen negativen Wert an. Zwischen diesen beiden Bereichen pulsiert der Stern nahezu adiabatisch; es findet weder Anregung noch Dämpfung statt. Die rote und die grüne Kurve gehören zu einem instabilen Sternmodell. In jenem Fall (rote Kurve) fand eine komplette lineare Analyse statt, in diesem Fall (grüne Kurve) wurden Störungen in der nukleare Energieproduktion außer acht gelassen ($\epsilon \equiv 0$). Man sieht deutlich, daß im letzteren Fall die Anfachung im Zentrum verschwindet. Die Mode ist dann stabil, das Arbeitsintegral an der Oberfläche ist negativ.

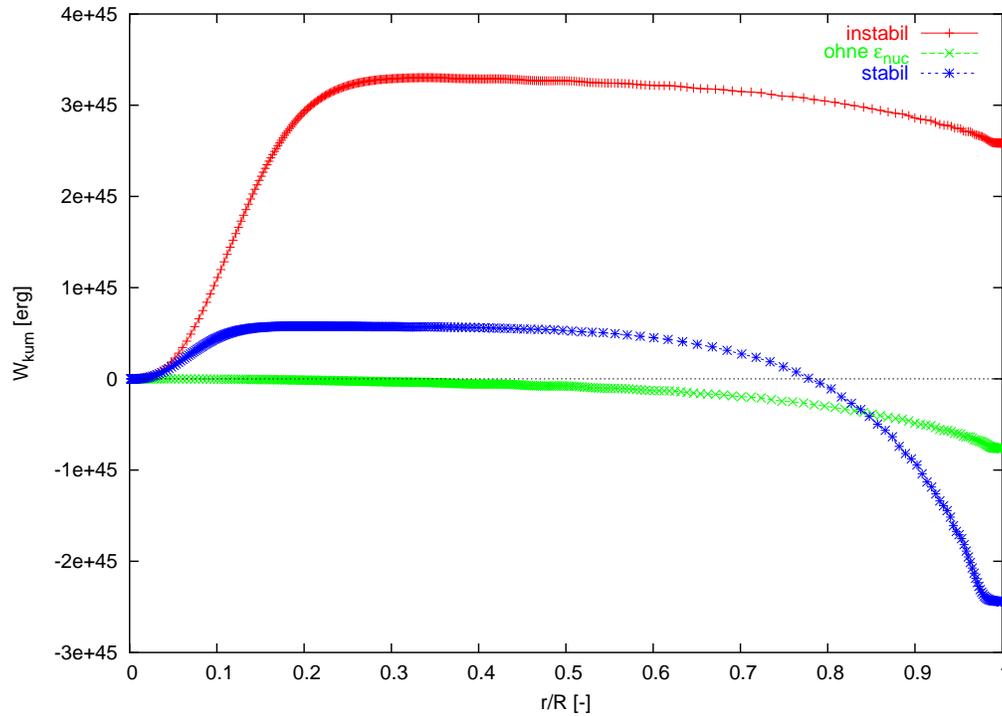


Abbildung 5.6: Das kumulative Arbeitsintegral für zwei Sternmodelle, ein stabiles (blaue Kurve) und ein instabiles (rote bzw. grüne Kurve). Die grüne Kurve zeigt den Verlauf bei vernachlässigter nuklearen Energieproduktion. Aufsummiert wird von innen nach außen.

Modifizierte lineare Analyse

Setzt man die Terme ϵ_T und ϵ_P in den linearen Pulsationsgleichungen null, werden Störungen in der nukleare Energieproduktion in der Stabilitätsuntersuchung nicht mehr berücksichtigt. Die Energiegleichung reduziert sich zu:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial m} = -\frac{i\omega P_0 \delta}{l_0 \rho_0} \left(\frac{\vartheta}{\nabla_{\text{ad}}} - p \right) \quad (5.4)$$

Dies hat zur Folge, daß alle Instabilitäten verschwinden. Die nukleare Energieproduktion ist somit in der Tat Ursache der hier gefundenen Instabilität. Abbildung 5.7 stellt die Fälle mit und ohne nukleare Energieproduktion gegenüber. Man sieht dem Verlauf ohne Störungen der nuklearen Energieproduktion an, daß die stabilisierende Wirkung der Hülle mit dem Eintreten des Sterns in die Hauptreihenentwicklung ein Minimum erreicht. Das heißt, daß Störungen nur langsam abklingen. Der Stern nimmt seinen kompaktesten Zustand ein. In der nachfolgenden Entwicklung nimmt die Stabilität zu, was auf die Ausdehnung der Hülle zurückzuführen ist. Die Kurve mit nuklearer Energieproduktion zeigt schließlich, daß für den ϵ -Mechanismus nur dann die Möglichkeit besteht, den Stern mit wachsender Amplitude pulsieren zu lassen, wenn die Dämpfung der Hülle schwach ist. Bei Sternen, die masseärmer sind als $350 M_{\odot}$, ist der ϵ -Mechanismus auch dann nicht in der Lage, die Dämpfung zu überwinden.

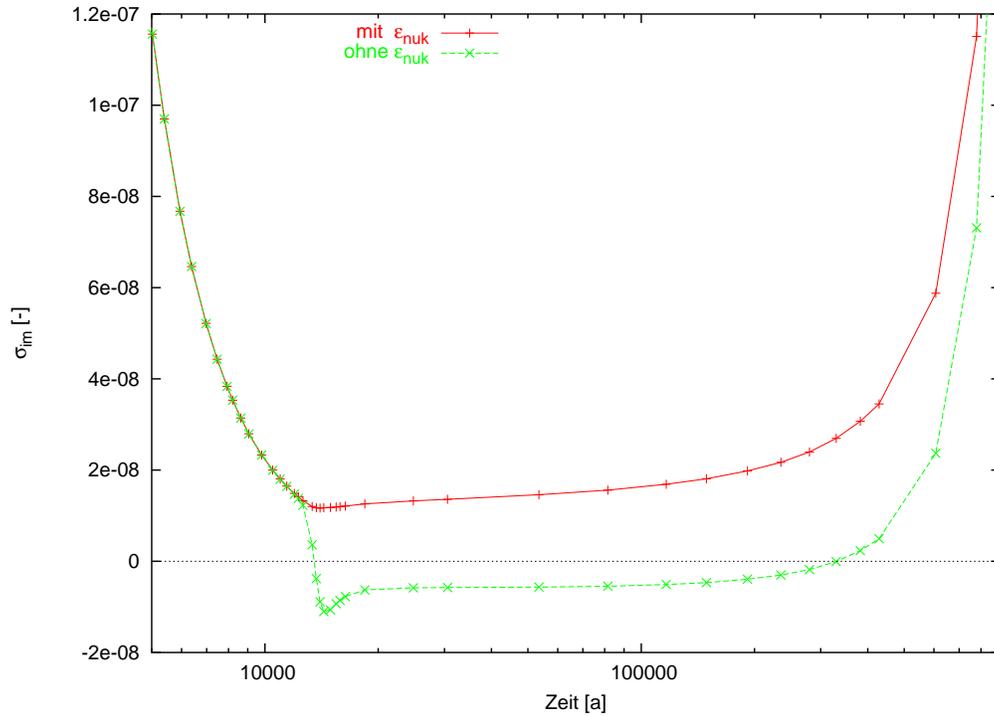


Abbildung 5.7: Imaginärteil des Eigenwertes, aufgetragen über der Entwicklungszeit des $450 M_{\odot}$ -Sterns. Bei der durchgezogenen Kurve wurden Störungen in der nuklearen Energieproduktion unterdrückt, bei der gepunkteten nicht. Der Beginn der Zeitzählung ist willkürlich in die Vorhauptreihenphase gelegt.

5.2.4 Sensitivität gegenüber den Randbedingungen

Wie bereits in Kapitel 4.1.1 erwähnt, ist die äußere mechanische Randbedingung nicht eindeutig. Sie unterliegt Annahmen über die Reaktion der Sternatmosphäre auf die Pulsation. Es konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, daß die Sensitivität der linearen Stabilitätsuntersuchung gegenüber der äußeren mechanischen Randbedingung von der Lage der Oberfläche des quasihydrostatischen Hintergrundmodells abhängt. In Abbildung 5.8 ist der Imaginärteil der Eigenfrequenz eines bestimmten Sternmodells bei variierender Lage der Oberfläche aufgetragen. Als Koordinate für die Lage der Oberfläche wurde die optische Tiefe gewählt. Wird die äußere Randbedingung in den Sternentwicklungsrechnungen zu grob berücksichtigt, in dem Sinne, daß der Stern nicht bis zu einer optischen Tiefe $\tau = 2/3$ gerechnet wird, machen die verschiedenen Randbedingungen völlig unterschiedliche Aussagen über die Stabilität des Sterns! Mit abnehmender optischer Tiefe konvergieren die Anwachsraten, und die unterschiedlichen Randbedingungen spielen in der Tat keine Rolle mehr hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens. Es sei nochmals betont, daß die lineare Stabilitätsanalyse sehr sensibel auf das Hintergrundmodell reagiert. Zum Beispiel ist es eine Tatsache, daß eine grobe Auflösung von Gebieten mit großen Opazitätsgradienten die Bewertung der Stabilität verfälscht (private Mitteilung W. Glatzel). Daher muß ein Sternmodell, bevor es einer linearen Analyse unterzogen wird, erst auf seine Tauglichkeit bezüglich einer Stabilitätsuntersuchung geprüft werden.

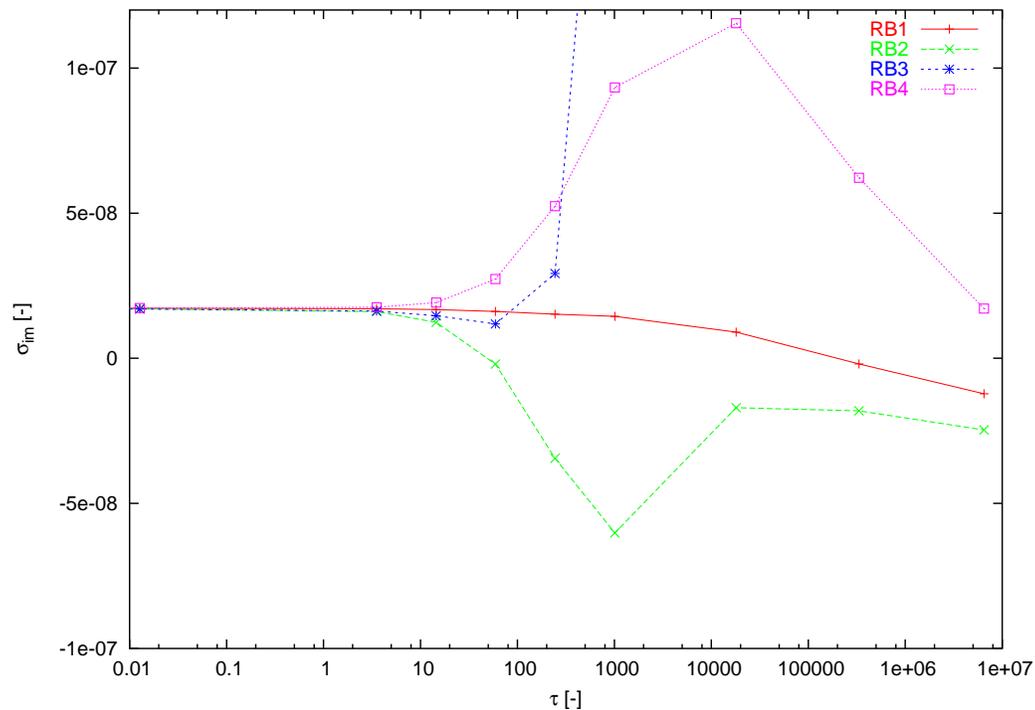


Abbildung 5.8: Imaginärteil unterschiedlicher Sternmodelle. Die Sternmodelle unterscheiden sich darin, daß die äußere Randbedingung nicht in der Photosphäre, sondern tiefer im Sterninneren liegt. Das Vorzeichen hängt entscheidend von der Lage der äußeren Randbedingung ab.

5.2.5 Instabilitätsphasen und Entwicklung des Hintergrundmodells

Es stellt sich die Frage, wie die instabile Phase der untersuchten Sterne mit der Entwicklung und der Struktur der zugrunde liegenden Hintergrundmodelle zusammenhängt. Hierzu ist in Abbildung 5.9 die Vorhaupt- und Hauptreihenphase im HR-Diagramm aller Sterne, die Instabilitäten aufweisen, dargestellt. Die Phase der Instabilität wurde im Entwicklungsweg grün markiert. Die Instabilität beginnt mit dem Eintreten des Sterns in die Hauptreihenphase und endet, lange bevor die Hauptreihenentwicklung abgeschlossen ist. Die Hauptreihenphase gilt als beendet, wenn der zentrale Wasserstoff nahezu verbraucht ist. Alle untersuchten Sterne sind in der Vorhauptreihenentwicklung stabil, werden zu Beginn der Hauptreihenentwicklung instabil und stabilisieren sich vor Beendigung der Hauptreihe wieder. Das Ende der instabilen Phase hat mindestens zwei Gründe:

1. spätestens mit dem Ausbrennen des zentralen Wasserstoffes verschwindet die Ursache der Instabilität, und
2. die relative Störampplitude im Zentrum des Sterns nimmt im Laufe der Hauptreihenentwicklung ab. Die Bedingungen für den ϵ -Mechanismus verschlechtern sich.

Die zweite Argumentation wird bekräftigt, wenn man sich die Entwicklung der Eigenfunktion von Beginn bis zum Ende der instabilen Phase ansieht. Abbildung 5.10 zeigt den Verlauf der Eigenfunktion von vier aufeinander folgenden Modellen des

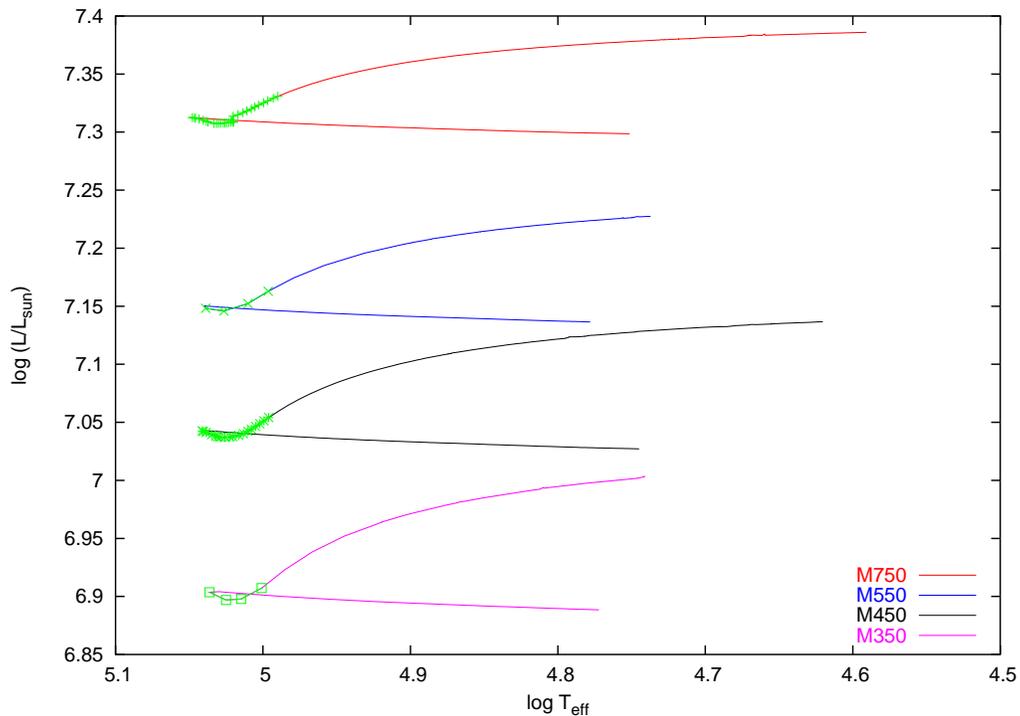


Abbildung 5.9: Entwicklungsweg der untersuchten Sterne im HR-Diagramm, angefangen mit der Vorhauptreihe bis zum vollständigen Verbrauch des zentralen Wasserstoffes. Die instabile Phase ist grün markiert.

450 M_{\odot} -Sterns. Der Grund dieses Verhaltens liegt in der Ausdehnung des Sterns infolge seiner Entwicklung. Dies geht mit einer Verringerung der mittleren Dichte einher. Die zentrale Störampplitude nimmt mit kleiner werdender mittlerer Dichte ab. Zu Beginn der instabilen Phase beträgt die mittlere Dichte $\bar{\rho}_c = 0.8 \text{ g/cm}^3$ und am Ende nur noch $\bar{\rho}_c = 0.4 \text{ g/cm}^3$. Der Verlauf t_4 mit der kleinsten Amplitude im Zentrum entspricht einem stabilen Modell, das eine mittlere Dichte von $\bar{\rho}_c = 0.3 \text{ g/cm}^3$ besitzt. Eine ausgedehnte Hülle begünstigt demnach bei Population-III-Sternen die Dämpfung beträchtlich.

Zum Zwecke eines besseren Verständnisses für das Einsetzen der instabilen Phase ist es notwendig, die Vorgänge im Zentrum des betreffenden Sterns genauer zu betrachten. In den Abbildungen (5.11, 5.12 und 5.13) werden neben der Anwachsrate die Zentraltemperatur, die gesamte nukleare Energieproduktion und die logarithmische Ableitung der nuklearen Energieproduktion nach der Temperatur bei konstanter Dichte gezeigt. Die instabile Phase setzt ein, wenn der Stern seine Hauptreihenentwicklung beginnt. Um den rapiden Anstieg und den darauffolgenden Abfall in allen gezeigten zentralen Größen zu verstehen, muß man sich vergegenwärtigen, daß im Gegensatz zu späteren Sternenerationen Population-III-Sterne bei ihrer Geburt keine der schweren Elemente, die für den CNO-Zyklus notwendig sind (insbesondere Kohlenstoff), zur Verfügung haben. So beginnen die Sternmodelle in den Rechnungen von Straka (2002) ihre Vorhauptreihenentwicklung mit einem Wasserstoffmassenanteil von $X = 0.77$ und einem Heliummassenanteil von $Y = 0.23$. Die durch die pp-Kette freigesetzte Energie ist nicht

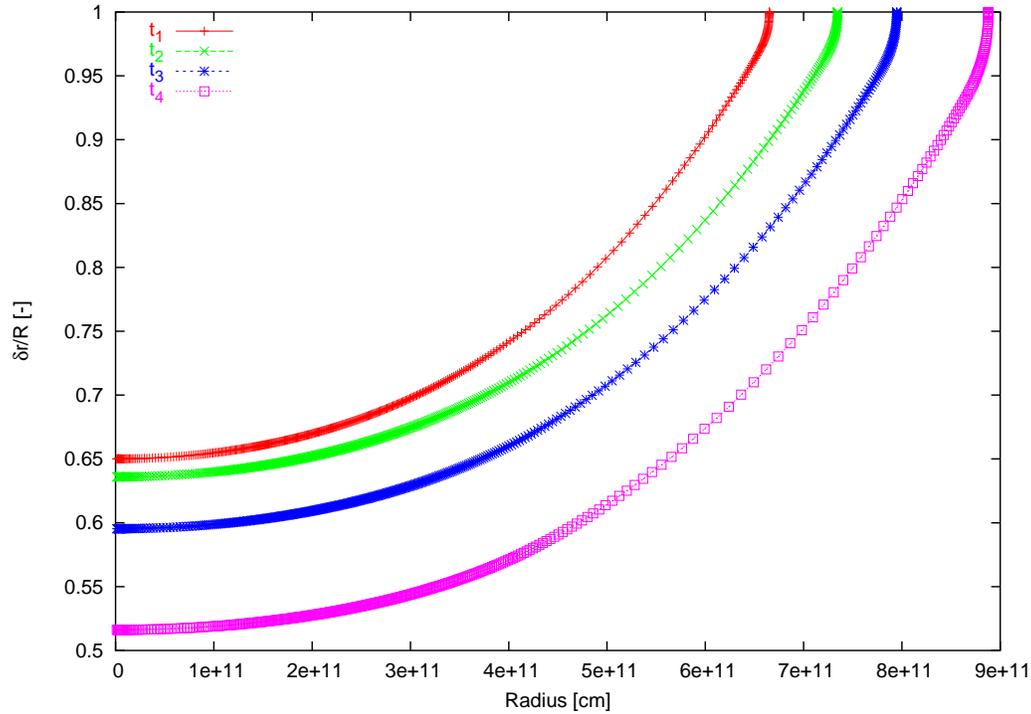


Abbildung 5.10: Fundamentalmode aufeinanderfolgender Sternmodelle mit $t_1 < t_2 < t_3 < t < t_4$. Mit t_1 = Beginn der instabilen Phase, t_3 = Ende der instabilen Phase. Die ersten drei Modelle sind instabil, t_4 ist stabil.

in der Lage, den Strahlungsverlust auszugleichen, so daß die Vorhauptreihenkontraktion nicht stoppt. Der Stern kontrahiert weiter und setzt gravitative Bindungsenergie frei, um die Strahlungsverluste zu decken. Nach dem Virial-Satz nimmt auch die thermische Energie zu, bis Temperaturen $\sim 10^8$ K erreicht werden, bei denen der 3α -Prozeß genügend Kohlenstoff produziert hat², so daß schließlich der CNO-Zyklus die Energieproduktion übernehmen kann. Anschließend expandiert der Stern auf thermischer Zeitskala, und die Zentraltemperatur nimmt ab. Bei allen gerechneten Modellen fällt das Minimum des Imaginärteils der Eigenfrequenz (maximale Anwachszeit der Instabilität) mit dem Einsetzen des CNO-Zyklus überein. Während der maximalen (thermischen) Kompression des Sterns entlang seines Entwicklungsweges überlagern sich daher mehrere, voneinander nicht unabhängige, den ϵ -Mechanismus begünstigende Faktoren:

- maximale relative Amplitude der Fundamentalmode
- maximale nukleare Energieproduktionsrate
- maximale Temperatursensitivität der nuklearen Energieproduktion

²Kleinste Mengen sind ausreichend, $X_{C^{12}} \approx 10^{-11}$ (relative Häufigkeit in Masse).

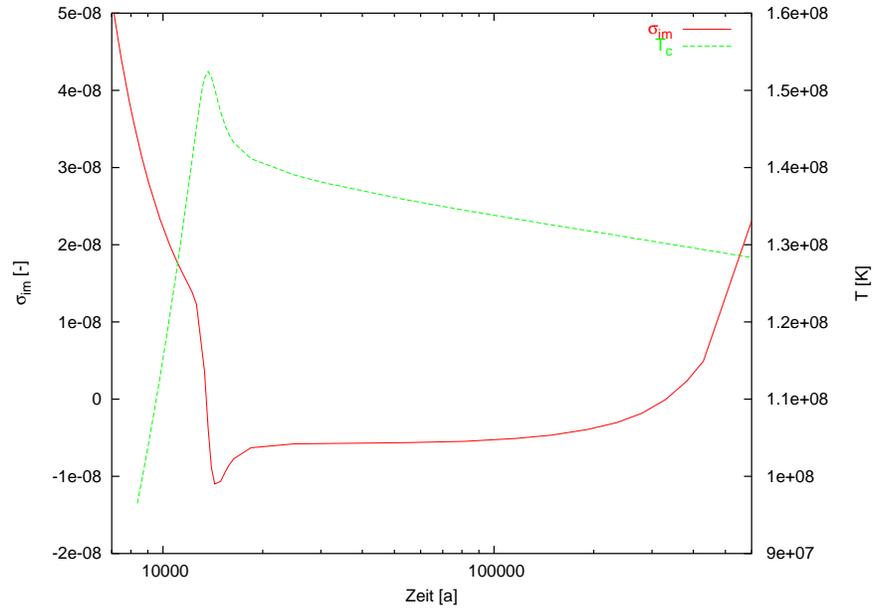


Abbildung 5.11: Gegenüberstellung von Zentraltemperatur und dimensionslosem Imaginärteil der Eigenfrequenz, aufgetragen über der Entwicklungszeit. Der Beginn der Zeitzählung ist willkürlich in die Vorhaupttreihenphase gelegt.

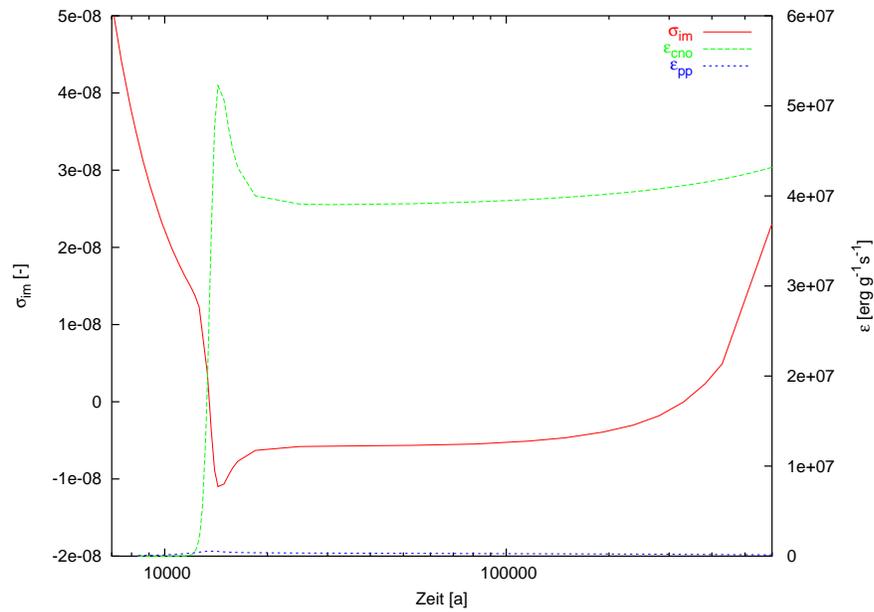


Abbildung 5.12: Wie Abbildung 5.11 jedoch mit der gesamten nuklearen Energieproduktion, aufgespalten in einen Anteil des CNO-Zyklus und einen der pp-Kette.

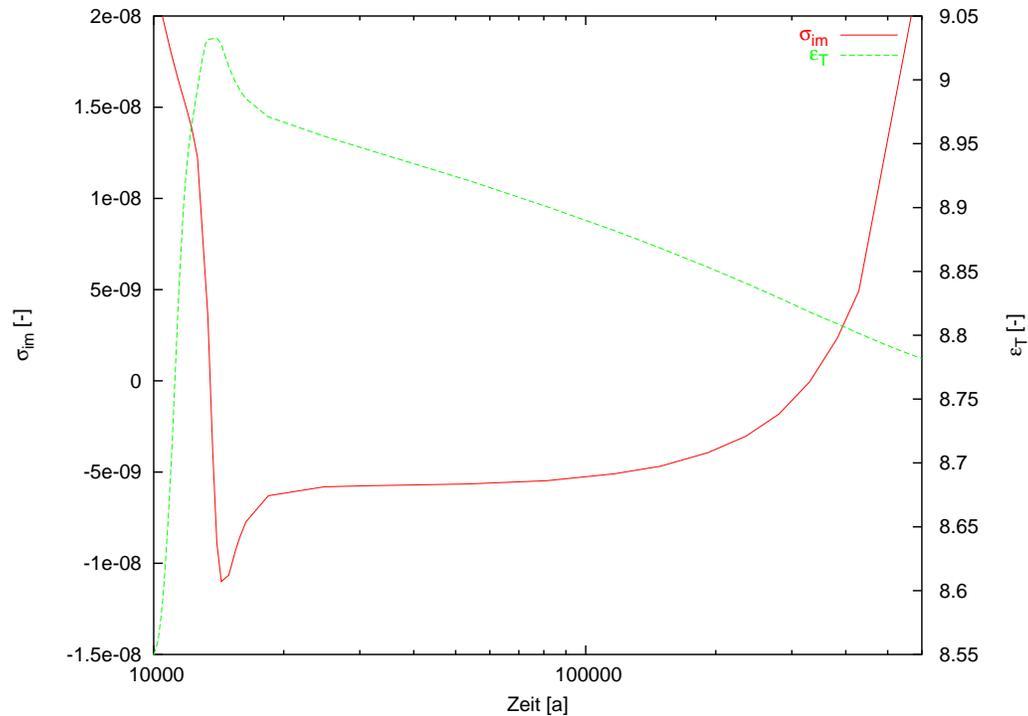


Abbildung 5.13: Wie Abbildung 5.11, anstelle der Zentraltemperatur ist die Ableitung der Energieproduktion nach der Temperatur bei konstanter Dichte (=Temperatursensitivität) der innersten Massenkugel dargestellt.

5.3 Nichtadiabasie vs. Quasi-Adiabasie

Die Lösung der linearen adiabatischen Wellengleichung (4.29) und die Auswertung des Arbeitsintegrals (Kapitel 4.5) für Population-III-Sterne geben einen ersten Hinweis auf das Stabilitätsverhalten dieses Sterntyps. Wie stark beide Analysen voneinander abweichen, soll in diesem Abschnitt anhand des $750 M_{\odot}$ diskutiert werden. Abbildung 5.14 zeigt die relative Abweichung der Pulsationsperiode in der vollen nichtadiabatischen Analyse Π_{NAD} von der Pulsationsperiode, die man in der adiabatischen Untersuchung erhält Π_{AD} . Als Zeitfenster wurde die Hauptreihenphase gewählt. Die Abweichungen sind verschwindend gering. Abbildung 5.15 zeigt den dimensionslosen Imaginärteil der Eigenfrequenz, wie er sich bei der vollen Betrachtung und der adiabatischen Näherung ergibt. In beiden Fällen beginnt die instabile Phase mit dem Einsetzen der Hauptreihenentwicklung. Die Ergebnisse der linearen, quasiadiabatischen Stabilitätsanalyse unterscheiden sich von der vollen nichtadiabatischen Untersuchung in zwei Punkten:

- a) Der Imaginärteil ist im ersten Fall durchgehend kleiner, die Instabilität somit größer als in der nichtadiabatischen Rechnung.
- b) Die instabile Phase dauert in der quasiadiabatischen Untersuchung länger an.

Warum die quasiadiabatische Approximation diese beiden Trends zeigt, läßt sich erklären, wenn die Analyse unter Vernachlässigung von Störungen der nuklearen Ener-

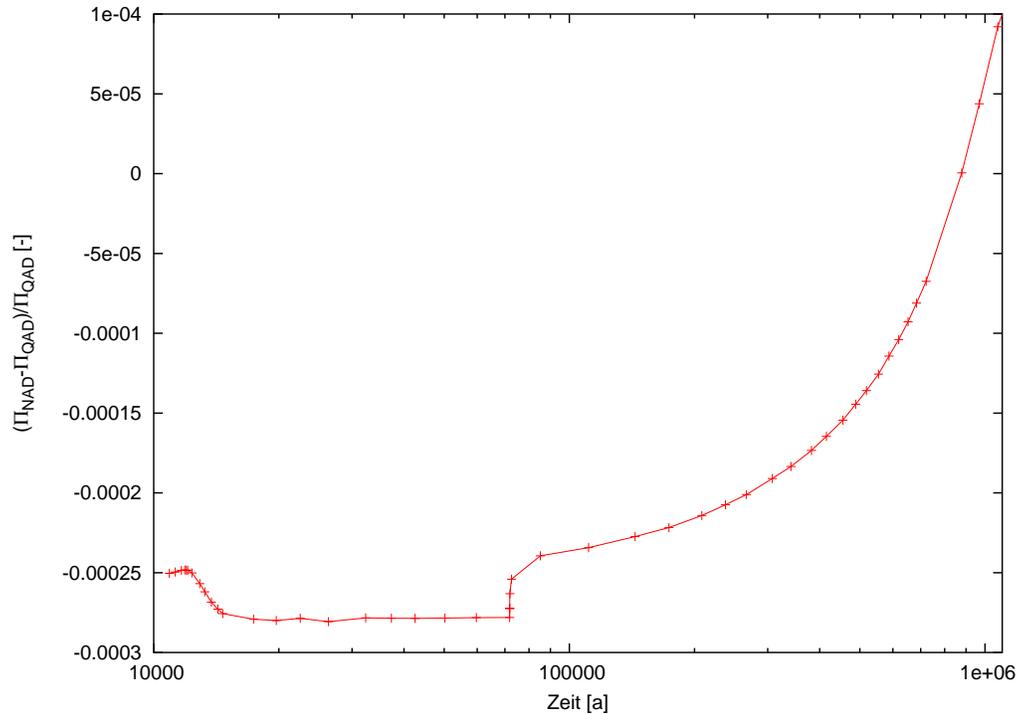


Abbildung 5.14: Relative Abweichung der Pulsationsperiode von der adiabatischen Approximation, wie sie sich in der nichtadiabatischen Analyse ergibt.

gieproduktion ($\epsilon_T \equiv \epsilon_P \equiv 0$) wiederholt wird. Abbildung 5.16 zeigt, welche Werte der Imaginärteil in dem Fall für beide Berechnungswege annimmt. Die Dämpfung der Hülle in der quasiadiabatischen Approximation ist sichtlich kleiner als bei voller Analyse. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß die volle nichtadiabatische Untersuchung die zuverlässigeren Ergebnisse liefert. In diesem Sinne wird der Dämpfungsgrad der Hülle in der quasiadiabatischen Approximation im Gegensatz zur nichtadiabatischen Analyse unterschätzt. Hierin ist ein Grund für die in der Quasiadiabasis resultierende längere Dauer und größere Stärke der Instabilitäten zu sehen. Eine weitere Folge ist, daß bei einigen Sternmodellen zusätzlich zur Fundamentalmode wegen der scheinbar reduzierten Dämpfung der Hülle auch der erste Oberton instabil ist, was in der vollen nichtadiabatischen Betrachtung nie der Fall ist.

Starke nichtadiabatische Effekte treten bei Population-I-Sternen bei hohen Leuchtkraft-zu-Masse-Verhältnissen, L/M , auf. Unter starker Nichtadiabasis versteht man weithin Moden, deren Imaginärteil der Eigenfrequenz in der nichtadiabatischen Analyse stark von dem in der adiabatischen abweicht. Starke Nichtadiabasis kann aber auch Eigenmoden offenbaren, die überhaupt kein Pendant in der adiabatischen Untersuchung besitzen und in der Regel mit sehr hohen Anwachsraten begleitet sind. Dies trifft vor allem auf die sogenannten seltsamen Moden (im Englischen: „strange modes“) zu. Eine eingehende Diskussion dieser Moden ist bei Glatzel (1994) zu finden.

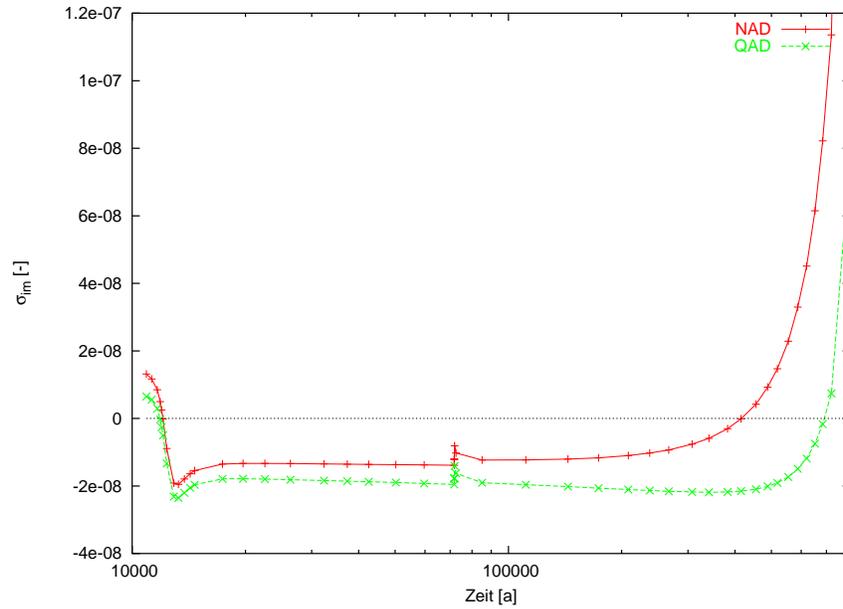


Abbildung 5.15: Dimensionsloser Imaginärteil der Eigenfrequenz. Die durchgezogene Linie entstammt der nichtadiabatischen Untersuchung, und die gepunktete Linie folgt aus der quasiadiabatischen Approximation.

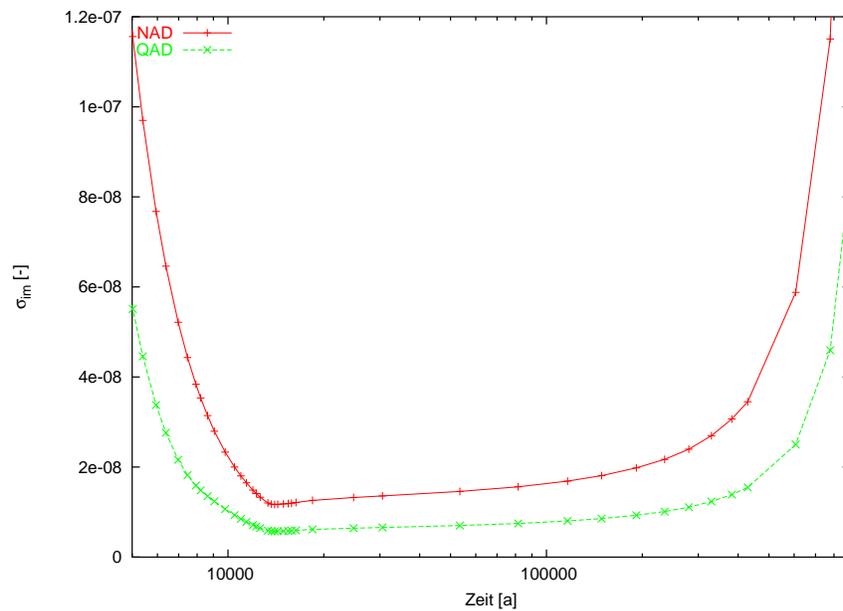


Abbildung 5.16: Der Imaginärteil in der quasiadiabatischen (QAD) und der vollen nichtadiabatischen Analyse (NAD), in beiden Fällen unter Ausschluß des ϵ -Mechanismus. Die Dämpfung der Hülle ist in der approximativen Analyse kleiner als in der vollen.

Das hohe L/M -Verhältnis ist jedoch nur *eine* notwendige Bedingung, die Metallizität ist eine wichtige Komponente, weil die meisten Instabilitäten in irgendeiner Weise mit der Opazität zusammenhängen. Dies ist bei Population-III-Sternen nicht der Fall. Daher führen die adiabatische Näherung und die volle nicht-adiabatische Analyse zwar zu quantitativ unterschiedlichen Werten, jedoch geben beide qualitativ den gleichen Trend wieder. Man kann daher sagen, daß die Sterne auf der Hauptreihe in guter Näherung adiabatisch schwingen.

Kapitel 6

Hydrodynamik in sphärischer Symmetrie

Dieses Kapitel stellt die Erhaltungsgleichungen zur Beschreibung der Sternpulsation vor und geht auf die ihnen zugrunde liegenden Annahmen ein. Dem folgt eine Diskussion über die numerische Behandlung der aufgestellten Gleichungen, zum einen hinsichtlich der Wahl der Diskretisierung und zum anderen der Wahl des Lösungsalgorithmus.

Ein Stern stellt aus hydrodynamischer Sicht eine kompakte Gaskugel dar. Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie sind bei einem strömungsmechanischen Problem, das der Kontinuumshypothese genügt (Bachelor, 1967), durch die Navier-Stokes-Gleichungen gegeben. Die Kontinuumshypothese verlangt, daß die mittlere freie Weglänge, λ , im Vergleich zur Ausdehnung des Systems, L , sehr klein ist. Dies ist für Sterne zu einem sehr hohen Grad erfüllt. In der Tat können die hydrodynamischen Gleichungen auch auf interstellares und intergalaktisches Gas angewendet werden, wegen der großen Dimensionen dieser astrophysikalischen Objekte.

6.1 Lagrange-Formalismus

Erhaltungsgleichungen eines hydrodynamischen Systems können sowohl in differentieller als auch in integraler Form aufgestellt werden. Beide Formulierungen sind mathematisch äquivalent. Zu deren numerischen Handhabung stehen Verfahren bereit, die stets von einer dieser beiden Formulierungen ausgehen. In dieser Arbeit wird die Finite-Volumen-Methode (hiernach FVM) verwendet, die die volumenintegrierte Form der Erhaltungsgleichungen zum Ausgang hat. Die Erhaltungsgleichung einer spezifischen skalaren Größe ψ lautet in einem *ortsfesten* Bezugssystem und in Volumen integrierter Form (z.B. Versteeg & Malalasekera 1995):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \psi dV = - \oint_{\partial V} \vec{n} (\rho \psi \vec{u}) dA + \oint_{\partial V} \vec{n} (\Gamma_\psi \text{grad } \psi) dA + \int_{KV} S_\psi dV. \quad (6.1)$$

Sie sagt aus, daß die zeitliche Änderung von $\rho\psi$ im räumlich festen Kontrollvolumen KV verursacht wird durch:

- Transportvorgänge über die Oberfläche ∂V ,
 - a) advektiver Fluß, erstes Integral rechte Seite,
 - b) diffusiver Fluß, zweites Integral rechte Seite .
- Quellterme S_ψ in KV.

\vec{u} gibt die Strömungsgeschwindigkeit an, gemessen in einem Inertialsystem, Γ_ψ ist der molekulare Transportkoeffizient, ρ die Massendichte des Mediums und \vec{n} der auf der Oberfläche des Kontrollvolumens senkrecht stehende Einheitsvektor. Gleichung (6.1) geht von einem *räumlich festen* Kontrollvolumen aus, man spricht von *Eulerscher Betrachtungsweise*. Verlangt man, daß das Kontrollvolumen, welches zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit einer materiellen Fläche des Fluids¹ übereinstimmt, dies auch für alle späteren Zeiten $t > t_0$ macht, ist ein advektierter Materietransport über die Oberfläche ausgeschlossen. Man bezeichnet diesen Fall als *Lagrangesche Betrachtungsweise*.

Obwohl in der Lagrangesche Betrachtungsweise ein advektiver Materietransport über eine materielle Fläche untersagt ist, ist ein molekularer Transport und somit Diffusion möglich². Im speziellen Kontext der stellaren Astrophysik wird der Stern in Massenschalen unterteilt, deren Entwicklung in der Zeit verfolgt wird. Dabei ist Materieaustausch unter den Massenschalen durch Mischprozesse durchaus möglich. Die Masse einer solchen Schale ändert sich dabei per Konstruktion nicht. Mit Hilfe des *Reynoldschen Transporttheorems*:

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV(t)} \rho\psi dV = \int_{KV_0} \frac{\partial \rho\psi}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \vec{n} (\rho\psi\vec{u}) dA, \quad (6.2)$$

wird die allgemeine Erhaltungsgleichung (6.1) in eine neue Beschreibungsweise gebracht (6.3). $MV(t)$ bezeichnet ein materielles Volumen (Massenschale). Das Reynoldsche Transporttheorem (z.B. Spurk 1996) stellt einen Zusammenhang zwischen der Lagrangeschen und der Eulerschen Betrachtungsweise her. Die totale Zeitableitung D/Dt wird auch substantielle Ableitung genannt. Sie gibt an, wie sich die Größe $\rho\psi\Delta V$ auf ihrem Weg durch das Strömungsgebiet ändert. Eine mögliche Verformung des Volumens ist, da die Zeitableitung vor dem Integral steht, hierdurch berücksichtigt. In der Lagrangeschen Formulierung der allgemeinen Erhaltungsgleichung verschwindet jetzt der Advektionsterm aus der Bilanzierung. Der Diffusionsterm taucht noch auf, und Mischprozesse (molekular und konvektiv) können mit seiner Hilfe modelliert werden. Da trotz konvektiver Vorgänge der Lagrangeschen Beschreibung gefolgt wird, kann von einer in der stellaren Astrophysik

¹Unter einem Fluidteilchen wird in der Hydrodynamik die kleinste Einheit einer Strömung verstanden. Es besteht aus genügend vielen Teilchen, so daß die Dichte benachbarter Fluide vergleichbar ist. Sowohl Gase als auch Flüssigkeiten werden unter dem Begriff Fluid subsumiert.

²Hier sei an die planparallele, laminare Couette-Strömung erinnert. In vertikaler Richtung findet kein Materietransport jedoch molekularer Impulstransport statt. Dieser ist für die Reibung verantwortlich, $\Gamma_u =$ Viskositätskoeffizient.

abgeschwächten Formulierung des Lagrangeschen Prinzips gesprochen werden:

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV(t)} \rho \psi dV = \oint_{\partial V} \vec{n} (\Gamma \text{ grad } \psi) dA + \int_{MV(t)} S_\psi dV. \quad (6.3)$$

Im weiteren wird darauf verzichtet für das Volumen explizit $MV(t)$ zu schreiben.

6.2 Erhaltungsgleichungen

Bei der Aufstellung der Erhaltungsgleichungen spiegeln sich die Annahmen über die Sternmaterie teilweise wider. Die Sternmaterie setzt sich zusammen aus Materie- und Photonengas, wobei die Opazität den Grad der Koppelung der beiden Komponenten angibt. Zunächst werden die Erhaltungsgleichungen des Materiegases aufgestellt.

Massenerhaltung

Das ionisierte Materiegas im Stern kann als Einkomponenten-Fluid betrachtet werden. Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich dann die einfache Form:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (6.4)$$

Impulserhaltung

Wendet man Newtons zweites Gesetz auf eine Massenschale an, erhält man die Impulserhaltung für das Gas:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV + \int_V \nabla P dV + \int_V \frac{Gm\rho}{r^2} dV - \frac{4\pi}{c} \int_V \kappa \rho H dV = 0. \quad (6.5)$$

Energieerhaltung

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik angewandt auf eine Massenschale liefert die Energiegleichung mit der spezifischen inneren Energie e als Erhaltungsgröße:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV + \int_V P \nabla \cdot u dV - 4\pi \int_V \rho \kappa (J - S) dV - \int_V \rho \epsilon_{\text{nuc}} = 0. \quad (6.6)$$

In diesem System tauchen zwei Größen auf, die zum Photonengas gehören; der Strahlungsimpuls H und die Strahlungsenergie J . Eine volle strahlungshydrodynamische Betrachtung verlangt eine separate Bilanzierung beider Größen. Geht man von einem isotropen Strahlungsfeld, sphärischer Symmetrie und einem Eddingtonfaktor von $1/3$ aus, ergeben sich nach Castor (1972) die Strahlungsimpuls-

$$\frac{DH}{Dt} + H \nabla \cdot u + H \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c}{3} \frac{\partial J}{\partial r} + c \kappa \rho H = 0, \quad (6.7)$$

und die Strahlungsenergiegleichung in differentieller Form,

$$\frac{DJ}{Dt} + \frac{4}{3}J\nabla \cdot u + c\nabla \cdot H - c\kappa\rho(S - J) = 0. \quad (6.8)$$

Beide Gleichungen erhält man über eine Momentenbildung der Strahlungstransportgleichung. Die Strahlungsenergiegleichung ergibt sich dabei aus dem nullten Moment und die Strahlungsimpulsleichung aus dem ersten Moment. Die volle Beschreibung und eine detaillierte Herleitung ist bei Mihalas & Mihalas (1984) zu finden. Da die Sternmaterie optisch dick ist, wird in dieser Arbeit für die Strahlung die Diffusionsapproximation angenommen. Die Strahlungsimpulsleichung wird dabei zumindest dann auf den Grenzfall der sogenannten Eddington-Approximation reduziert:

$$H = -\frac{1}{3\kappa\rho} \frac{\partial J}{\partial r}. \quad (6.9)$$

Nach der Diffusions-Approximation ist die Strahlungsenergie J gleich der integrierten Planckfunktion B , d.h. es wird ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht an (LTE) vorausgesetzt:

$$J = B = \frac{\sigma}{\pi} T^4. \quad (6.10)$$

σ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante. Der Strahlungsdruckanteil in der Impulsleichung kann somit durch die Temperatur ausgedrückt werden. Mit Hilfe der Diffusionsapproximation (6.10) und unter der Annahme der Eddington-Näherung, $P_{\text{rad}} = 4\pi J/3c$ wird der Strahlungsdruck in eine anschauliche Form gebracht:

$$-\frac{4\pi}{c} \int_V \kappa\rho H dV = \frac{4\pi}{3c} \int_{\partial V} J dA, \quad (6.11)$$

$$= \int_{\partial V} \frac{aT^4}{3} dA, \quad (6.12)$$

$$= \int_{\partial V} P_{\text{rad}} dA. \quad (6.13)$$

Die beiden Druckanteile werden zum Gesamtdruck, $P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}$, zusammengefasst. Die Impulsleichung lautet nun:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV + \int_V \nabla P dV + \int_V \frac{Gm\rho}{r^2} dV = 0. \quad (6.14)$$

Die Diffusionsapproximation vereinfacht ebenfalls die Strahlungsenergiegleichung:

$$4\pi\kappa\rho(S - J) = 4\pi\nabla \cdot H. \quad (6.15)$$

Mit den Beziehungen (6.9) und (6.10) wird schließlich der Strahlungsfluß F_{rad} definiert;

$$4\pi\nabla \cdot H = \nabla \cdot \left(-\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (6.16)$$

$$= \nabla \cdot F_{\text{rad}}. \quad (6.17)$$

Berücksichtigt man noch, daß der Energietransport auch auf konvektivem Wege geschehen kann, ergibt sich die Energiebilanz für die Materie zu:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV + \int_V P \nabla \cdot u dV - \int_{\partial V} (F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}}) dA - \int_V \rho \epsilon_{\text{nuc}} dV = 0. \quad (6.18)$$

Der konvektive Fluß F_{conv} muß mit Hilfe eines Konvektionsmodells bestimmt werden, was mindestens zu einer weiteren Gleichung führt. Man unterscheidet zwischen stationären und instationären Konvektionsmodellen, die weiterhin von lokaler oder nichtlokaler Art sein können. Wenn die Interaktion von Pulsation und Konvektionszonen studiert werden soll, ist ein instationäres Konvektionsmodell nötig, weil beide Phänomene eine vergleichbare Zeitskala besitzen. Da kein zuverlässiges zeitabhängiges Konvektionsmodell existiert und bisherige Untersuchungen kein einheitliches Bild zeichnen, wurde bei der hydrodynamischen Simulation – wie bei der linearen Analyse auch – von einem zeitlich unveränderten konvektiven Energiefluß ausgegangen („frozen-in approximation“) Gebrauch gemacht. Eine Interaktion zwischen Pulsation und konvektiv instabilen Schichten wird ignoriert.

Gleichung (6.18) bedarf einer weitergehenden Diskussion hinsichtlich des ersten Termes. Die vorhandenen Sternmodelle entstammen einer Entwicklungsrechnung für hydrostatische Sterne. Sie befinden sich daher nicht notwendigerweise im thermischen Gleichgewicht. Jede Massenschale besitzt einen gewissen Betrag an gravitativer Bindungsenergie, der von der Vorgeschichte des Sterns abhängt, und positiv oder negativ sein kann. Diese gravitative Bindungsenergie wird durch das erste Integral in der Energiegleichung repräsentiert. Schreibt man Gleichung (6.18) für den quasi-hydrostatischen Fall ($u \approx 0$) auf,

$$\left. \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV \right|_{\text{entw}} - \int_{\partial V} (F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}}) dA - \int_V \rho \epsilon_{\text{nuc}} dV = 0, \quad (6.19)$$

lassen sich der konvektive Energiefluß und die gravitative Bindungsenergie zu einem Quellterm zusammenfassen;

$$\int_V S_{\text{GC}} dV := \left. \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV \right|_{\text{entw}} - \int_{\partial V} F_{\text{conv}} dA \quad (6.20)$$

$$= \int_{\partial V} F_{\text{rad}} dA + \int_V \rho \epsilon_{\text{nuc}} dV. \quad (6.21)$$

Während der Pulsation wird der Quellterm S_{GC} konstant gehalten. Er spiegelt zum einen die Vorgeschichte des Sterns wider, zum anderen die mangelnden Kenntnisse über die Wechselwirkung einer konvektiv instabilen Schicht mit der Pulsation. Die Energiegleichung erhält schließlich die Form:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV + \int_V P \nabla \cdot u dV - \int_{\partial V} F_{\text{rad}} dA - \int_V \rho \epsilon_{\text{nuc}} dV - \int_V S_{\text{GC}} dV = 0. \quad (6.22)$$

Es sei nochmals betont, daß der Quellterm aus dem Hintergrundmodell gewonnen wird. Um das Gleichungssystem zu schließen, sind Materialfunktionen und die Spezifizierung der Zustandsgleichung notwendig.

6.3 Numerische Viskosität

Die molekulare Dissipation wurde wegen ihrer verschwindenden Größe in der Bilanzierung nicht berücksichtigt. Daher taucht in der bisherigen Formulierung von Impuls- und Energiegleichung kein Viskositätsterm auf. Bilden sich jedoch Verdichtungsstöße, ändern sich die thermodynamischen und mechanischen Größen sehr stark über sehr kleine Distanzen. Es entstehen große Geschwindigkeitsgradienten, so daß selbst bei vernachlässigbarer molekularer Viskosität³ μ die viskose Reibung (Viskositätsterm, $\mu \partial u / \partial x$) große Werte annimmt. Für den Fall, daß die Strömung eindimensional und planparallel ist, lautet die differentielle Form der Impulsgleichung (Courant, 1948):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + p - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.23)$$

Die Stoßdicke beträgt einige mittlere freie Weglängen. Um Stöße numerisch behandeln zu können, haben von Neumann & Richtmyer (1950) eine künstliche Viskosität eingeführt. Dabei wurde ausgenutzt, daß der Viskositätsterm formal als *viskoser* Druckterm betrachtet werden kann. Sie führten einen solchen viskosen Druck ein, der in der unmittelbaren Nähe von Stößen wirkt. Ihre ursprüngliche Arbeit bezog sich auf planparallele Strömungen. Tscharnuter & Winkler (1979) verallgemeinerten diesen Ansatz und führten eine geometrieunabhängige Tensorviskosität ein:

$$\mathbf{Q} = \mu_Q \left[\nabla \vec{u} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I} \right]. \quad (6.24)$$

Hierbei bezeichnet $\nabla \vec{u}$ den symmetrisierten Geschwindigkeitsgradiententensors, \mathbf{I} den Einheitstensor und μ_Q die künstliche Viskosität. Der viskose Impulstransport, \vec{u}_Q , und die viskose Energiedissipation, ϵ_Q , lauten:

$$\vec{u}_Q = -\nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (6.25)$$

$$\epsilon_Q = -\frac{1}{\rho} \mathbf{Q} \cdot \nabla \vec{u}. \quad (6.26)$$

Die numerische Viskosität besteht aus einem linearen und einem quadratischen Term, welche mit den Koeffizienten q_1 und q_2 gewichtet sind:

$$\mu_Q = -q_1 l_{\text{visc}} c_s + q_2^2 l_{\text{visc}}^2 \min(\nabla \cdot \vec{u}, 0). \quad (6.27)$$

Das Produkt ($q_{1,2} l_{\text{visc}}$) von Viskositätskoeffizient und viskoser Längenskala bestimmt die Distanz, über die ein Stoß verbreitert werden soll. In dieser Arbeit wurde für l_{visc} die Maschenweite, gemessen im Radius, zwei benachbarter Zellen angesetzt (vgl. Diskretisierung des Sterns S. 59);

$$\begin{aligned} l_{\text{visc}} &= \Delta r, \\ &= r_i - r_{i+1}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Der lineare Teil von Gl. (6.27) hängt von der lokalen Schallgeschwindigkeit ab. Dieser Term wurde mit dem Quadrat des Massenverhältnisses, $(m_i/M)^2$, skaliert, um die künstliche

³Nur in diesem Abschnitt bezeichnet μ die molekulare Viskosität. Im übrigen Text ist mit μ das Molekulargewicht gemeint.

Tabelle I Pulsationsgleichungen

$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0$	Kontinuitätsgleichung
$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV + \int_V \nabla P dA + \int_V \frac{Gm\rho}{r^2} dV - \int_V u_Q dV = 0$	Impulsgleichung
$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV + \int_V (P \nabla \cdot u - \rho \epsilon_{nuc} - S_{GC} - \rho \epsilon_Q) dV - \int_{\partial V} F_{rad} dA = 0$	Energiegleichung
$\frac{Dr^3}{Dt} - 3r^2 u = 0$	Lagrange-Bedingung

Dämpfung im Zentrum – die Quelle der Instabilität – so klein wie möglich zu halten⁴. Der zweite Term wurde nicht skaliert. Während der lineare Teil der künstlichen Viskosität stets wirkt, ist der quadratische Teil nur bei Kompression ($\nabla \cdot u < 0$) und nichthomologer Bewegung einer Massenschale. Für die Viskositätskoeffizienten werden im allgemeinen Werte im Intervall $[0 : 2]$ gewählt.

6.4 Zusammenfassung aller relevanten Gleichungen

Das dynamische Verhalten einer selbstgravitierenden Gaskugel wird durch die Erhaltungsgleichungen und die Lagrange-Bedingung vollständig beschrieben. Sie sind in Tabelle 6.4 aufgelistet. Die zur Schließung des Systems noch benötigten Zustands- und Materialfunktionen stehen in Tabelle II. Die Programmroutinen zur Bestimmung der Opazität, des Molekulargewichtes und der nuklearen Energieproduktion wurden aus dem Sternentwicklungsprogramm von C. W. Straka übernommen. Eine genaue Beschreibung der Funktionsweise ist bei Straka (2002) zu finden. Die nukleare Energieproduktion wird mit Hilfe eines Netzwerkes gewonnen. Die Änderung der Zusammensetzung wird jedoch nicht berücksichtigt. Die Pulsationen vollziehen sich auf der dynamischen Zeitskala und, wie in Kapitel 8 gezeigt wird, die physikalische (Simulations-)Zeit erstreckt sich über einen Zeitraum von einigen hundert Tagen. Die Änderung der chemischen Zusammensetzung in diesem Zeitraum ist weder für die Energieproduktion noch für das Molekulargewicht von Bedeutung.

6.5 Diskretisierung und Lösungsalgorithmus

Zur numerischen Behandlung der drei Erhaltungsgleichungen wurde die Finite-Volumen-Methode (FVM) gewählt. Hierbei wird das Rechengebiet (der Stern) in nicht überlappenden Zellen (konzentrische Massenschalen) aufgeteilt. Die abhängigen Größen sind nicht am gleichen Ort definiert, man spricht von einem gestaffelten Gitter (im Englischen „staggered grid“). Abbildung 6.1 zeigt eine schematische Aufteilung des Rechengebietes. Skalare

⁴Das Verhältnis von Zentralkugel zu Gesamtmasse, m_z/M , beträgt 10^{-7}

Tabelle II Zustands- und Materialfunktionen

$F_{\text{rad}} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial r}$	radiativer Strahlungsfluß
$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T + \frac{aT^4}{3}$	Zustandsgleichung
$e = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mu} T + \frac{aT^4}{\rho} + e_{\text{ion}}$	spez. innere Energie
$\mathbf{Q} = \mu_{\text{Q}} \left[\nabla \vec{u} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I} \right]$	Reynolds-Tensor
$\vec{u}_{\text{Q}} = -\nabla \cdot \mathbf{Q}$	viskose Kraftdichte
$\epsilon_{\text{Q}} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{Q} \cdot \nabla \vec{u}$	viskose Energiedissipation
$\mu_{\text{Q}} = -q_1 l_{\text{visc}} c_{\text{S}} + q_2^2 l_{\text{visc}}^2 \min(\nabla \cdot \vec{u}, 0)$	künstliche Viskosität
$l_{\text{visc}} = r_i - r_{i+1}$	viskose Längenskala
$\kappa = \kappa(T, \rho, X_i)$	Opazität
$\mu = \mu(e, \rho, X_i)$	Molekulargewicht
$\epsilon_{\text{nuc}} = \epsilon_{\text{nuc}}(T, \rho, X_i)$	Energieproduktion

Größen, wie die Dichte, der Druck, die Temperatur und die innere spezifische Energie sind in der Zelle bzw. Massenschale definiert, $r_{i+1/2}$. Sie stellen repräsentative Mittelwerte der Zelle dar. Vektorielle Größen wie der Radius und die Geschwindigkeit sind an den Zellflächen definiert, am Ort r_i . Die Masse ist wegen der Aufteilung in Massenschalen an den Zellflächen definiert, wodurch auch die anfängliche Lage der Radien r_i gegeben ist. Der Zusammenhang zwischen dem Ort der Zellmitte und dem Ort der Zellfläche muß spezifiziert werden. In der Regel wird der arithmetische Mittelwert des Radius genommen. Diese Arbeit folgt jedoch dem Schema von Dorfi et al. (2005), die aus Gründen der Konsistenz vorschlagen, den arithmetischen Mittelwert der Volumina zu nehmen. Die Beziehung benachbarter Radien hat dann die folgende Form:

$$r_{i+1/2}^3 = \frac{r_i^3 + r_{i+1}^3}{2}. \quad (6.29)$$

Die Berechnung der Geschwindigkeit in Zellmitte ($u_{i\pm 1/2}$), wie sie für den Viskositätsterm gebraucht wird, kann entweder aus dem arithmetischen Mittel der Geschwindigkeit der angrenzenden Zellen oder aus dem Mittelwert der Volumenströme bestimmt werden:

$$u_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2} (u_i + u_{i+1}) \\ \frac{1}{2r_{i+1/2}^2} (r_i^2 u_i + r_{i+1}^2 u_{i+1}) \end{cases}. \quad (6.30)$$

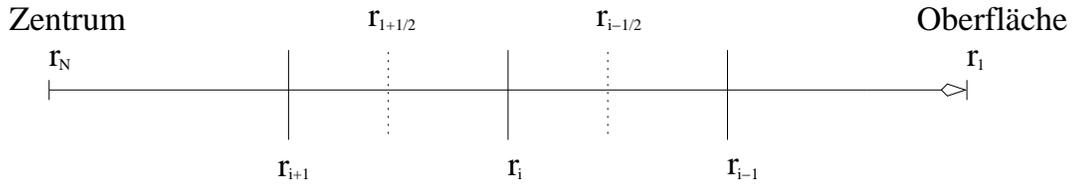


Abbildung 6.1: Skizze des zugrunde liegenden gestaffelten Gitters. Halbe Indizes markieren die Zellmitte, ganze die Zellfläche.

Für die durchgeführten Simulationen hatte die Wahl der Mittelung der Geschwindigkeit keinen Einfluß auf das Ergebnis. Die Diskretisierung soll exemplarisch an der Impulsgleichung demonstriert werden:

$$\frac{D(\Delta_i m u_i)}{Dt} + 4\pi r_i^2 \Delta_i P + \frac{G m_i \Delta_i m}{r_i^2} - \frac{8\pi}{3r_i} \Delta_i \left(\mu_Q \rho r^3 \left[\frac{\Delta u}{\Delta r} - \frac{u}{r} \right] \right) = 0. \quad (6.31)$$

Der Operator Δ ist durch:

$$\Delta_i \psi = \psi_{i-1/2} - \psi_{i+1/2}, \quad (6.32)$$

$$\Delta_{i+1/2} \psi = \psi_i - \psi_{i+1}, \quad (6.33)$$

definiert. Verfährt man so auch mit den anderen Erhaltungsgleichungen und bringt die Terme ohne Zeitableitung auf die rechte Seite, erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung in der Zeit. Alle Gleichungen haben dann die Form:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = H[\vec{x}], \quad (6.34)$$

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} dt = \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} H[\vec{x}] dt. \quad (6.35)$$

H ist der räumliche Operator und der Vektor \vec{x} faßt die abhängigen Variablen zusammen. Die Integration dieses Systems muß implizit erfolgen, um die Einschränkungen für den Zeitschritt durch die CFL-Bedingung (Courant et al., 1928) zu umgehen. Es gibt zwei Wege das System zu integrieren:

Zeitlich zentrierter Operator,

$$\frac{\vec{x}^{(n+1)} - \vec{x}^{(n)}}{\delta t} = \overline{H[\vec{x}]} = (1 - \theta) H[\vec{x}^{(n)}] + \theta H[\vec{x}^{(n+1)}]. \quad (6.36)$$

Bei dieser Vorgehensweise wird der gesamte Operator formal als eine Variable betrachtet und integriert.

Zeitlich zentrierte Variable,

$$\frac{\vec{x}^{(n+1)} - \vec{x}^{(n)}}{\delta t} = H[\vec{x}] = H[(1 - \theta)\vec{x}^{(n)} + \theta\vec{x}^{(n+1)}]. \quad (6.37)$$

Alternativ zur Integration des Operators werden die wahren Variablen des Systems integriert. Beide Verfahren sind im Falle eines linearen Operators H identisch. Ferner ist es möglich, mit Hilfe des Parameters θ zwischen einer

voll expliziten	$\theta = 0,$
voll impliziten	$\theta = 1,$
semi-impliziten	$\theta = 1/2,$

Zeitintegration zu wählen. Nur eine Integration mit $\theta = 1/2$ ist von zweiter Ordnung. Jede andere Wahl von θ ist formal nur von 1. Ordnung. Die Auswirkung der Ordnung der Zeitintegration auf die Pulsationsrechnung wird in Kapitel 7 gezeigt. In dieser Arbeit wurde die Methode der zeitlich zentrierten Variablen verwendet. Nach der räumlichen Diskretisierung und der Zeitintegration ergibt sich ein *nichtlineares* Gleichungssystem, das iterativ gelöst werden muß. Hierfür wurde das Newton-Raphson-Verfahren (z.B. Schwarz 1996) gewählt. Zur Herleitung des Lösungsalgorithmus werden die vier Gleichungen einer Massenschale zu einem Residuenvektor zusammengefaßt;

$$G_m = G_m(U_{i-1}, U_i, U_{i+1}), \quad 1 < m < 4. \quad (6.38)$$

Der Vektor U_i faßt die abhängigen Variablen der i -ten Massenschale zusammen,

$$U_i = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \\ r \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

Der Residuenvektor einer Massenschale hängt von den Größen an den benachbarten Schalen ab. Linearisiert man den Residuenvektor mittels einer Taylorreihenentwicklung und bricht nach dem ersten Glied ab, führt dies auf:

$$G_m(U^{k+1}) = G_m(U^k) + \left. \frac{\partial G_m}{\partial U_j} \right|^k \cdot (U_j^{k+1} - U_j^k) = 0. \quad (6.40)$$

Dies stellt eine Iterationsvorschrift mit dem Laufindex k dar. Der räumliche Index j läuft von $i - 1$ bis $i + 1$. Wie in der Definition des Residuenvektors (6.38) zu sehen ist, sind die Residuenvektoren benachbarter Schalen gekoppelt. Wendet man Gleichung (6.40) auf den Residuenvektor aller N -Massenschalen an,

$$G_{m_i} = \begin{pmatrix} G_{11} \\ G_{21} \\ G_{31} \\ G_{41} \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{4N} \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

erhält man unter Beachtung der Randbedingungen ein lineares Gleichungssystem mit Blockstruktur. Die Ableitung des Residuenvektors nach dem Vektor der unabhängigen

Variablen stellt mathematisch eine Matrix dar, es handelt sich um die Jacobi-Matrix.

Ausgehend von einer Startlösung $U_i^{(n)}$ wird die Lösung $U_i^{(n+1)}$ zu einem späteren Zeitpunkt iterativ bestimmt. Die Iteration kann abgebrochen werden, wenn die relative Änderung zwei sukzessiver Iterationsschritte eine vorgegebene Schranke unterschreitet:

$$\max \left| \frac{U_i^{(n+1),k+1} - U_i^{(n),k}}{U_i^{(n+1),k+1} + \eta} \right| < \epsilon, \quad (6.42)$$

η ist eine zusätzliche Konstante, die verhindert, daß durch die Zahl 0 dividiert wird. Der Zeitschritt unterliegt keiner numerischen oder verfahrenstechnischen Bedingung, sondern wird durch die gewünschte Auflösung transients Vorgänge beschränkt. Dies geschieht mittels einer Zeitschrittkontrolle. Hierzu wird die relative Änderung einer Größe nach zwei sukzessiven Integrationsschritten berechnet. Die Variable mit der größten zeitlichen Änderung bestimmt die nächste Zeitschrittweite:

$$\delta t^{(n+1)} = \begin{cases} \frac{3}{2} \delta t^{(n)} & \text{falls } s < \frac{1}{2} s_{\max} \\ \delta t^{(n)} & \text{falls } \frac{1}{2} s_{\max} \geq s \geq \frac{1}{2} s_{\max} \\ \frac{1}{2} \delta t^{(n)} & \text{falls } s > s_{\max} \end{cases} \quad (6.43)$$

$$s = \max \left| \frac{U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}}{U_i^{(n)} + \eta} \right|. \quad (6.44)$$

η hat hier die gleiche Funktion wie beim Iterationsabbruch (6.42). s_{\max} ist eine vordefinierte Größe, die die maximal zulässige Änderung in den abhängigen Variablen angibt. s_{\max} hat typischerweise Werte der Größenordnung 10^{-1} .

6.6 Randbedingungen

Die zur Beschreibung eines Systems aufgestellten Gleichungen bergen im allgemeinen eine Mannigfaltigkeit an Lösungen. Die Navier-Stokes-Gleichungen können zum Beispiel Rohrströmungen, Orkane, Sternentstehung oder die Umströmung eines Wiedereintrittskörpers beschreiben. Durch die Wahl der Randbedingungen legt man eines dieser strömungsmechanischen Probleme fest.

In den folgenden Ausführungen sind Größen an der Oberfläche (dem äußeren Rand) mit einem tiefgestellten Index 1 und solche am inneren Rand mit N bzw. im geometrischen Schwerpunkt mit $N + 1$ gekennzeichnet.

Zentrum

Die innere Randbedingung ist nicht im Schwerpunkt⁵ des Sterns formuliert. Im Zentrum befindet sich eine homogene Kugel konstanter Masse, m_z bzw. m_N , die an der Pulsation

⁵Geometrischer Schwerpunkt und Massenschwerpunkt fallen wegen der vorausgesetzten sphärischen Symmetrie des Sterns zusammen.

beteiligt ist und nur 10^{-7} der Gesamtmasse M ausmacht. Die Bewegung der zentralen Kugel ist durch die Lagrange-Bedingung vorgegeben:

$$r^3|_N^{n+1} - r^3|_N^n - 3 \int r_N^2 u_N dt = 0, \quad m = m_N. \quad (6.45)$$

Die Leuchtkraft, l_N , am inneren Rand kann ohne weiteres aus dem Strahlungsfluß berechnet werden, wenn für die Temperatur ein rechtsseitiges Differenzschema gewählt wird. In die Bilanz geht auch die Leuchtkraft, l_{N+1} , im geometrischen Mittelpunkt des Sterns ein, $r_{N+1} = 0$. Damit die Energiequellen endlich bleiben, muß l_{N+1} verschwinden:

$$l_{N+1} = 0, \quad m = 0. \quad (6.46)$$

Oberfläche

In der hydrodynamischen Pulsation wurde die Lage der Oberfläche aus der Sternentwicklungsrechnung übernommen. Beim hydrostatischen Ausgangsmodell ist die Oberfläche dort plaziert, wo die optische Tiefe τ auf $2/3$ abgefallen ist. Auch hier gilt für die Oberfläche die Lagrange-Bedingung:

$$r^3|_1^{n+1} - r^3|_1^n - 3 \int r_1^2 u_1 dt = 0, \quad m = M. \quad (6.47)$$

Für den Strahlungsstrom wurde, Grott et al. (2005) folgend, verlangt, daß die Gradienten der Wärmequellen verschwinden;

$$\text{grad}(\text{div } F_1) = 0. \quad (6.48)$$

Nach Grott et al. (2005) wird durch diese Wahl der äußeren Randbedingung ein Passieren des Stoßes über die Oberfläche ohne Reflexion sichergestellt.

Kapitel 7

Technische Strategien

7.1 Relaxierung der Hintergrundmodelle

Grundlage der Pulsationsrechnungen sind – wie in der linearen Analyse auch – hydrostatische Sternmodelle, die einer vollständigen Entwicklungsrechnung entstammen. Aufgrund der approximativen Natur numerischer Verfahren kann nicht verlangt werden, daß eine Gleichgewichtslösung numerisch eine solche bleibt, wenn das Verfahren oder das Diskretisierungsschema wechselt. Die Pulsationsrechnung muß jedoch von hydrostatischen Modellen ausgehen, weil numerische Fehler Störungen im nichtlinearen Regime induzieren können, wodurch ein Spektrum an Eigenmoden angeregt wird. Die Hydrostatik geht auch verloren, wenn die Anzahl der Gitterpunkte im nachhinein verändert wird oder wenn ein Wechsel von einfachen zu logarithmischen Variablen stattfindet, bei sonst gleicher numerischer Handhabung. Die Art der Interpolation spielt eine untergeordnete Rolle. Es besteht daher die Notwendigkeit, die Sternmodelle im Sinne des neuen numerischen Formalismus hydrostatisch zu machen. Eine Möglichkeit diese Störungen zu unterdrücken besteht darin, sie mittels künstlicher Viskosität zu dämpfen. Ein anderer Weg verlangt die Relaxierung des Sternmodells, dies entspricht im wesentlichen einer Nachiteration. In dieser Arbeit wurde die zweite Möglichkeit gewählt. Werden die Zeitableitungsterme aus den Pulsationsgleichungen gestrichen, lauten die zu erfüllenden Gleichungen:

Zustandsgleichung:

$$P - \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu} - \frac{aT^4}{3} = 0, \quad (7.1)$$

Massengleichung:

$$\Delta m - \rho \cdot \Delta V = 0, \quad (7.2)$$

Impulsgleichung:

$$\int_{\partial V} P dA + \int_V \frac{Gm\rho}{r^2} dV = 0, \quad (7.3)$$

Energiegleichung:

$$\int_{\partial V} F_{\text{rad}} dA + \int_V \rho \epsilon_{\text{nuc}} dV + \int_V S_{\text{GC}} dV = 0. \quad (7.4)$$

Um ein Maß für die Auswirkung der Relaxation auf das Sternmodell zu erhalten, kann die maximale Änderung

$$D_{\max}(\psi) = \max \left| \frac{\psi_{\text{rlx}} - \psi_o}{\psi_o} \right| \cdot 100 \quad (7.5)$$

in Prozent einer Variablen ψ bestimmt werden. ψ_o gibt den Wert einer abhängigen Variablen des Hintergrundmodells an und ψ_{rlx} ist der sich nach der Relaxation ergebende Wert. Nach Tabelle 7.1 zieht die Relaxation offensichtlich keine physikalische Veränderung der Sternstruktur nach sich, da alle Änderungen zwischen 0.01% – 0.1% liegen. In Abbildung 7.1 ist die prozentuale Änderung der Dichte über den Stützstellenindex¹ aufgetragen.

Tabelle 7.1: Maximale Änderung in Temperatur, Dichte, Druck und Radius, eines 350 M_{\odot} -Stern, in Prozent.

$D_{\max}(T)$	$D_{\max}(\rho)$	$D_{\max}(P)$	$D_{\max}(r)$
0.012	0.16	0.05	0.01

Für den Strahlungsfluß und die Materialfunktionen gelten die Beziehungen in Kapitel 6.2.

7.2 Anregung der Pulsation

Es gibt mehrere Möglichkeiten, den Stern in Schwingung zu versetzen. Im allgemeinen wird eine Geschwindigkeitsstörung induziert. Falls die Instabilitäten stark, daß heißt, die Anwachsrate groß genug sind, können die instabilen Moden im Extremfall aus dem numerischen Rauschen zu endlichen Amplituden anwachsen (Grott et al., 2005). Eine andere Möglichkeit besteht darin, jede Massenschale mit einem Bruchteil der lokalen Mach-Zahl zu stören ($u(m_r) = 0.1 - 0.2 Ma(m_r)$). Diese gängigen Wege sind hier wegen der sehr kleinen Anwachsrate nicht möglich. Wird der Stern auf die zweite Weise in Schwingung versetzt, so werden zusammen mit der Fundamentalmoden auch höhere Moden angeregt, die – wegen ihrer starken Dämpfungsrate – bald abklingen und nur die Fundamentalmoden zurücklassen. Die mit der Anregung induzierte Schwingungsenergie geht hierbei jedoch mit den abklingenden Obertönen verloren. Da sich aber die Instabilität auf die Fundamentalmoden beschränkt, wäre es wünschenswert, diese gezielt anzuregen, ohne Verluste der induzierten Anregungsenergie. Dies ist möglich, wenn die Eigenfunktion der Fundamentalmoden des betreffenden Sternmodells aus der linearen Analyse verwendet wird. Abbildung 7.2 zeigt eine solche Geschwindigkeitsstörung. Sie wurde aus der Lagrangeschen Verschiebung gewonnen und auf die gewünschte Amplitude skaliert,

$$u(m_r) \propto r_0(m_r) \cdot x(m_r).$$

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß auch Appenzeller (1970) dem Problem der korrekten Anregung gegenüberstand und zur Lösung ebenfalls Ergebnisse der linearen

¹Die Sterne sind für die numerische Simulation in 400 konzentrische Schalen aufgeteilt, mit $i = 1$ (Oberfläche) und $i = 400$ (innerer Rand), vgl. Kapitel 6.6.

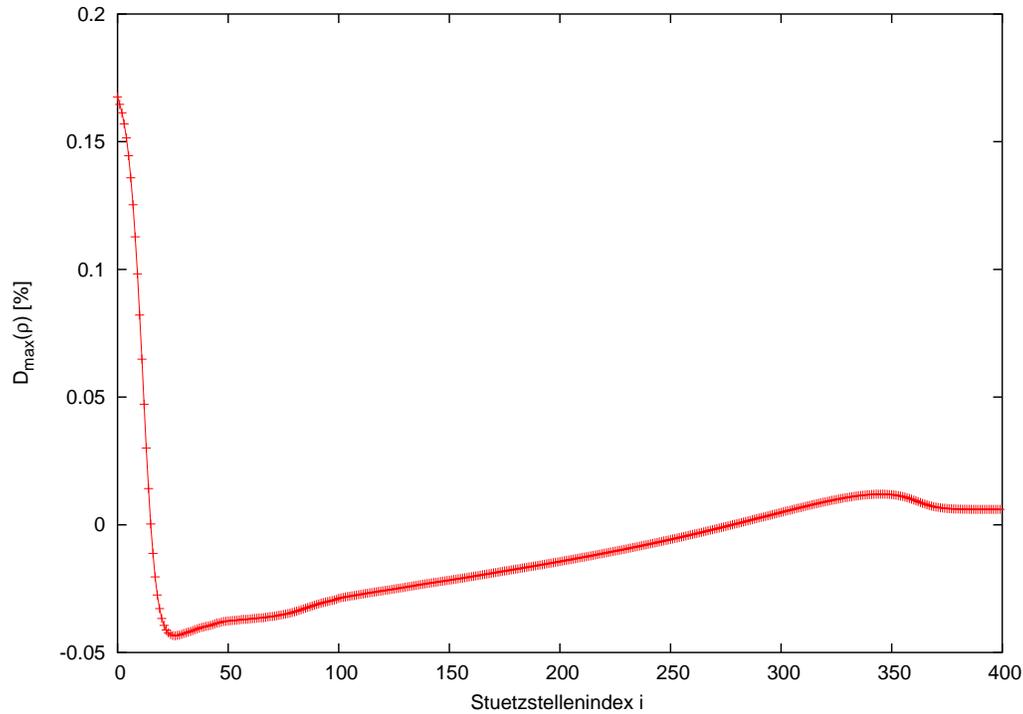


Abbildung 7.1: Verlauf der relativen Änderung in der Dichte über der Stützstellenzahl. Die größte relative Abweichung vom Hintergrundmodell beträgt lediglich 0.16% und tritt an der Oberfläche ($i = 1$) auf.

Analyse verwendete. Jedoch war dies in seinem Fall nicht ausreichend, da Moden höherer Ordnung deutlich im Geschwindigkeitsverlauf bemerkbar waren. Dies lag höchstwahrscheinlich an der unzureichenden Auflösung des verwendeten Hintergrundmodells. Der Stern wurde nur in 136 Massenschalen unterteilt, wohingegen die Sternmodelle in dieser Arbeit 400 Massenschalen besitzen. Als Gegenmaßnahme zu den mit angeregten Obertönen verwendete Appenzeller (1970) anfänglich eine Zeitintegration 1. Ordnung, um mit Hilfe der dem Verfahren immanenten hohen numerischen Dissipation (vgl. die Diskussion auf S. 70, insbesondere Abb. 7.4) alle Obertonkomponenten soweit zu dämpfen, bis die Fundamentalmode die Schwingung dominiert.

7.3 Konsequenzen der kleinen Anwachsrate

Die lineare Analyse sagt nicht nur aus, ob das Hintergrundmodell linear stabil ist oder instabil, sondern macht auch eine Aussage darüber, auf welcher Zeitskala sich eine Instabilität entwickelt. Die Anwachsrate der instabilen Fundamentalmode beträgt bei den untersuchten Population-III-Sternen typischerweise einige 1000 Jahre (vgl. Abb. 5.4b). Die kleinen Anwachsrate sind typisch für den ϵ -Mechanismus und unabhängig von der Sterneneration (Glatzel & Kiriakidis 1993, Baraffe et al. 2001). Das liegt daran, daß die Quelle der Instabilität – das nukleare Brennen – naturgemäß im tiefen Inneren des Sterns plaziert ist, wo die Abweichung von der Nichtadiabasis am kleinsten ist. Es ist letztlich

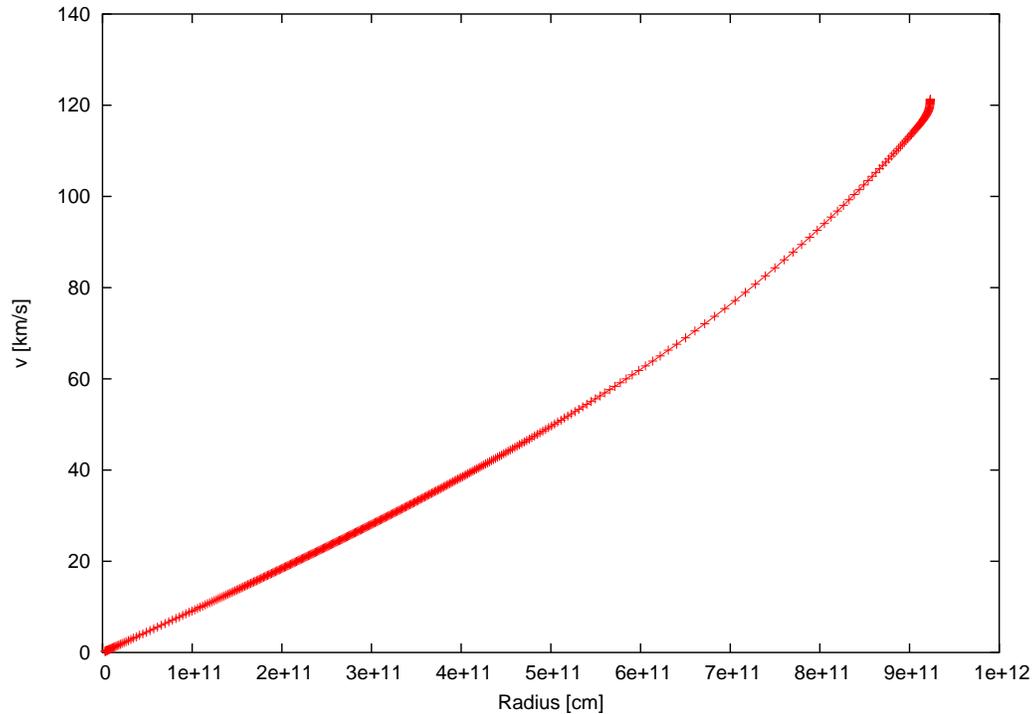


Abbildung 7.2: Die induzierte Störgeschwindigkeit.

die Abweichung von der Nichtadiabasis, die für die Größenordnung der Anwachsrate bestimmend ist! Für die hydrodynamische Simulation des Problems ergeben sich hieraus zwei zu berücksichtigende Gesichtspunkte: die Rechenzeit und die Dissipation.

Rechenzeit

Wegen der langen Anwachszeit τ_e ist es nicht möglich, mittels einer hydrodynamischen Simulation die Störungen aus dem linearen in das nichtlineare Regime zu verfolgen. Eine schlichte und doch aussagekräftige Abschätzung,

$$N_{\text{zst}} = \frac{\tau_e}{\Delta t} \sim 10^7 \tau_{\text{ff}} \frac{10}{\tau_{\text{ff}}} = 10^8, \quad (7.6)$$

zeigt, daß allein 10^8 Zeitschritte (N_{zst}) mit der Weite Δt nötig wären, um das Anwachsen der Amplitude um das e-fache zu beobachten, während die Geschwindigkeitsamplitude sich noch im linearen Regime befindet. Dies ist rechentechnisch nicht umsetzbar. Um die Pulsation aufzulösen, muß die Integrationszeitschrittweite in der Größenordnung der Freifallzeit liegen, $\Delta t \approx \tau_{\text{ff}}/10$. Die erste Konsequenz lautet somit:

Die anfängliche Störung der Modelle muß bereits im (leicht) nicht-linearen Regime erfolgen.

Um den Einfluß der Nichtlinearität zu demonstrieren, ist in den Abbildungen 7.3a und 7.3b die Pulsationsgeschwindigkeit der innersten Kugel aufgetragen. Im ersten Fall (7.3a)

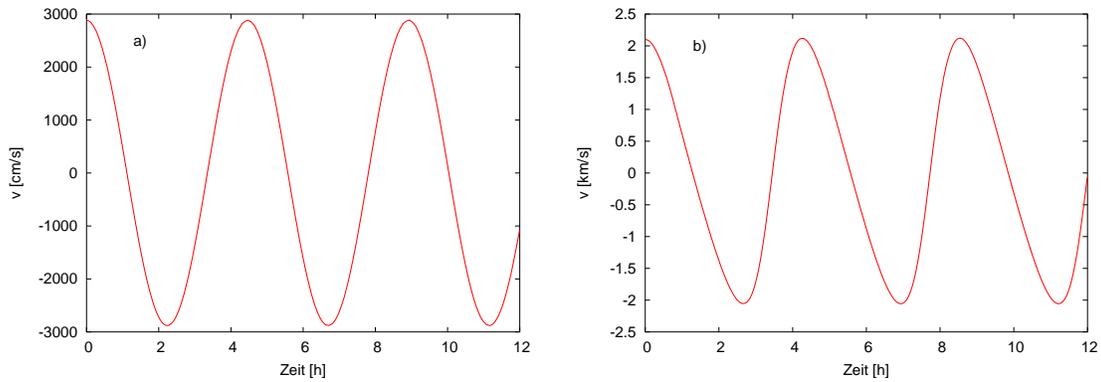


Abbildung 7.3: a) Der Geschwindigkeitsverlauf des inneren Randes bei Anregung der Fundamentalmode. Die Störung liegt im linearen Bereich, die Kurve ist sinusförmig. b) Wie a) aber mit einer stärkeren Störung, so daß nichtlineare Effekte (sägezahnähnlicher Kurvenverlauf) sichtbar werden.

beträgt die Machzahl im Zentrum $Ma_z = 10^{-5}$ und im zweiten Fall (7.3b) $Ma_z = 5 \cdot 10^{-4}$. Deutlich zu erkennen ist die Abweichung vom Sinus-Profil bei höherer Machzahl im Zentrum hin zu einem sägezahnähnlichen Profil. Da der räumliche Geschwindigkeitsverlauf durch die Anfangsstörung (siehe Abb. 7.2) vorgegeben ist, ist die Machzahl an der Oberfläche durch Vorgabe der Machzahl im Zentrum festgelegt. Im zweiten Fall beträgt die Geschwindigkeit der Oberflächenmassenschale das 5fache der lokalen Schallgeschwindigkeit. Bei solch hohen Machzahlen werden unmittelbar Verdichtungsstöße verursacht. Da dies nicht erwünscht ist, sieht man sich bei der richtigen Wahl der Anfangsstörung zwei Herausforderungen gegenübergestellt:

1. Die Anfangsstörung im Zentrum soll groß genug sein, um im nichtlinearen Regime zu liegen.
2. Die Anfangsmachzahl darf an der Oberfläche nicht viel größer als 1 sein.

Wünschenswert wäre eine Oberflächenmachzahl kleiner als 1. Beiden Voraussetzungen wurde in dieser Arbeit Rechnung getragen.

Dissipation

Die zweite Schwierigkeit, die sich bei kleiner Anwachsrate ergibt, betrifft die Dissipation. Besitzt ein System eine kleine Anwachsrate, heißt das physikalisch, daß der anfachende Beitrag den dämpfenden nur leicht übersteigt. Das verwendete Verfahren sollte somit so wenig numerische Dissipation besitzen wie möglich und nur so viel wie nötig. Die Zunahme der künstlichen Viskosität läßt sich aber nicht vermeiden, wenn Verdichtungsstöße verbreitert werden müssen. In den Abbildungen 7.4a und 7.4b sind die Auswirkungen der durch die Zeitintegration verursachten numerischen Dissipation zu sehen. Wird für die Zeitintegration ein (implizites) Verfahren von 1. Ordnung gewählt ($\theta = 1$), macht sich die numerische Dissipation sehr stark bemerkbar. Sie dissipiert die induzierte Anregungsenergie und bringt die Pulsation schließlich zum Erliegen. Bei einem Verfahren

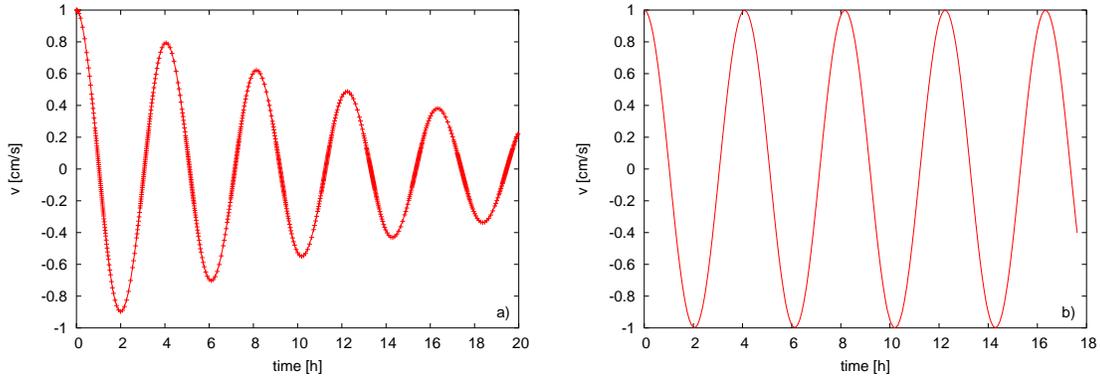


Abbildung 7.4: a) Der Geschwindigkeitsverlauf des inneren Randes bei impliziter Zeitintegration, $\theta = 1$. b) Geschwindigkeitsverlauf des inneren Randes bei semi-impliziter Zeitintegration, $\theta = 1/2$.

zweiter Ordnung (Crank-Nicholson, $\theta = 1/2$) ist ein Abklingen der Amplitude nicht zu beobachten. Die zweite Konsequenz lässt sich so formulieren:

Das gewählte numerische Verfahren darf nur so wenig numerische Dissipation besitzen wie möglich und nur so viel wie nötig².

Es ist ferner bemerkenswert, die Größe der Anwachszeit τ_e der Instabilität mit der thermischen Zeitskala τ_{KH} , welche die Entwicklungszeit des Sterns bestimmt, zu vergleichen. Für den $450 M_{\odot}$ -Stern ergibt sich folgendes Verhältnis von thermischer Zeitskala zu Anwachszeit zum Zeitpunkt maximaler Instabilität (Minimum im Imaginärteil, vgl. Abb. 5.3):

$$\frac{\tau_{KH}}{\tau_e} = \frac{3.1 \cdot 10^4 \text{a}}{3.7 \cdot 10^3 \text{a}} \propto 10. \quad (7.7)$$

Beide Zeitskalen sind demnach vergleichbar und konkurrieren miteinander. Der $350 M_{\odot}$ -Stern ist weniger als $2 \cdot 10^5$ Jahre linear instabil. Zu dem besitzt dieser Stern die kleinsten Anwachsrate (Abb. 5.4b). Wegen des exponentiellen Charakters der Instabilität ist dennoch jede infinitesimale Störung in der Lage, während des instabilen Zeitfensters auf endliche Werte anzusteigen, wie eine einfache Abschätzung zeigt:

$$\frac{u_e}{u_a} = \exp \frac{\Delta t_{\text{instab}}}{\tau_e} \propto 7 \cdot 10^{10}. \quad (7.8)$$

Es wurde von einer Anwachszeit $\tau_e \sim 7500 \text{a}$ und einer instabilen Phase $\Delta t_{\text{instab}} \sim 2 \cdot 10^5 \text{a}$ ausgegangen. u_a bezeichnet die anfängliche kleine Störung und u_e steht für den am Ende der instabilen Phase resultierenden Wert. Die lineare Störung wird durch aufsteigende Turbulenzballen in der zentralen Konvektionsschicht verursacht. Die typische Machzahl der Turbulenzballen beträgt $9 \cdot 10^{-6}$ bei einer Geschwindigkeit von $u_t = 200 - 300 \text{m/s}$. Nach (7.8) ergibt sich mit $u_e = u_t$ ein unphysikalisch hoher Wert für u_a . Diese Abschätzung demonstriert überzeugend die Fähigkeit des ϵ -Mechanismus eine anfänglich lineare Störung anzufachen bis nichtlineare Amplituden erreicht werden. Dies ist eine grobe Abschätzung. Eine genauere Rechnung müsste die Zeitabhängigkeit der Anwachszeit berücksichtigen, die nämlich am Ende der instabilen Phase um eine Größenordnung gewachsen

²Dies kann als späte Rechtfertigung für die Wahl des Lagrange-Formalismus dienen. Vgl. Kapitel 6.

ist (ca. $2 \cdot 10^4$ a – $3 \cdot 10^4$ a). Die Berücksichtigung dieser Zeitabhängigkeit ändert jedoch nichts am qualitativen Bild.

Kapitel 8

Nichtlineare Entwicklung instabiler Moden

Gemäß der linearen Stabilitätsanalyse sind Population-III-Sterne mit einer Masse größer als $350 M_{\odot}$ pulsationsinstabil. Die Schwingungsamplitude einer infinitesimalen Störung nimmt exponentiell zu, bis sie endliche Werte erreicht. Die Gültigkeit der linearen Analyse endet an diesem Punkt. Soweit gilt diese Aussage für jedes komplexe System. Im speziellen Kontext eines Sterns geht mit der endlichen Schwingungsamplitude ein Aufsteilen der nach außen schreitenden Wellen einher. Es bilden sich Verdichtungsstöße. Die Stoßwellen werden numerisch mit Hilfe der künstlichen Viskosität erfaßt (vgl. Kapitel 6.3). Es ist offensichtlich, daß die Phänomene, die durch eine endliche Schwingungsamplitude verursacht werden, nur mittels einer hydrodynamischen Untersuchung studiert werden können.

Eine solche hydrodynamische Simulation wurde für vier Population-III-Sterne ($750 M_{\odot}$, $550 M_{\odot}$, $450 M_{\odot}$ und $350 M_{\odot}$) durchgeführt. Der erste Teil 8.1 dieses Kapitels befaßt sich mit den beiden massereicheren ($750 M_{\odot}$ und $550 M_{\odot}$) der vier Sterne. Die beiden verbleibenden Sternmassen ($450 M_{\odot}$ und $350 M_{\odot}$) unterscheiden sich in ihrer hydrodynamischen Antwort auf eine nichtlineare Störung kaum voneinander, daher sollen sie gemeinsam im zweiten Abschnitt vorgestellt werden.

8.1 $750 M_{\odot}$ und $550 M_{\odot}$

8.1.1 ϵ -Mechanismus als Ursache der Amplitudenzunahme

Die massereichen Sterne zeigen das gleiche charakteristische Verhalten. Daher wird zunächst anhand des $750 M_{\odot}$ -Sterns das prinzipielle Verhalten erläutert und erst am Ende dieses Abschnittes auf den $550 M_{\odot}$ -Stern eingegangen. Insbesondere beziehen sich alle Zahlenwerte auf den $750 M_{\odot}$ -Stern.

Alle Sterne wurden nach dem in Kapitel 7 beschriebenen Schema zur Pulsation angeregt. Unter Berücksichtigung der in Kapitel 7.3 erörterten Gesichtspunkte (S. 69), wurde ein Störgeschwindigkeitsverlauf gewählt, bei dem die Machzahl im Zentrum, $Ma_z = 10^{-4}$,

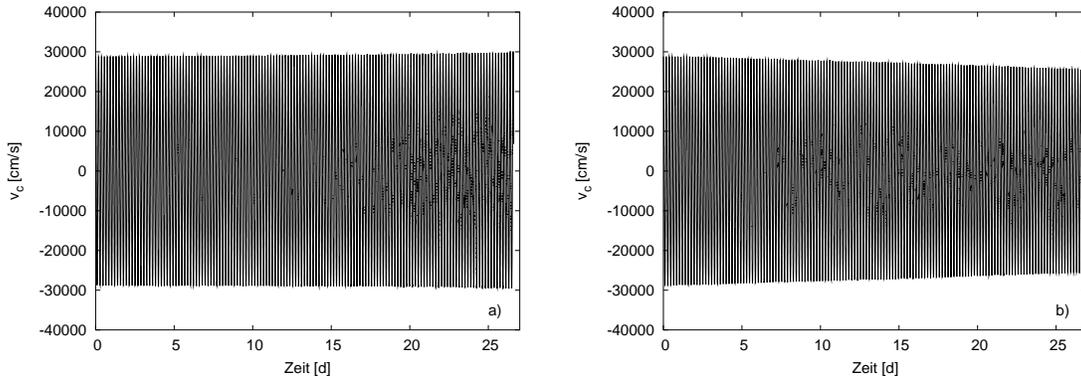


Abbildung 8.1: Geschwindigkeitssamplitude am inneren Rand mit a) vollständiger Energiegleichung, b) reduzierter Energiegleichung.

beträgt. Das entspricht einer Geschwindigkeit von $u_z = 290$ m/s. Die Machzahl an der Oberfläche ist nur wenig größer als 1, $Ma_{\text{ob}} = 1.03$, und die Oberflächengeschwindigkeit, $u_z = 130$ km/s, erreicht 3% der Fluchtgeschwindigkeit. Die künstliche Viskosität wird über die Gewichtungsfaktoren q_1 und q_2 kontrolliert. Beide sind variabel. Die Simulation beginnt mit kleinen Werten ($q_1 = 0.1$, $q_2 = \sqrt{0.1}$) und steigt bei zunehmender Stoßstärke auf ($q_1 = 2$, $q_2 = \sqrt{2}$) an. Je kleiner die Geschwindigkeit im Zentrum ist, desto länger dauert es, bis ein merkliches Anwachsen der Amplitude beobachtet werden kann. Eine natürliche Quelle für Störungen ist die turbulente Konvektionszone. Die Geschwindigkeit der Turbulenzballen im Zentrum beträgt $u_t \approx 30$ m/s. Die Zeit (Δt_g), die nötig ist, damit die Störung aus dem linearen in den nichtlinearen Bereich ($u_z = 290$ m/s) gelangt, kann leicht abgeschätzt werden:

$$\Delta t_g = \tau_e \cdot \ln\left(\frac{u_z}{u_t}\right) \approx 5450 \text{ a.} \quad (8.1)$$

Die Anwachszeit zum Zeitpunkt der stärksten Instabilität, $\tau_e = 2400$ a, wurde angenommen (Abb. 5.4b). Dies ist eine grobe Abschätzung, die jedoch das Zeitmaß sehr gut illustriert. Eine hydrodynamische Simulation auf dieser Zeitskala, bei einer Zeitschrittweite in der Größenordnung von 100 Sekunden, stößt an technische Grenzen (vgl. Diskussion über die Rechenzeit in Kapitel 7.3). In Abbildung 8.1a ist die Geschwindigkeit der Zentralkugel über der Zeit aufgetragen. Nach 25 Tagen ist ein leichter Anstieg in der Pulsationsamplitude zu beobachten. Diese Zunahme in der Schwingungsenergie kann bei Population-III-Sternen aus physikalischer Sicht nur dem ϵ -Mechanismus zugeschrieben werden (vgl. Kapitel 2). Eine notwendige Bedingung für die Richtigkeit der numerischen Simulation ist – neben der Plausibilität der Lösung – die rechnerische Bestätigung dieses physikalischen Argumentes. Daher wurde die Simulation unter den gleichen Bedingungen, aber ohne den thermoenergetischen Part (Strahlungsenergiefluß und nukleare Energieproduktion) in der Energiegleichung, wiederholt. Die Energiegleichung aus Tabelle 6.4 (S. 59) reduziert sich dann zu:

$$\frac{D}{Dt} \int \rho \epsilon dV + \int P \nabla \cdot \mathbf{u} dV + \int S_{QC} dV - \int \rho \epsilon_Q dV = 0. \quad (8.2)$$

Die ersten beiden (von links) Integrale geben die Zustandsänderung an, wie sie sich im adiabatischen Fall ergibt. Der zweite Term umfaßt, neben dem eingefrorenen konvektiven Energiefluß, die von der Sternentwicklung stammende gravitative Bindungsenergie – die Geschichte des Sternmodells. Das letzte Integral beschreibt die Energiedissipation durch Viskosität. In Abbildung 8.1b ist die sich neu ergebende Schwingung mit reduzierter Energiegleichung aufgetragen. Die Pulsationsamplitude nimmt nun deutlich ab. Bei einer rein adiabatischen Schwingung und kleinen Amplituden sollte die Amplitude weder ab- noch zunehmen. Die Abnahme der Schwingungsenergie ist auf den Dissipationssterm $\rho\epsilon_Q$ zurückzuführen, der wegen der endlichen Störamplitude notwendig ist. Im Falle der kompletten Energiegleichung (Tabelle 6.4 auf S. 59) ist die nukleare Energieproduktion demnach sowohl in der Lage die Dämpfung der Hülle – verursacht durch den Strahlungsfluß – als auch die Dissipation durch den Viskositätsterm zu kompensieren und darüberhinaus ein Anwachsen der Schwingungsamplitude zu bewirken.

8.1.2 Zentrum

Die nukleare Energieproduktionsrate zeigt wegen ihrer Abhängigkeit von Dichte und Temperatur, $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$, ebenfalls einen oszillierenden Verlauf. Um eine Aussage über die effektive Energieproduktion während einer Schwingungsperiode machen zu können, muß die mittlere Produktionsrate betrachtet werden:

$$\bar{\epsilon}_{\text{nuc},i}(t^*) = \frac{1}{\Pi} \int_t^{t+\Pi} \epsilon_{\text{nuc},i}(t) dt, \quad t^* = t + \frac{\Pi}{2}. \quad (8.3)$$

Es ist bequemer, diesen Zahlenwert auf die gesamte nukleare Energieproduktion des Hintergrundmodells zu beziehen. Es ergibt sich die mittlere relative Energieproduktion:

$$\epsilon_{\text{m,rel}}(t) = \frac{\sum m_i \cdot \bar{\epsilon}_{\text{nuc},i}(t)}{\sum m_i \cdot \epsilon_{\text{nuc},i}(t=0)}. \quad (8.4)$$

Anhand dieser Größe soll das Langzeitverhalten der Instabilität im Zentrum betrachtet werden.

Das Verhältnis der mittleren nuklearen Energieproduktion des gesamten Sterns zur anfänglichen Gesamtenergieproduktion des Hintergrundmodells ist in Abbildung 8.2 aufgetragen. Der ϵ -Mechanismus treibt die Pulsation des Sterns zu Beginn mit zunehmender Intensität (Steigung) an. Nach 110 Tagen erreicht die Energieerzeugung ein Maximum und fällt hierauf monoton ab. Das Maximum beträgt ungefähr das zweifache der Energieproduktion des Hintergrundmodells. Augenfällig ist, daß die Pulsation keine Sättigung erreicht. Dies deutet auf eine globale Änderung des Sterns hin. Um der Frage nachzugehen, was den Abfall der Pulsation im Zentrum bewirkt, werden die Vorgänge an der Oberfläche im nächsten Abschnitt näher besprochen.

8.1.3 Die Oberfläche

Die Oberflächengeschwindigkeit ist in Abbildung 8.3a dargestellt. Der Verlauf läßt sich in mindestens zwei Regionen unterteilen: Zu Anfang ist die Schwingung periodisch und wächst nur langsam an. Nach 60 Tagen nimmt der Anstieg stark zu und am Ende

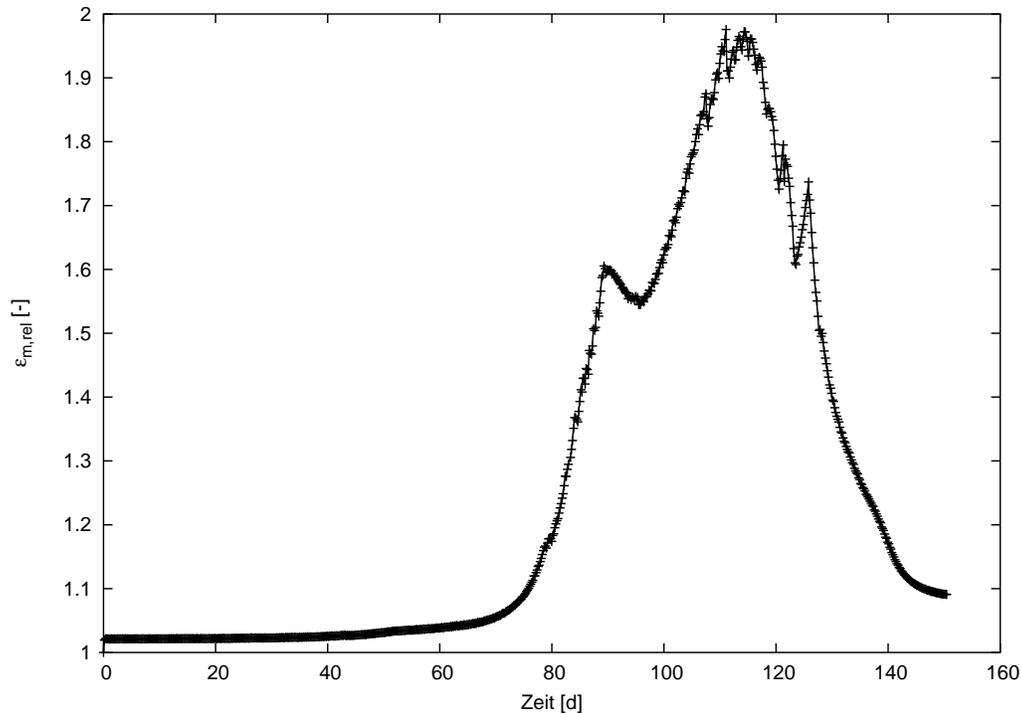


Abbildung 8.2: Verhältnis der gesamten mittleren Energieproduktion einer Pulsation zu der Gesamtenergieerzeugung des Hintergrundmodells.

verliert sich sogar der oszillierende Charakter der Bewegung. Diese beiden Bereiche sind durch eine steile Geschwindigkeitszunahme (nach ca. 90 Tagen) – verursacht durch einen starken Verdichtungsstoß – voneinander getrennt. Die Expansion der äußeren Schicht führt zu einer Verringerung der lokalen Fluchtgeschwindigkeit. Abbildung 8.3b zeigt das Verhältnis von Geschwindigkeit zu lokaler Fluchtgeschwindigkeit der äußeren Massenschale. Die Fluchtgeschwindigkeit wird demnach überschritten. Da aber gemäß der äußeren Randbedingung der Außendruck konstant gehalten wird, bewegt sich die Massenschale nach einer starken Ausdehnung wieder auf den Stern zurück (nach 120 Tagen). Im folgenden soll die Schwingungsphase genauer betrachtet werden, in der eine Veränderung des Pulsationsverhaltens der äußeren Massenschale auftritt. Einige Pulsationen nach der starken Beschleunigung bewegt sich die betreffende Massenschale (Abb. 8.4a) nicht mehr einwärts, denn bevor eine Kontraktion stattfinden kann, folgt eine neue Stoßwelle, die die Massenschale weiter nach außen treibt. Es findet eine *Entkoppelung* der Bewegung dieser Massenschale von der regulären Pulsation des Sterns statt. Dieses Verhalten ist nicht allein auf die Oberfläche beschränkt, sondern betrifft auch darunter liegende Schichten. Die Geschwindigkeitskurve der Oberflächenmassenschale ist in Abbildung 8.4b zusammen mit den Kurven für zwei tiefer liegende Schalen aufgetragen. Die rote (Oberfläche) und die grüne (Index 50) Kurve haben die gleiche Schwingungscharakteristik, wobei der Prozeß der Entkoppelung bei der weiter innen liegenden Massenschale zeitlich verzögert auftritt. Alle dazwischen liegenden Schichten haben den gleichen Geschwindigkeitsverlauf und entkoppeln nacheinander von der Pulsation des restlichen Sterns.

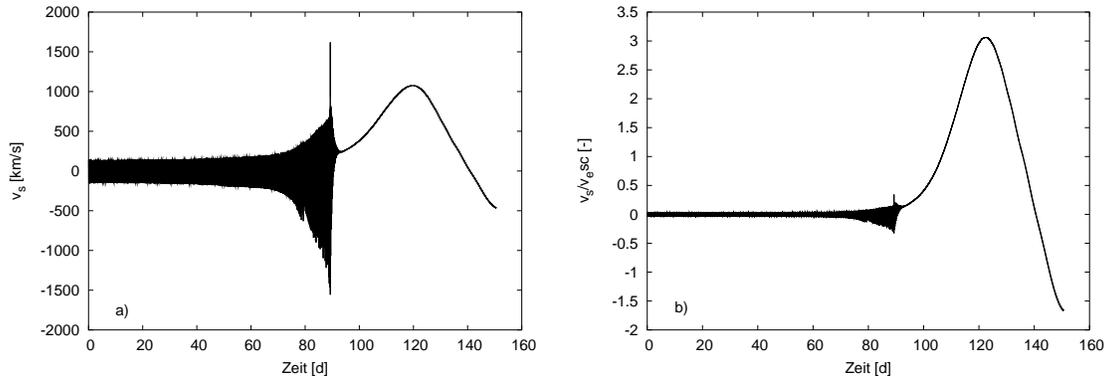


Abbildung 8.3: a) Geschwindigkeitsverlauf an der Oberfläche des Sterns. b) Verhältnis von Geschwindigkeit zu Fluchtgeschwindigkeit an der Oberfläche.

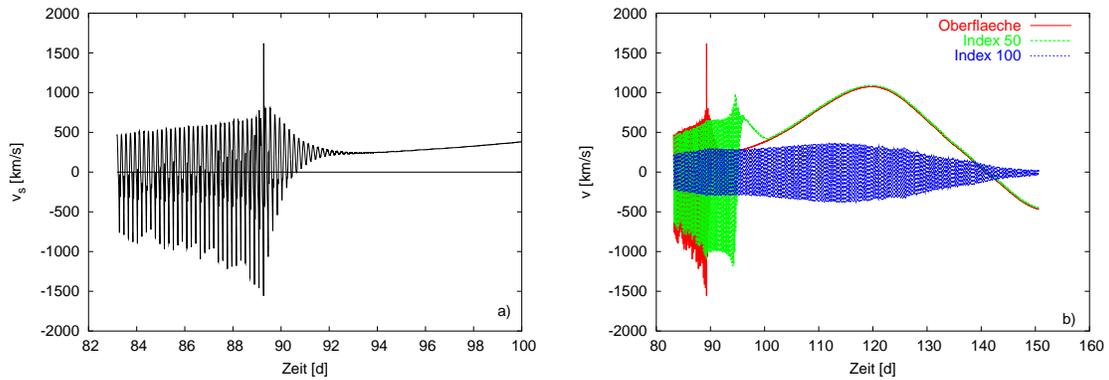


Abbildung 8.4: a) Ausschnitt aus Abb. 8.3a. b) rote Kurve wie a), grüne Kurve zeigt den Geschwindigkeitsverlauf einer tiefer gelegenen Massenschale, blaue Kurve eine noch tiefer gelegene Massenschale.

Bei der blauen Kurve (Index 100) findet keine Entkoppelung vom Stern statt. Sie repräsentiert das Verhalten aller tiefer liegenden Massenschalen. Die Geschwindigkeitssamplitude erreicht nach ungefähr 115 Tagen ein Maximum und fällt hierauf stark ab. Eine genaue Betrachtung offenbart, daß sich der anfängliche (< 90 Tage) Anstieg der Schwingungsamplitude der inneren Massenschalen (z.B. Index 100) nach dem Entkoppeln der Oberfläche von der regulären Pulsation (> 90 Tage) in eine Abnahme umkehrt, um hierauf langsam wieder anzusteigen. Dies tritt ebenfalls bei der grünen Kurve (Index 80) auf (vgl. Abb. 8.5). Demnach hat das Entkoppeln der äußeren Schichten einen entscheidenden Einfluß auf die Dynamik des Sterns. Eine Quantifizierung der an der Entkoppelung beteiligten Masse zeigt, daß sie sich beim hier betrachteten $750 M_{\odot}$ -Stern auf $1.17 M_{\odot}$ beziffert. Hierdurch verringert sich jedoch die für die Kontraktion zu Verfügung stehende Masse, mit direkten Auswirkungen auf den ϵ -Mechanismus.

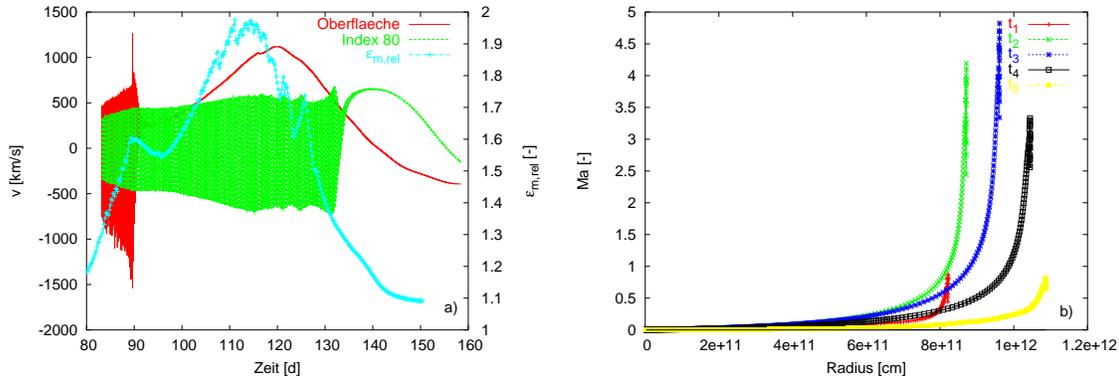


Abbildung 8.5: a) Gegenüberstellung von Abb. 8.4b und 8.2. Im Unterschied zu 8.4b ist hier anstelle des Geschwindigkeitsverlaufes der Massenschale mit dem Index 50 der Verlauf der am tiefsten und somit letzten abgeworfenen Schale (Index 80) gezeigt. b) Machzahlverlauf zu vier aufeinander folgenden Schwingungszuständen, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

8.1.4 Zentrum und Oberfläche auf einen Blick

Nachdem die Ereignisse an der Oberfläche und im Zentrum separat betrachtet worden sind, soll in diesem Abschnitt der Frage nachgegangen werden, ob ein – kausaler? – Zusammenhang zwischen den beiden Orten besteht. Abbildung 8.5a faßt im wesentlichen die Abbildungen 8.2 und 8.4 zusammen. Der Anstieg der Energieerzeugung bewirkt ein Anwachsen der Geschwindigkeitsamplitude an der Oberfläche. Mit der einsetzenden Entkoppelung der äußersten Schichten erfährt die Energieproduktion einen kurzzeitigen Rückgang, $90 \text{ d} < t < 95 \text{ d}$. Entkoppelung und Rückgang finden zeitgleich statt, so daß ein direkter Zusammenhang vermutet werden kann. Die Entkoppelung der letzten Massenschale (Index 80) erfolgt zu einem Zeitpunkt, an dem die mittlere nukleare Energieerzeugung im Verhältnis zu der des Hintergrundmodells bereits auf einen kleinen Wert abgesunken ist. Beim Vergleich der Abbildungen 8.2 und 8.4 fällt ferner auf, daß das Maximum der blauen Kurve (Index 100) mit dem Maximum der nuklearen Energieproduktion zeitlich zusammenfällt (Der Übersicht halber ist sie in Abb. 8.5a ausgespart). Dies bekräftigt das Bild des zweigeteilten Sterns, in dem die Hülle eine eigenständige dynamische Entwicklung erfährt, während der restliche Stern einheitlich schwingt.

8.1.5 Diskussion

Betrachtet man allein den mechanischen Aspekt der entkoppelten Masse, ergibt sich folgendes Bild: Der ϵ -Mechanismus beschleunigt die Außenschalen auf Fluchtgeschwindigkeit, mit der Folge, daß sie sich nicht mehr an der Kontraktion beteiligen. Bereits die ersten abgeworfenen Massenschalen haben – trotz ihrer geringen Masse – einen Einfluß auf die Gesamtpulsation, da die nukleare Energieproduktion und die Geschwindigkeitsamplitude der noch nicht abgeworfenen Schalen hiernach kurzzeitig, aber merklich zurückgehen. Der Massenabwurf ist nicht in der Lage, den ϵ -Mechanismus dauerhaft zum Erliegen zu bringen. Nach ungefähr 115 Tagen erreicht die Energieerzeugung ihren Höhepunkt. Zu diesem Zeitpunkt hat der Stern $0.3 M_{\odot}$ auf Fluchtgeschwindigkeit be-

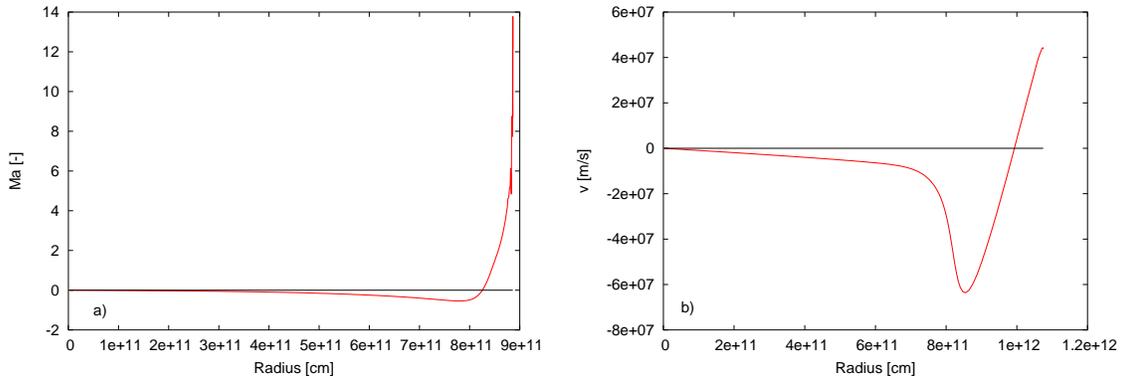


Abbildung 8.6: a) Machzahlverlauf kurz vor dem Entkoppeln der obersten Massenschale. b) Geschwindigkeitsverlauf zu einem späteren Zeitpunkt. Das Schwingungsmuster der Fundamentalmode ist verloren gegangen.

schleunigt, die als kritische Masse, M_{crit} , bezeichnet werden kann. Trotz des endgültigen Rückgangs der Energieerzeugung wird erst nach dem Maximum von $\bar{\epsilon}_{\text{nuc}}$ ein Großteil der Masse ($0.87 M_{\odot}$) abgeworfen. In diesem Bild reguliert einzig die abgestoßene Masse den ϵ -Mechanismus. Weitere Faktoren bestimmen jedoch ebenfalls die Dynamik der Schwingung.

Abbildung 8.5b zeigt einige zeitlich aufeinander folgende Machzahlverläufe während der Expansion des Sterns. Die Machzahl im Zentrum ist wegen der hohen Schallgeschwindigkeit im Inneren des Sterns sehr klein. Nach außen hin nimmt sie stark zu und erreicht ungefähr das 5fache des induzierten Wertes. Deutlich zu sehen sind die Verdichtungsstöße. Bei der Expansion entstehen sie, weil die inneren Schichten schneller expandieren als die darüberliegenden. In diesen Stoßfronten dissipiert Schwingungsenergie und schwächt den ϵ -Mechanismus.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß sich das Schwingungsmuster ändert. Abbildung 8.6a zeigt den Machzahlverlauf, kurz bevor die äußerste Massenschale entkoppelt. Wie oben beschrieben (Abb. 8.4), findet eine starke Beschleunigung der Massenschale vor ihrem Entkoppeln von der restlichen Sternpulsation statt. Die Machzahl der Stoßfront hat den Wert 14. Neben der Stärke des Stoßes ist der Verlauf der Machzahl interessant. Er besitzt eine Nullstelle und ähnelt eher dem ersten Oberton als der Fundamentalmode, mit der die Schwingung beginnt. Am Geschwindigkeitsverlauf (Abb. 8.6b) eines ähnlichen Schwingungszustandes ist der Oberton-Charakter der Schwingung und die starke Abweichung von der Fundamentalmode noch markanter. Aus der linearen Analyse ist aber bekannt, daß die Dämpfungsrate der Obertöne groß ist, wodurch die Dämpfung der Hülle, wenn der Stern in diesen Schwingungsmodus gerät, stark zunimmt. Der Einfluß der genannten Faktoren ist isoliert nicht erfaßbar und erschwert eine strenge kausale Interpretation. Wegen der aufgeführten Gründe liegt es nahe, im Massenverlust nicht das einzige regulative Glied des ϵ -Mechanismus zu sehen. Vor diesem Hintergrund ist auch nicht zu erwarten, daß die Instabilität gänzlich verschwindet. Mit Hilfe einiger physikalisch plausibler Argumente soll ein Bild vom gesamten Vorgang gezeichnet und

eine Vorhersage gewagt werden. Hierzu sind drei Annahmen nötig:

1. Nach dem Massenverlust verschwindet die Instabilität und der Stern entwickelt sich zurück zu einem quasihydrostatischen Zustand. Dieser Vorgang soll eine Zeit benötigen, die vergleichbar ist mit der Zeit Δt_g , die eine lineare Störung braucht, um in den nichtlinearen Bereich zu wachsen (Gl. (8.1)).
2. Nachdem der Stern zu Ruhe gekommen ist, beginnt der ϵ -Mechanismus von neuem zu wirken, worauf sich der Zyklus wiederholt. Es ist vernünftig, dies anzunehmen, da die Ausgangslage des Sterns einem quasihydrostatischen Stern mit einer etwas kleineren Masse, $M_{\text{neu}} = 750 M_{\odot} - 1.17 M_{\odot}$ entspricht, der im Massenspektrum den instabilen Sternen zuzuordnen ist (vgl. Abb. 5.4b).
3. Die mit Hilfe der linearen Analyse ermittelte Dauer der instabilen Phase, $\Delta t_{\text{inst}} \approx 4 \cdot 10^5$ a (Abb. 5.4a), bleibt trotz Massenverlust unverändert. Diese Annahme hängt jedoch vom Gesamtmassenverlust ab und muß im nachhinein überprüft werden.

Zusammenfassend kann man sagen: Der Massenverlust findet *eruptiv* statt und wiederholt sich *zyklisch*. Ein Zyklus umfaßt (Annahme 1) einen Zeitraum von 10^4 Jahren und wiederholt sich (Annahme 2), solange der Stern linear instabil ist (Annahme 3). Mittels dieser drei Annahmen kann ein Gesamtmassenverlust vorhergesagt werden:

$$\Delta M_{\text{ges}} = \frac{\Delta t_{\text{inst}}}{2\Delta t_g} \cdot 1.17 M_{\odot}. \quad (8.5)$$

Dieser Abschätzung zufolge können sich beim untersuchten 750 M_⊙-Stern bis zu 36 Eruptionen ereignen und einen Massenausstoß von insgesamt 43 M_⊙ verursachen. Dies entspricht 5.7% der ursprünglichen Gesamtmasse. Eine einfache lineare Interpolation in Abb. 5.4a zeigt, daß sich die instabile Phase eines 707 M_⊙-Sterns nicht sehr von der eines 750 M_⊙-Sterns unterscheidet, womit Annahme 3 im nachhinein gestärkt wird. Wegen des schon erwähnten, sehr starken Größenordnungsunterschiedes in den beteiligten Zeitskalen (vgl. S. 74),

$$\underbrace{\Delta t_g}_{5450 \text{ a}} \gg \underbrace{\tau_{\text{ff}}}_{4 \text{ h}},$$

kann diese physikalisch motivierte Argumentation rechnerisch, falls überhaupt, nur schwerlich verifiziert werden. Das qualitative Bild wird jedoch von der linearen und der hydrodynamischen Untersuchung gestützt.

550 M_⊙-Stern

Wie eingangs erwähnt, ist das dynamische Verhalten des 550 M_⊙-Stern qualitativ das gleiche wie beim massereicheren 750 M_⊙-Stern. Abbildung 8.7 faßt die Vorgänge beim 550 M_⊙-Stern zusammen. Die maximale nukleare Energieerzeugung erreicht nur das 1.5fache des hydrostatischen Ausgangsmodells und liegt somit unter dem Maximalwert, der beim 750 M_⊙-Stern erreicht wird (vgl. Abb. 8.2). Auch hier erreichen die äußeren Schichten Fluchtgeschwindigkeit, und es findet eine Entkoppelung der Hülle vom restlichen Stern statt. Die entkoppelte Masse ist geringer, sie beträgt nur 0.5 M_⊙. Im Gegensatz

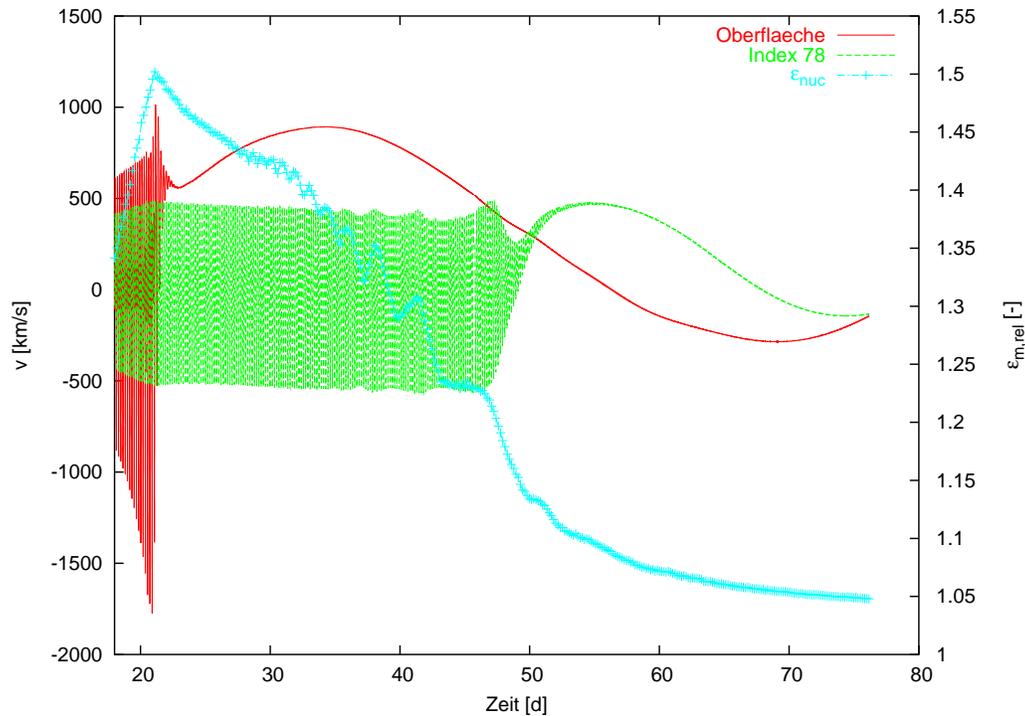


Abbildung 8.7: Wie Abb.8.5, hier jedoch für den $550 M_{\odot}$ -Stern. Gegenüberstellung von mittlerer nuklearer Energieproduktion (blau) sowie den Geschwindigkeiten an der Oberfläche (rot) und der innersten Massenschale (grün), die von der regulären Pulsation entkoppelt (Index 78).

zum $750 M_{\odot}$ -Stern wird aber nicht die gesamte entkoppelte Masse auf Fluchtgeschwindigkeit beschleunigt. Fluchtgeschwindigkeit erreichen nur die äußeren $0.37 M_{\odot}$. Unter den im vorherigen Abschnitt gemachten Annahmen kann auch für den $550 M_{\odot}$ -Stern ein Gesamtmassenverlust abgeschätzt werden. Da die minimale Anwachszeit ($\tau_{e,550} = 3000$ a) des $550 M_{\odot}$ -Sterns etwas größer ist als die des $750 M_{\odot}$ -Sterns ($\tau_{e,750} = 2370$ a), ist es auch die Zeit ($\Delta t_{g,550} = 6900$ a), die eine Störung benötigt, um aus dem linearen Regime in das nichtlineare zu gelangen. Zudem ist die instabile Phase kürzer und liegt bei $3.3 \cdot 10^4$ Jahren (vgl. Abb. 5.4a). Nach Gl. (8.5) ergibt sich somit ein vergleichsweise kleiner Gesamtmassenverlust,

$$\Delta M_{\text{ges}} = 8.8 M_{\odot}.$$

Dies entspricht 1.6% der ursprünglichen Gesamtmasse von $550 M_{\odot}$. Die Stärke der Instabilität, gemessen an der ausgestoßenen Masse und dem Maximalwert der mittleren nuklearen Energieerzeugung, besitzt nicht nur in der linearen Analyse, sondern auch in der hydrodynamischen Untersuchung eine Abhängigkeit von der Sternmasse.

8.1.6 Ein stabiles Modell

Es ist sowohl aus physikalischer als auch programmtechnischer Sicht interessant, eine hydrodynamische Simulation eines linear stabilen Modells durchzuführen und mit einem linear instabilen Modell gleicher Entwicklungssequenz zu vergleichen. Nach der

Diskussion in Kapitel 5 sind massereiche Population-III-Sterne nur zu Beginn der Hauptreihenentwicklung instabil gegenüber radialen Störungen. Das gewählte stabile Sternmodell entstammt daher einer späten Phase der Hauptreihenentwicklung des $750 M_{\odot}$ -Sterns. Alle Zahlenwerte beziehen sich auf diese beiden Sternmodelle. Im Zusammenhang mit der linearen Analyse wurde in Kapitel 5 (vgl. insbesondere Abb. 5.9) argumentiert, daß Sternmodelle der späten Hauptreihenphase gegenüber jenen der frühen Phase stabil sind, weil die Störampplitude der Eigenfunktion sich zugunsten der Dämpfung in der Hülle ändert. Ein ähnliches Phänomen tritt in der hydrodynamischen Analyse auf.

Die Anregung der Pulsation erfolgt wieder mit einem Geschwindigkeitsverlauf, der mittels der Eigenfunktion der Fundamentalmode gewonnen wird (vgl. Kapitel 7). Unabhängig vom Betrag der Skalierung ist, bei vorgegebener Eigenmode, das Verhältnis von Machzahl an der Oberfläche zu der im Zentrum,

$$\left. \frac{Ma_{\text{ob}}}{Ma_z} \right|_{\text{instabil}} \approx \frac{u_{\text{ob}}}{u_z} \cdot \sqrt{\frac{T_z}{T_{\text{ob}}}}, \quad (8.6)$$

nur eine Eigenschaft des Hintergrundmodells. Dieses Verhältnis nimmt mit der Entwicklung des Sterns zu. Speziell für die beiden untersuchten Sternmodelle gilt:

$$\underbrace{\left. \frac{Ma_{\text{ob}}}{Ma_z} \right|_{\text{stabil}}}_{4.4 \cdot 10^5} > \underbrace{\left. \frac{Ma_{\text{ob}}}{Ma_z} \right|_{\text{instabil}}}_{1.6 \cdot 10^4}.$$

Es gibt zwei Gründe für den Anstieg des Verhältnisses der Machzahlen, Ma_{ob}/M_z , wobei der erste der dominierende ist:

1. Das Verhältnis von induzierter Störgeschwindigkeit am äußeren Rand (Oberfläche) zu der am inneren Rand,

$$\frac{u_{\text{ob}}}{u_z} = \frac{R}{r_z} \cdot \frac{1}{x_z}, \quad (8.7)$$

nimmt mit der Entwicklung des Sterns zu:

$$\left. \frac{u_{\text{ob}}}{u_z} \right|_{\text{stabil}} > \left. \frac{u_{\text{ob}}}{u_z} \right|_{\text{instabil}}.$$

Beide Terme in Gl. (8.7) begünstigen den Anstieg im Zentrum:

- Die relative Störampplitude wird im Laufe der Entwicklung kleiner:

$$x_z|_{\text{instabil}} = 0.69, \quad x_z|_{\text{stabil}} = 0.064.$$

- Das Verhältnis von Gesamtradius R zu innerem Radius r_z vergrößert sich wegen der Expansion des Sterns:

$$\underbrace{\left. \frac{R}{r_z} \right|_{\text{stabil}}}_{690} > \underbrace{\left. \frac{R}{r_z} \right|_{\text{instabil}}}_{320}.$$

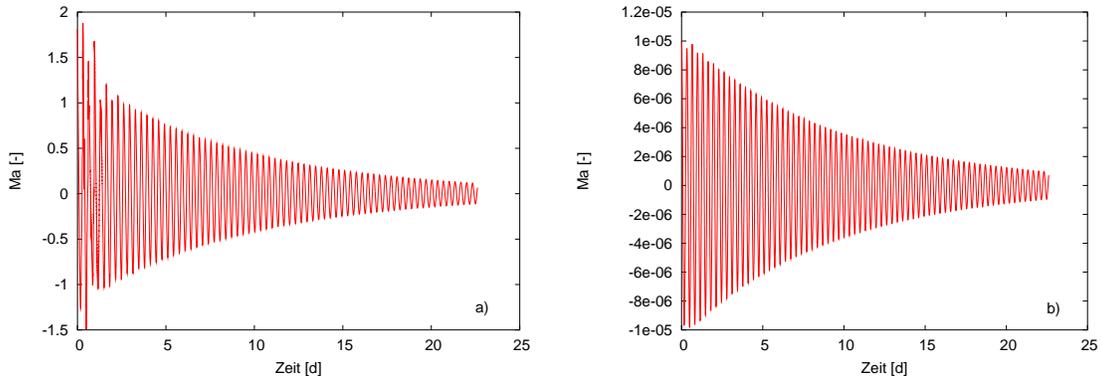


Abbildung 8.8: Stabiles Sternmodell mit $750 M_{\odot}$: a) Machzahl über Zeit an der Oberfläche des Sterns. b) Machzahl über Zeit am inneren Rand.

2. Mit der Ausdehnung der Hülle sinkt die Oberflächentemperatur:

$$\underbrace{\sqrt{\frac{T_z}{T_{ob}}}}_{42} \text{ stabil} > \underbrace{\sqrt{\frac{T_z}{T_{ob}}}}_{36} \text{ instabil}$$

Bei gleich angesetzter Machzahl im Zentrum, ist die resultierende Machzahl an der Oberfläche beim stabilen Modell um mehr als das 27fache (Gl. (8.1.6)) größer. Dies hat eine wichtige Konsequenz: Während die Störung im Zentrum – die Quelle der Instabilität – noch im linearen Bereich schwingt, ist die Amplitude in der Hülle bereits im nichtlinearen Regime. Es treten Stöße auf, in denen die Schwingungsenergie dissipiert, und der Stern stabilisiert sich. Abbildung 8.9 illustriert diesen Sachverhalt anhand der Machzahlverläufe an a) der Oberfläche und b) im Zentrum. Bereits bei einer zentralen Machzahl von $1 \cdot 10^{-5}$ schwingt die Oberflächenschale mit Überschallgeschwindigkeit, $Ma(t=0) = 1.8$. Auch bei kleineren Störamplituden überwiegt die Dämpfung der Hülle die Anfachung im Zentrum.

8.2 $450 M_{\odot}$ und $350 M_{\odot}$

Nachdem das dynamische Verhalten der massereichen Sterne ($750 M_{\odot}$ und $550 M_{\odot}$) analysiert worden ist, sind in diesem Abschnitt zwei linear instabile Sternmodelle mit den Massen $450 M_{\odot}$ und $350 M_{\odot}$ Gegenstand der Betrachtung. Das dynamische Verhalten der masseärmeren Sterne unterscheidet sich stark von dem der massereicheren. Bei beiden Sternen ($450 M_{\odot}$, $350 M_{\odot}$) ist der ϵ -Mechanismus nicht in der Lage, die im nichtlinearen Regime zunehmende Dämpfung zu kompensieren. Die Abbildungen 8.9a und 8.9b zeigen das Verhältnis von mittlerer nuklearer Energieproduktion $\bar{\epsilon}_{\text{nuc}}$ (zur Definition siehe S.75) zur Energieerzeugung des Hintergrundmodells für beide Sternmodelle. Bei beiden Sternmodellen ist die Wirkung des ϵ -Mechanismus deutlich zu sehen. Mit zunehmender Amplitude nimmt jedoch die Dämpfung in einem höheren Maße zu als die Anfachung. Die mittlere nukleare Energieerzeugung steigt beim $450 M_{\odot}$ -Stern auf 4%,

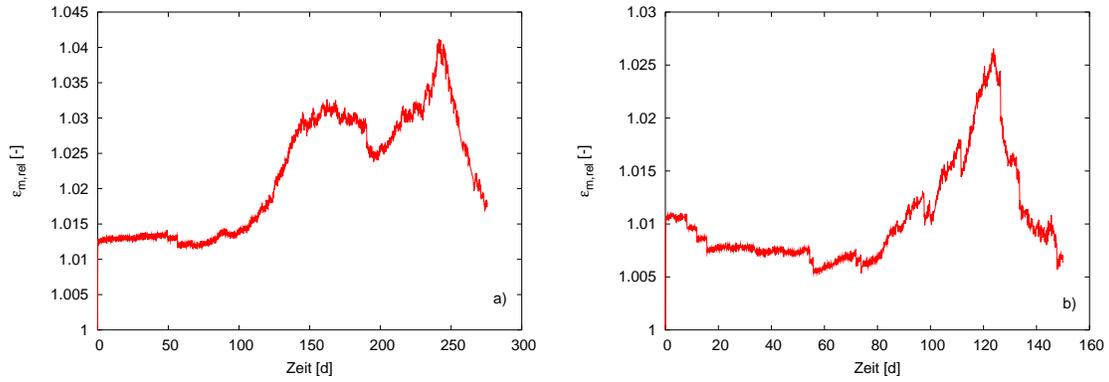


Abbildung 8.9: Wie Abb. 8.2. a) für einen $450 M_{\odot}$ -Stern. b) für einen $350 M_{\odot}$ -Stern.

während sie beim $350 M_{\odot}$ -Stern nur 2.5% erreicht. Die Auswirkungen der Instabilität korrelieren auch in diesem Fall mit der Masse und sind für masseärmere Sterne weniger stark.

Um die Vorgänge an der Oberfläche in die Diskussion mit einzubeziehen, sind in Abbildung 8.10 die Oberflächenmachzahl und die effektive nukleare Energieproduktion aufgetragen. Man sieht, daß der ϵ -Mechanismus ein Anwachsen der Geschwindigkeitssamplitude an der Oberfläche bewirkt, bis eine Machzahl von ungefähr 2 erreicht ist. Die durch Verdichtungsstöße einsetzende Dissipation entzieht dem Stern mehr Schwingungsenergie pro Zeit, als der ϵ -Mechanismus aufzubringen vermag. Das Resultat ist ein starker Rückgang der Amplitude im Zentrum und der Instabilität als ganzes. Wie

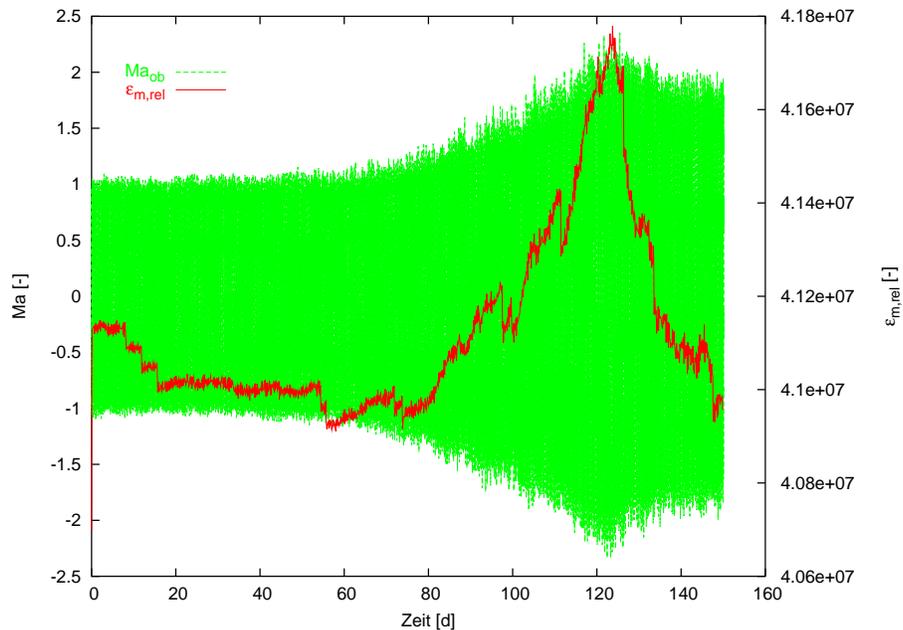


Abbildung 8.10: $350 M_{\odot}$ -Stern. Rote Kurve: Mittlere nukleare Energieerzeugung, bezogen auf den Wert des hydrostatischen Ausgangsmodells (vgl. Abb. 8.9b). Grüne Kurve: Machzahlverlauf an der Oberfläche.

bei den massereichen Sternen ($750 M_{\odot}$, $550 M_{\odot}$) ist auch hier von einem zyklischen Verhalten auszugehen: Die Schwingungsamplitude nimmt ab, bis der ϵ -Mechanismus gegenüber der Dämpfung die Oberhand gewinnt und die Pulsation erneut antreibt; zu einem Massenverlust kommt es aber nicht.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Es war die Zielsetzung dieser Arbeit, das allgemeine Stabilitätsverhalten massereicher primordialer Sterne (Population III mit $Z = 0$) zu beleuchten. Besonderes Augenmerk wurde der Frage gewidmet, ob es Instabilitäten gibt, die mit der Masse zunehmen und somit die obere Massengrenze bei Hauptreihensternen maßgeblich bestimmen. Diesen Verdacht äußerte erstmals Ledoux (1941). Er identifizierte den ϵ -Mechanismus, dessen Massenabhängigkeit er ebenfalls zeigte, als treibende Instabilität.

Das Massenspektrum der ausgesuchten Population-III-Sterne erstreckte sich von einem $50 M_{\odot}$ -Stern bis hin zu einem $750 M_{\odot}$ -Stern ($250 M_{\odot}$, $350 M_{\odot}$, $450 M_{\odot}$, $550 M_{\odot}$). Für alle sechs Sterne lagen Entwicklungsrechnungen, beginnend mit der Vorhauptreihe bis zum Ende der Hauptreihe vor, welche von Straka (2002) zur Verfügung gestellt wurden. Es war ein besonderes Anliegen der Arbeit, eine vollständige Stabilitätsprüfung durchzuführen. Hierzu gehören:

- a) Eine lineare Stabilitätsanalyse ohne einschränkende Vereinfachungen.
- b) Das Verfolgen der instabilen Moden in den nichtlinearen Bereich; d.h. eine hydrodynamische Untersuchung.

Nach der linearen Analyse besitzen die Sterne mit den kleineren Massen ($50 M_{\odot}$ und $250 M_{\odot}$) keine Instabilitäten. Alle massereicheren Sterne im untersuchten Massenspektrum weisen Instabilitäten mit einer kleinen Anwachszeit, $\tau_e \approx 2000 \text{ a} - 10.000 \text{ a}$, in der Fundamentalmode auf. Es konnte auf zwei unabhängigen Wegen gezeigt werden, daß es sich hierbei um den ϵ -Mechanismus handelt. Ferner haben die Rechnungen überzeugend zeigen können, daß Instabilitäten, erzeugt durch den ϵ -Mechanismus, in der Tat mit der Masse an Stärke zunehmen. Diese Zunahme äußert sich in

- einer kürzeren Anwachszeit (Abb. 5.4a) und
- einer längeren Dauer der instabilen Phase (Abb. 5.4b).

Andere Instabilitäten, wie der κ -Mechanismus, sind bei den untersuchten Sternen nicht vorhanden. Dies liegt zum Teil an der Zusammensetzung der Hauptreihensterne, die keine schwereren Elemente als Helium besitzen, und an der hohen Oberflächentemperatur

($\approx 9 \cdot 10^4$) dieser Sterne, weswegen sich die zweite Helium-Ionisationszone, welche prinzipiell den κ -Mechanismus treiben könnte, in den äußersten Schichten des Sterns befindet und nur eine geringe Masse beinhaltet. Das Fehlen von schweren Elementen hat zur Folge, daß die gesamte Sternmaterie vollständig ionisiert ist und „Opazitätsbuckel“, die sowohl für den κ -Mechanismus als auch für Resonanz-Instabilitäten (sog. „strange modes“, Glatzel 1994) notwendig sind, nicht auftauchen. Nach der linearen Analyse ist die Struktur eines Population-III-Sterns zweigeteilt:

1. Das Zentrum, wo der ϵ -Mechanismus wirkt, stellt die treibende Region dar.
2. Die Hülle wirkt dämpfend auf jede Anregung.

Diese Zweiteilung konnte mittels des Arbeitsintegrals (Abb. 5.6) untermauert werden. Weitere Resultate der linearen Analyse zeigen, daß der ϵ -Mechanismus nur zu Beginn der Hauptreihenentwicklung in der Lage ist, die Dämpfung in der Hülle zu überwinden, und ferner nur die Fundamentalmode antreibt. Beide Resultate haben ihre Ursache im Verlauf der Eigenfunktionen, wie in Kapitel 5.2.1 (Abb. 5.2 und Tabelle 5.1) eingehend diskutiert wird. Es wurde auch die Sensitivität der äußeren mechanischen Randbedingung auf die Lösung untersucht. Hierbei konnte festgestellt werden, daß die Mehrdeutigkeit, unter der diese Randbedingung leidet, nur dann keine Rolle spielt, wenn das Hintergrundmodell bis zu einer optischen Tiefe von mindestens $\tau = 2/3$ gerechnet wird. Falls der äußere Rand in der Sternentwicklungsrechnung zu vereinfacht behandelt wird, ergibt sich eine starke Abhängigkeit des Imaginärteils des Eigenwertes, welcher die Anwachs- bzw. Dämpfungsrate angibt, von der Randbedingung. Selbst das Vorzeichen des Imaginärteils ist nicht mehr einheitlich (vgl. Abb. 5.8).

Im zweiten Teil der Arbeit werden die instabilen Moden in das nichtlineare Regime verfolgt und deren Auswirkungen auf den Stern studiert. Dies erfordert eine konsistente Simulation der hydrodynamischen Vorgänge. Die untersuchten Sternmodelle werden einmal zur Schwingung angeregt und des weiteren sich selbst überlassen. Eine kontinuierliche Energiezufuhr, wie bei Appenzeller (1970), findet nicht statt. Ferner ist es nach Auffassung des Autors notwendig, die nukleare Energieproduktionsrate – die Quelle der Instabilität – akkurat und konsistent zu behandeln. Anstelle einer Linearisierung der Energieproduktionsrate (Appenzeller, 1970) wird daher ein nukleares Netzwerk gelöst. Die mit den kleinen Anwachsrate verbundenen Herausforderungen an die Art und Weise der Anregung sind in Kapitel 7 erläutert.

Die vier untersuchten Sterne offenbaren nicht das gleiche Verhalten. Bei den beiden massereichsten unter den untersuchten Sternen ($550 M_{\odot}$ und $750 M_{\odot}$) konnten, durch die vom ϵ -Mechanismus bewirkte Anfachung der Pulsationsamplitude, die äußeren Massenschalen Fluchtgeschwindigkeit erreichen. Die über eine Pulsationsperiode gemittelte nukleare Energieproduktionsrate erreichte dabei beim $750 M_{\odot}$ -Stern den 2fachen Wert des Anfangswertes. Im Gegensatz zu Appenzeller (1970) ist der Massenverlust nicht stetig, sondern *zyklisch eruptiv*. Ursache hierfür sind die veränderten Strömungsbedingungen. Die Schwingung beginnt in der Fundamentalmode und entfernt sich zunehmend von dieser mit wachsender Pulsationsamplitude, bis das Schwingungsmuster eher dem 1. Oberton als der Fundamentalen entspricht (Abb. 8.6a und 8.6b). Mit der Änderung der Schwingungscharakteristik gehen zwei Phänomene einher:

- Es findet eine *Entkoppelung* der der äußeren Massenschalen von der restlichen Pulsation statt.
- Durch die nach außen laufenden und an Stärke zunehmenden Stoßwellen steigt die Dissipation in der Hülle stark an.

Die einsetzende Entkoppelung entspricht einer Eigendynamik der Hülle (Abb. 8.5a), und durch die Zunahme der Dissipation wird die gesamte Pulsation gedämpft. Der $750 M_{\odot}$ -Stern verliert bei diesem Vorgang $1.17 M_{\odot}$, während der Massenverlust beim $550 M_{\odot}$ -Stern mit $0.37 M_{\odot}$ ein Drittel weniger Masse auf Fluchtgeschwindigkeit beschleunigt wird. Dieser Vorgang wird in dieser Arbeit als *Eruption* bezeichnet. Da der Massenverlust im Vergleich zur Gesamtmasse sehr klein ist, wurde argumentiert, daß der Stern spätestens, wenn die Pulsationsamplituden bis in den linearen Bereich abgefallen sind, wieder anfängt instabil zu schwingen. Dieser Vorgang wird in dieser Arbeit als ein *Zyklus* bezeichnet. Mit Hilfe einiger Abschätzungen konnte die Gesamtanzahl der Eruptionen und hierdurch der Gesamtmassenverlust (unter der Annahme, daß die abgeworfene Masse bei jeder Eruption gleich bleibt) für beide Sternmassen abgeschätzt werden. Demnach verliert der $750 M_{\odot}$ -Stern insgesamt ca. $43 M_{\odot}$ und der $550 M_{\odot}$ -Stern ca. $9 M_{\odot}$. Diese Werte können noch steigen, wenn der ϵ -Mechanismus in der Lage ist, die Pulsation von neuem zu treiben, bevor die Schwingung in den linearen Bereich zurückgekehrt ist. Daher ist dies sicherlich eine sehr konservative Abschätzung.

Die beiden masseärmeren Sterne ($350 M_{\odot}$ und $450 M_{\odot}$) zeigen keinen Massenverlust. Die mittlere nukleare Energieproduktionsrate steigt zunächst an, bis die Machzahl an der Oberfläche den Wert 2 erreicht. Die Dissipation nimmt nun deutlich zu und entzieht der Pulsation Schwingungsenergie; die Pulsation wird wieder gedämpft. Es ist daher auch hier ein zyklisches Verhalten zu erwarten, da die Instabilitäten im linearen Regime existieren und erst im nichtlinearen durch die erhöhte Dissipation gedämpft werden.

Der ϵ -Mechanismus ist bei Population-III-Sternen in der Lage, die Fundamentalmode instabil schwingen zu lassen. Dies zeigen sowohl die lineare Analyse als auch die hydrodynamischen Rechnungen. Zu berücksichtigen ist, daß der ϵ -Mechanismus nur eine geringe Anwachsrate besitzt. Physikalisch bedeutet dies: Die Anfachung überwiegt nur leicht die Dämpfung. Es hat sich herausgestellt, daß die Zunahme der Dämpfung mit steigender Pulsationsamplitude im Nichtlinearen die Anfachung überwiegt. Sehr deutlich ist dies bei den masseärmeren Sternen ($350 M_{\odot}$ und $450 M_{\odot}$) zu sehen. Bei den beiden massereicheren Sternen ($550 M_{\odot}$ und $750 M_{\odot}$) findet zuvor ein Massenverlust statt. Dieser Wechsel in der Dominanz:

- Anfachung $>$ Dämpfung im linearen Schwingungsbereich,
- Anfachung $<$ Dämpfung im (späten) nichtlinearen Schwingungsbereich,

sorgt für den zyklischen Wechsel von Instabilität und Stabilität.

Nach dem bisher Gesagten ist der ϵ -Mechanismus bei Population-III-Sternen im Massenspektrum $50 M_{\odot} - 750 M_{\odot}$ kein bestimmender Faktor der oberen Massengrenze! Er bewirkt beim $750 M_{\odot}$ -Stern einen abgeschätzten Gesamtmassenverlust von 5.7%, beim $550 M_{\odot}$ -Stern sind es lediglich 1.6%. Es bleibt zu untersuchen, wie der Gesamtmassenverlust mit zunehmender Sternmasse steigt.

Literaturverzeichnis

- Appenzeller I., 1970, A&A, 5, 355
- Bachelor G. K., 1967, An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press
- Baehr H. D., 1996, Thermodynamik. Springer-Verlag
- Baker N., Kippenhahn R., 1962, Zeitschrift fur Astrophysik, 54, 114
- Baker N., Kippenhahn R., 1965, ApJ, 142, 868
- Baraffe I., Heger A., Woosley S. E., 2001, ApJ, 550, 890
- Bromm V., Coppi P. S., Larson R. B., 1999, ApJ, 527, L5
- Brunt D., 1913, The Observatory, 36, 59
- Castor J. I., 1971, ApJ, 166, 109
- Castor J. I., 1972, ApJ, 178, 779
- Chandrasekhar S., 1939, An introduction to the study of stellar structure. Chicago, Ill., The University of Chicago press [1939]
- Chandrasekhar S., 1961, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford press [1961]
- Courant R. Friedrichs K. O., 1948, Supersonic Flow and Shock Waves. Interscience
- Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H., 1928, Mathematische Annalen, 100, 32
- Cowling T. G., 1934, MNRAS, 94, 768
- Cox J., Giuli R., 1968, Principles of Stellar Structure. Gordon and Breach, Science Publishers
- Cox J. P., 1958, ApJ, 127, 194
- Cox J. P., 1979, Theory of Stellar Pulsation. Princeton Series in Astrophysics
- Davey A., 1977, J. Comput. Phys., 24, 331
- Dorfi E. A., Pikall H. Stökl A., A. G., 2005, Computer Physics Communications Phys
- Drazin P. G. Reid W. H., 1981, Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press

- Eddington A. S., 1918, MNRAS, 79, 2
- Eddington A. S., 1926, The Internal Constitution of the Stars. The Internal Constitution of the Stars, Cambridge: Cambridge University Press, 1926
- Eddington Sir A. S., 1941, MNRAS, 101, 182
- Edgar J. A., 1933, MNRAS, 93, 422
- Gautschy A., Glatzel W., 1990, MNRAS, 245, 154
- Glatzel W., 1994, MNRAS, 271, 66
- Glatzel W., Kiriakidis M., 1993, MNRAS, 263, 375
- Grott M., Chernigovski S., Glatzel W., 2005, MNRAS, 360, 1532
- Hofmeister E., Kippenhahn R., Weigert A., 1964, Zeitschrift für Astrophysik, 59, 215
- Hoyle F., Lyttleton R. A., 1943, MNRAS, 103, 21
- Jeans J. H., 1925, MNRAS, 85, 797
- Kippenhahn R. Weigert A., 1994, Stellar Structure and Evolution. Springer-Verlag
- Landau L. D., Lifschitz E. M., 1966, Lehrbuch der theoretischen Physik Bd. VI Hydrodynamik. Berlin Akademie-Verlag
- Leavitt H. S., Pickering E. C., 1912, Harvard College Observatory Circular, 173, 1
- Ledoux P., 1941, ApJ, 94, 537
- Meyberg K. Vachenaue P., 2001, Höhere Mathematik 2. Springer-Verlag
- Mihalas D., Mihalas B. W., 1984, Foundation of Radiation Hydrodynamics. Oxford University Press, New York
- Olive K. A., 2000, Nuclear Physics B Proceedings Supplements, 80, 79
- Plummer H. C., 1913, MNRAS, 73, 661
- Ritter A., 1879. Wiedemanns Annalen VIII
- Saio H., Wheeler J. C., Cox J. P., 1984, ApJ, 281, 318
- Schwarz H. R., 1996, Numerische Mathematik. Teubner-Verlag
- Schwarzschild M., 1941, ApJ, 94, 245
- Schwarzschild M., Härm R., 1959, ApJ, 129, 637
- Scott M. R., 1973, J. Comput. Phys., 12, 334
- Seaton M. J., Yan Y., Mihalas D., Pradhan A. K., 1994, MNRAS, 266, 805
- Shapley H., 1914, ApJ, 40, 448

- Spurk J. H., 1996, Strömungslehre. Springer
- Stoer J., Bulirsch R., 1990, Numerische Mathematik II. Springer-Verlag
- Straka C. W., 2002, PhD thesis, PhD Thesis, Naturwissenschaftlich-Mathematische Gesamtfakultät der Universität Heidelberg, Germany. VIII + 103 p. (2002)
- Tscharnuter W. M., Winkler K.-H., 1979, Computer Physics Communications, 18, 171
- Versteeg H. K., Malalasekera W., 1995, Computational Fluid Dynamics. Longman
- Vogt H., 1921, Astronomische Nachrichten, 212, 473
- von Neumann J., Richtmyer R. D., 1950, J. Appl. Phys, 21, 232
- Zhevakin S. A., 1953, Russ. A.J., 30, 161

Danksagung

Diese Arbeit wäre ohne den Vertrauensvorschuß von Herrn Prof. Tscharnuter und Dr. Straka gleich in ihren Anfängen durch Widrigkeiten und Paranoia erstickt worden. Dafür, daß Sie zu mir gehalten haben und für das mir geschenkte Vertrauen, gebührt Ihnen mein besonderer Dank¹.

Für das Gelingen dieser Arbeit haben viele Personen auf verschiedene Weise einen Beitrag geleistet. Leider kann ich nicht alle namentlich erwähnen und hoffe man sieht es mir nach.

Die langen und tiefeschürfenden Diskussionen mit Herrn Straka zu Anfang, und mit Herrn Tscharnuter zum Schluß hin waren sehr nützlich und halfen mir mich in der neuen Welt der Astrophysik zurecht zu finden. Den Mitarbeitern des ITA möchte ich für das gute Arbeitsklima danken. Im Besonderen möchte ich mich bei Ulrich Herbst, Gunther Kalliwoda und Markward Britch für die stete Diskussionsbereitschaft bedanken. Vor allem die Gespräche mit Ulrich Herbst und Gunther Kalliwoda waren von außerordentlichem Nutzen. In fachlicher Hinsicht ist ferner Herr Prof. W. Glatzel aus Göttingen zu erwähnen, der mir bei einem Flaschenhalsproblem ein Licht wies. Danke Wolfgang, ohne Deine Kompetenz in der Pulsationstheorie tappte ich noch heute im dunkeln.

Abgesehen von der wissenschaftlichen Unterstützung hatte ich das Glück der moralischen durch Freunde und Bekannte. In erster Linie ist hier Corinna Gamgami zu nennen. Die aufbauenden Gespräche mit Dir überwogen die niederschmetternden Tiraden. Zu den moralischen Helfern gehören auch und vor allen Frau Britta Bernatz und Signora Giovanna Pedaletti. Vielen lieben Dank dafür, daß Ihr stets da wart, wenn ich Euch brauchte. Ferner möchte ich meinen Kollegen Dr. Robi Banerjee und Dr. Paul Clark – den coolsten Astrophysikern diesseits des Sagittarius – für die denkwürdigen, ehrfurchterregenden durchzechten Nächte danken. Meinen Mitbewohnern, Veroniker Fischer, Miriam Seeger, Florian Gleich und Sigrid Mohnen (alias Sigg), danke ich, da sie mich in einer bedrückenden Zeit unterstützt und ertragen haben.

Meiner Mutter Amina Yakbah schulde ich Dankbarkeit dafür, daß Sie mich den Wert einer guten Bildung zu schätzen lehrte. Das beste zum Schluß: Ferner möchte ich Rabea (alias Huckleberry) und Zakaria (alias Pausbäckchen) einfach dafür danken, daß sie da sind!

¹Dieses Wort wird, wie der Titel erahnen läßt, noch häufiger Verwendung finden.

Lebenslauf

Name:	Farid Gamgami
Geboren:	am 15.12.1977 in Dortmund
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Eltern:	Amina Yakbah und El-Mamoune Gamgami
Familienstand	Ehemann von Corinna Gamgami, Vater von Rabea und Zakaria
1984 – 1988	Besuch der Weingarten-Grundschule in Dortmund Hörde
1984 – 1989	Besuch der Gesamtschule in Dortmund Hörde
1989 – 1997	Besuch der Carlo-Schmid Gesamtschule in Kamen
Juni 1997	Abitur, Note: gut (1.8)
1997 – 1999	Studium des Maschinenbaus an der Ruhr-Universität Bochum
1999 – 2003	Studium der Luft- und Raumfahrttechnik an der RWTH Aachen
März 2003	Diplom in Maschinenwesen, Note: sehr gut (1.5)
April 2003 – Juli 2007	Doktorand am Institut für theoretische Astrophysik der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

