

Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik
vorgelegt von
Hannes Horst
aus Berlin
2004

Helligkeitsänderungen aktiver galaktischer Kerne auf kurzen Zeitskalen

Die Diplomarbeit wurde von Hannes Horst ausgeführt am
Institut für Theoretische Astrophysik
unter Betreuung von
Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

Helligkeitsänderungen aktiver galaktischer Kerne auf kurzen Zeitskalen

Diese Diplomarbeit behandelt Helligkeitsänderungen aktiver galaktischer Kerne auf überraschend kurzen Zeitskalen. Wir gehen davon aus, dass diese durch eine Art von „freak waves“ in den zirkumnuklearen Akkretionsscheiben erzeugt werden, welche wiederum ihren Ursprung in einer radial stark variablen Viskosität haben. Die Grundlage dieser Annahme ist die von [Duschl et al. \(2000\)](#) eingeführte β -Viskosität. Dieses Modell sagt voraus, dass die Viskosität in den selbstgravitierenden Regionen der Scheibe größer ist als in den nicht selbstgravitierenden. Da die Implementation eines nichtstationären selbstgravitierenden Akkretionsscheibenmodells durch das Auftreten von Fragmentationseffekten unerwartet schwierig wurde, bilden wir das Verhalten einer β -Scheibe in einem vereinfachten 2-Viskositäten-Modell nach. Wir zeigen, dass dieses Modell tatsächlich zur Entstehung von freak waves führt, welche wiederum, wie wir ebenfalls zeigen, eine starke Helligkeitsänderung im Infrarot auf einer verhältnismäßig kurzen Zeitskala verursachen. Damit ist gezeigt, dass freak waves tatsächlich die Ursache für dramatische Helligkeitsänderungen in aktiven galaktischen Kernen sein können.

Luminosity changes in active galactic nuclei on short timescales

In this diploma thesis we treat the phenomenon of luminosity variations in active galactic nuclei on surprisingly short timescales. We believe the underlying mechanism to be similar to a freakwave effect in the circumnuclear accretion disk triggered by a radially strongly varying viscosity. The basis for this idea is β -viscosity as introduced by [Duschl et al. \(2000\)](#). The β -model predicts a viscosity which is enhanced in selfgravitating regions of an accretion disk. As an implementation of a selfgravitating non-stationary disk model turned out to be - due to fragmentation effects - too extensive, we emulate the behaviour of β -viscosity in a simplified 2-viscosity-model. We show that this model indeed produces freak waves which we then show to induce a large magnitude luminosity increase in midinfrared on a short timescale. Thus freak waves may very well be a source for dramatic luminosity changes in active galactic nuclei.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	3
1 Einleitung	7
1.1 Akkretionsscheiben	8
1.2 Aktive galaktische Kerne	9
1.3 Helligkeitsänderungen auf kurzen Zeitskalen	10
2 Physikalische Grundlagen	13
2.1 Grundlegende Annahmen	13
2.2 Die Bewegungsgleichung	14
2.2.1 Massen- und Drehimpulserhaltung	14
2.2.2 Zeitliche Entwicklung der Flächendichte	15
2.2.3 Radialgeschwindigkeit	16
2.2.4 Berechnung der Winkelgeschwindigkeit	17
2.3 Strahlung und Spektrum	18
2.4 Charakteristische Zeitskalen	20
2.5 Behandlung der Viskosität	20
3 Numerische Methoden	23
3.1 Diskretisierungen	23
3.1.1 Diskretisierung der Massentransportgleichung	23
3.1.2 Behandlung des Gravitationsfeldes	26
3.1.3 Numerische Stabilität	27
3.1.4 Randbedingungen	27
3.2 Aufbau des Simulationsprogrammes	28
3.2.1 Das Hauptprogramm	28
3.2.2 Das Modul <code>start</code>	29
3.2.3 Das Modul <code>dgl</code>	29
3.2.4 Das Modul <code>gravity</code>	29
3.2.5 Das Modul <code>viscosity</code>	30
3.2.6 Das Modul <code>spectrum</code>	30

3.2.7	Die übrigen Module	30
4	Ergebnisse	31
4.1	Validation des numerischen Verfahrens	31
4.1.1	Stationäre Lösung ohne Eigengravitation	31
4.1.2	Nichtstationäre Lösung ohne Eigengravitation	33
4.2	Einführung der Eigengravitation	36
4.3	Das 2-Viskositäten-Modell	39
4.3.1	Entwicklung der Flächendichte	39
4.3.2	Spektrale Entwicklung	42
5	Zusammenfassung und Ausblick	45
	Literaturverzeichnis	47
	Danksagung	51

Kapitel 1

Einleitung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen Mechanismus zu finden, der auf kurzen Zeitskalen merkliche Änderungen in den Helligkeiten von aktiven galaktischen Kernen (AGN ¹) und Quasaren verursachen kann.

Es ist inzwischen allgemein anerkannt, dass AGN ihre Energie aus der Akkretion von Materie auf ein zentrales Schwarzes Loch beziehen. Aufgrund der Drehimpulserhaltung kommt es dabei zur Bildung einer flachen Akkretions-scheibe. Die von einem AGN abgestrahlte Energie entspricht nun gerade der in dieser Scheibe dissipierten Bewegungsenergie (zum allgemeinen Aufbau von AGN siehe z.B.. [Antonucci 1993](#), [Urry & Padovani 1996](#)). Sowohl Drehimpulstransport als auch Dissipation werden dabei durch Viskosität ermöglicht. Da molekulare Viskositäten um viele Größenordnungen zu klein sind, um ausreichend viel Energie zu dissipieren, führt man, um Übereinstimmung mit beobachteten Helligkeiten akkretierender Objekte zu erreichen, eine turbulente Viskosität ein, die um ein vielfaches effizienter als molekulare Reibung ist. Dieser Ansatz wurde zunächst von [Shakura & Sunyaev \(1973\)](#) eingeführt und ist inzwischen allgemein akzeptiert.

Bis heute ist nicht geklärt, wie die supermassereichen Schwarzen Löcher in AGN entstehen. Allerdings sind derartige Schwarze Löcher keineswegs exotische Objekte, sondern scheinen in den Zentren beinahe sämtlicher Galaxien vorzukommen ([Kormendy & Richstone 1995](#), [Magorrian et al. 1998](#)), insbesondere auch im Zentrum der Milchstraße ([Genzel et al. 2003](#)). Dabei scheint es eine enge Korrelation zwischen der Masse eines solchen zentralen Schwarzen Loches und den Eigenschaften der umgebenden Galaxie zu geben ([Gebhardt et al. 2000](#), [Wang et al. 2000](#)).

Dies bedeutet, dass der wesentliche Unterschied zwischen einer aktiven und einer normalen Galaxie nicht in ihrem Aufbau liegt, sondern vielmehr in der

¹AGN steht für „active galactic nuclei“

Gasmenge, die für Akkretion auf das Zentrum zur Verfügung steht ([Beckert & Duschl 2002](#)).

1.1 Akkretionsscheiben

Akkretionsscheiben spielen in vielen verschiedenen astronomischen Objekten eine wichtige Rolle. Die wichtigsten Objektklassen sind dabei Protosterne, Doppelsternsysteme und AGN.

Beim Kollaps von interstellarem Gas, der schließlich in Sternentstehung mündet, bildet sich eine Scheibe aus, da der Drehimpuls, den das Gas bereits zu Beginn des Prozesses besitzt, nicht abgegeben werden kann. War die Existenz derartiger protoplanetarischer Scheiben bis vor wenigen Jahren nur eine allgemein akzeptierte Annahme, so wurden sie inzwischen auch direkt beobachtet (z.B. von [Beckwith et al. 1990](#)). Besonders eindrucksvoll sind die Aufnahmen des Hubble Space Telescopes von protoplanetaren Scheiben im Orionnebel von [McCaughrean & O'Dell \(1995\)](#).

Auch in unserem Sonnensystem finden sich zahlreiche Spuren der vorangegangenen Scheibe. Die auffälligste ist selbstverständlich die Tatsache, dass sich die meisten - und alle größeren - Objekte nahezu in einer Ebene befinden und sich zudem in der gleichen Richtung um die Sonne bewegen. Aus der physikalischen und chemischen Struktur des Sonnensystems lassen sich Rückschlüsse auf die Eigenschaften der früheren protoplanetarischen Scheibe ziehen. Einen guten Überblick über die Entstehung des Sonnensystems bietet [Lissauer \(1993\)](#); der Zusammenhang von physikalischer Beschaffenheit der Körper im äußeren Sonnensystem und Eigenschaften der präsolaren Scheibe wird z.B. von [Kenyon & Luu \(1999\)](#) und [Morbidelli et al. \(2003\)](#) diskutiert.

Auch in Doppelsternsystemen kommt es unter bestimmten Bedingungen zu Akkretion. Übertrifft einer der beiden Sterne sein Roche-Volumen, so bildet sich am Lagrange-Punkt zwischen den beiden Sternen ein Gasstrom von dem Stern, der sein Roche-Volumen übertrifft, auf sein Begleitobjekt. Durch den in einem solchen Binärsystem vorhandenen Drehimpuls bildet sich auch hier eine Scheibe aus. Das Verhältnis von abgestrahlter Energie zu akkretierter Masse ist allgemein dann besonders groß, wenn das akkretierende Objekt besonders klein ist, da in diesem Fall mehr potentielle Energie gewonnen werden kann. Daher sind die auffälligsten Doppelsternsysteme solche, in denen Akkretion auf einen Weißen Zwerg, einen Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch stattfindet. Die beiden letztgenannten Objektklassen sind dabei verantwortlich für sogenannte Röntgendoppelsterne (zu Akkretionsscheiben in Röntgendoppelsternen siehe z.B. [White 1989](#)).

Auf AGN, die ihre Energie ebenfalls aus Akkretion beziehen, soll im nächsten

Abschnitt eingegangen werden.

In der Theorie der Akkretionsscheiben gibt es nach wie vor einige offene Fragen. So ist zum Beispiel nicht klar, wie turbulente Viskosität behandelt werden muss. Der α -Ansatz von [Shakura & Sunyaev \(1973\)](#) war in der Vergangenheit sehr erfolgreich, doch entstehen Probleme bei der Beschreibung von Scheiben, deren Masse gegenüber der des Zentralobjekts nicht mehr vernachlässigbar ist. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wurden andere Ansätze entwickelt, vor allem der β -Ansatz ([Duschl et al. 2000](#), [Richard & Zahn 1999](#)). Doch auch diese Vorschläge können einige Probleme nicht klären, wie z.B. die Dissipation von Bewegungsenergie in Stoßwellen oder die Bedeutung von kompressiblen Strömungen.

Eine weitere Frage ist die nach der Stabilität von Akkretionsscheiben. Neben gravitativen ([Toomre 1964](#)) wurden auch magnetische ([Balbus & Hawley 1991](#)) und thermische Instabilitäten untersucht. Auf der einen Seite werden Instabilitäten benötigt, um Turbulenz zu erzeugen, auf der anderen Seite können sie zu einer Fragmentation der Scheibe führen. Daher ist diese Frage von grundsätzlicher Bedeutung.

Trotz all dieser Probleme ist jedoch der grundsätzliche Aufbau einer Akkretionsscheibe gut verstanden. Die theoretischen Modelle wurden zudem durch zahlreiche Beobachtungen bestätigt. Besonders hervorzuheben sind hierbei Spektren von Akkretionsscheiben sowie Periodizitäten und Helligkeiten von Zergnovae.

Einen guten Überblick über die Theorie der Akkretionsscheiben bietet [Pringle \(1981\)](#). Ein empfehlenswertes Lehrbuch zu diesem Thema ist [Frank et al. \(2002\)](#).

1.2 Aktive galaktische Kerne

Seit der Entdeckung des ersten Quasars 3C273 faszinieren diese Objekte durch ihre enorm energiereiche Abstrahlung. Es handelt sich hierbei um die leuchtkräftigsten Objekte im Universum. Andere Formen aktiver Galaxien, das heißt Galaxien, die ungewöhnliche Aktivitäten wie außergewöhnliche zentrale Helligkeiten in verschiedenen Spektralbereichen, Bildung von Jets oder erhöhte Sternentstehungsrate zeigen, sind Radiogalaxien, Starburst-Galaxien, Seyfert-Galaxien und ULIRGS². Bis auf Starburst-Galaxien konzentrieren diese aktiven Galaxien ihre Aktivität auf das Zentrum, so dass sich für die Zentralregion eines solchen Objekts die Bezeichnung AGN etabliert hat.

²„Ultra Luminous InfraRed Galaxies“

In den letzten Jahren hat sich die Vorstellung durchgesetzt, dass die Energiequelle für die verschiedenen Ausprägungen von AGN gleich ist (Urry & Padovani 1996, Antonucci 1993): Große Mengen interstellaren Materials werden auf ein Schwarzes Loch mit einer Masse von 10^7 bis 10^9 Sonnenmassen akkretiert; während dieses Prozesses wird ein erheblicher Anteil der potentiellen Energie des einfallenden Materials in Strahlung umgewandelt. In Einheiten der Ruhemasse mc^2 erreicht die Energieausbeute eine Effizienz von 6% (Frank et al. 2002). Als Vergleich kann man die Effizienz des Wasserstoff-Helium-Brennens in Sternen betrachten, welche nur 0.7% beträgt. Damit ist Akkretion der mit Abstand effizienteste Prozess zur Energiegewinnung.

Für derartige Aktivitäten werden im Zentrum der Galaxie gewaltige Gasmenngen benötigt. Simulationen von Barnes & Hernquist (1996) haben gezeigt, dass bei Wechselwirkungen von zwei Galaxien, besonders bei Verschmelzungen, das interstellare Gas durch Gezeitenkräfte angetrieben Balken bildet, in denen es Drehimpuls abgibt und schließlich ins Zentrum der Galaxie strömt. Die Frage, woher die supermassereichen Schwarzen Löcher im Zentrum eines AGN stammen, wird noch immer kontrovers diskutiert, jedoch zeigen Rechnungen von Duschl & Strittmatter (2001), dass derartige Gasströmungen ausreichen, um in etwa 500×10^6 a ein supermassereiches Schwarzes Loch zu bilden und zusätzlich ausreichend viel „Treibstoff“ für AGN-Aktivität bereitzustellen. Damit entfällt die Notwendigkeit für primordiale supermassereiche Schwarze Löcher. Einfache statistische Modelle zeigen zudem, dass man mit diesem Ansatz die beobachtete Verteilung von Quasardichte über Rotverschiebung gut reproduzieren kann (Duschl & Horst 2004).

1.3 Helligkeitsänderungen auf kurzen Zeitskalen

In dieser Arbeit wird nun die Frage behandelt, ob Helligkeitsänderungen von AGN auf kurzen Zeitskalen durch die Dynamik der Akkretionsscheibe erklärt werden können. Grundlage der Arbeit ist das β -Viskositätsmodell von Duschl et al. (2000), das vorhersagt, dass die Viskosität mit steigendem Grad an Eigengravitation zunimmt. Dies kann bis zu einem inneren Radius, ab dem die Masse des Zentralobjekts dominierend wird, zu einem Lawineneffekt führen, welcher wiederum Helligkeitsänderungen verursachen wird, die deutlich schneller als mit viskoser Zeitskala ablaufen. Da dieser Effekt nur geringe Auswirkungen auf den innersten und damit heißesten Bereich der Scheibe haben sollte, wird keine Helligkeitsänderung im Röntgenbereich und

damit auch nur eine geringe Änderung der bolometrischen Helligkeit erwartet. Allerdings sollte es zu signifikanten Effekten im optischen und infraroten Spektralbereich kommen.

Da die Einführung von Eigengravitation in einer ausreichend genauen Behandlung zu Fragmentationseffekten führt, die im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht zu bewältigen sind, wird ein einfaches 2-Viskositäten-Modell angenommen, in dem die Viskosität je nach Flächendichte entweder einen festen höheren oder einen festen niedrigeren Wert annimmt. In dieser Arbeit wird überprüft, ob ein solches Modell zu dem erwarteten Lawineneffekt führt.

Kapitel 2

Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel soll die Physik erläutert werden, die der von mir erstellten Simulation zu Grunde liegt. Bei dieser Simulation handelt es sich um einen eindimensionalen hydrodynamischen Code, der den Massentransport in radialer Richtung berechnet. In das Modell, auf dem dieser basiert, gehen die im folgenden Abschnitt aufgeführten Annahmen ein.

2.1 Grundlegende Annahmen

Um ein Modell zu erhalten, das sich mit vertretbarem Aufwand umsetzen lässt, müssen einige sinnvolle Annahmen getroffen werden. Diese sollen hier erläutert werden.

Verwendet wird ein zylindrisches Koordinatensystem $\{s, \varphi, z\}$ (die radiale Koordinate ist hier und im Folgenden mit s bezeichnet). Dabei gehe ich davon aus, dass die Scheibe geometrisch dünn und symmetrisch um die $z = 0$ -Ebene ist.

In diesem Fall wird die Oberflächendichte Σ eine sinnvolle Größe. Sie ist gegeben durch $\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz$, wobei ρ die Massendichte der Scheibe ist. Auch alle anderen physikalischen Größen können über die Dicke der Scheibe gemittelt werden, so dass die Dynamik des Gases zu einem eindimensionalen Problem wird. Man spricht dabei von der 1-Zonen-Näherung. Desweiteren wird angenommen, dass für alle physikalischen Größen x $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0$ gilt.

Bei der Behandlung der Gravitation wurde zunächst versucht, die Eigengravitation des Gases zu berücksichtigen. Dies verursacht bei ausreichend genauer Behandlung jedoch Probleme in Form von Fragmentationseffekten (siehe Abschnitt 4.2), so dass schließlich doch der rein *Keplersche* Fall angenommen wurde. Die daraus resultierende Berechnung der Winkelgeschwindigkeit wird in Abschnitt 2.2.4 erklärt.

2.2 Die Bewegungsgleichung

Die zu lösende Massentransportgleichung ist eine mit der Diffusionsgleichung verwandte partielle Differentialgleichung. Man erhält sie aus der Kombination von Massenerhaltung und Drehimpulserhaltung.

2.2.1 Massen- und Drehimpulserhaltung

Im Folgenden sollen die Kontinuitätsgleichungen für Masse und Drehimpuls in radialer Richtung hergeleitet werden. Dazu betrachten wir den Scheibenabschnitt zwischen s und $s + ds$, dessen Masse durch $2\pi s ds \Sigma$ gegeben ist. Die Massenänderung ist gegeben durch den Materiefluss

$$\dot{M}(s, t) = 2\pi s \Sigma(s, t) v_s(s, t) \quad (2.1)$$

aus den bzw. in die Nachbargebiete. v_s ist hier die Geschwindigkeit in s -Richtung. Aus der Massenerhaltung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (2\pi s ds \Sigma) &= v_s(s, t) 2\pi s \Sigma(s, t) - v_s(s + ds, t) 2\pi (s + ds) \Sigma(s + ds, t) \\ &\cong -2\pi ds \frac{\partial}{\partial s} (s \Sigma v_s) . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Für $ds \rightarrow 0$ erhalten wir aus (2.2)

$$s \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (s \Sigma v_s) = 0 \quad (2.3)$$

und damit die erste der beiden gesuchten Kontinuitätsgleichungen. Um die entsprechende Gleichung für den Drehimpuls herzuleiten, geht man genauso vor. Der Drehimpuls des Materials zwischen s und $s + ds$ ist $2\pi s ds \Sigma s^2 \omega$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega(s)$ (die Zeitableitung von ω kann in der Regel vernachlässigt werden, da sie auch für selbstgravitierende Scheiben klein ist).

Das durch die Viskosität ν verursachte Drehmoment wird mit $G(s, t)$ bezeichnet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (2\pi s ds \Sigma s^2 \omega) &= v_s(s, t) 2\pi s \Sigma(s, t) s^2 \omega(s) \\
&\quad - v_s(s + ds, t) 2\pi (s + ds) \Sigma(s + ds, t) \\
&\quad \times (s + ds)^2 \omega(s + ds) + \frac{\partial G}{\partial s} ds \\
&\cong -2\pi ds \frac{\partial}{\partial s} (s \Sigma v_s s^2 \omega) + \frac{\partial G}{\partial s} ds .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Im Grenzfall $ds \rightarrow 0$ erhalten wir daraus

$$s \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma s^2 \omega) + \frac{\partial}{\partial s} (s \Sigma v_s s^2 \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial s} . \tag{2.5}$$

Damit haben wir auch die zweite Kontinuitätsgleichung gefunden. Dies können wir verwenden, um im nächsten Unterabschnitt eine Bewegungsgleichung für die Oberflächendichte Σ in radialer Richtung herzuleiten.

2.2.2 Zeitliche Entwicklung der Flächendichte

Um Gleichungen (2.3) und (2.5) auswerten zu können, müssen wir für das Drehmoment die Relation

$$G = 2\pi s \nu \Sigma s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} \tag{2.6}$$

verwenden. Diese Beziehung erhält man aus der Bestimmung des Drehimpulstransports zwischen benachbarten Schichten (siehe z.B. Frank et al. 2002); dabei ist ν die kinematische Viskosität der Scheibe ¹.

Setzt man (2.6) in (2.5) ein, teilt durch s und wendet die Produktregel für Ableitungen an, so erhält man

$$\begin{aligned}
&s^2 \omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + s^2 \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial t} + s^2 \omega \frac{1}{s} \frac{\partial (s \Sigma v_s)}{\partial s} \\
&+ (s \Sigma v_s) \frac{1}{s} \frac{\partial (s^2 \omega)}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \nu \Sigma s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) = 0 .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

¹Da die molekulare Viskosität um viele Größenordnungen zu klein ist, um die Dynamik einer Akkretionsscheibe zu erklären, muss die kinematische Viskosität einen anderen Ursprung haben. In dieser Arbeit wird wie eingangs erwähnt von einer turbulenten Viskosität ausgegangen.

Ersetzt man nun gemäß (2.3) $\partial(s\Sigma v_s)/\partial s$ durch $-s \partial\Sigma/\partial t$, so ergibt sich

$$s^2\Sigma \frac{\partial\omega}{\partial t} + (s\Sigma v_s) \frac{1}{s} \frac{\partial(s^2\omega)}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s\nu\Sigma s^2 \frac{\partial\omega}{\partial s} \right) = 0 .$$

Auflösen nach $s\Sigma v_s$ und einsetzen in (2.3) liefert nun

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial s} (s\nu\Sigma s^2 \frac{\partial\omega}{\partial s}) - s^3\Sigma \frac{\partial\omega}{\partial t}}{\frac{\partial(s^2\omega)}{\partial s}} \right) = 0 . \quad (2.8)$$

Dies ist die radiale Bewegungsgleichung für die Flächendichte einer Akkretionsscheibe. Durch lösen von (2.8) wird die zeitliche Entwicklung der Massenverteilung bestimmt.

2.2.3 Radialgeschwindigkeit

Neben der Bewegungsgleichung (2.8) benötigen wir für die Beschreibung des radialen Massenflusses auch eine Bewegungsgleichung für die Radialgeschwindigkeit v_s . Diese erhält man, indem man in (2.7) $\frac{\partial\Sigma}{\partial t}$ gemäß (2.3) durch $-\frac{1}{s} \frac{\partial(s\Sigma v_s)}{\partial s}$ ersetzt:

$$\begin{aligned} s^2\omega \left(-\frac{1}{s} \frac{\partial(s\Sigma v_s)}{\partial s} \right) + s^2\Sigma \frac{\partial\omega}{\partial t} + s^2\omega \frac{1}{s} \frac{\partial(s\Sigma v_s)}{\partial s} \\ + (s\Sigma v_s) \frac{1}{s} \frac{\partial(s^2\omega)}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s\nu\Sigma s^2 \frac{\partial\omega}{\partial s} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \Sigma v_s \frac{\partial(s^2\omega)}{\partial s} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s\nu\Sigma s^2 \frac{\partial\omega}{\partial s} \right) - s^2\Sigma \frac{\partial\omega}{\partial t} \\ \Leftrightarrow v_s = \frac{\frac{\partial}{\partial s} (s\nu\Sigma s^2 \frac{\partial\omega}{\partial s}) - s^3\Sigma \frac{\partial\omega}{\partial t}}{s\Sigma \frac{\partial(s^2\omega)}{\partial s}} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mit (2.8) und (2.9) haben wir nun die beiden zentralen Gleichungen abgeleitet, die die radiale Dynamik der Akkretionsscheibe bestimmen. Beide sind im Allgemeinen nicht analytisch lösbar und müssen, da die analytisch lösbaren Spezialfälle für das in dieser Arbeit untersuchte Problem nicht relevant sind, numerisch behandelt werden. Die Implementation der numerischen Behandlung wird in Kapitel 3 dargestellt.

2.2.4 Berechnung der Winkelgeschwindigkeit

In den Gleichungen (2.8) und (2.9) steht jeweils die Winkelgeschwindigkeit ω . Diese wird aus der Gleichung

$$\vec{F}_{\text{zentrifugal}} + \vec{F}_{\text{gravitation}} = 0 \quad (2.10)$$

gewonnen. Bezeichnet g die radiale Komponente des Gravitationsfeldes \vec{g} , so ergibt sich bezogen auf ein Einheitsvolumen

$$\begin{aligned} \rho \omega s + \rho g &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega^2 &= -\frac{g}{s}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Im nicht selbstgravitierenden Fall wird g bei einer Zentralmasse M zu

$$g_{\text{zentral}}(s) = -\frac{G^* M}{s^2}. \quad (2.12)$$

G^* ist hierbei die Gravitationskonstante.

Ist die Akkretionsscheibe hingegen selbstgravitierend, d.h. kann man das Gravitationsfeld der Scheibe gegenüber dem der Zentralmasse nicht mehr vernachlässigen, so muss g aus

$$g = g_{\text{zentral}} + g_{\text{scheibe}} \quad (2.13)$$

bestimmt werden, wobei g_{scheibe} aus der integralen Form der Poisson-Gleichung berechnet wird:

$$g_{\text{scheibe}}(s) = G^* \int_{s_{\text{innen}}}^{s_{\text{außen}}} \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma(s') ds' d\varphi'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.14)$$

Hier sind φ' der Azimutwinkel, \vec{r}, \vec{r}' dreidimensionale Ortsvektoren und $s_{\text{innen}}, s_{\text{außen}}$ der innere bzw. der äußere Radius der Scheibe. Die Dicke der Scheibe wird dabei vernachlässigt, was für dünne Scheiben eine zulässige Näherung ist. Da in dieser Arbeit allgemein nur dünne Scheiben untersucht werden, stellt dies keine zusätzliche Einschränkung dar.

Durch die Integration in (2.14) koppeln in (2.8) und (2.9) jeweils lokale mit globalen Größen, was eine numerische Behandlung anfälliger für instabiles Verhalten macht. Die Frage numerischer Stabilität wird in Abschnitt 3.1.3 genauer behandelt.

Die Methode, die angewandt wird um (2.14) zu lösen, wird in Abschnitt 3.1.2 erläutert.

2.3 Strahlung und Spektrum

Um eine Verbindung zwischen der dynamischen Simulation einer Akkretionsscheibe und Beobachtungen derartiger Objekte herzustellen, ist es zweckmäßig, das Spektrum der Scheibe ebenfalls zu modellieren.

Unter der Annahme, dass die Scheibe optisch dick ist, was für die sehr massereichen Scheiben in AGN meist gut erfüllt ist, erhält man das Ergebnis, dass jedes Oberflächenelement wie ein schwarzer Körper der Temperatur $T(s)$ strahlt. Diese effektive Temperatur erhält man aus Anwendung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes, also der Gleichsetzung des Strahlungsflusses pro Flächenelement mit der Dissipationsrate $D(s)$:

$$\sigma T^4 = D(s), \quad (2.15)$$

wobei σ die Strahlungskonstante ist. Mit

$$D(s) = \frac{\nu \Sigma}{2} \left(s \frac{\partial \omega}{\partial s} \right)^2 \quad (2.16)$$

erhält man für die Effektivtemperatur

$$T^4(s) = \frac{\nu \Sigma}{2\sigma} \left(s \frac{\partial \omega}{\partial s} \right)^2. \quad (2.17)$$

Vernachlässigt man nun Effekte in der Atmosphäre der Scheibe, so kann man das Spektrum, das von einem einzelnen Flächenelement abgestrahlt wird, näherungsweise als Schwarzkörper-Spektrum betrachten:

$$I_f(s) = B_f(T(s)) = \frac{2hf^3}{c^2 \left(e^{\frac{hf}{kT(s)}} - 1 \right)}. \quad (2.18)$$

Dabei sind k die Boltzmann-Konstante, h die Planck-Konstante, c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, I_f die Strahlungsintensität für die Frequenz f und B_f die entsprechende Planck-Funktion.

Bezeichnet man den Winkel zwischen Scheibennormale und Sichtlinie mit i , so ergibt sich der Gesamtstrahlungsfluss am Ort eines Beobachters mit einer Entfernung R zu

$$F_f = \frac{2\pi \cos i}{R^2} \int_{s_{\text{innen}}}^{s_{\text{außen}}} I_f s ds. \quad (2.19)$$

Einsetzen von (2.18) liefert nun

$$F_f = \frac{4\pi h f^3 \cos i}{c^2 R^2} \int_{s_{\text{innen}}}^{s_{\text{au\ss en}}} \frac{s ds}{e^{\frac{hf}{kT(s)}} - 1}. \quad (2.20)$$

Obwohl das Spektrum über (2.20) und (2.17) von der Viskosität abhängt, ist es nicht möglich, die Viskosität einer Akkretionsscheibe aus spektralen Untersuchungen zu ermitteln. Dies liegt daran, dass die Effektivtemperatur nicht von der Viskosität ν , sondern vom Produkt $\nu\Sigma$ abhängt und Σ nicht durch andere Methoden unabhängig bestimmbar ist. Betrachtet man den Fall einer nicht selbstgravitierenden Scheibe, so ist

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = -\frac{3}{2} \frac{\omega}{s}, \quad (2.21)$$

wie man aus (2.11), (2.12) und ableiten nach s sieht. Verlangt man nun Stationarität in der Drehimpulsgleichung (2.5) und setzt (2.6) ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial s} (s\Sigma v_s s^2 \omega) = \frac{\partial}{\partial s} \left(s\nu\Sigma s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} \right). \quad (2.22)$$

Integration und einsetzen von (2.1) liefert

$$-\frac{\dot{M}}{2\pi} s^2 \omega - s\nu\Sigma s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} = \text{const}. \quad (2.23)$$

Verwendet man jetzt (2.21) und setzt als Integrationskonstante den Drehimpulstransport am inneren Rand der Scheibe an, so führt dies zu

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \cdot l, \quad (2.24)$$

wobei $l = 1 - \sqrt{s_{\text{innen}}/s}$ die Randfunktion ist. An (2.24) sieht man schließlich, dass das Spektrum zwar die Akkretionsrate \dot{M} liefert, nicht aber die Viskosität ν . Das bedeutet, dass die Viskosität aus dem Spektrum einer stationären nicht selbstgravitierenden Akkretionsscheibe nicht bestimmbar ist, was die Beschreibung derselben zu einem schwierigen und viel diskutierten Problem macht.

Allerdings ermöglicht es (2.20), die Entwicklung im Strahlungsspektrum einer Akkretionsscheibe zu berechnen, die sich aus dem 2-Viskositäten-Modell ergibt. Dies wiederum erlaubt einen Vergleich von Simulationsergebnis und Beobachtung.

2.4 Charakteristische Zeitskalen

Die wichtigste Zeitskala in dem hier behandelten Problem ist die viskose Zeitskala

$$\tau_{\text{visc}} = \frac{s^2}{\nu} . \quad (2.25)$$

Diese Zeitskala gibt an, wie lange einzelne Teilchen in etwa in der Scheibe verweilen, bis sie im Zentrum angekommen sind. Damit ist τ_{visc} auch ein Maß für die charakteristische Zeit, mit der sich die Akkretionsrate der Scheibe und damit auch deren Helligkeit ändert.

Signifikante Helligkeitsänderungen auf kürzeren Zeitskalen sind nur möglich, wenn große Massenkonzentrationen nicht auseinanderdiffundieren. Dies kann man z.B. durch eine von der Flächendichte abhängige Viskosität erreichen, da dann die Radialgeschwindigkeiten innerhalb und außerhalb einer Massenkonzentration unterschiedlich groß sind. Ist die Viskosität für hohe Flächendichten größer, wie es z.B. das β -Modell von [Duschl et al. \(2000\)](#) vorhersagt, so ist die Akkretionsgeschwindigkeit der Massenkonzentration höher als die Diffusionsgeschwindigkeit. Die Folge ist, dass sich eine Front hoher Flächendichte bildet, die sich ähnlich einer aus der Ozeanographie bekannten „freak wave“ (siehe hierzu z.B. [Kharif & Pelinovsky 2003](#)) stark aufsteilt und als kompakte Struktur akkretiert wird. In Kapitel 4 wird dieser Vorgang auch graphisch dargestellt.

2.5 Behandlung der Viskosität

Zu Beginn dieser Diplomarbeit war geplant, die β -Viskosität von [Duschl et al. \(2000\)](#) inklusive Dissipationsbegrenzung im Modell zu implementieren. Da sich jedoch bei der Implementation der Eigengravitation Schwierigkeiten ergaben, die im Rahmen dieser Arbeit nicht zu bewältigen sind, und der zu untersuchende „freak wave“-Effekt ohne Eigengravitation nicht auftritt, wurde statt der β -Viskosität ein einfaches 2-Viskositäten-Modell verwendet (die Probleme bei Einführung von Eigengravitation werden in Abschnitt 4.2 ausführlich behandelt).

Man kann zeigen, dass der β -Ansatz

$$\nu = \beta s^2 \omega \quad (2.26)$$

zu einer Viskosität führt, die mit steigender Eigengravitation zunimmt. Dazu betrachtet man das Gravitationsfeld in Monopolnäherung, also

$$g_{\text{Monopol}}(s) = -\frac{G^*}{s^2} (M + M_d(s)) , \quad (2.27)$$

wobei $M_d(s)$ die im Radius s eingeschlossene Masse der Scheibe ist. Mit (2.11) und (2.26) sieht man sofort, dass die Viskosität zunimmt, wenn M_d gegenüber M nicht mehr vernachlässigbar ist.

Dieses Verhalten wird nun im 2-Viskositäten-Modell nachgebildet. Dieses beinhaltet zwei konstante Werte für die Viskosität; der höhere Wert ν_1 tritt auf, sobald die Flächendichte über einem Grenzwert Σ_{hoch} liegt, und der niedrige Wert ν_2 tritt auf, wenn die Flächendichte unter einem zweiten Grenzwert Σ_{niedrig} liegt. Ist $\Sigma_{\text{niedrig}} < \Sigma < \Sigma_{\text{hoch}}$, so wird sinusförmig interpoliert². Eine solche Interpolation ist notwendig, um die Endlichkeit aller radialen Ableitungen sicherzustellen. Allerdings kann die Interpolationsfunktion auch anders gewählt werden; ihre genaue Form ist für die Entwicklung der Scheibe nicht wichtig.

²Um eine monotone Interpolationsfunktion zu erhalten, wird die radiale Ausdehnung des Interpolationsbereiches mit dem Intervall $[0 : \frac{\pi}{2}]$ identifiziert.

Kapitel 3

Numerische Methoden

Kommen wir nun zu den numerischen Methoden, die verwendet wurden, um das eingangs beschriebene Modell umzusetzen. Die im Rahmen dieser Diplomarbeit erstellte Simulation behandelt den Massentransport einer Akkretionsscheibe im eindimensionalen Fall, d.h. die Dicke der Scheibe wird vernachlässigt und es wird von Symmetrie um die z -Achse ausgegangen.

In diesem Kapitel soll nun zunächst erläutert werden, wie die Gleichungen aus Kapitel 2 numerisch behandelt werden; anschließend wird auf die Programmstruktur der Simulation eingegangen.

3.1 Diskretisierungen

Um eine gute Funktionalität der Simulation sicherzustellen, müssen die Bewegungsgleichungen (2.8) und (2.9) in geeigneter Weise diskretisiert werden. Außerdem müssen Randbedingungen und Schrittweite geeignet gewählt werden.

3.1.1 Diskretisierung der Massentransportgleichung

Der radiale Massentransport wird durch Gleichung (2.8) beschrieben. Um diese zu lösen, muss - wie wir gleich sehen werden - auch (2.9) gelöst werden. Dazu wird ein lineares explizites Verfahren verwendet.

Zur Behandlung dieser Gleichungen definiert man ein radiales Gitter, das sich vom inneren Rand der Scheibe an der Stelle s_i bis zum äußeren Rand an der Stelle s_a erstreckt und aus N Gitterpunkten besteht:

$$s_i = s_1 \leq s_n \leq s_N = s_a .$$

Die zeitliche Koordinate wird ebenfalls diskretisiert. Es werden L Zeitschritte zwischen t_0 und t_f behandelt:

$$t_0 = t_1 \leq t_l \leq t_L = t_f .$$

Die Ableitung $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$ wird linear diskretisiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma(s_n, t_{l+1})}{\partial t} &= \frac{\Sigma(s_n, t_{l+1}) - \Sigma(s_n, t_l)}{t_{l+1} - t_l} \\ &=: \frac{\Sigma_n^{l+1} - \Sigma_n^l}{\Delta t_{l+1}} . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die radiale Ableitung aus (2.8) wird in zwei Terme aufgespalten, die zunächst unabhängig voneinander behandelt werden können.

Analog zu $\Delta t = t_l - t_{l-1}$ führt man $\Delta s := s_n - s_{n-1}$ ein. Außerdem definiert man die Größen

$$\begin{aligned} j &= s^2 \omega \text{ (spezifischer Drehimpuls),} \\ A(s, t) &:= s \nu(s, t) \Sigma(s, t) s^2 \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial s} \text{ und} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$B(s, t) := \Sigma(s, t) \frac{s^3 \frac{\partial \omega(s, t)}{\partial t}}{\frac{\partial}{\partial s} (s^2 \omega(s, t))} . \quad (3.3)$$

Damit wird (2.8) zu

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial B}{\partial s} = 0 . \quad (3.4)$$

Der A -Term wird nun folgendermaßen diskretisiert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\frac{\partial A(s_n, t_l)}{\partial s}}{\frac{\partial j(s_n, t_l)}{\partial s}} \right) &= \frac{\left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n+1/2}^l \right)^{-1} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{n+1/2}^l - \left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n-1/2}^l \right)^{-1} \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{n-1/2}^l}{s_{n+1/2} - s_{n-1/2}} \\
&= \frac{\frac{A_{n+1}^l - A_n^l}{s_{n+1} - s_n}}{\left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n+1/2}^l (s_{n+1/2} - s_{n-1/2}) \right)} \\
&\quad - \frac{\frac{A_n^l - A_{n-1}^l}{s_n - s_{n-1}}}{\left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n-1/2}^l (s_{n+1/2} - s_{n-1/2}) \right)} \\
&= \frac{A_{n+1}^l - A_n^l}{\left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n+1/2}^l \Delta s_{n+1} \Delta s_{n+1/2} \right)} - \frac{A_n^l - A_{n-1}^l}{\left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n-1/2}^l \Delta s_n \Delta s_{n+1/2} \right)}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Bei der Behandlung des B -Terms muss nun darauf geachtet werden, dass die radialen Differenzenquotienten immer entgegen dem Massenfluss gebildet werden, damit nur Informationen verwendet werden, die für den betrachteten Gitterplatz auch tatsächlich relevant sind. Die „Richtung“ der Ableitung hängt daher vom Vorzeichen der Radialgeschwindigkeit v_s ab:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(s_n, t_l)}{\partial s} &= \begin{cases} \frac{B(s_n, t_l) - B(s_{n-1}, t_l)}{s_n - s_{n-1}} = \frac{B_n^l - B_{n-1}^l}{\Delta s_n} & v_s > 0 \\ \frac{B(s_{n+1}, t_l) - B(s_n, t_l)}{s_{n+1} - s_n} = \frac{B_{n+1}^l - B_n^l}{\Delta s_{n+1}} & v_s < 0 \end{cases} \\
&= \frac{B_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l) - 1) - B_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l) + 1)}{\Delta s_{n-\frac{1}{2}}(\text{sign}(v_s|_n^l) - 1)}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Setzt man diese Teile wieder zusammen, so wird (3.4) durch

$$\begin{aligned}
\Sigma_n^{l+1} &= \Sigma_n^l - \frac{\Delta t_{l+1}}{s_n} \left(\frac{A_{n+1}^l - A_n^l}{\left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n+1/2}^l \Delta s_{n+1} \Delta s_{n+1/2} \right)} - \frac{A_n^l - A_{n-1}^l}{\left(\frac{\partial j}{\partial s} \Big|_{n-1/2}^l \Delta s_n \Delta s_{n+1/2} \right)} \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t_{l+1}}{s_n} \left(\frac{B_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l) - 1) - B_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l) + 1)}{\Delta s_{n-\frac{1}{2}}(\text{sign}(v_s|_n^l) - 1)} \right) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

diskretisiert.

Um diese Gleichung lösen zu können, muss das Vorzeichen von v_s an jeder

Stelle des Gitters bekannt sein. Um selbiges zu ermitteln, muss (2.9) an jedem Gitterpunkt behandelt werden. Hierzu drückt man die Terme auf der rechten Seite von (2.9) durch die Größen j , A und B aus:

$$v_s = \frac{\frac{\partial A}{\partial s}}{\frac{\partial j}{\partial s} s \Sigma} - \frac{1}{s \Sigma} B. \quad (3.8)$$

Geht man bei der Behandlung der radialen Ableitung von A so vor wie zuvor bei der von B , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(s_n, t_l)}{\partial s} &= \begin{cases} \frac{A(s_n, t_l) - A(s_{n-1}, t_l)}{s_n - s_{n-1}} = \frac{A_n^l - A_{n-1}^l}{\Delta s_n} & v_s > 0 \\ \frac{A(s_{n+1}, t_l) - A(s_n, t_l)}{s_{n+1} - s_n} = \frac{A_{n+1}^l - A_n^l}{\Delta s_{n+1}} & v_s < 0 \end{cases} \\ &= \frac{A_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l)-1) - A_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l)+1)}{\Delta s_{n-\frac{1}{2}}(\text{sign}(v_s|_n^l)-1)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Damit wird (3.8) zu

$$v_s|_n^l = \frac{1}{s_n \Sigma_n^l \left(\frac{\partial j}{\partial s}\right)_n^l} \frac{A_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l)-1) - A_{n-\frac{1}{2}}^l(\text{sign}(v_s|_n^l)+1)}{\Delta s_{n-\frac{1}{2}}(\text{sign}(v_s|_n^l)-1)} - \frac{1}{s_n \Sigma_n^l} B \quad (3.10)$$

und die beiden Bewegungsgleichungen sind in eine diskrete Form gebracht, die sich numerisch implementieren läßt.

3.1.2 Behandlung des Gravitationsfeldes

Im selbstgravitierenden Fall kann das Gravitationsfeld nicht mehr aus (2.12) gewonnen werden, sondern muss aus (2.14) bestimmt werden. Das Lösen von (2.14) führt zu Schwierigkeiten, wenn die radiale Komponente g des Gravitationsfeldes an einem Ort \vec{r} innerhalb der Massenverteilung bestimmt werden soll, da der Integrand auf der rechten Seite für $\vec{r} = \vec{r}'$ singulär wird. Um g dennoch genau bestimmen zu können, wird zunächst die Integration über den Azimuthwinkel φ' ausgeführt, was zu

$$g(s) = \frac{G^*}{s} \int_{s_{\text{innen}}}^{s_{\text{außen}}} \sqrt{\frac{s'}{s}} k \Sigma(s') \left(\frac{E(k)}{\varpi} - K(k) \right) ds' \quad (3.11)$$

führt (siehe [Pierens & Huré 2004](#) und dort enthaltene Referenzen). Dabei sind k und ϖ definiert als

$$k = \frac{2\sqrt{s's}}{s + s'} \quad (3.12)$$

bzw.

$$\varpi = \frac{s' - s}{s' + s}. \quad (3.13)$$

K und E sind die vollständigen elliptischen Integrale der ersten bzw. zweiten Art. Gleichung (3.11) kann nun mit der von [Pierens & Huré \(2004\)](#) vorgeschlagenen „splitting method“ gelöst werden.

3.1.3 Numerische Stabilität

Um sicher zu stellen, dass die Lösungen von (3.7) und (3.10) numerisch stabil sind, müssen die Zeitschritte klein genug sein. Die Größe der Zeitschritte wird dabei durch die Courant-Friedrichs-Lewy(CFL)-Bedingung begrenzt:

$$\frac{v_s|_n^l \Delta t_{l+1}}{\Delta s_{n+1/2}} \leq 1 \Leftrightarrow \Delta t_{l+1} \leq \frac{\Delta s_{n+1/2}}{v_s|_n^l}. \quad (3.14)$$

Damit diese Bedingung zu einem gegebenen Zeitpunkt für jeden Gitterpunkt erfüllt ist, muss

$$\Delta t_{l+1} \leq \min_n \left\{ \frac{\Delta s_{n+1/2}}{v_s|_n^l} \right\} \quad (3.15)$$

gelten. Im einfachen Fall einer nicht selbstgravitierenden Scheibe mit konstanter Viskosität läuft das Programm bis ca. 80% des CFL-Zeitschrittes stabil. Im selbstgravitierenden Fall und im 2-Viskositäten-Modell muss die Schrittweite jedoch auf wenige Prozent des CFL-Wertes reduziert werden.

3.1.4 Randbedingungen

Für den inneren Rand wird das Drehmoment $G(s, t) = 2\pi A(s, t) = 0$ gesetzt, so dass nach innen wanderndes Material vom Zentralobjekt akkretiert werden kann. Aus $A_1^l = 0$ folgt mit (3.2) sofort auch $\Sigma_1^l = 0$. Da die Implementation von $\Sigma_1^l = 0$ zu einer Singularität bei der Berechnung von $v_s|_1^l$ führen würde,

wurde stattdessen $\Sigma_1^l = \Sigma_\epsilon$ mit $\Sigma_{n \neq 1}^l \gg \Sigma_\epsilon > 0$ gewählt. Am äußeren Rand wird dagegen $\left. \frac{\partial G(s,t)}{\partial s} \right|_{s=s_N} = 0$ angenommen, was einen ungehinderten Drehimpulstransport über den Rand der Scheibe hinaus ermöglicht. Ebenfalls mit (3.2) folgt daraus $\frac{\partial \Sigma_N^l}{\partial s} = 0$.

Die im Programm implementierten Randbedingungen sind daher

$$\Sigma_1^l = \Sigma_\epsilon \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \Sigma_N^l}{\partial s} = 0. \quad (3.17)$$

3.2 Aufbau des Simulationsprogrammes

Die für die untersuchte Fragestellung benötigte Simulation einer nichtstationären Akkretionsscheibe wurde von mir unter Verwendung der im vorangegangenen Abschnitt erläuterten numerischen Methoden als ein in **Fortran 90** geschriebenes Programm umgesetzt¹. Dieses umfasst neben dem Hauptprogramm mehrere Module, die jeweils verschiedene Aufgaben lösen. Die Funktionalität der einzelnen Programmteile soll im Folgenden erläutert werden.

3.2.1 Das Hauptprogramm

Im Hauptprogramm werden die wichtigsten Variablen, also die Flächendichte und die Radialgeschwindigkeit verwaltet. Es werden hier keinerlei Rechnungen durchgeführt, sondern nur der Ablauf der Simulation bestimmt.

Zunächst werden Subroutinen aus dem Modul **start** ausgeführt, die einige für den Programmablauf notwendige Parameter bereitstellen. Anschließend werden die grundlegenden Variablen initialisiert und die Anfangsbedingungen eingelesen.

Den Kern des Programms bildet eine Schleife, in der für jeden Zeitschritt die gleichnamige Routine aus dem Modul **dg1** aufgerufen wird, welche die Berechnung von $v_s|_{n=1,\dots,N}^l$ und $\Sigma|_{i=1,\dots,N}^{l+1}$ vornimmt.

Sobald diese Rechnungen abgeschlossen sind, können die Ergebnisse ausgegeben werden. Dies geschieht mit Hilfe des Moduls **output**.

¹Der Quellcode des Programms ist auf Nachfrage bei mir erhältlich.

3.2.2 Das Modul `start`

Das Modul `start` stellt die beiden Subroutinen `readpars` und `anfang` zur Verfügung, die beide zu Beginn der Simulation ausgeführt werden.

Die Subroutine `readpars` liest wichtige Parameter aus der Datei `parameters.set` ein. Dazu zählen die Anzahl der Gitterpunkte und Zeitschritte, die Abstände zwischen zwei Gitterpunkten und die Größe der Zentralmasse. Die Subroutine `anfang` liest aus der Datei `sigma.set` die Anfangsverteilung der Flächendichte ein. Diese wird dann dem Hauptprogramm übergeben.

3.2.3 Das Modul `dgl`

Das Modul `dgl` ist das numerische Herzstück des Programms. Hier werden die Gleichungen (2.8) und (2.9) bzw. die diskretisierten Gleichungen (3.7) und (3.10) gelöst. Die zentrale Steuerungsroutine `zeitschritt` verwaltet die Numerik des gesamten Programms. Zunächst wird hier die Routine `getfield` aus dem Modul `gravity` aufgerufen, die das Gravitationsfeld an jedem Gitterpunkt bestimmt². Anschließend wird in der Routine `radialv` die aktuelle Radialgeschwindigkeit v_s auf allen Gitterpunkten bestimmt, was notwendige Voraussetzung für die nachfolgende Berechnung von $\frac{d\Sigma}{dt}$ in der Routine `radial` ist, da das Lösen von (3.7) die Kenntnis des Vorzeichens von v_s auf jedem Gitterpunkt voraussetzt.

Außerdem enthält das Modul die Funktionen `A`, `B`, `dj` und `omega`, die ebenfalls der Berechnung von v_s und $\frac{d\Sigma}{dt}$ dienen.

Die Funktionen `A` und `B` bestimmen die gleichnamigen Hilfsgrößen, die in (3.2, 3.3) eingeführt wurden. Um dies zu bewerkstelligen wird die Funktion `dj` benötigt, die die Ableitung $\frac{\partial j}{\partial s}$ berechnet. Die ebenfalls zur Bestimmung von `A` und `B` benötigte Winkelgeschwindigkeit ω wird durch die Funktion `omega` über (2.11) aus dem Gravitationsfeld berechnet.

3.2.4 Das Modul `gravity`

Das Modul `gravity` verwaltet alle Aspekte der Gravitation. Es stellt die Variablen für das Gravitationsfeld und die Zentralmasse zur Verfügung und enthält die beiden Routinen `initfield` und `getfield`. Erstere wird beim Programmstart aufgerufen und allokiert und initialisiert die Variable für das Gravitationsfeld, letztere steuert die Berechnung des Gravitationsfeldes über die „splitting method“.

²Dies ist nur erforderlich, wenn Eigengravitation berücksichtigt wird, da das Gravitationsfeld ansonsten analytisch bestimmt werden kann.

3.2.5 Das Modul `viscosity`

Das Modul `viscosity` verwaltet analog zum Modul `gravity` die Viskosität. Die entsprechende Variable wird bereitgestellt und in der Routine `initvisc` allokiert und initialisiert. Die Routine `getvisc` bestimmt dann die Viskosität für jeden Gitterpunkt sowie für Zwischengitterpunkte, was für das hier verwendete numerische Verfahren ebenfalls erforderlich ist.

Die Viskosität ist dabei entweder an jedem Punkt identisch und konstant oder entspricht dem 2-Viskositäten-Modell, was bedeutet, dass sie bei niedriger Flächendichte einen niedrigen konstanten Wert und bei hoher Flächendichte einen hohen konstanten Wert annimmt. Dazwischen wird in einem Übergangsbereich stetig interpoliert. Die Interpolationsfunktion ist dabei ein sinus, da dieser einen passenden Funktionsverlauf hat. Allerdings sind auch andere Interpolationsfunktionen denkbar, die stetig und monoton sind, und deren Ableitungen am Rand des gewählten Radienbereiches verschwinden.

3.2.6 Das Modul `spectrum`

Im Modul `spectrum` sind alle Routinen enthalten, die für die Berechnung und die Ausgabe des Scheibenspektrums notwendig sind. Zunächst wird die Effektivtemperatur jedes Gitterpunktes gemäß (2.17) bestimmt, wobei für $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ (2.21) verwendet wird. Anschließend wird der Gesamtstrahlungsfluss für jede betrachtete Frequenz nach (2.20) bestimmt.

3.2.7 Die übrigen Module

Um auch mit nichtlinearen Gittern arbeiten zu können, ohne den numerischen Code verändern zu müssen, wurde das Modul `getcoords` mit seinen extern aufrufbaren Subroutinen `gets` und `gett` eingefügt. Die beiden Routinen liefern für jeden Index n oder l den zugehörigen Wert von s bzw. t zurück. Die Bestimmung der Größe des nächsten Zeitschrittes erfolgt dabei unter Berücksichtigung der CFL-Bedingung (3.15).

Das Modul `output` stellt verschiedene Ausgaberroutinen zur Verfügung, mit denen z.B. die Flächendichteverteilung zu bestimmten Zeitpunkten oder die zeitliche Entwicklung der Gesamtscheibenmasse ausgegeben werden können. Im Modul `constants` sind verschiedene wichtige Konstanten enthalten, die im gesamten Programmpaket global verwendet werden können und zu Beginn der Simulation im Modul `start` eingelesen werden.

Kapitel 4

Ergebnisse

Im Folgenden sollen die Ergebnisse der erstellten Simulation vorgestellt werden. Dabei handelt es sich sowohl um Ergebnisse von Testläufen, die der Überprüfung der korrekten Funktionalität des Programmcodes dienen, wie schließlich auch um wissenschaftlich relevante Ergebnisse.

4.1 Validation des numerischen Verfahrens

Bevor die angestrebten Simulationsläufe durchgeführt werden, muss zunächst sichergestellt werden, dass das Programm korrekte Ergebnisse liefert. Der erste Schritt hierbei ist die Überprüfung des mechanischen Modells, also der Implementation von (2.8) und (2.9).

4.1.1 Stationäre Lösung ohne Eigengravitation

Als erster Test für den Simulationscode wird dieser mit stationären Anfangsbedingungen gestartet. Diese haben nach (2.24) die Form

$$\Sigma(s) = \frac{\dot{M}}{3\pi\nu} \left(1 - \left(\frac{s_{\text{innen}}}{s} \right)^{1/2} \right) \quad (4.1)$$

bei konstanter Akkretionsrate \dot{M} . Die Herleitung dieser Lösung entnimmt man z.B. Frank et al. (2002). Testläufe mit verschiedenen Akkretionsraten \dot{M} und unterschiedlichen Gitterauflösungen zeigen durchweg eine gute Übereinstimmung zwischen analytischer Lösung und Simulationsergebnis. In Abb. 4.1 sind zwei repräsentative Ergebnisse von Testläufen mit stationären Anfangsbedingungen zu sehen. Die Abweichungen im Außenbereich der Scheibe

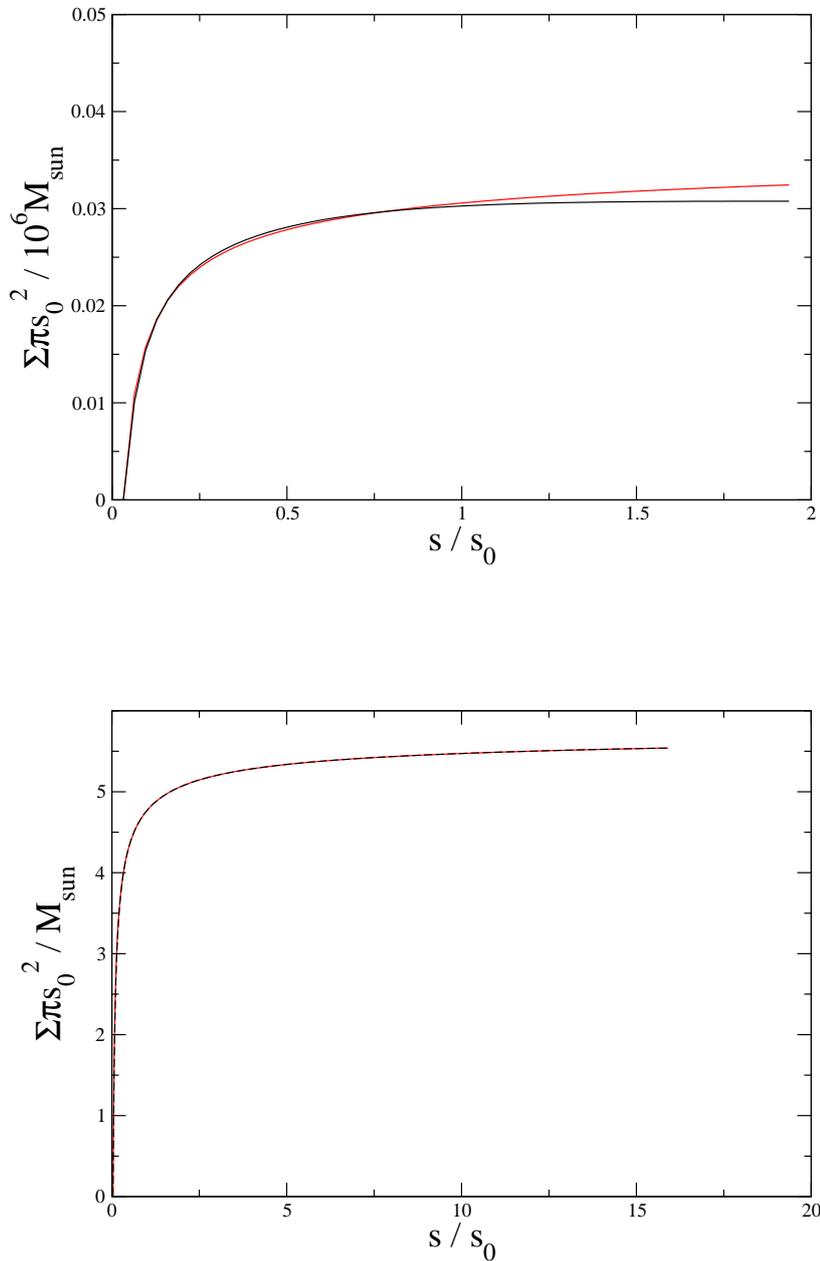


Abbildung 4.1: Vergleich der Simulationsergebnisse bei stationären Anfangsbedingungen mit der analytischen, stationären Lösung (4.1) für radiale Gitter mit 60 (obere Abbildung) und 500 Punkten (untere Abbildung). Die roten Kurven stellen jeweils die analytisch bestimmten stationären Flächendichteverteilungen dar, die schwarzen Kurven zeigen die numerisch bestimmten Verteilungen nach $1 \cdot 10^6$ Zeitschritten in der oberen Abbildung und $1 \cdot 10^4$ Zeitschritten in der unteren Abbildung. s_0 ist ein willkürlich gewählter Normierungsparameter. Man erkennt, wie die Abweichungen im Außenbereich der Scheibe mit steigender Gitterpunktzahl zurückgeht.

in der oberen Graphik sind auf den Einfluß der äußeren Randbedingung (3.17) zurückzuführen. In der unteren Graphik ist deutlich zu erkennen, dass die Übereinstimmung mit der Anzahl der Gitterpunkte (von 60 auf 500) deutlich steigt. Da die eigentlichen Simulationsläufe entweder mit 500 oder mit 2000 Gitterpunkten durchgeführt wurden, ist von einem sehr geringen Einfluß der Randbedingung auszugehen. Hinzu kommt, dass in der eigentlichen Simulation die Flächendichte im Außenbereich der Scheibe so gering ist, dass auch hohe relative Fehler der Flächendichte nur sehr geringe absolute Abweichungen verursachen.

4.1.2 Nichtstationäre Lösung ohne Eigengravitation

Der nächste Schritt in der Überprüfung der Simulation ist ein Test mit nichtstationären Anfangsbedingungen. Hierzu wählt man Scheibenparameter, die es erlauben, die Massentransportgleichung (2.8) analytisch zu lösen. Im Falle einer nicht selbstgravitierenden Scheibe mit ortsunabhängiger Viskosität vereinfacht sich (2.8) zu

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3\nu}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^{1/2} \frac{\partial}{\partial s} (\Sigma s^{1/2}) \right). \quad (4.2)$$

Diese Gleichung läßt sich für eine durch eine Delta-Funktion gegebene Anfangsverteilung

$$\Sigma(s, t = 0) = \frac{m}{2\pi s_0} \delta(s - s_0) \quad (4.3)$$

nach Pringle (1981) durch

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m}{\pi s_0^2} \tau^{-1} x^{-1/4} e^{-\frac{1+x^2}{\tau}} I_{1/4}(2x/\tau) \quad (4.4)$$

lösen. Dabei ist $I_{1/4}(z)$ die modifizierte Besselfunktion erster Ordnung mit Index $\frac{1}{4}$. Die dimensionslosen Variablen sind $x := \frac{s}{s_0}$ und $\tau = 12\nu t s_0^{-2}$.

Diese analytische Lösung läßt sich nun mit den numerisch gewonnenen Ergebnissen der Simulation vergleichen. Dazu wurde die Simulation mit aus (4.4) für ein $\tau \gtrsim 0$ gewonnenen Anfangsbedingungen gestartet und ihr Ergebnis nach 1×10^6 Zeitschritten mit der analytischen Lösung für diesen Zeitpunkt verglichen. Das Ergebnis dieses Tests ist in Abb. 4.2 zu sehen.

Beim Vergleich von numerisch erzeugter und analytischer Lösung für die Flächendichte fällt auf, dass beide in der Zentralregion der Scheibe sehr

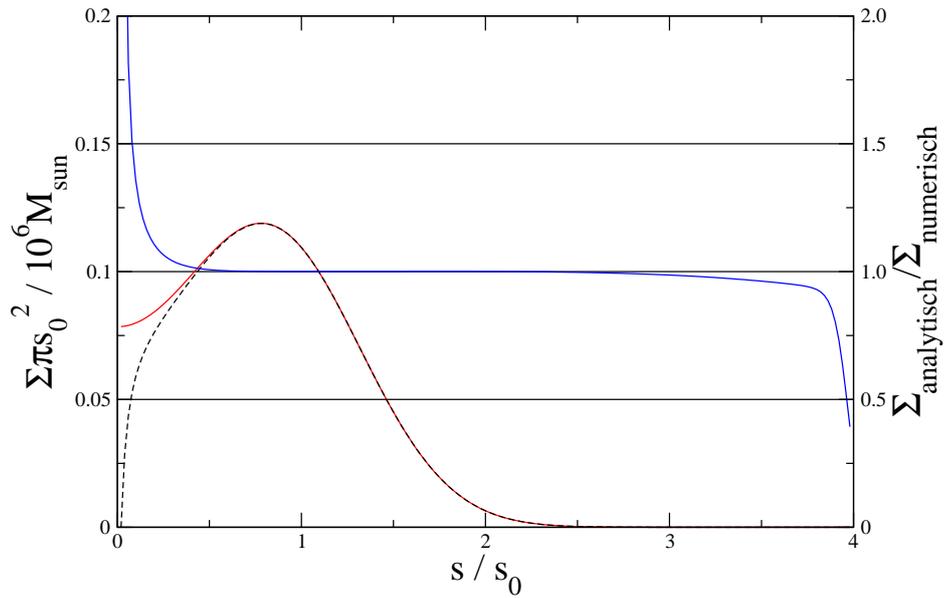


Abbildung 4.2: Vergleich von simulierter und analytisch bestimmter Flächen-dichte bei gleichen Anfangsbedingungen nach 1×10^6 Zeitschritten. Die rote durchgezogene Linie zeigt die analytische Lösung, die schwarze gestrichelte Linie die numerisch erzeugte Lösung und die durchgezogene blaue Linie das Verhältnis aus beiden. s_0 bezeichnet den Radius des Delta-Peaks, der der analytischen Lösung zugrunde liegt. Aus technischen Gründen wurde die numerische Simulation mit einer Anfangsverteilung endlicher Breite gestartet, die durch einsetzende Akkretion bereits geringfügig nach innen verschoben ist.

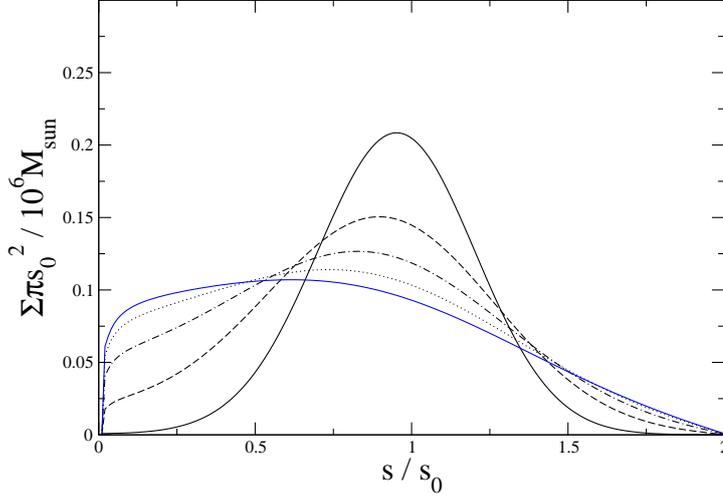


Abbildung 4.3: Zeitliche Entwicklung der Flächendichte mit Anfangsbedingungen, die (4.4) genügen. Die letzte (blaue) Kurve zeigt die Flächendichteverteilung nach einer Zeit $t = 0.41 \cdot 10^{-2} \tau_\nu$, wobei τ_ν die in (2.25) eingeführte viskose Zeitskala ist: $\tau_\nu = s_0^2/\nu$.

gut übereinstimmen, an den Rändern jedoch Diskrepanzen sichtbar werden. Zunächst belegt die Übereinstimmung außerhalb der Randregionen die gute Funktionalität der numerischen Simulation.

Die Abweichungen an den Rändern sind auf die verwendeten Randbedingungen (3.16, 3.17) zurückzuführen, denen die analytische Lösung nicht unterliegt. Die in (4.4) nach Integration von (4.2) implizit enthaltenen Randbedingungen sind anderer Art und für das hier zu behandelnde Problem nicht notwendigerweise geeignet.

Die Abweichungen von der analytischen Lösung sind also keine Fehler der numerischen Behandlung, sondern die Folge spezifischer Randbedingungen, die in der analytischen Behandlung nicht enthalten sind. In Abb. 4.3 ist noch die zeitliche Entwicklung der Flächendichte mit aus (4.4) gewonnenen Anfangsbedingungen gezeigt. Die Anfangsbedingungen können nicht (4.3) entsprechend gewählt werden, da eine numerische Behandlung dieses Problems endliche Flächendichten an jedem Punkt des Gitters erfordert.

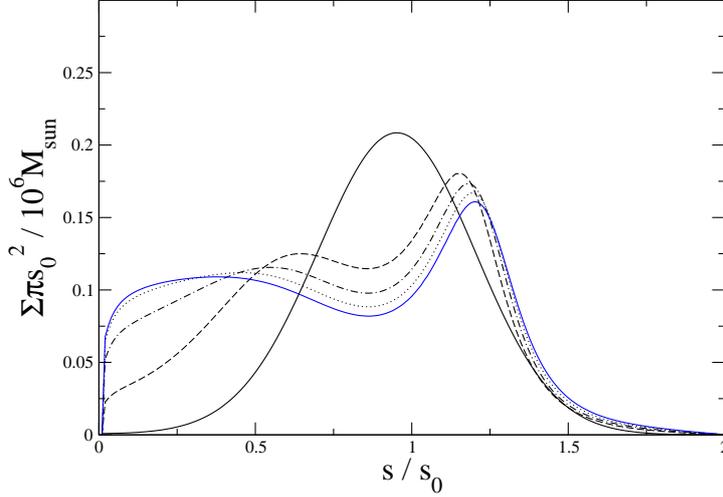


Abbildung 4.4: Zeitliche Entwicklung der Flächendichte mit Anfangsbedingungen, die (4.4) genügen. Auch hier zeigt die blaue Kurve die Flächendichteverteilung für $t = 0.41 \cdot 10^{-2} \tau_\nu$. Die Eigengravitation wird in Monopolnäherung behandelt.

4.2 Einführung der Eigengravitation

Ein weiterer wichtiger Schritt war die Einführung von radialer Eigengravitation in den Code. Zu Testzwecken wurde dies zunächst in Monopolnäherung realisiert. Allerdings ist diese Näherung für das zu untersuchende Problem eines Ringes mit erhöhter Flächendichte nicht sehr geeignet, so dass später auf das in Abschnitt 3.1.2 beschriebene Verfahren zurückgegriffen wurde. Dabei traten jedoch physikalische Probleme auf, die eine ausreichend genaue Implementation der Eigengravitation im Rahmen dieser Diplomarbeit vereitelten. Dass die Simulation grundsätzlich auch mit Eigengravitation stabil läuft - wenn auch aufgrund der Rückkopplung durch (2.14) der Zeitschritt auf 1% des CFL-Kriteriums verkürzt werden musste - wird durch die Ergebnisse in Abb. 4.4 demonstriert. Zu sehen ist die zeitliche Entwicklung der Flächendichte bei eingeschalteter Eigengravitation in Monopolnäherung. Die Anfangsbedingungen sind dabei mit denen in Abb. 4.3 identisch. Ein qualitativ vom nicht selbstgravitierenden Fall unterschiedliches Verhalten ist klar erkennbar.

Da die Monopolnäherung für den hier vorliegenden Fall kaum geeignet ist - besonders an der inneren Flanke des Ringes erhöhter Flächendichte wird diese Näherung sehr schlecht - wurde (3.11) nun mit Hilfe der „splitting method“ von Pierens & Huré (2004) (3.11) gelöst. Auch unter Verwendung dieses Verfahrens funktioniert die Simulation einwandfrei solange die Scheibenmasse gegenüber der des Zentralobjekts vernachlässigbar ist. Jedoch treten bereits ab etwa einem Massenverhältnis M_D/M der Scheibenmasse zur Zentralmasse von $M_D/M = 1/40$ Schwierigkeiten auf, da es trotz der relativ geringen Masse der Scheibe zu Fragmentation kommt. Eine Erklärung dieses Effekts durch numerisch erzeugte Instabilität, wie es bei einem expliziten Verfahren durchaus naheliegend ist, möchte ich hier weitgehend ausschließen, da zum einen das Programm bei geringeren Scheibenmassen absolut stabil läuft und zum anderen auch eine drastische Absenkung des Zeitschrittes um bis zu 3 Größenordnungen keine Verbesserung bewirkt. Hinzu kommt, dass die Morphologie der Instabilitäten sich von der in früheren Programmversionen aufgetretener numerischer Instabilitäten sehr deutlich unterscheidet. So liegt keine strenge Periodizität und vor allem kein von Punkt zu Punkt alternierendes Verhalten vor (siehe Abb. 4.5).

Die Möglichkeit des Auftretens axialsymmetrischer gravitativer Instabilitäten ist seit langem bekannt und wurde bereits von Toomre (1964) behandelt. Man kann derartige Instabilitäten durch den *Toomre*-Parameter Q beschreiben, der folgendermaßen definiert wird:

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G^* \Sigma} \quad (4.5)$$

mit der Epizykelfrequenz κ , die im *Keplerschen* Fall identisch mit der Winkelgeschwindigkeit ω ist. Für $Q < 1$ treten Instabilitäten auf, die zu Fragmentation in der Scheibe führen können.

Da zum Zeitpunkt des Auftretens dieser Instabilitäten in der Simulation der thermodynamische Code noch nicht fertig gestellt war, ist die Schallgeschwindigkeit c_s nicht definiert, so dass keine physikalischen Aussagen über die Entwicklung der Fragmentation gemacht werden können. Um jedoch das Auftreten der Fragmentationserscheinungen qualitativ zu rechtfertigen, kann man als eine Art numerischer Schallgeschwindigkeit den Abstand zweier Gitterpunkte geteilt durch die Schrittweite in (4.5) einsetzen. In Abb. 4.5 ist die Flächendichte nach 9 und der so bestimmte *Toomre*-Parameter nach 8 Zeitschritten aufgetragen. Man erkennt, dass die Instabilitäten gerade in dem Bereich auftreten, in dem Q am kleinsten ist.

Das Auftreten gravitativer Instabilitäten befindet sich durchaus in Übereinstimmung mit bisherigen Ergebnissen. So stellt Kumar (1999) fest, dass

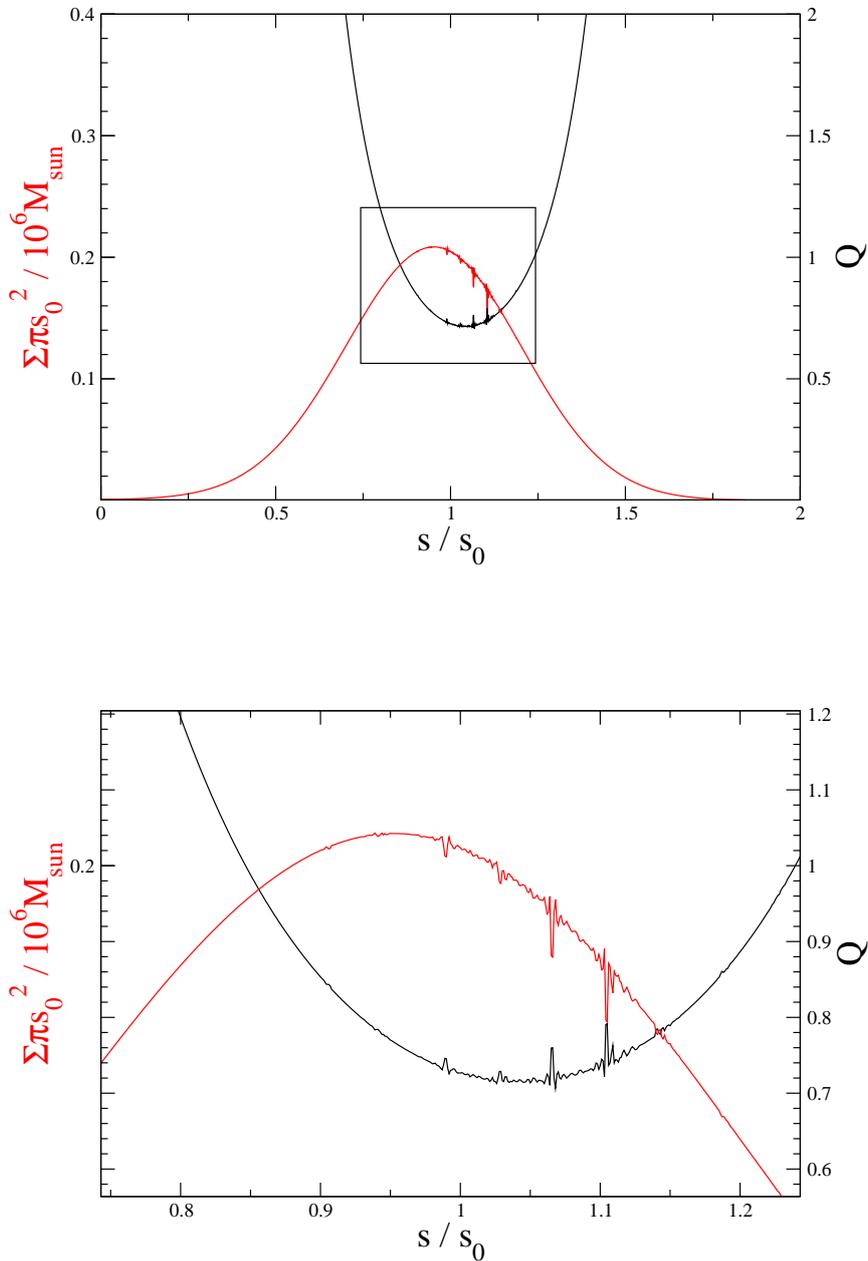


Abbildung 4.5: Flächendichte Σ (rote Linie) und *Toomre*-Parameter Q (schwarze Linie) aufgetragen gegen den Radius. Die Normierungen von s und Σ wurden wie in den vorangegangenen Abbildungen vorgenommen. Die Anzahl der Gitterpunkte beträgt 2000. Der untere Graph zeigt den markierten Ausschnitt des oberen.

derartige Instabilitäten in Akkretionsscheiben um aktive galaktische Kerne auftreten können.

Eine genauere Behandlung dieses Problems erscheint lohnend, ist allerdings sehr aufwändig. Um physikalisch relevante Aussagen über die Entwicklung von Fragmentationseffekten machen zu können, muss der innere Druck des Scheibengases berücksichtigt werden, der einem Kollaps entgegenwirkt. Dazu müsste eine Druckgradientkraft in (2.10) eingeführt werden. Bei angemessener genauer Behandlung des Problems erfordert dies jedoch eine voll implizite Behandlung der Gleichungen (2.8), (2.9) sowie der thermodynamischen Gleichungen für die Akkretionsscheibe. Im Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit fehlte leider die Zeit für die Implementation eines solchen Verfahrens. Auch die Einführung einer selbstregulierenden Heizfunktion im Sinne von Bertin & Lodato (2001) wäre mit hohem Aufwand verbunden, zudem hätte eine derartige Herangehensweise den Nachteil, nicht selbstkonsistent zu sein.

4.3 Das 2-Viskositäten-Modell

Um trotz der Schwierigkeiten bei Einführung von Eigengravitation die grundlegende Funktionsweise des „freak wave“-Effekts demonstrieren zu können, wurde das in Abschnitt 2.5 vorgestellte 2-Viskositäten-Modell implementiert, das das Verhalten der β -Viskosität in einem einfachen Modell nachbildet. Dabei zeigt sich, dass es tatsächlich zu der erwarteten Aufsteilung der Flächendichteverteilung kommt.

Bei den hier vorgestellten Simulationsergebnissen werden - wie in den vorangegangenen Abschnitten - Anfangsbedingungen verwendet, die (4.4) genügen. Die Anzahl der Gitterpunkte beträgt hier 500; da es keine Fragmentationseffekte gibt, muss die Auflösung nicht so hoch sein wie im selbstgravitierenden Fall, andererseits verlangt die Aufsteilung der Flächendichteverteilung nach einer Auflösung, die höher ist als für den einfachen nicht selbstgravitierenden Fall mit radial konstanter Viskosität.

4.3.1 Entwicklung der Flächendichte

In Abb. 4.6 sind die Entwicklungen der Flächendichte für verschiedene Verhältnisse ν_1/ν_2 dargestellt. Die niedrigere Viskosität ν_2 ist jeweils gleich gewählt. Man erkennt deutlich, wie die Aufsteilung der Flächendichteverteilung mit steigendem Viskositätskontrast stark zunimmt. Die beiden roten Linien in dieser Abbildung zeigen die Grenzwerte Σ_{niedrig} und Σ_{hoch} für die beiden Viskositäten. Ist die Flächendichte $\Sigma < \Sigma_{\text{niedrig}}$, so ist $\nu = \nu_2$, für $\Sigma > \Sigma_{\text{hoch}}$ ist $\nu = \nu_1$. Für $\Sigma_{\text{niedrig}} < \Sigma < \Sigma_{\text{hoch}}$ wird interpoliert. Auch diese beiden Grenzwerte wurden für alle drei Beispiele gleich gewählt. Alle

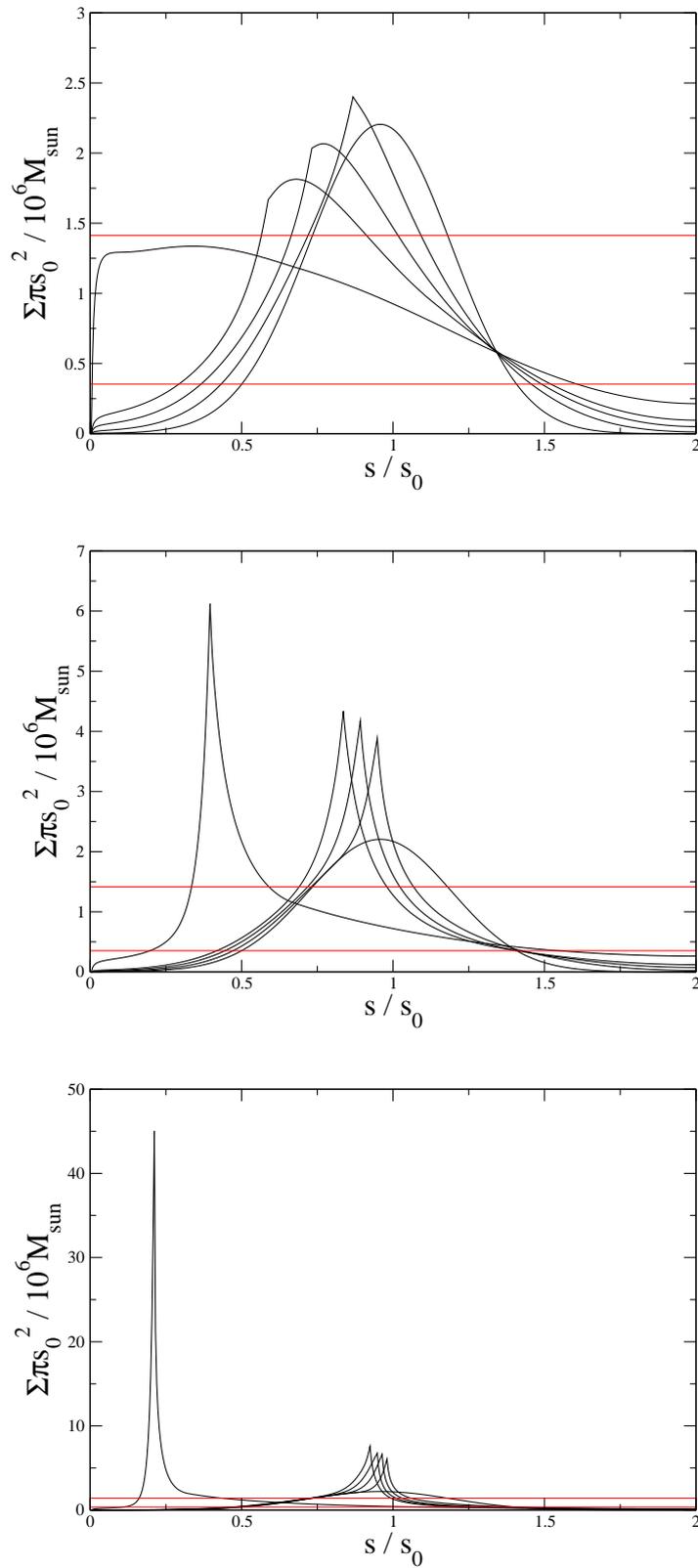


Abbildung 4.6: Entwicklung der Flächendichten für verschiedene Verhältnisse ν_1/ν_2 . Von oben nach unten: $\nu_1/\nu_2 = 3$, $\nu_1/\nu_2 = 10$, $\nu_1/\nu_2 = 30$. Der niedrigere Wert ν_1 ist jeweils gleich gewählt. Die roten Linien zeigen die Grenzwerte für die beiden Viskositäten.

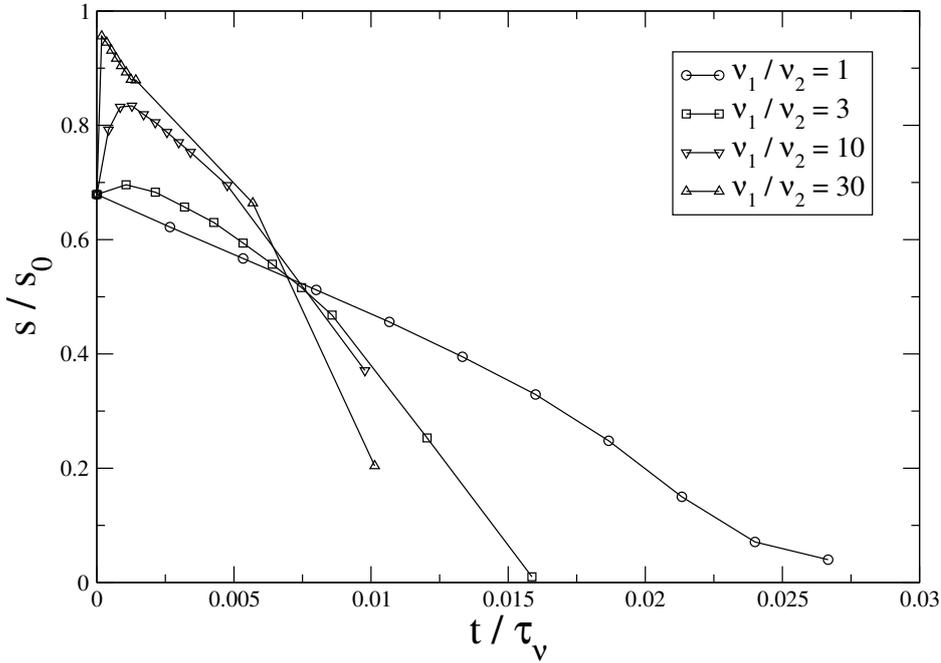


Abbildung 4.7: Verlagerung der Massenfronten während des Akkretionsprozesses. Die Zeit ist in Einheiten von τ_ν , der Radius in Einheiten von s_0 angegeben.

physikalischen Parameter der simulierten Scheiben sind in Tab. 4.1 angegeben. Diese Ergebnisse zeigen, dass sich in selbstgravitierenden β -Scheiben tatsächlich steile Fronten ausbilden können, die als kompakte Objekte nach innen laufen. Abb. 4.7 zeigt nun, wie schnell diese Fronten akkretiert werden. Dabei wird die Position einer solchen Front festgelegt als der Radius, an dem die Flächendichte ihren halben Maximalwert erreicht. Da die globale Entwicklung der Scheibe durch ν_2 bestimmt wird, wird die viskose Zeitskala hier als $\tau_\nu = s_0^2/\nu_2$ definiert.

Aus Abb. 4.7 wird ersichtlich, dass die Akkretionsgeschwindigkeit einer Massenfront kaum vom Viskositätskontrast abhängt, sobald er größer als eins ist. Wie man in Abb. 4.6 sieht, werden die Fronten mit steigendem Kontrast allerdings steiler und höher. Damit wird die Zeit, die ein Massenpaket (z.B. eine Riesensmolekülwolke, die in die Scheibe eines AGN fällt) zum Einlaufen braucht, durch die Viskosität ν_2 außerhalb des Paketes und den Radius s bestimmt, während der Grad an Kompaktheit, den das Massenpaket erreicht, durch den Viskositätskontrast und damit durch den Grad an Eigengravitation bestimmt wird.

	<i>ohne Viskositätskontrast</i>	<i>mit Viskositätskontrast</i>
Radius der Scheibe	$s_{\text{außen}} = 10\text{pc}$	$s_{\text{außen}} = 10\text{pc}$
Normierung	$s_0 = 5\text{pc}$	$s_0 = 5\text{pc}$
niedrige Viskosität	$\nu = 10^{22} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$	$\nu_2 = 10^{22} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$
hohe Viskosität	-	$\nu_1 = 10^{23} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$
Zentralmasse	$10^8 M_{\odot}$	$10^8 M_{\odot}$
Masse der Scheibe	$5 \cdot 10^6 M_{\odot}$	$5 \cdot 10^6 M_{\odot}$
obere Grenze für ν_2	-	$\Sigma_{\text{niedrig}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$
untere Grenze für ν_1	-	$\Sigma_{\text{hoch}} = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$

Tabelle 4.1: Physikalische Parameter der in diesem Abschnitt behandelten Akkretionsscheiben. Der Wert für die hohe Viskosität entspricht dem für die Erzeugung der Spektren angenommenen Fall $\nu_1/\nu_2 = 10$.

4.3.2 Spektrale Entwicklung

Für die Geschwindigkeit der Helligkeitsänderung der Akkretionsscheibe ist vor allem die Kompaktheit der Massenverteilung wichtig. Die Zeit, in der sich die Abstrahlung der Scheibe ändert, ist gegeben durch den Abstand zwischen Minimum und Maximum der Verteilung geteilt durch die Akkretionsgeschwindigkeit, also

$$\tau_{\text{fw}} = \frac{s_{\text{max}} - s_{\text{min}}}{v_{s_{\text{min}}}}, \quad (4.6)$$

wobei „fw“ für freak wave steht. Dass sich durch diesen Effekt sehr viel schnellere Helligkeitsänderungen als auf viskoser Zeitskala ereignen können, zeigt eine Betrachtung der Spektren. Abb. 4.8 zeigt zunächst drei Spektren zu verschiedenen Zeitpunkten einer Scheibe ohne Viskositätskontrast, d.h. die Entwicklung der Flächendichte entspricht Abb. 4.3. Die physikalischen Parameter, die diesem Spektrum zugrunde liegen, sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

Eine interessante Besonderheit dieses Spektrums ist der Exzess bei großen Wellenlängen zur Zeit $t = 0$, der dadurch zustande kommt, dass die hohe Massenkonzentration in der Anfangsverteilung die Scheibe an den Stellen besonders hoher Flächendichte aufheizt. Da der Schwerpunkt der Flächendichteverteilung relativ weit außen liegt, ist die abstrahlende Fläche relativ groß,

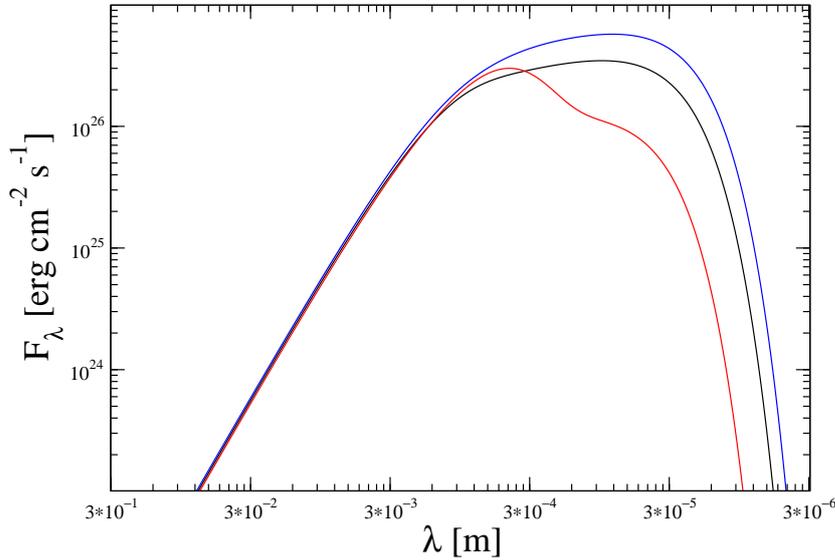


Abbildung 4.8: Spektrale Entwicklung einer Akkretionsscheibe ohne Viskositätskontrast unter Verwendung der üblichen Anfangsbedingungen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ (rote Kurve) zeigt das Spektrum einen deutlichen Exzess bei großen Wellenlängen, die maximale Energieabstrahlung erreicht die Scheibe für $t = 0.07\tau_\nu$ (blaue Kurve); anschließend geht die Leuchtkraft wieder zurück und geht in den stationären Fall über (schwarze Kurve bei $t = 0.64\tau_\nu$).

so dass es hier zu einer deutlichen Abweichung vom gewohnten Spektrum einer stationären Scheibe kommt. Für große Zeiten t nähert sich die spektrale Form immer mehr der einer stationären Scheibe an. Die Helligkeitsänderung im infraroten Spektralbereich um $30\mu m$ beträgt etwa eine Größenordnung. Das 2-Viskositäten-Modell führt nun zu qualitativ anderen Ergebnissen, wie Abb. 4.9 zu entnehmen ist. Der entsprechende Simulationslauf wurde mit den selben Anfangswerten wie der oben beschriebene gestartet (die physikalischen Parameter sind in Tab. 4.1 enthalten). Man erkennt, dass der Helligkeitsanstieg am hochfrequenten Ende des Spektrums dramatisch viel stärker als im Fall ohne Viskositätskontrast ist (bei $30\mu m$ steigt der Fluss um etwa 3 Größenordnungen, bei $3\mu m$ sogar noch stärker); zudem verschiebt sich das Flussmaximum von $300\mu m$ zu etwa $15\mu m$. Auch die Form der Spektren ist deutlich verschieden zu der in Abb. 4.8 gezeigten. Im Bereich

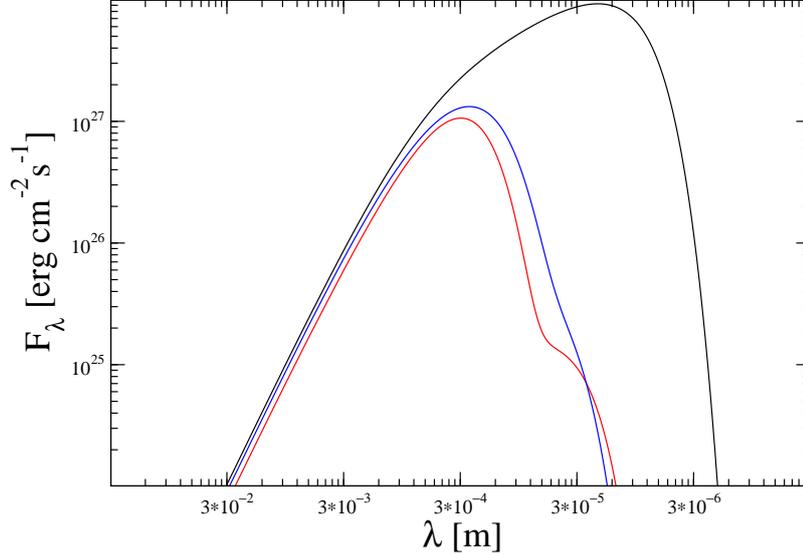


Abbildung 4.9: Spektrale Entwicklung einer Akkretionsscheibe im 2-Viskositäten-Modell. Die rote Kurve zeigt das Spektrum bei $t = 0$, die blaue Kurve für $t = 0.004\tau_\nu$ und die schwarze Kurve für $t = 0.007\tau_\nu$.

des Flussmaximums sind die Spektren aus Abb. 4.9 deutlich steiler, da sich durch die starke Massenkonzentration ein Bereich der Scheibe so stark aufheizt, dass er die Abstrahlung der gesamten Scheibe dominiert.

Kommen wir nun zur Betrachtung der Zeitskalen, auf denen sich die Helligkeitsänderungen ereignen: Ohne Viskositätskontrast ist die größte Helligkeitsänderung nach $0.07\tau_\nu$ erreicht, während dies im 2-Viskositätenmodell 10mal früher erreicht wird. Bei den hier verwendeten physikalischen Parametern ist dabei $0.007\tau_\nu = 5.14 \cdot 10^6 \text{a}$. Dies liegt nicht etwa daran, dass sich die Scheibe aufgrund der höheren Viskosität ν_1 10mal schneller entwickelt - dies geschieht nämlich gerade nicht (siehe Abb. 4.7). Stattdessen induziert die Aufteilung der Massenverteilung eine besonders schnelle und starke Aufheizung des inneren Bereiches der Akkretionsscheibe, was wiederum den starken Anstieg der Leuchtkraft der Scheibe bewirkt.

Damit ist gezeigt, dass das 2-Viskositäten-Modell in der Lage ist, starke Helligkeitsänderungen von AGN im Infrarotbereich auf verhältnismäßig kurzen Zeitskalen zu erzeugen.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde untersucht, ob die von [Duschl et al. \(2000\)](#) eingeführte β -Viskosität in der Lage ist, starke Helligkeitsänderungen von AGN, die sich auf kurzen Zeitskalen ereignen, zu erklären. Dazu wurde eine Simulation einer nichtstationären Akkretionsscheibe entwickelt, deren Anfangsbedingungen eine hohe Massenkonzentration bei relativ großen Radien enthalten ($s_0 = 5pc$). Zunächst wurde der Versuch unternommen, ein selbstkonsistentes Modell einer selbstgravitierenden β -Scheibe zu realisieren, allerdings traten bei der Implementation der Eigengravitation unter Zuhilfenahme der von [Pierens & Huré \(2004\)](#) entwickelten „splitting method“ zur Lösung der Poissongleichung Fragmentationseffekte auf, die eine weitere Behandlung dieses Problems im Rahmen der vorliegenden Arbeit vereitelten. Diese Fragmentationseffekte sind sehr wahrscheinlich nicht durch numerische Effekte erzeugt, sondern physikalischen Ursprungs und entsprechen rotations-symmetrischen *Toomre*-Instabilitäten (siehe [Toomre 1964](#)). Daher erfordert eine aussagekräftige Untersuchung dieser Effekte eine physikalisch sinnvolle Behandlung des inneren Drucks der Scheibe, welcher einer Fragmentation entgegenwirkt. Ein solches Vorgehen erscheint lohnend, hätte jedoch den Rahmen dieser Diplomarbeit gesprengt.

Statt die aufgetretenen Fragmentationseffekte genauer zu untersuchen, wurde ein einfaches 2-Viskositäten-Modell entwickelt, welches das Zusammenwirken von β -Viskosität und Eigengravitation simulieren soll. Die β -Viskosität hat die Eigenschaft, dass sie mit steigendem Grad an Eigengravitation zunimmt. Dies wurde in vereinfachter Form durch eine von der Flächendichte abhängige Viskosität nachgebildet.

Die Ergebnisse dieses Modells zeigen, dass es wie erwartet zur Ausbildung sogenannter „freak waves“ kommt, die als sehr kompakte Massenkonzentrationen akkretiert werden und daher auf sehr kurzen Zeitskalen enorme Helligkeitsänderungen bis in den nahen Infrarotbereich hinein bewirken können.

Ein für die Zukunft lohnendes Projekt ist das Weiterverfolgen des selbst-konsistenten Ansatzes inklusive einer sinnvollen Behandlung der Scheibenthermodynamik, um herauszufinden, ob sich auch dann ein Verhalten der Scheibe ähnlich dem im 2-Viskositäten-Modell ergibt. Eine weitere interessante Fragestellung ist die nach den Auswirkungen derartiger freak waves auf Sternentstehung. Das Auftreten von Fragmentation zeigt, dass es in selbst-gravitierenden Akkretionsscheiben zu vermehrter Sternentstehung kommen kann. Betrachtet man nun statt der hier behandelten Scheiben um AGN galaktische Scheiben, die nach einem Kollisionsereignis erhöhte Massenkonzentrationen bei bestimmten Radien aufweisen, so könnte man z.B. versuchen, die Morphologie von Starburst-Galaxien durch freak waves zu erklären.

In jedem Fall legt die vorliegende Arbeit nahe, dass Akkretionsvorgänge unter bestimmten Umständen sehr viel schneller und dramatischer ablaufen können, als bisher angenommen wurde.

Literatur

- Antonucci, R. (1993). Unified models for active galactic nuclei and quasars. *Annual Review Astronomy & Astrophysics* 31, 473–521.
- Balbus, S. A. & J. F. Hawley (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *The Astrophysical Journal* 376, 214–233.
- Barnes, J. E. & L. E. Hernquist (1996). Transformations of galaxies. II. Gasdynamics in merging disk galaxies. *The Astrophysical Journal* 471, 115–142.
- Beckert, T. & W. J. Duschl (2002). Where have all the black holes gone? *Astronomy & Astrophysics* 387, 422–428.
- Beckwith, S. V. W. et al. (1990). A survey for circumstellar disks around young stellar objects. *The Astronomical Journal* 99, 924–945.
- Bertin, G. & G. Lodato (2001). Thermal stability of self-gravitating, optically thin accretion disks. *Astronomy & Astrophysics* 370, 342–350.
- Duschl, W. J. & H. Horst (2004). In Vorbereitung.
- Duschl, W. J. & P. A. Strittmatter (2001). The Formation and Feeding of Massive Black Holes in the Early Universe. In N. Arimoto & W. J. Duschl (Eds.), *Studies of Galaxies in the Young Universe with New Generation Telescopes. Proceedings of Japan-German Seminar held in Sendai, Japan, July 2001*, pp. 205–214.
- Duschl, W. J., P. A. Strittmatter & P. L. Biermann (2000). A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *Astronomy & Astrophysics* 357, 1123–1132.
- Frank, J., A. King & D. Raine (2002). *Accretion Power in Astrophysics* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Gebhardt, K. et al. (2000). A relationship between nuclear black hole mass and galaxy velocity dispersion. *The Astrophysical Journal* 539, L13–L16.

- Genzel, R. et al. (2003). The stellar cusp around the supermassive black hole in the galactic center. *The Astrophysical Journal* 594, 812–832.
- Kenyon, S. J. & J. X. Luu (1999). Accretion in the outer Solar System. *The Astrophysical Journal* 526, 465–470.
- Kharif, C. & E. Pelinovsky (2003). Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 22, 603–634.
- Kormendy, J. & D. Richstone (1995). Inward bound - the search for supermassive black holes in galactic nuclei. *Annual Review Astronomy & Astrophysics* 33, 581–624.
- Kumar, P. (1999). The structure of the central disk of NGC 1068: a clumpy disk model. *The Astrophysical Journal* 519, 599–604.
- Lissauer, J. J. (1993). Planet formation. *Annual Review Astronomy & Astrophysics* 31, 129–174.
- Magorrian, J. et al. (1998). The Demography of Massive Dark Objects in Galaxy Centers. *The Astronomical Journal* 115, 2285–2305.
- McCaughrean, M. & C. R. O'Dell (1995). Aufnahmen STScI-PRC1995-45b, STScI-PRC1995-45c.
- Morbidelli, A., M. E. Brown & H. F. Levison (2003). The Kuiper Belt and its primordial sculpting. In J. Davis (Ed.), *First decadal workshop on the Kuiper belt*.
- Pierens, A. & J.-M. Huré (2004). Rotation curves of galactic disks for arbitrary surface density profiles: A simple and efficient recipe. *The Astrophysical Journal* 605, 179–182.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion Discs in Astrophysics. *Annual Review Astronomy & Astrophysics* 19, 137–162.
- Richard, D. & J.-P. Zahn (1999). Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment. *Astronomy & Astrophysics* 347, 734–738.
- Shakura, N. I. & R. A. Sunyaev (1973). Black holes in Binary Systems. Observational Appearance. *Astronomy & Astrophysics* 24, 337–355.
- Toomre, A. (1964). On the gravitational stability of a disk of stars. *The Astrophysical Journal* 139, 1217–1238.
- Urry, C. M. & P. Padovani (1996). Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 107, 803–845.

- Wang, Y. P., L. Biermann & A. Wandel (2000). Black hole to bulge mass correlation in Active Galactic Nuclei: a test for the simple unified formation scheme. *Astronomy & Astrophysics* 361, 550–554.
- White, N. E. (1989). Accretion disks in low mass x-ray binaries. In F. Meyer et al. (Eds.), *Theory of Accretion Disks. Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop, held in Garching, Germany, March 1989*, Volume 290, pp. 269. NATO Advanced Science Institutes.

Danksagung

Mein sehr herzlicher Dank gilt Herrn *Prof. Dr. W.J. Duschl*, der diese Arbeit betreute und mich mit seinen Vorschlägen und Ideen stets zu begeistern wusste. Außerdem vermochte er mich besonders in schwierigen Situationen immer für meine Arbeit zu motivieren.

Ich bedanke mich bei Herrn *Prof. Dr. M. Bartelmann* für die Bereitschaft, als Zweitkorrektor diese Arbeit zu bewerten.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei Herrn *Prof. Dr. J.-M. Huré* für seine Bereitschaft, mir seinen Algorithmus zur Lösung der Poissongleichung zu erklären und mit mir über meine Ergebnisse zu diskutieren. Seine Hilfe hat wesentlich dazu beigetragen, die Ursache meiner Probleme zu finden.

Ich möchte mich den Herren *Dr. F. Hersant* und *M. Mayer* für ihre geduldige Hilfe bei Problemen aller Art, zahlreiche spannende Diskussionen und immer wieder angenehme Raclette-Abende bedanken.

Ich danke allen Mitarbeitern des ITA und besonders den Angehörigen der Arbeitsgruppe *Duschl* für eine stets angenehme Arbeitsatmosphäre.

Den Herren *M. Mayer* und *B. Schulze* danke ich für die Vorabkorrektur dieser Arbeit.

Ich danke meinen Eltern *A. Horst* und *D. Horst* für ihre stete Unterstützung bei allem, was ich tue.

Erklärung:

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den _____

Unterschrift