

Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Matthias Bartelmann
Institut für Theoretische Astrophysik
Universität Heidelberg



Herzlichen Dank an viele Studentinnen und Studenten, die das Skript kommentiert und korrigiert haben und damit sehr dazu beigetragen haben, es zu verbessern und verständlicher zu machen. Insbesondere danke ich David Stadler, der das handschriftliche Skript in \LaTeX gesetzt hat, Florian Freundt, der die Abbildungen in elektronischer Form beigetragen hat, sowie Jonas Binding, Angelos Kaloviduris, Sandra Schmid und Jenny Wagner.

Inhaltsverzeichnis

1	Die Maxwell'schen Gleichungen	1
1.1	Vorbemerkungen	1
1.2	Grundbegriffe	2
1.3	Die Maxwell'schen Gleichungen	5
1.4	Materialkonstanten	9
1.5	Übergang zum Gauß'schen Einheitensystem	10
2	Elektrostatik	13
2.1	Das Coulombsche Gesetz	13
2.2	Das elektrostatische Potential	14
2.3	Das Potential der Punktladung und die Delta-Funktion	15
2.4	Potential und Feld eines Dipols	17
2.5	Die Sätze von Green	18
2.6	Die Greensche Funktion	21
2.7	Beispiele zur Berechnung von Potentialen und Feldern	22
3	Vollständige Funktionensysteme, Multipolentwicklung	27
3.1	Vollständige Funktionensysteme	27
3.2	Fourier-Transformation	29
3.3	Gram-Schmidt-Orthonormalisierung	32
3.4	Kugelflächenfunktionen	34
3.5	Multipolentwicklung	35
3.6	Wechselwirkung einer Ladung mit einem äußeren Feld	39

4	Dielektrika	42
4.1	Makroskopische Mittelung	42
4.2	Grenzbedingungen	46
4.3	Kugel im Dielektrikum	47
4.4	Molekulare Polarisierbarkeit	51
4.5	Modell für die molekulare Polarisierbarkeit	53
5	Magnetostatik	54
5.1	Das Vektorpotential	54
5.2	Beispiel: Magnetfeld einer geladenen, rotierenden Kugel	55
5.3	Das Biot-Savartsche Gesetz	58
5.4	Das magnetische Moment	60
5.5	Magnetisierungsstrom und Magnetisierung	62
5.6	Grenzbedingungen für \vec{B} und \vec{H}	65
5.7	Beispiel: Magnetfeld einer homogen magnetisierten Kugel	65
6	Spezielle Relativitätstheorie	68
6.1	Lorentz-Transformation	68
6.2	Eigenschaften der Minkowski-Welt	71
6.3	Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls	72
6.4	Das relativistische Wirkungsprinzip	73
6.5	Energie und Impuls	75
6.6	Variation der Wirkung und der Energie-Impuls-Vierervektor	76
6.7	Wechselwirkung von Ladungen mit dem Feld	78
6.8	Die Lorentzkraft	80
7	Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik	82
7.1	Der Tensor des elektromagnetischen Feldes	82
7.2	Lorentztransformation der Felder	84
7.3	Das Wirkungsintegral des elektromagnetischen Feldes	85

7.4	Der Energie-Impuls-Tensor	89
7.5	Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes . .	92
8	Teilchen in Feldern, Energie-Impuls-Erhaltung	95
8.1	Energie-Impuls-Bilanz und ohmsches Gesetz	95
8.2	Bewegung in homogenen, statischen Feldern	97
8.3	Adiabatische Invarianz	100
8.4	Bewegung im schwach veränderlichen Magnetfeld . .	103
8.5	Bewegung in kombinierten, homogenen und statischen Feldern	104
9	Elektromagnetische Wellen	107
9.1	Eichinvarianz	107
9.2	Wellen im Vakuum	109
9.3	Ebene Wellen	111
9.4	Monochromatische ebene Wellen	112
9.5	Polarisation ebener Wellen	115
9.6	Beispiel: „Lichtdruck“ einer ebenen Welle	116
9.7	Eigenschwingungen des Feldes	118
10	Elektromagnetische Wellen in Materie	121
10.1	Wellen in homogenen, linearen Medien	121
10.2	Verallgemeinerter Brechungsindex und Eindringtiefe .	123
10.3	Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit	126
10.4	Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex	127
10.5	Reflexion bei senkrechtem Einfall	129
10.6	Brechung und Reflexion im allgemeinen Fall	132
10.7	Die Fresnelschen Formeln	134
11	Felder bewegter Ladungen	137
11.1	Die Greensfunktion der Wellengleichung	137
11.2	Die Liénard-Wiechert-Potentiale	144

11.3 Beispiel: Potentiale und Felder einer geradlinig- gleichförmig bewegten Ladung	146
12 Der Hertzsche Dipol und die Larmor-Formel	150
12.1 Liénard-Wiechert-Potentiale eines zeitabhängigen Dipols	150
12.2 Felder des Dipols	152
12.3 Der Poynting-Vektor des Dipols	153
12.4 Strahlung einer beliebigen, schwingenden Ladungsver- teilung	155
12.5 Felder bei relativistischer Bewegung	156
12.6 Die Larmor-Formel	159
12.7 Strahlungsdämpfung und natürliche Linienbreite . . .	161
13 Thomson-Streuung und Synchrotronstrahlung	165
13.1 Thomson-Streuung	165
13.2 Die Eddington-Leuchtkraft	168
13.3 Synchrotronstrahlung	169
14 Geometrische Optik, Beugung	178
14.1 Näherungen; die Eikonalgleichung	178
14.2 Analogie zur klassischen Mechanik	179
14.3 Das Huygenssche Prinzip	181
14.4 Fresnelsche Beugung	184
14.5 Fraunhofersche Beugung	187
15 Zusammenfassung	190
15.1 Maxwell-Gleichungen	190
15.2 Elektrostatik	191
15.3 Multipolentwicklung	191
15.4 Dielektrika	192
15.5 Magnetostatik	192
15.6 Spezielle Relativitätstheorie	193
15.7 Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik .	194

15.8 Teilchen in Feldern	195
15.9 Eichinvarianz und Wellen im Vakuum	196
15.10 Wellen in Materie	196
15.11 Felder bewegter Ladungen	197
15.12 Der Hertzsche Dipol	198
15.13 Thomson-Streuung	198

Kapitel 1

Die Maxwellschen Gleichungen

1.1 Vorbemerkungen

- Die Elektrodynamik beschreibt elektrische und magnetische Kräfte auf Ladungen und Magnetpole. Diese Kräfte werden als Wirkungen eines Feldes aufgefasst, des elektromagnetischen Feldes. Dabei tritt die Vereinigung von elektrischem und magnetischem Feld erst ganz zu Tage, wenn die Elektrodynamik relativistisch formuliert wird.
- Felder sind z.B. skalare oder vektorielle Funktionen des Raums. Sie können sich ausbreiten und haben damit eine eigene Dynamik, die von Feldgleichungen beschrieben wird. Damit wird die Fernwirkungstheorie der Newtonschen Mechanik aufgegeben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes ist endlich.
- Während die klassische Mechanik vier Entitäten unterscheidet, nämlich Körper, Kräfte, Raum und Zeit, und diese als getrennt voneinander auffasst, verbindet die Feldtheorie Kräfte und Raum. Da die Relativitätstheorie Raum und Zeit verknüpft, entsteht eine enge Verbindung zwischen Feldern und der Raum-Zeit-Struktur, die bedeutet, dass Feldtheorie letztendlich notwendigerweise relativistisch formuliert werden muss.
- Physikalische Theorie beruht auf Axiomen, die den begrifflichen Rahmen der Theorie setzen. So wie die Newtonschen Axiome den Rahmen der klassischen Mechanik festlegen, können die Maxwellschen Gleichungen als Axiome der Elektrodynamik aufgefasst werden. Sie entspringen aus der Verallgemeinerung von Erfahrung und sind daher wie alle Axiome idealisiert. Wir stellen in dieser Vorlesung die Maxwellschen Gleichungen an den Anfang, allerdings zunächst in integraler Form, woraus sich ihr physikalischer Gehalt klarer ergibt.

- Jede physikalische Theorie gewinnt ihren Sinn erst aus der Semantik ihrer Begriffe, nicht aus den Gleichungen. Wir beginnen daher damit, Begriffe der Elektrodynamik einzuführen, bevor wir mathematische Beziehungen zwischen ihnen betrachten.

1.2 Grundbegriffe

- Grundlegend ist der Begriff der Ladung als physikalisch gegebene Eigenschaft, die in vieler Beziehung noch fundamentaler als die Masse ist. Die Ladung des Elektrons etwa könnte als fundamentale Einheit aufgefasst werden. Stattdessen führt man zunächst eine Ladungseinheit neu ein, das Coulomb (C), in dessen Einheit die Elektronenladung

$$e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.1)$$

ist.

- Ein elektrisches Feld wirkt auf eine Testladung so, dass die ausgeübte Kraft pro Ladung als Feldstärke eingeführt werden kann,

$$\text{el. Feldstärke } \vec{E} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}} . \quad (1.2)$$

- Die Einheit der Kraft ist das Newton im mks-System. Da wir später aus guten Gründen das Gaußsche cgs-System (cm, g, s) einführen werden, sei hier an die Umrechnung vom mks- in das cgs-System erinnert:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 10^5 \text{ dyn} \quad (1.3)$$

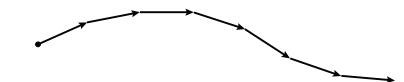
- Ebenso gilt für die Einheiten der Energie und der Leistung

$$\begin{aligned} 1 \text{ J} &= 1 \text{ Nm} = 10^5 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg} \\ 1 \text{ W} &= 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{s}} . \end{aligned} \quad (1.4)$$

- Wir werden später sehen, wie sich die Einheit der Ladung im cgs-System ausdrücken lässt. Die Einheit der Feldstärke ist offenbar zunächst

$$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}} . \quad (1.5)$$

- Kraftlinien entstehen, indem man an jedem Punkt im Raum der Richtung des Feldes folgt. Oft ist es nützlich, das Feld als Bündel von Kraftlinien, oder Feldlinien, aufzufassen, auch wenn sie nicht „zählbar“ sind.



Kraftlinien

- Als Spannung wird definiert:

$$U := - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (1.6)$$

also das Integral über die Feldstärke längs eines Weges zwischen zwei Punkten A und B . Die Einheit der Spannung ist offenbar

$$[U] = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} =: \text{V} \quad (\text{Volt}). \quad (1.7)$$

Das bedeutet, dass die Einheit der elektrischen Feldstärke auch als

$$[\vec{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1.8)$$

dargestellt werden kann. Wenn die Spannung unabhängig vom Weg zwischen A und B wird, nennt man sie auch Potentialdifferenz.

- Von der Feldstärke \vec{E} verschieden ist die Wirkung des Feldes \vec{E} auf Medien, womit auch ein Vakuum gemeint sein kann. Diese Wirkung wird (eher aus historischen Gründen) als „dielektrische Verschiebung“ \vec{D} bezeichnet.
- Die dielektrische Verschiebung wird so definiert, dass eine punktförmige Ladung q vermittelt ihres Feldes \vec{E} einen Fluss von \vec{D} hervorruft. Dieser Fluss von \vec{D} wird der Ladung q gleichgesetzt,

$$q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}, \quad (1.9)$$

wobei $d\vec{A}$ ein längs der äußeren Flächennormalen der Fläche A gerichtetes Flächenelement ist.

- Wenn A eine auf q zentrierte Kugel vom Radius r ist, folgt offenbar aus Symmetriegründen

$$q = 4\pi r^2 |\vec{D}|. \quad (1.10)$$

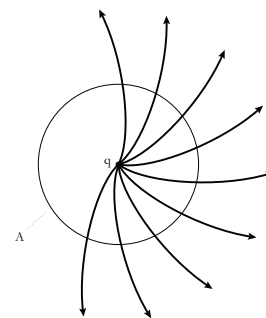
- Die dielektrische Verschiebung hat offenbar die Einheit

$$[\vec{D}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \quad (1.11)$$

das ist *nicht* dieselbe Einheit wie die von \vec{E} !

- Ladungen, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömen, definieren die Stromdichte \vec{j} , deren Richtung die Strömungsrichtung angibt. Offenbar ist die Einheit von \vec{j}

$$[\vec{j}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{ s}}. \quad (1.12)$$



Fluss einer Ladung q durch eine Fläche A

- Die Änderung der dielektrischen Verschiebung mit der Zeit,

$$\frac{d\vec{D}}{dt} =: \dot{\vec{D}}, \quad (1.13)$$

hat dieselbe Einheit. Es war die zentrale Leistung Maxwells in der Elektrodynamik zu erkennen, dass dieser zeitlichen Änderung der „Verschiebungstrom“ entspricht, der mit \vec{j} zu einem Gesamtstrom zusammenzufassen ist:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtstrom} &= \text{Verschiebungstrom} + \text{Ladungstrom} \\ &= \dot{\vec{D}} + \vec{j}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

- Ähnlich der Ladung weist man einem magnetischen Material eine „Polstärke“ zu. In Analogie zum magnetischen Feld einer Stromschleife wird zunächst ein magnetisches Moment

$$m = \text{Strom} \cdot \text{Fläche} \quad (1.15)$$

definiert, dessen magnetische Polstärke indirekt proportional zum Abstand abfällt, also:

$$\text{Polstärke} = \frac{\text{Strom} \cdot \text{Fläche}}{\text{Abstand}}. \quad (1.16)$$

- Weist man der Stromstärke die weitere Einheit Ampère (A) zu, folgt zunächst aus der Definition der Stromdichte

$$\text{Strom} = \text{Stromdichte} \cdot \text{Fläche}, \quad (1.17)$$

also

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{ s}} \cdot \text{m}^2 = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} \Rightarrow 1 \text{ C} = 1 \text{ As}, \quad (1.18)$$

was für die Polstärke die Einheit

$$[\text{Polstärke}] = \frac{\text{A m}^2}{\text{m}} = \text{Am} \quad (1.19)$$

ergibt.

- Die magnetische Feldstärke ist nun definiert als die magnetische Kraft pro Polstärke,

$$\vec{B} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Polstärke}}, \quad (1.20)$$

mit der Einheit

$$[\vec{B}] = \frac{\text{N}}{\text{Am}}. \quad (1.21)$$

- Als Einheit der Spannung hatten wir das Volt eingeführt,

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \Rightarrow 1 \frac{\text{N}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}}, \quad (1.22)$$

womit die Einheit von \vec{B} auch in die Form

$$[\vec{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad (1.23)$$

gebracht werden kann.

- Wie im Fall des elektrischen Feldes bezeichnet man die Wirkung des Magnetfeldes auf Medien durch einen neuen Vektor \vec{H} , die „magnetische Erregung“, die mit der Polstärke in denselben Zusammenhang gebracht wird wie die Ladung mit der dielektrischen Verschiebung:

$$[\vec{H}] = \frac{\text{Polstärke}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Am}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (1.24)$$

- Die Unterscheidung zwischen \vec{B} und \vec{H} wird später verschwinden (zunächst im Vakuum), aber diese Einführung zeigt, dass sie paarweise verschiedenen Ursprungs sind. Den

$$\text{Intensitätsgrößen } \vec{E}, \vec{B} \quad (1.25)$$

stehen

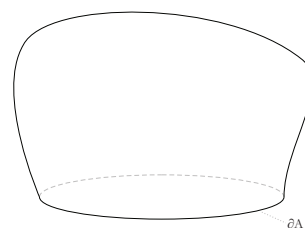
$$\text{Quantitätsgrößen } \vec{D}, \vec{H} \quad (1.26)$$

gegenüber. Während die Intensitätsgrößen beschreiben, wie stark das elektromagnetische Feld ist, geben die Quantitätsgrößen an, wie sehr das Medium darauf reagiert.

1.3 Die Maxwell'schen Gleichungen

- Wir betrachten zunächst die Größen $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, den magnetischen Fluss bzw. die magnetische Durchflutung, und $\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$, den Strom. Dabei ist A eine beliebig geformte Fläche, $d\vec{A}$ deren gerichtetes Flächenelement, und ∂A deren Rand.
- Unter $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ kann man salopp die „Anzahl der Feldlinien“ verstehen, die durch A treten, auch wenn Feldlinien streng genommen nicht zählbar sind.
- Analog definieren wir längs geschlossener Kurven die elektrische und die magnetische Ringspannung,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (1.27)$$



Eine beliebig geformte Fläche A und ihr Rand ∂A

- Damit gelten dann das *Faradaysche Induktionsgesetz*

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.28)$$

und das *Ampèresche Gesetz*

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (1.29)$$

- Das Minuszeichen im Faradayschen Induktionsgesetz vertritt die Lenzsche Regel.
- Die Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche A ist also gleich der negativen elektrischen Ringspannung am Rand ∂A der Fläche, und der Strom durch die Fläche ist gleich der magnetischen Ringspannung an deren Rand.
- Die Flächen und ihre Randkurven sind dabei beliebig! So lange etwa die Randkurve dieselbe bleibt, wird der magnetische Fluss oder der Strom durch die Fläche derselbe bleiben, wie die Fläche auch geformt sein mag.
- Insbesondere kann die Randkurve zu einem Punkt schrumpfen, so dass gilt:

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.30)$$

und

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.31)$$

(jetzt: Integrale über geschlossene Flächen!). Damit ist dann

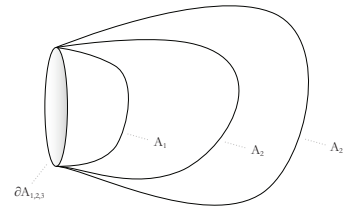
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \text{zeitlich konstant}, \quad (1.32)$$

und das bedeutet, dass $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$ konstant bleiben muss, auch wenn das Magnetfeld abgeschaltet wird!

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (1.33)$$

- Ebenso können wir mit dem Strom argumentieren: Da der Gesamtstrom sich aus Ladungsstrom und Verschiebungsstrom zusammensetzt, folgt aus

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} = - \oint \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}, \quad (1.34)$$



Verschiedene Flächen mit derselben Randkurve



Wenn die Randkurve zum Punkt schrumpft, schließt sich die Fläche

wenn \vec{j}_q der Ladungsstrom sei. Wenn die Fläche A zeitlich festgehalten wird, ist

$$\oint \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A} = \frac{d}{dt} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}, \quad (1.35)$$

und damit

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = - \int dt \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} + \text{konst.} . \quad (1.36)$$

- Physikalisch ist

$$- \int dt \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} = q \quad (1.37)$$

die gesamte Ladung, die sich innerhalb von A ansammelt. Also ist

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q + \text{konst.} . \quad (1.38)$$

- Dies muss auch dann gelten, wenn alle Ladungen entfernt und alle Ströme abgeschaltet werden, also muss konst. = 0 sein, und

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q . \quad (1.39)$$

Damit wird bestätigt, dass unsere Definition von \vec{D} im Einklang mit dem Ampèreschen Gesetz steht und dass die Interpretation von \vec{D} als Beitrag zum Strom für diese Übereinstimmung *notwendig* ist.

- Die Gleichung (1.33),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 , \quad (1.40)$$

wurde von Hertz interpretiert als „es gibt keinen wahren Magnetismus“: Der magnetische Fluss durch *jede* geschlossene Fläche verschwindet; „das Magnetfeld hat keine Quellen“.

- Aus der Gleichung (1.39) folgt durch Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \frac{dq}{dt} = - \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} . \quad (1.41)$$

Das ist die Gleichung der Ladungserhaltung: Innerhalb einer geschlossenen Fläche kann sich die Gesamtladung nur um den Strom durch diese Fläche ändern.

- Damit haben wir die Maxwell-Gleichungen in integraler Form:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= - \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\
 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} &= \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} \\
 \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 \\
 \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} &= q
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

- **Beispiel:** Wir können die Maxwell-Gleichungen gleich dazu benutzen, Grenzbedingungen aufzustellen:

- Sei eine Grenzfläche zwischen zwei Medien gegeben, und wir wollen wissen, welche Bedingung an \vec{B} an dieser Grenzfläche zu stellen sei. Dazu umschließen wir einen Ausschnitt der Grenzfläche mit einem Prisma der Höhe Δh und der Grundfläche ΔA und erhalten zunächst, für $\Delta h \rightarrow 0$,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot \Delta A + \vec{B}' \cdot \vec{n}' \cdot \Delta A = 0
 \tag{1.43}$$

wobei $\vec{n}' = -\vec{n}$ ist. Damit folgt

$$B'_n = B_n,
 \tag{1.44}$$

das heißt die Normalkomponenten von \vec{B} bleiben über die Grenzfläche hinweg erhalten.

- Die Maxwell-Gleichungen können nun mithilfe der Sätze von Stokes und Gauß in differentielle Form gebracht werden. Wenn ∂A ein einfach zusammenhängendes Gebiet A berandet, folgt aus dem Stokesschen Satz

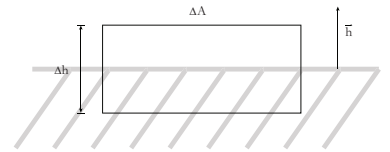
$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}, \\
 \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}.
 \end{aligned}
 \tag{1.45}$$

- Der Gaußsche Satz besagt

$$\begin{aligned}
 \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot dV, \\
 \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot dV,
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

wobei V das Volumen ist, das A einschließt. Wenn wir die Ladung q noch durch ein Volumenintegral der Ladungsdichte ausdrücken,

$$\int_V \rho \cdot dV = q,
 \tag{1.47}$$



Prisma, das von einer Grenzfläche durchquert wird

erhalten wir mit (1.45) und (1.46) aus (1.42)

$$\begin{aligned}
 -\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \dot{\vec{B}} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} = \vec{j}_q + \dot{\vec{D}} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

das sind die acht Maxwell-Gleichungen in differentieller Form.

- Die Kontinuitätsgleichung kann ebenso in differentielle Form gebracht werden: Aus (1.41) folgt mit (1.47) und dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q) dV \\
 \Rightarrow \dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

1.4 Materialkonstanten

- Zur Verknüpfung von \vec{E} und \vec{D} bzw. \vec{B} und \vec{H} sind offenbar weitere Gleichungen nötig, denn die Maxwell-Gleichungen stellen acht Gleichungen für 16 Größen \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} , ρ , \vec{j} bereit.
- Üblich sind die linearen Annahmen

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{1.50}$$

in denen die Materialkonstanten

Dielektrizitätskonstante ϵ
 Permeabilitätskonstante μ
 Leitfähigkeit σ

auftauchen. Offenbar sind die Einheiten

$$\begin{aligned}
 [\epsilon] &= \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{As}}{\text{N}} = \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \\
 [\mu] &= \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \\
 [\sigma] &= \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{V}} = \frac{\text{A}}{\text{Vm}} =: \frac{1}{\Omega\text{m}},
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

worin das Ohm als

$$1 \Omega := 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} \tag{1.52}$$

definiert wurde.

- Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist

$$\epsilon_0 = 8.859 \times 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} . \quad (1.53)$$

für Medien ist $\epsilon > \epsilon_0$. Die Permeabilität des Vakuums ist

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} , \quad (1.54)$$

was aus der Definition des Ampère folgt. Paramagnetische Materialien haben $\mu > \mu_0$, diamagnetische $\mu < \mu_0$. Damit bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu \dot{\vec{H}} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}} &= \vec{\nabla} \times \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) &= \rho . \end{aligned} \quad (1.55)$$

Das sind also acht Gleichungen für die sieben Größen \vec{E} , \vec{H} und ρ . Die ersten beiden Gleichungen stellen sechs Bedingungen an die sechs Größen \vec{E} und \vec{H} , die zweiten beiden Gleichungen stellen Zusatzbedingungen.

- Aus der Kontinuitätsgleichung folgt mittels der Materialkonstanten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \epsilon \vec{E} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 , \quad (1.56)$$

wenn die Ortsabhängigkeit von σ/ϵ vernachlässigt wird. diese Differentialgleichung hat offenbar die Lösung

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\sigma t/\epsilon} =: \rho_0 e^{-t/\tau} , \quad (1.57)$$

worin $\tau := \epsilon/\sigma$ die Relaxionszeit ist. Für ideale Leiter ist $\tau \rightarrow 0$ wegen $\sigma \rightarrow \infty$, also $\rho = 0$ nach beliebig kurzer Zeit.

1.5 Übergang zum Gaußschen Einheitensystem

- Wir haben bisher die neuen Einheiten C, A, V und Ω eingeführt, außerdem waren selbst für das Vakuum die Materialkonstanten μ_0 und ϵ_0 notwendig. Wir führen nun ein Einheitensystem ein, in dem $\mu_0 = 1$ und $\epsilon_0 = 1$ werden sollen.
- Dazu führen wir hilfsweise skalare Größen α , β , γ und δ ein, mit denen wir die Felder und die Ladungen skalieren,

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \alpha \vec{E} , & \vec{D}' &= \beta \vec{D} , & \vec{H}' &= \gamma \vec{H} , & \vec{B}' &= \delta \vec{B} , \\ \rho' &= \nu \rho , & \vec{j}' &= \nu \vec{j} . \end{aligned} \quad (1.58)$$

Weiter verlangen wir, dass die Produkte $\vec{E} \cdot \vec{D}$ und $\vec{E}' \cdot \vec{D}'$ sich höchstens um einen reinen Zahlenwert Z unterscheiden sollen (während $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ zunächst dimensionsbehaftete Konstanten sein können), und schließlich soll $\rho\vec{E} = \rho'\vec{E}'$ sein.

- Damit folgt dann:

$$\alpha\nu = 1, \quad \nu = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha\beta = Z = \gamma\delta. \quad (1.59)$$

Außerdem führen wir

$$\begin{aligned} \Gamma := \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} &\Rightarrow \alpha = \frac{\delta}{\Gamma} = \frac{Z}{\gamma\Gamma}, \quad \beta = \gamma\Gamma, \\ \delta = \frac{Z}{\gamma}, \quad \nu = \frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma\Gamma}{Z} & \end{aligned} \quad (1.60)$$

ein und erhalten damit aus den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\vec{B}}' &= -\Gamma\vec{\nabla} \times \vec{E}' & \dot{\vec{D}}' + Z\vec{j}_q &= \Gamma\vec{\nabla} \times \vec{H}' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}' &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{D}' &= Z\rho' \end{aligned} \quad (1.61)$$

sowie aus den Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{D}' = \epsilon'\vec{E}' &\Rightarrow \epsilon' = \frac{\gamma^2\Gamma^2}{Z}\epsilon \\ \vec{B}' = \mu'\vec{H}' &\Rightarrow \mu' = \frac{Z}{\gamma^2}\mu. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Da wir $\epsilon_0 = 1 = \mu_0$ erreichen wollen, müssen wir also

$$\gamma^2 = Z\mu_0, \quad \gamma^2\Gamma^2 = \frac{Z}{\epsilon_0} \quad (1.63)$$

setzen.

- Betrachten wir ϵ_0 und μ_0 genauer, ergibt sich, dass das Produkt $\epsilon_0\mu_0$ die Einheit eines inversen Geschwindigkeitsquadrates hat,

$$[\epsilon_0\mu_0] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{-2}. \quad (1.64)$$

Offenbar bedingt das, dass

$$\left[\frac{Z}{\gamma^2\Gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{Z} \right] = \frac{1}{\Gamma^2} \quad (1.65)$$

ebenfalls die Dimension eines inversen Geschwindigkeitsquadrates hat. Wir erreichen dies, indem wir

$$\Gamma = c \quad (1.66)$$

setzen, also gleich der Lichtgeschwindigkeit. Schließlich setzen wir noch

$$Z = 4\pi \quad (1.67)$$

und erhalten die Maxwell-Gleichungen im *Gaußschen System*:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{B}} &= -c\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \dot{\vec{D}} + 4\pi\vec{j}_q &= c\vec{\nabla} \times \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (1.68)$$

- Aus (1.64) folgt zunächst:

$$[\gamma] = \sqrt{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}},$$

demnach ist, mit (1.60) und (1.7)

$$[\nu] = [\gamma\Gamma] = \sqrt{\frac{\text{Vm}}{\text{As}}} = \sqrt{\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}} = \sqrt{\frac{\text{m}^3 \text{kg}}{\text{s}^2}} \frac{1}{\text{C}} \propto \sqrt{\frac{\text{cm}^3 \text{g}}{\text{s}^2}} \frac{1}{\text{C}}. \quad (1.69)$$

Die Einheit der Ladung wird also auf rein „mechanische“ Einheiten zurückgeführt:

$$[q] = \frac{\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2}}{\text{s}}. \quad (1.70)$$

Ebenso ergeben sich die Einheiten

$$\begin{aligned} [\vec{E}] = [\vec{D}] &= \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{cm}^{1/2} \text{s}} \\ [\vec{B}] = [\vec{H}] &= \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{cm}^{1/2} \text{s}} = [\vec{E}] = [\vec{D}]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Im Vakuum entfällt die Unterscheidung zwischen \vec{B} und \vec{H} bzw. \vec{E} und \vec{D} , und μ und ϵ werden zu reinen Zahlenfaktoren.

- Quantitativ ergibt sich für den Faktor ν

$$\begin{aligned} \nu &= \gamma\Gamma = \sqrt{4\pi c^2 \mu_0} = 4\pi c \times 10^{-1/2} \sqrt{\frac{\text{kg m}^3}{\text{s}^2}} \frac{1}{\text{C}} \quad (1.72) \\ &= 4\pi c \times 10 \sqrt{\frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2}} \frac{1}{\text{C}} = 3.77 \times 10^{10} \sqrt{\frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2}} \frac{1}{\text{C}}. \end{aligned}$$

für die Elementarladung folgt daraus

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{4\pi} \cdot 3.77 \times 10^{10} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \sqrt{\frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2}} \\ &= 4.8 \times 10^{-10} \sqrt{\frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2}}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Wir werden von nun an in diesem Einheitensystem arbeiten, das auch als konventionelles Gaußsches System bezeichnet wird.

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Das Coulombsche Gesetz

- Elektrostatik handelt von den Feldern ruhender Ladungen. Ströme werden ignoriert. Damit nehmen die Maxwell'schen Gleichungen die Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.1)$$

an, denn Magnetfelder werden ebenfalls vernachlässigt.

- Betrachtet man eine Punktladung am Ursprung, dann erzeugt diese ein radialsymmetrisches Feld $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Integriert man die Divergenzgleichung aus (2.1) über eine Kugel mit Radius r um den Ursprung, erhält man nach dem Gauß'schen Satz

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q, \quad (2.2)$$

denn das Volumenintegral über die „Ladungsdichte“ ρ der Punktladung ergibt die Gesamtladung in der Kugel.

- Aus (2.2) folgt für die Feldstärke der Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (2.3)$$

Nach Definition der Feldstärke erfährt eine Ladung q' in diesem Feld die Kraft

$$\vec{F}(r) = q' \vec{E}(r) = \frac{qq'}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2.4)$$

das ist das Coulomb-Gesetz. Hätten wir im Abschnitt 1.5 darauf verzichtet, den Faktor $Z = 4\pi$ einzuführen, müsste er hier im Nenner der rechten Seite auftauchen.

- Eine Ansammlung von Punktladungen q_i ($1 \leq i \leq N$) an den Orten \vec{r}_i erzeugt das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (2.5)$$

denn die Maxwell-Gleichungen sind linear in den Feldern und ihren Quellen, sodass die Felder einfach linear superponiert werden können.

- Denkt man sich eine kontinuierliche Ladungsdichte ρ in „Punktladungen“ $\rho \Delta V$ zerlegt, erhält man aus (2.5) durch Grenzübergang zu infinitesimalen $\Delta V \rightarrow d^3V$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3V' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.6)$$

Beispiel: Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte

$$\rho = \rho_0 e^{-r/r_0} \quad (0 \leq r < \infty) \quad (2.7)$$

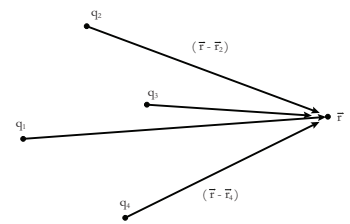
hat das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho_0 e^{-r'/r_0} (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.8)$$

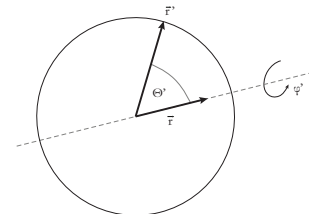
- Legt man \vec{r} in Richtung der z -Achse, ist

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ r' \cos \theta' \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

und das Integral kann ausgeführt werden.



Die Felder einzelner Punktladungen werden linear überlagert.



Zur Berechnung des Feldes einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

2.2 Das elektrostatische Potential

- Betrachten wir den Faktor $(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ im Integranden der Gleichung (2.6) näher. Offenbar können wir ihn in die Form

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.10)$$

bringen, denn:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\vec{\nabla} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-3/2} \cdot 2 \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} \\ &= \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

und damit lässt sich das elektrische Feld der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ als Gradient des *elektrostatistischen Potentials*

$$\phi(\vec{r}) := \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.12)$$

schreiben:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad (2.13)$$

da die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet, ist die Gleichung (2.1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0 \quad (2.14)$$

damit identisch erfüllt. Die andere Gleichung (2.1) ergibt die *Poisson-Gleichung* für das Potential,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = -4\pi\rho \quad (2.15)$$

in ladungsfeien Gebieten erfüllt ϕ offenbar die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta\phi = 0. \quad (2.16)$$

2.3 Das Potential der Punktladung und die Delta-Funktion

- Zu einer Punktladung q am Ort \vec{r}' gehört das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.17)$$

wir zeigen dies, indem wir die Punktladung zunächst in den Ursprung schieben, $\vec{r}' = 0$, und dann den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten anwenden,

$$\begin{aligned} \Delta f(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

wenn $r \neq 0$ ist. Damit erfüllt ϕ abseits der Punktladung die Laplace-Gleichung, wie es sein muss. Um ϕ bei $r = 0$ zu untersuchen, betrachten wir das Volumenintegral um den Ursprung

$$\int_V d^3r \Delta \left(\frac{q}{r} \right) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{q}{r} \right) = - \int_{\partial V} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{A} = -4\pi q, \quad (2.19)$$

das heißt in beliebig kleinen Volumina um die Punktladung erfüllt das Potential die Gleichung

$$\int d^3r \Delta\phi = -4\pi q, \quad (2.20)$$

wie aus der Poisson-Gleichung erwartet werden muss.

- Es ist zum Rechnen wünschenswert, die Punktladung ebenso als Ladungsdichte schreiben zu können wie kontinuierliche Massenverteilungen. Dazu brauchen wir eine „Funktion“, die überall verschwindet, außer am Ort der Punktladung, und die, integriert über ein Volumen, das den Ort der Punktladung enthält, gleich eins ergibt. Das erfüllt die Dirac'sche Delta-„Funktion“,

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int \delta(x) dx = 1, \quad (2.21)$$

bei der es sich im mathematischen Sinn um eine Distribution handelt, die wir aber trotzdem im allgemeinen üblichen Sprachgebrauch als Delta-Funktion bezeichnen. Sie verallgemeinert das Kronecker-Symbol für kontinuierliche „Indizes“ x .

- Sei $f(x)$ eine beliebige Funktion, dann ist offenbar wegen (2.21)

$$\int f(x) \delta(x - a) dx = f(a), \quad (2.22)$$

wenn das Integrationsgebiet den Punkt a enthält.

- Man kann die Delta-Funktion als Grenzfall stetiger Funktionen auffassen. Beispielsweise geht die Gaußfunktion

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} e^{-x^2/\sigma^2} \quad (2.23)$$

für $\sigma \rightarrow 0$ in eine Delta-Funktion über. Ihr Integral ist normiert auf eins, und sie fällt im Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$ beliebig schnell auf Null, außer bei $x = 0$.

- Einige Eigenschaften der Delta-Funktion werden in den Übungen behandelt. Die Verallgemeinerung der Delta-Funktion auf drei Dimensionen ist

$$\delta(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x_1 - a_1) \delta(x_2 - a_2) \delta(x_3 - a_3). \quad (2.24)$$

eine Punktladung bzw. eine Menge von N Punktladungen lässt sich damit schreiben als eine Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \text{bzw.} \quad \rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.25)$$

offenbar gilt dann, etwa im letzteren Fall,

$$q = \int \rho(\vec{r}) d^3r = \sum_{i=1}^N q_i, \quad (2.26)$$

wenn das Volumenintegral alle \vec{r}_i mit $(1 \leq i \leq N)$ einschließt.

- Unsere vorherige Rechnung zum Potential der Punktladung lässt sich mittels der Delta-Funktion auf die Form

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.27)$$

bringen, denn offenbar ist damit

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad (r \neq 0) \quad \text{und} \quad \int \Delta \frac{1}{r} d^3r = -4\pi, \quad (2.28)$$

wenn um den Ursprung integriert wird. Das Potential

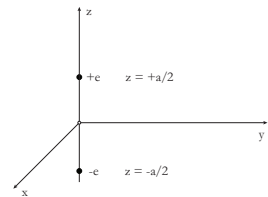
$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.29)$$

erfüllt damit die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= \Delta \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \int \rho(\vec{r}')[-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')] d^3r' \\ &= -4\pi\rho(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.4 Potential und Feld eines Dipols

- Gegeben sei ein Dipol, d.h. eine Anordnung von zwei Punktladungen $-e$ und $+e$ an den Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 mit $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = a$. Der Einfachheit halber legen wir die Dipolachse (d.h. den Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$) in z -Richtung und die Ladung symmetrisch zur x - y -Ebene, d.h.



Elektrischer Dipol

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a/2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

als *Dipolmoment* wird definiert

$$\vec{p} := q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 = -e\vec{r}_1 + e\vec{r}_2 = e(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (2.32)$$

mit $|\vec{p}| = ea$. Das Potential des Dipols ist offensichtlich

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}, \quad (2.33)$$

wobei

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_1| &= \left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ |\vec{r} - \vec{r}_2| &= \left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

sind. Wir nehmen nun $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a$ an und nähern

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_1| &\approx [x^2 + y^2 + z^2 + az]^{1/2} = r \sqrt{1 + \frac{az}{r^2}} \approx r \left(1 + \frac{az}{2r^2}\right), \\ |\vec{r} - \vec{r}_2| &\approx r \left(1 - \frac{az}{2r^2}\right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

womit wir fern vom Dipol das Potential

$$\phi(\vec{r}) \approx -\frac{e}{r} \left(1 - \frac{az}{2r^2}\right) + \frac{e}{r} \left(1 + \frac{az}{2r^2}\right) = \frac{eaz}{r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.36)$$

erhalten, wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = e(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r} = e \left(\frac{a}{2}z + \frac{a}{2}z\right) = eaz \quad (2.37)$$

ist.

- Das elektrische Feld fern vom Dipol ist damit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad (2.38)$$

in Kugelkoordinaten ist

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{2p \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p \sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}, \quad (2.39)$$

das Feld fern vom Dipol fällt also wie r^{-3} ab.

2.5 Die Sätze von Green

- Wenn die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ gegeben ist, folgt das Potential aus (2.12), aber das ist oft nicht das Problem in der Elektrostatik. Oft ist das Potential vorgegeben, oder das Potential oder das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ auf bestimmten Oberflächen ist gegeben, und die Ladungsdichte ist unbekannt. In solchen Fällen helfen allgemeine Aussagen über das Potential, die wir nun herleiten wollen.
- Seien zwei skalare Funktionen $\varphi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ vorgegeben. Aus diesen bilden wir zunächst den Vektor

$$\vec{A} = \varphi\vec{\nabla}\psi, \quad (2.40)$$

dessen Divergenz nach der Produktregel gleich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \varphi\vec{\nabla}^2\psi + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi \quad (2.41)$$

ist, woraus mit dem Gaußschen Satz folgt

$$\int_V \vec{\nabla}' \cdot \vec{A} dV' = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n}' dA' \Rightarrow$$

$$\int_V [\varphi \vec{\nabla}'^2 \psi + \vec{\nabla}' \varphi \cdot \vec{\nabla}' \psi] dV' = \oint_{\partial V} \varphi \vec{\nabla}' \psi \cdot \vec{n}' dA'. \quad (2.42)$$

der Gradient projiziert auf den Normalenvektor wird wie folgt abgekürzt:

$$\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} =: \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (2.43)$$

also als Ableitung in Richtung der Normalen. Damit folgt aus (2.42) der *erste Greensche Satz*:

$$\int_V [\varphi \vec{\nabla}'^2 \psi + \vec{\nabla}' \varphi \cdot \vec{\nabla}' \psi] dV' = \oint_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} dA'. \quad (2.44)$$

Wir vertauschen nun die beiden beliebigen Skalare φ und ψ und ziehen die entsprechende Gleichung von (2.44) ab. Dies ergibt den *zweiten Greenschen Satz*:

$$\int_V [\varphi \vec{\nabla}'^2 \psi - \psi \vec{\nabla}'^2 \varphi] dV' = \oint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) dA'. \quad (2.45)$$

Nun spezialisieren wir diese Sätze, indem wir für den einen Skalar

$$\psi(\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.46)$$

und für den anderen $\varphi(\vec{r}') = \phi(\vec{r}')$ setzen. Wir hatten vorhin gesehen, dass gilt (2.27)

$$\vec{\nabla}'^2 \psi(\vec{r}') = \Delta' \psi(\vec{r}') = \Delta' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.47)$$

und wegen der Poisson-Gleichung (2.15) ist

$$\vec{\nabla}'^2 \phi(\vec{r}') = \Delta' \phi(\vec{r}') = -4\pi \rho. \quad (2.48)$$

Spezialisiert auf diese Wahl für ψ und φ ergibt der zweite Greensche Satz (2.45)

$$\int_V \left[\phi(\vec{r}') (-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')) + \frac{4\pi \rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV'$$

$$= \oint_{\partial V} \left[\phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} \right] dA' \quad (2.49)$$

oder, nach Auswertung der Delta-Funktion

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dA'. \quad (2.50)$$

Diese Gleichung verallgemeinert (2.12), indem sie erlaubt, spezielle Randbedingungen auf einer Oberfläche ∂V vorzugeben.

- Besondere Bedeutung haben zwei Arten von Randbedingungen. Wenn ∂V ins Unendliche verschoben wird, fällt für eine endliche Ladungsverteilung der Term

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \propto \frac{1}{r'^3} \quad (2.51)$$

ab, also um eine Potenz in r' schneller, als dA' zunimmt, folglich verschwindet das Oberflächenintegral, und (2.12) erscheint wieder,

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (2.52)$$

Wenn im Volumen V keine Ladungen enthalten sind, geben allein die Randbedingungen das Potential in V vor.

- Es genügt für die Eindeutigkeit des Potentials, entweder ϕ am Rand ∂V vorzugeben (sogenannte Dirichlet- Randbedingungen) oder die senkrechte Ableitung $\partial\phi/\partial n$ am Rand von V (Neumann-Randbedingungen), um eine eindeutige Lösung zu erhalten.
- Seien also zwei beliebige Potentiale ϕ_1 und ϕ_2 vorgegeben, die Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen erfüllen. Beide müssen der Poisson-Gleichung genügen,

$$\Delta\phi_{1,2} = -4\pi\rho \quad \rightarrow \quad \Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0 , \quad (2.53)$$

und am Rand ∂V sollen sie die Bedingungen

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \quad (2.54)$$

erfüllen. Setzen wir $u := \phi_1 - \phi_2$ und $\varphi = \psi = u$ im ersten Green-schen Satz, folgt

$$\int_V [u\Delta'u + (\vec{\nabla}'u)^2] dV' = \oint_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial n'} dA' . \quad (2.55)$$

Hier verschwindet der erste Term auf der linken Seite wegen (2.53), und die rechte Seite wegen (2.54), also folgt

$$\int_V (\vec{\nabla}'u)^2 dV' = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}'u = 0 \quad \text{in } V , \quad (2.56)$$

und u muss in V konstant sein. Bei Dirichletschen Randbedingungen ist $u = 0$ am Rand, muss also überall Null sein, mithin $\phi_1 = \phi_2$. Bei Neumannschen Randbedingungen unterscheiden sich die beiden Potentiale höchstens um eine unwichtige Konstante.

2.6 Die Greensche Funktion

- Die Funktion $\psi(\vec{r}, \vec{r}') = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ ist der Spezialfall einer allgemeinen Klasse von Funktionen, für die gilt

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (2.57)$$

wobei offenbar $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$ ist. G ist eindeutig bis auf eine Funktion F , die der Laplace-Gleichung (2.16) genügt,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{mit} \quad \Delta F = 0 . \quad (2.58)$$

Diese Funktion heißt Greensche Funktion, oder Greensfunktion.

- Sie erfüllt qua Konstruktion die Poisson-Gleichung, und F kann dazu benutzt werden, die Randbedingungen zu erfüllen. Wir setzen dazu im zweiten Greenschen Satz $\psi = G$ und $\varphi = \phi$ und erhalten zunächst, mit (2.57) und (2.58)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} \right] dA' . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Dirichlet-Randbedingungen lassen sich erfüllen, indem man

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{auf} \quad \partial V \quad (2.60)$$

setzt, während Neumann-Randbedingungen sich für

$$\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \quad (2.61)$$

erreichen lassen, wobei S der Inhalt von ∂V ist, denn dann ist

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n'} dA' = -4\pi , \quad (2.62)$$

wie es für das Potential einer Einheits-Punktladung sein muss.

- Für Dirichlet-Randbedingungen erhalten wir also

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} dA' , \quad (2.63)$$

während für Neumann-Randbedingungen folgt

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_V \rho(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ &+ \langle \phi \rangle_{\partial V} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} dA' , \end{aligned} \quad (2.64)$$

wobei $\langle \phi \rangle_{\partial V}$ der konstante, und daher irrelevante, Mittelwert des Potentials auf ∂V ist.

- Die Funktion $F(\vec{r}, \vec{r}')$ hat folgende physikalische Bedeutung: Da sie die Laplace-Gleichung in V erfüllt, gehört sie zu einer (fiktiven) Ladungsverteilung *außerhalb* von V , die dafür sorgt, dass die Greensfunktion G_D oder G_N gerade die Randbedingungen erfüllen kann. Auf diesem Wissen beruht etwa die Methode der Spiegelladungen, die zur Konstruktion des Potentials verwendet werden kann.

2.7 Beispiele zur Berechnung von Potentialen und Feldern

- **Geerdete, leitende Kugel im Feld einer Ladung q :** Vorgegeben sei eine Kugel mit Radius a , die geerdet ist und daher das Potential $\phi = 0$ hat. Eine Ladung q sei am Ort \vec{y} angebracht, und wir wollen Potential und Feld am Ort \vec{r} bestimmen.
- Offenbar handelt es sich um ein Problem mit Dirichlet-Randbedingungen, da auf der Oberfläche der Kugel das Potential vorgegeben ist. Also müssen wir eine Greensfunktion der Form

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.65)$$

bestimmen, mit $\Delta F = 0$ im betrachteten Volumen (also außerhalb der Kugel).

- Es bietet sich an, eine virtuelle Ladung innerhalb der Kugel anzubringen und anzusetzen

$$F(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{A}{|\vec{r} - B\vec{r}'|} \quad (2.66)$$

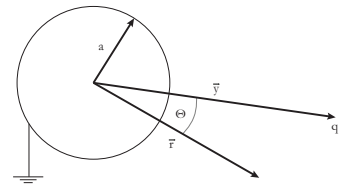
Wenn der dimensionslose Faktor B so gewählt ist, dass $B\vec{r}'$ innerhalb der Kugel liegt, erfüllt F die Laplace-Gleichung außerhalb der Kugel sofort. Wir setzen also an

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{A}{|\vec{r} - B\vec{r}'|} \quad (2.67)$$

und suchen nach den Faktoren A und B so, dass $G_D = 0$ auf der Kugeloberfläche erreicht wird. Dabei haben wir aus Symmetriegründen vorausgesetzt, dass die Singularität von F bei $B\vec{r}'$ auf der Verbindungslinie vom Kugelmittelpunkt nach \vec{r}' liegt.

- Wir legen den Kugelmittelpunkt in den Ursprung und verlangen

$$G_D(|\vec{r}| = a, \vec{r}') = 0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar' \cos \theta + r'^2}} - \frac{A}{\sqrt{a^2 - 2aBr' \cos \theta + B^2r'^2}} \quad (2.68)$$



Zur Berechnung des Potentials einer geerdeten, leitenden Kugel

Daraus erhalten wir die Bedingung

$$0 = \frac{1}{a} \left[1 - 2\frac{y}{a} \cos \theta + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \right]^{-1/2} + \frac{A}{y'} \left[1 - 2\frac{a}{y'} \cos \theta + \left(\frac{a}{y'}\right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.69)$$

sie ist für alle θ erfüllbar durch die Wahl

$$\frac{1}{a} = -\frac{A}{y'} \quad \text{und} \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{y'}, \quad (2.70)$$

d.h. wenn die virtuelle Ladung bei $y' = a^2/y$ sitzt und die „Ladung“ $-a/y$ bekommt.

- Damit lautet die Greensfunktion der geerdeten, leitenden Kugel

$$G_D(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{a}{y \left| \frac{a^2}{y^2} \vec{y} - \vec{r} \right|}, \quad (2.71)$$

und wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist diese auch die einzige. das Potential folgt aus (2.63) mit $\phi = 0$ auf ∂V ,

$$\phi(\vec{r}) = \int_V q \delta(\vec{r}' - \vec{y}) G_D(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{aq}{y \left| \frac{a^2}{y^2} \vec{y} - \vec{r} \right|}. \quad (2.72)$$

das elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|^3} (\vec{r} - \vec{y}) - \frac{aq}{y} \frac{1}{\left| \frac{a^2}{y^2} \vec{y} - \vec{r} \right|^3} \left(\vec{r} - \frac{a^2}{y^2} \vec{y} \right). \quad (2.73)$$

das Innere der Kugel muss feldfrei sein, weil sie leitet. Völlig analog zu der Sprungbedingung an \vec{B} an Oberflächen, die wir unter I.3 hergeleitet hatten, erhalten wir hier

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \vec{E}_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = 4\pi\sigma, \quad (2.74)$$

wobei σ eine Flächenladung ist. Mit (2.72) folgt, da \vec{n} in Richtung

von \vec{e}_r zeigt,

$$\begin{aligned}
 4\pi\sigma &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + y^2 - 2ry \cos \theta}} - \frac{aq}{y \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{y^2} - \frac{2ra^2}{y} \cos \theta}} \right]_{r=a} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + y^2 - 2ry \cos \theta}} - \frac{aq}{\sqrt{r^2 y^2 + a^4 - 2rya^2 \cos \theta}} \right]_{r=a} \\
 &= \left[\frac{q(r - y \cos \theta)}{(r^2 + y^2 - 2ry \cos \theta)^{3/2}} - \frac{aq(ry^2 - ya^2 \cos \theta)}{(r^2 y^2 + a^4 - 2rya^2 \cos \theta)^{3/2}} \right]_{r=a} \\
 &= q \left[\frac{a - y \cos \theta}{(a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta)^{3/2}} - \frac{a^2(y^2 - ay \cos \theta)}{a^3(y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta)^{3/2}} \right] \\
 &= q \frac{a - y \cos \theta - \frac{y^2}{a} + y \cos \theta}{(y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta)^{3/2}} \\
 &= -\frac{q}{ay} \frac{1 - \frac{a^2}{y^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \theta\right)^{3/2}} . \tag{2.75}
 \end{aligned}$$

diese Flächenladung sorgt dafür, dass innerhalb der Kugel das Feld verschwindet. Integriert man $\sigma(a)$ über alle Winkel, erhält man die virtuelle Ladung q' ,

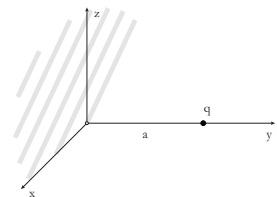
$$\int \sigma(y, \theta) a^2 d\Omega = q' , \tag{2.76}$$

wie es nach dem Gaußschen Satz sein muss.

- Da wir mit (2.71) bereits die Greensche Funktion für die leitende Kugel aufgestellt haben (mit Dirichlet-Randbedingungen), ließe sich sofort das Potential für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ bestimmen, das auf der Kugeloberfläche den Wert $\phi_0(a, \theta, \varphi)$ annimmt:

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= \int_V \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \phi(a, \theta', \varphi') \frac{\partial G_D}{\partial n'}(a, \theta', \varphi') a^2 d\Omega' . \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

- **Ladung vor einer leitenden Platte:** als weiteres Beispiel stellen wir eine Ladung q im Abstand a vor eine unendlich ausgedehnte, leitende Platte. Die Platte sei in der x - z -Ebene, und die Ladung q sei bei $x = z = 0, y = a$.



Ladung vor einer leitenden Platte

- Wieder schreiben wir die Greensche Funktion in der Form

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} + \frac{A}{|\vec{r} - \vec{y}'|} , \tag{2.78}$$

denn weil die Platte leitet, muss sie eine Äquipotentialfläche sein. aus Symmetriegründen erwarten wir

$$A = -1 \quad \text{und} \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{y}, \quad (2.79)$$

also

$$G_D(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{y}|}, \quad (2.80)$$

die in der Tat die Bedingung erfüllt, in der x - z -Ebene (d.h. bei $\vec{r} = (x, 0, z)$) zu verschwinden, denn dort ist

$$|\vec{r} - \vec{y}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2 + z^2} = |\vec{r} + \vec{y}|. \quad (2.81)$$

demnach ist das Potential durch

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_V q \delta(\vec{r}' - \vec{y}) G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV' = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{q}{|\vec{r} + \vec{y}|} \\ &= q \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y + a)^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.82)$$

gegeben. Mit $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{q}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - 2ay}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 + 2ay}{r^2}}} \right] \\ &\approx \frac{q}{r} \left(1 + \frac{ay}{r^2} - 1 + \frac{ay}{r^2} \right) = 2 \frac{qay}{r^3} \quad (\text{für } r \gg a). \end{aligned} \quad (2.83)$$

das elektrische Feld normal zur Platte ist

$$\begin{aligned} E_y(\vec{r}) &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q}{2r} \left[\left(1 + \frac{a^2 - 2ay}{r^2} \right)^{-3/2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a^2 - 2ay}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{a^2 + 2ay}{r^2} \right)^{-3/2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a^2 + 2ay}{r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a^2 \pm 2ay}{x^2 + y^2 + z^2} \right) &= \frac{\pm 2ar^2 - (a^2 \pm 2ay) \cdot 2y}{r^4} \\ &= \pm \frac{2a}{r^2} \left[1 \mp \frac{ay}{r^2} + \frac{2y^2}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (2.85)$$

und daher bei $y = 0$, also an der Platte:

$$\begin{aligned} E_y(\vec{r}) &= \frac{q}{2r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} \cdot \left(-\frac{4a}{r^2} \right) = -\frac{2aq}{r^3} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} \\ &= -\frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

demnach wird die Flächenladung

$$\sigma = \frac{E_y(\vec{r})}{4\pi} = -\frac{aq}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2.87)$$

induziert, deren Integral über die gesamte Ebene $-q$ ergeben muss (und ergibt)!

Kapitel 3

Vollständige Funktionensysteme, Multipolentwicklung

3.1 Vollständige Funktionensysteme

- Es ist in der theoretischen Physik oft extrem nützlich, Funktionen $f(\vec{x})$ durch vollständige, orthogonale Funktionensysteme zu beschreiben. Dies entspricht völlig der Darstellung eines Vektors \vec{a} durch paarweise orthogonale bzw. orthonormale Vektoren \vec{e}_i , $1 \leq i \leq N$.

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N a_i \vec{e}_i \quad \text{mit} \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i. \quad (3.1)$$

Sei also eine Menge von Funktionen

$$u_1(x), \dots, u_N(x) \quad (3.2)$$

gegeben, die auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definiert sind. Sie heißen *orthogonal*, wenn sie die Bedingung

$$\int_a^b u_i(x) u_j^*(x) dx = A_i \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq N) \quad (3.3)$$

erfüllen, wobei der Stern die komplexe Konjugation bedeutet. Wenn $A_i = 1$ für alle i heißt das System aus N Funktionen normiert oder *orthonormales* System.

- Das Integral

$$|u_i| := \left[\int_a^b u_i(x) u_i^*(x) dx \right]^{1/2} > 0 \quad (3.4)$$

heißt Norm von u_i , falls $u_i(x)$ nicht die Nullfunktion ist. Eine Funktion $u_i(x)$ ist also genau dann normiert, wenn

$$\int_a^b u_i(x)u_i^*(x)dx = 1 \quad (3.5)$$

ist. Natürlich kann jede nicht-verschwindende Funktion $u(x)$ durch

$$\bar{u}(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{\int_a^b u(x)u^*(x)dx}} \quad (3.6)$$

normiert werden.

- Das Integral

$$\int_a^b uv^*dx =: \langle u, v \rangle \quad (3.7)$$

verallgemeinert offenbar das gewöhnliche Skalarprodukt. Die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in einem Orthonormalsystem $u_1(x), \dots, u_N(x)$ ist also durch

$$f(x) \rightarrow \sum_{i=1}^N a_i u_i(x) \quad (3.8)$$

gegeben.

- Wie müssen die a_i gewählt werden, um die mittlere quadratische Abweichung

$$D_N(a_1, \dots, a_N) := \int_a^b \left| \sum_{i=1}^N a_i u_i(x) - f(x) \right|^2 dx \quad (3.9)$$

möglichst klein zu halten? der Integrand lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^N a_i u_i(x) - f(x) \right] \left[\sum_{j=1}^N a_j^* u_j^*(x) - f^*(x) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^N a_i a_j^* u_i(x) u_j^*(x) - \sum_{i=1}^N a_i u_i(x) f^*(x) \\ & \quad - \sum_{j=1}^N a_j^* u_j^*(x) f(x) + f(x) f^*(x), \end{aligned} \quad (3.10)$$

und das Integral darüber von a bis b ergibt, mit (3.3)

$$D_N(a_1, \dots, a_N) = \sum_{i,j=1}^N |a_i|^2 \delta_{ij} - \sum_{i=1}^N a_i d_i^* - \sum_{i=1}^N a_i^* d_i + |f|^2, \quad (3.11)$$

worin

$$d_i := \int_a^b f(x) u_i^*(x) dx, \quad d_i^* := \int_a^b f^*(x) u_i(x) dx \quad (3.12)$$

definiert wurden. Diese mittlere quadratische Abweichung wird minimiert, wenn

$$\frac{\partial D_N}{\partial a_i} = a_i^* - d_i^* = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial D_N}{\partial a_i^*} = a_i - d_i = 0 \quad (3.13)$$

sind, mithin wenn

$$a_i = d_i = \int_a^b f(x) u_i^*(x) dx \quad (3.14)$$

ist. Der Minimalwert der mittleren quadratischen Abweichung ist dann nach (3.11)

$$D_{N,\min} = |f|^2 - \sum_{i=1}^N |a_i|^2 . \quad (3.15)$$

Das Funktionensystem heißt vollständig, wenn gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_{N,\min} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |F_N(x) - f(x)|^2 dx = 0 , \quad (3.16)$$

worin die Näherungen der Funktion $f(x)$ durch N orthonormale Funktionen

$$F_N(x) := \sum_{i=1}^N a_i u_i(x) \quad (3.17)$$

definiert wurden. Wenn das der Fall ist, gilt also

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x) = f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x) . \quad (3.18)$$

Durch Multiplikation mit $u_i^*(x)$ und Integration über $x \in [a, b]$ folgt sofort wieder (3.14),

$$\int_a^b f(x) u_i^*(x) dx = a_i \quad (3.19)$$

wegen der Orthonormalitätsrelation (3.3).

3.2 Fourier-Transformation

- Ein besonders nützliches System von orthogonalen Funktionen ist durch

$$\bar{u}_k(x) = e^{2\pi i k x / a} = \cos\left(2\pi \frac{kx}{a}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{kx}{a}\right) \quad (3.20)$$

gegeben, wobei $x \in [-a/2, a/2]$ sei. Normierung ergibt zunächst

$$\int_{-a/2}^{a/2} \bar{u}_k(x) \bar{u}_k^*(x) dx = a , \quad (3.21)$$

so dass die $\bar{u}_k(x)$ durch

$$u_k(x) := \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{u}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{2\pi i k x / a} \quad (3.22)$$

normiert werden.

- Die Orthonormalität folgt aus

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} u_k(x) u_l^*(x) dx &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{2\pi i(k-l)x/a} dx \quad (3.23) \\ &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \cos \left[2\pi \frac{(k-l)x}{a} \right] + i \sin \left[2\pi \frac{(k-l)x}{a} \right] \right\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi(k-l)} \int_{-\pi(k-l)}^{\pi(k-l)} (\cos y + i \sin y) dy = 0 \quad \text{für } k \neq l. \end{aligned}$$

Für jede periodische Funktion auf $[-a/2, a/2]$ ist

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{a}} e^{2\pi i k x / a} \quad (3.24)$$

mit

$$a_k(x) := \int_{-a/2}^{a/2} f(x) u_k^*(x) dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) e^{-2\pi i k x / a} dx. \quad (3.25)$$

Speziell gilt für $f(x) = \delta(x - x')$ und $x' \in [-a/2, a/2]$

$$a_k(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2\pi i k x' / a}, \quad (3.26)$$

und also

$$\delta(x - x') = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} e^{2\pi i k(x-x')/a}, \quad (3.27)$$

was eine Darstellung der δ -Funktion ist. Der Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ kann nun wie folgt bewerkstelligt werden:

- Sei

$$k_n := 2\pi \frac{n}{a}, \quad \text{und} \quad \Delta k_n = 2\pi \frac{1}{a}. \quad (3.28)$$

dann ist

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{2\pi i n x / a} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i k_n x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Delta k_n} e^{i k_n x} \quad (3.29)$$

und

$$\delta(x - x') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta k_n}{2\pi} e^{i k_n(x-x')} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i k(x-x')} dk \quad (3.30)$$

im Grenzübergang $a \rightarrow \infty$. Damit bilden offenbar die Funktionen

$$u(k, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (3.31)$$

ein Orthonormalensystem mit kontinuierlichem Index k auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$. Die kontinuierliche Funktion

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} dx \quad (3.32)$$

heißt Fouriertransformierte von $f(x)$.

- Offenbar ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx'} dk &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk dx \frac{1}{2\pi} e^{ik(x'-x)} f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-x') f(x) = f(x'). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Konvergenz der Fourierreihen und Fourierintegrale folgt aus dem Dirichletschen Satz.

- Die Bedeutung der Fouriertransformation in der Physik kommt im wesentlichen daher, dass die Funktionen

$$u(k, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad \text{bzw.} \quad u(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (3.34)$$

Eigenfunktionen des Laplace-Operators sind,

$$\begin{aligned} \Delta u(\vec{k}, \vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} (\vec{k})^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ &= -\vec{k}^2 u(\vec{k}, \vec{x}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

- Ableitungen werden durch Fouriertransformationen zu algebraischen Operationen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\vec{k}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ik_x) \hat{f}(\vec{k}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 k, \end{aligned} \quad (3.36)$$

also ist

$$\left[\widehat{\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x}} \right] = ik_x \hat{f}(\vec{k}), \quad (3.37)$$

was wir später noch oft benutzen werden.

- Häufig benutzt werden außerdem der *Faltungssatz* und die *Parsevalsche Gleichung*. Sei

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(x-y)dy =: f * g \quad (3.38)$$

die Faltung zweier Funktionen f und g , dann ist offenbar

$$\begin{aligned} f * g &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k') \frac{e^{ik'(x-y)}}{\sqrt{2\pi}} dk' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \hat{g}(k) \hat{f}(k') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(k-k')y}}{2\pi} dy}_{\delta(k-k'), \text{vgl. (3.30)}} \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk = \widehat{(g * f)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Fouriertransformierte einer Faltung ist also gleich dem Produkt der Fouriertransformierten der gefalteten Funktionen,

$$\widehat{(f * g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}. \quad (3.40)$$

Dies ist ein sehr wichtiges Ergebnis: Faltungen im Realraum sind Produkte im Fourierraum, und umgekehrt.

- Wir zeigen schließlich noch die *Parsevalsche Gleichung*, die besagt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\hat{g}^*(k)dk. \quad (3.41)$$

Man zeigt dies direkt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \hat{g}^*(k') \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \hat{f}(k) \hat{g}^*(k') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i(k-k')x}}{2\pi}}_{\delta(k-k'), \text{(3.30)}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k)\hat{g}^*(k). \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3 Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

- Sei ein System linear unabhängiger Funktionen $\varphi_i(x)$, $1 \leq i \leq N$, gegeben. Die lineare Unabhängigkeit besagt, dass die Gleichung

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(x) = 0, \quad (\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i) \quad (3.43)$$

nur zu erfüllen ist, wenn alle $\lambda_i = 0$ sind. Aus einem solchen System kann man sich wie folgt ein Orthonormalsystem verschaffen:

- Man wählt

$$u_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\left[\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_1^*(x)dx \right]^{1/2}} \quad (3.44)$$

und setzt

$$\psi_2(x) = \varphi_2(x) + a_{21}u_1(x) . \quad (3.45)$$

Die Forderung, dass $\psi_2(x)$ orthogonal zu $u_1(x)$ sei, ergibt

$$\begin{aligned} & \int_a^b \psi_2(x)u_1^*(x)dx \\ &= \int_a^b \varphi_2(x)u_1^*(x)dx + a_{21} \underbrace{\int_a^b u_1(x)u_1^*(x)dx}_{=1} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad & a_{21} = - \int_a^b \varphi_2(x)u_1^*(x)dx . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Durch Normierung ergibt sich

$$u_2(x) = \frac{\psi_2(x)}{\left[\int_a^b \psi_2(x)\psi_2^*(x)dx \right]^{1/2}} . \quad (3.47)$$

Allgemein liefert dieses Verfahren

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) + a_{i1}u_1(x) + a_{i2}u_2(x) + \dots + a_{i,i-1}u_{i-1}(x) , \quad (3.48)$$

mit den Koeffizienten

$$a_{ij} = - \int_a^b \varphi_i(x)u_j^*(x)dx , \quad (3.49)$$

und

$$u_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\left[\int_a^b \psi_i(x)\psi_i^*(x)dx \right]^{1/2}} . \quad (3.50)$$

Dies ist das Gram-Schmidt-Verfahren zur Orthonormalisierung von linear unabhängigen Vektoren bzw. Funktionensystemen.

- Als Beispiel für dieses Verfahren wählen wir das Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ und darauf die linear unabhängigen Funktionen

$$\varphi_i(x) = x^i , \quad 0 \leq i \leq \infty , \quad x \in [-1, 1] . \quad (3.51)$$

Offenbar ist

$$u_0 = \frac{1}{\left[\int_{-1}^1 dx \right]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (3.52)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x + a_{10} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_{10} = - \int_{-1}^1 x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0 \\ \Rightarrow u_1 &= \frac{x}{\left[\int_{-1}^1 x^2 dx \right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} x \end{aligned} \quad (3.53)$$

und schließlich, für die nächste Funktion,

$$\begin{aligned} \psi_2 &= x^2 + a_{21} \sqrt{\frac{3}{2}} x + a_{20} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{mit} \quad (3.54) \\ a_{20} &= - \int_{-1}^1 x^2 \frac{dx}{\sqrt{2}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} = - \frac{\sqrt{2}}{3}. \\ a_{21} &= - \int_{-1}^1 x^3 \sqrt{\frac{3}{2}} dx = 0 \\ \Rightarrow \psi_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}, \quad u_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \quad \text{usw. .} \end{aligned}$$

Mit anderer Normierung ergeben sich daraus die Legendre-Polynome $P_i(x)$:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \sqrt{\frac{2i+1}{2}} P_i(x). \quad (3.55) \\ P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \end{aligned}$$

3.4 Kugelflächenfunktionen

- In der Greenschen Funktion für das Potential ϕ taucht der Ausdruck $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ auf. Unter der Annahme $|\vec{r}'| < |\vec{r}|$ und mit $\vartheta := \angle(\vec{r}, \vec{r}')$ entwickeln wir

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \vartheta}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\cos \vartheta) \left(\frac{r'}{r}\right)^i, \end{aligned} \quad (3.56)$$

worin also die Legendre-Polynome als Entwicklungskoeffizienten auftreten.

- Die Legendre-Polynome lassen sich durch die Rodrigues-Formel

$$P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i \quad (3.57)$$

darstellen, mit deren Hilfe man die assoziierten Legendre-Polynome $P_l^m(\cos \vartheta)$ definiert:

$$P_l^m = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) . \quad (m > 0) \quad (3.58)$$

Für negative m ist

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x) . \quad (3.59)$$

Das Funktionensystem

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) := \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi} \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (3.60)$$

mit $-l \leq m \leq l$, genannt „Kugelflächenfunktionen“, bildet ein orthonormales System auf der Einheitskugel. Mit

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{ll'} \quad (3.61)$$

folgt die Orthonormalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_l^m(\vartheta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (3.62)$$

und die Vollständigkeit ergibt sich aus

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') . \quad (3.63)$$

Aus (3.59) und (3.60) folgt noch

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) . \quad (3.64)$$

Es gilt das folgende Additionstheorem:

$$\frac{4\pi}{2l + 1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos \alpha) , \quad (3.65)$$

worin α der Winkel zwischen den durch (ϑ, φ) und (ϑ', φ') vorgegebenen Richtungen ist.

3.5 Multipolentwicklung

- Die Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen bewirkt, dass jede Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ auf der Einheitssphäre durch Kugelflächenfunktionen dargestellt werden kann,

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) , \quad (3.66)$$

mit üblicherweise komplexen Entwicklungskoeffizienten a_{lm} ,

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' f(\vartheta', \varphi') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (3.67)$$

Direktes Einsetzen und (3.63) ergeben

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' f(\vartheta', \varphi') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') f(\vartheta', \varphi') \\ &= f(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Sei nun eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ gegeben, die außerhalb einer endlichen Kugel vom Radius a verschwindet. Dann ist (mit Dirichlet-Randbedingungen im Unendlichen)

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.69)$$

Wir setzen hier nun die Entwicklung (3.56) ein, bezeichnen den Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' mit α und verwenden das Additionstheorem (3.65). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int \rho(\vec{r}') \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \left(\frac{r'}{r}\right)^l dV' \cdot \frac{1}{r} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \int \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') dV'. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Die Ausdrücke

$$q_{lm}^{(*)} := \int \rho(\vec{r}') Y_{lm}^{(*)}(\vartheta', \varphi') (r')^l dV' \quad (3.71)$$

heißen Multipolmomente der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$. Insbesondere ergeben sich für

l=0	das (skalare) Monopolmoment	(1 Komponente)
l=1	das (vektorielle) Dipolmoment	(3 Komponenten)
l=2	das (tensorielle) Quadrupolmoment	(5 Komponenten)

- Wegen (3.64) ist

$$q_{lm}^* = \int \rho(\vec{r}') (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta', \varphi') (r')^l dV' = (-1)^m q_{l-m}, \quad (3.72)$$

d.h. von den $(2l+1)$ Multipolkomponenten müssen nur $(l+1)$ berechnet werden, für $l=2$ also drei. Insbesondere müssen also die q_{l0} reell sein, denn $q_{l0}^* = q_{l0} \Rightarrow \Im(q_{l0}) = 0$.

- Für Monopol, Dipol und Quadrupol brauchen wir

$$\begin{aligned}
 P_0^0(\cos \vartheta) &= P_0(\cos \vartheta) = 1 \\
 P_1^0(\cos \vartheta) &= P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \\
 P_1^1(\cos \vartheta) &= -\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} \\
 P_2^0(\cos \vartheta) &= P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1) \\
 P_2^1(\cos \vartheta) &= -\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} 3 \cos \vartheta, \\
 P_2^2(\cos \vartheta) &= 3(1 - \cos^2 \vartheta), \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

woraus wir die Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}
 Y_{00}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_{10}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \\
 Y_{11}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} \\
 Y_{1-1}(\vartheta, \varphi) &= -Y_{11}^*(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\
 Y_{20}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1) \\
 Y_{21}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} \\
 Y_{2-1}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi} \\
 Y_{22}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} \\
 Y_{2-2}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi} \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

erhalten. Damit ist der *Monopol* unserer Ladungsverteilung

$$q_{00} = \int \rho(\vec{r}') Y_{00}(\vartheta', \varphi') dV' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\vec{r}') dV' = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}, \quad (3.75)$$

also durch die Gesamtladung gegeben. Der Monopolbeitrag zum Potential ist

$$\phi_{00}(\vec{r}) = Y_{00}(\vartheta, \varphi) \frac{4\pi}{r} \frac{q}{\sqrt{4\pi}} = \frac{q}{r}, \quad (3.76)$$

eben das Potential einer Punktladung q im Abstand r . Der *Dipol*

hat die drei Komponenten

$$\begin{aligned}
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\vec{r}') \cos \vartheta' r' dV' \\
 q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}') \sin \vartheta' e^{i\varphi'} r' dV' \\
 q_{1-1} &= -q_{11}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}') \sin \vartheta' e^{-i\varphi'} r' dV' . \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

In cartesischen Komponenten ist

$$\cos \vartheta' = \frac{z'}{r'} , \quad \sin \vartheta' e^{i\varphi'} = \frac{x' + iy'}{r'} , \quad (3.78)$$

und daher

$$\begin{aligned}
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\vec{r}') z' dV' \\
 q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}') (x' + iy') dV' \\
 q_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(\vec{r}') (x' - iy') dV' . \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

Im Spezialfall zweier Punktladungen im Abstand \vec{a} voneinander,

$$\rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r}' - \frac{\vec{a}}{2}) - q\delta(\vec{r}' + \frac{\vec{a}}{2}) \quad (3.80)$$

ist natürlich $q_{00} = 0$ und

$$\begin{aligned}
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a_z q \\
 q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (a_x + ia_y) q \\
 q_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (a_x - ia_y) q . \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

Mit dem in (2.32) eingeführten Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{a}$ ist

$$\begin{aligned}
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \\
 q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y) \\
 q_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) , \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

d.h. die Dipolmomente sind Linearkombinationen der cartesischen Definition.

- Der Beitrag des Dipols zum Potential ist nach (3.71)

$$\begin{aligned}\phi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{r^2} \left[\cos \vartheta p_z + \frac{1}{2} \sin \vartheta e^{i\varphi} (p_x - ip_y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin \vartheta e^{-i\varphi} (p_x + ip_y) \right] = \frac{1}{r^3} (\vec{p} \cdot \vec{r}), \quad (3.83)\end{aligned}$$

fällt also wie r^{-2} ab, im Gegensatz zum Monopol. Der *Quadrupol* schließlich hat die Komponenten

$$\begin{aligned}q_{20} &= \int \rho(\vec{r}') r'^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta' - 1) dV' \\ q_{21} &= - \int \rho(\vec{r}') r'^2 \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \vartheta' \cos \vartheta' e^{i\varphi'} dV' \\ q_{22} &= \int \rho(\vec{r}') r'^2 \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \vartheta' e^{2i\varphi'} dV' \\ q_{2-1} &= -q_{21}^*, \quad q_{2-2} = q_{22}^*.\end{aligned} \quad (3.84)$$

Mit

$$\begin{aligned}\cos^2 \vartheta' &= \frac{z'^2}{r'^2}, \quad \sin \vartheta' \cos \vartheta' e^{i\varphi'} = \frac{z'}{r'} \frac{x' + iy'}{r'} \\ \sin^2 \vartheta' e^{2i\varphi'} &= \sin^2 \vartheta' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')^2 \\ &= \frac{1}{r'^2} (x'^2 - y'^2 + 2ix'y')\end{aligned} \quad (3.85)$$

lässt sich leicht der Zusammenhang zum Quadrupoltensor herstellen, der aus der Mechanik bekannt ist. Dort war

$$Q_{ij} := \int \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV', \quad (3.86)$$

womit folgt

$$\begin{aligned}q_{20} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} Q_{33} \\ q_{21} &= - \sqrt{\frac{5}{24\pi}} (Q_{13} + iQ_{23}) \\ q_{22} &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} (Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}).\end{aligned} \quad (3.87)$$

3.6 Wechselwirkung einer Ladung mit einem äußeren Feld

- Sei $\rho(\vec{r})$ eine Ladungsverteilung in einem äußeren Feld $\phi(\vec{r})$. Wir denken uns die Ladung in infinitesimale Teile $\delta q = \rho \delta V$ zerlegt, die von außen in das Feld gebracht werden.

- Auf jede Ladung δq wirkt die Kraft

$$\delta \vec{F} = \vec{E} \cdot \delta q. \quad (3.88)$$

Um also die Ladung vom Unendlichen an den Ort \vec{r} zu transportieren, muss die Arbeit

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \delta \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \delta q \cdot d\vec{s} = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{\nabla} \phi \delta q \cdot d\vec{s} \\ &= \phi(\vec{r}) \delta q = \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \delta V \end{aligned} \quad (3.89)$$

verrichtet werden. Die Ladungsverteilung hat somit die potentielle Energie

$$W = \int \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV. \quad (3.90)$$

Entwickeln wir das Feld in eine Taylorreihe und verwenden darin der Einfachheit halber die Einsteinsche Summenkonvention,

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 + \vec{\nabla} \phi \Big|_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 \cdot x_i x_j + \dots, \quad (3.91)$$

können wir wegen

$$\vec{\nabla} \phi \Big|_0 = -\vec{E}(0), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 = -\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0 \quad (3.92)$$

schreiben:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 - \vec{r} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} x_i x_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0 + \dots \quad (3.93)$$

Da $\phi(\vec{r})$ ein äußeres Feld ist, gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Wir ziehen von (3.93) den Term $r^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} / 6 = 0$ ab und erhalten

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 - \vec{r} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0 + \dots \quad (3.94)$$

Damit lautet die potentielle Energie bis zur 2. Ordnung

$$\begin{aligned} W &= q \phi_0 - \vec{E}(0) \cdot \underbrace{\int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'}_{=\vec{p}} \\ &\quad - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0 \cdot \frac{1}{6} \underbrace{\int \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV'}_{=Q_{ij}} \\ &= q \phi_0 - \vec{E}(0) \cdot \vec{p} - \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Man sagt, der Monopol q koppelt an das Potential, der Dipol an die Feldstärke, der Quadrupol an die Ableitung der Feldstärke, usw.

- Sei etwa \vec{E}_1 , das Fernfeld eines Dipols \vec{p}_1 , dann ist nach (2.38)

$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{p}_1 - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r}{r^3}. \quad (3.96)$$

Monopol und Quadrupol verschwinden für einen zweiten Dipol \vec{p}_2 , woraus sich die potentielle Energie der Wechselwirkung zu

$$W = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3}{r^3}(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r)(\vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r) \quad (3.97)$$

ergibt. Offensichtlich hängt die Wechselwirkungsenergie der beiden Dipole nicht allein vom Abstand, sondern auch von der relativen Orientierung der beiden Dipole zueinander ab.

Kapitel 4

Dielektrika

4.1 Makroskopische Mittelung

- Materie besteht aus positiv und negativ geladenen Teilchen, die in der Regel nach außen hin fast oder völlig neutral sind, weil sich die mikroskopischen Ladungen makroskopisch ausgleichen. Diese Ladungen bewegen sich, wenn das Medium nicht bei absolut verschwindender Temperatur ist, in der Regel mit hohen Frequenzen regellos um ihre Ruhelagen.
- Das gesamte \vec{E} -Feld solcher Ladungsverteilungen wäre aus dem Integral über alle beteiligten Ladungen zu bestimmen, wobei dynamische Gleichungen zu verwenden wären, weil sich die geladenen Teilchen bewegen.
- Die gesamte, detaillierte Information über die so entstehenden mikroskopischen \vec{E} -Felder wird aber in der Regel überhaupt nicht gebraucht, statt dessen mittelt man die mikroskopischen Felder über makroskopische Volumina, die viele Teilchen enthalten, die aber immer noch klein gegenüber den Gesamtabmessungen des Systems sind. Dadurch entstehen makroskopisch gemittelte Felder

$$\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}') dV' , \quad (4.1)$$

und makroskopisch gemittelte Ladungsdichten

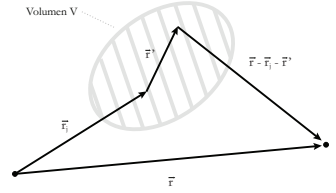
$$\langle \rho(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{r} + \vec{r}') dV' . \quad (4.2)$$

- Diese sind jetzt zeitlich konstant, denn die thermischen Bewegungen der einzelnen Ladungen sind regellos und finden auf Skalen statt, die per Definition klein gegenüber den Mittlungsvolumina V sind. Daher können die elektrostatischen Gleichungen auf die makroskopischen Felder angewandt werden.

- Sei nun am Ort \vec{r}_j innerhalb eines Körpers ein Molekül mit der Ladungsverteilung $\rho_j(\vec{r}')$ und der Gesamtladung q_j gegeben. Es erzeugt am Ort \vec{r} das elektrische Feld

$$\int_V \rho_j(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}_j - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}_j - \vec{r}'|^3} dV' = \vec{E}_j(\vec{r}), \quad (4.3)$$

worin \vec{r}' der Ortsvektor relativ zum Ursprungspunkt des Moleküls ist. Integriert wird über das gesamte Molekül mit dem Volumen V_j .



Zur Integration über das Volumen des Dielektrikums

- Mit (2.10) lässt sich (4.3) auf die Form

$$\vec{E}_j(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \int_V \rho_j(\vec{r}') \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}_j - \vec{r}'|} \quad (4.4)$$

bringen. Wir nehmen nun $|\vec{r}'| \ll |\vec{r} - \vec{r}_j|$ an, d.h. das Molekül sei klein gegenüber unserem Abstand von ihm. Dann kann eine Taylorentwicklung des inversen Abstands durchgeführt werden,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_j \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) + \dots, \quad (4.5)$$

wobei $\vec{\nabla}_j$ der Gradient bezüglich der Koordinaten des Ursprungs \vec{r}_j ist.

- Mit (4.5) ergibt (4.4)

$$\vec{E}_j(\vec{r}) \approx -\vec{\nabla} \left[\int_V \rho_j(\vec{r}') \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \vec{\nabla}_j \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' + \dots \right]. \quad (4.6)$$

- Der erste Term in eckigen Klammern ergibt den Monopol der Gesamtladung,

$$\int_V \rho_j(\vec{r}') \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} = \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}, \quad (4.7)$$

der zweite Term den Dipol,

$$\vec{\nabla}_j \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \vec{\nabla}_j \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) \vec{p}_j. \quad (4.8)$$

- Moleküle haben üblicher Weise keine statischen Dipolmomente, aber Dipolmomente können durch äußere Felder hervorgerufen werden. Die Quadrupolmomente vernachlässigen wir, weil ihre Felder schnell abfallen.

- Ein Ensemble von N Molekülen erzeugt also das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \sum_{j=1}^N \left[\frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} + \vec{p}_j \vec{\nabla}_j \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) \right]. \quad (4.9)$$

Da die mittleren Orte der Moleküle \vec{r}_j zeitlich fest sind, ist dieses Feld zeitunabhängig.

- Wir mitteln nun über das Volumen V , wie in (4.1) angekündigt. Dazu führen wir die kontinuierliche Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (4.10)$$

und die kontinuierliche Polarisationsdichte

$$\pi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (4.11)$$

ein. Damit lautet dann die Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \int_V dV'' \left[\rho(\vec{r}'') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \pi(\vec{r}'') \vec{\nabla}'' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) \right], \quad (4.12)$$

wobei $\vec{\nabla}''$ auf \vec{r}'' wirkt (statt auf \vec{r}).

- Die Mittelung (4.1) ergibt das makroskopische Feld

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}') dV' \\ &= -\frac{1}{V} \int_V dV' \vec{\nabla} \int_V dV'' \left[\frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}''|} + \right. \\ &\quad \left. + \pi(\vec{r}'') \vec{\nabla}'' \left(\frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}''|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

- Zur Vereinfachung führen wir die Hilfsvariable $\vec{z} := \vec{r}'' - \vec{r}'$ ein, oder $\vec{r}'' := \vec{z} + \vec{r}'$, und erhalten

$$\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle = -\frac{1}{V} \int_V dV' \vec{\nabla} \int_V d^3z \left[\frac{\rho(\vec{z} + \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{z}|} + \pi(\vec{z} + \vec{r}') \vec{\nabla}_z \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{z}|} \right) \right]. \quad (4.14)$$

- Dabei operiert der erste Gradient auf \vec{r} , kann also vor das Integral über dV' gezogen werden, was den folgenden Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle &= -\vec{\nabla} \int d^3z \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{z}|} \underbrace{\frac{1}{V} \int_V dV' \rho(\vec{z} + \vec{r}')}_{\text{makroskopisch gemittelte Ladungsdichte}} \right. \\ &\quad \left. + \vec{\nabla}_z \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{z}|} \right) \underbrace{\frac{1}{V} \int_V dV' \pi(\vec{z} + \vec{r}')}_{\text{makroskopisch gemittelte Polarisationsdichte}} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

- Wir definieren jetzt durch

$$\langle \rho(\vec{r}) \rangle := \frac{1}{V} \int dV' \rho(\vec{r} + \vec{r}'), \quad \vec{P}(\vec{r}) := \frac{1}{V} \int_V dV' \pi(\vec{r} + \vec{r}') \quad (4.16)$$

die mittlere Ladungsdichte und die Polarisation \vec{P} . Damit erhalten wir die Feldstärke

$$\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle = -\vec{\nabla} \int dV' \left[\frac{\langle \rho(\vec{r}') \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right], \quad (4.17)$$

wobei \vec{r}' anstelle der Hilfsvariablen \vec{z} eingesetzt wurde. Das makroskopische Feld wird also durch die Polarisation \vec{P} und die mittlere Ladungsdichte erzeugt, zu der noch externe Ladungen treten können.

- Wir hatten in Kapitel 1 die dielektrische Verschiebung eingeführt, um die Reaktion eines Mediums auf eine Feldstärke \vec{E} zu beschreiben, wobei im Vakuum $\vec{D} = \vec{E}$ war, was wir durch Einführung Gaußscher Einheiten erreicht hatten. Gleichung (1.69) sagt (unter anderem), dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (4.18)$$

sei, wobei nun \vec{D} und ρ als makroskopisch gemittelte Größen aufzufassen sind. Wenden wir die Divergenz auf $\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle$ in (4.17) an, folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle &= -\Delta \int dV' \frac{\langle \rho(\vec{r}') \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int dV' \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \left[\Delta \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \\ &= 4\pi \int dV' \langle \rho(\vec{r}') \rangle \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ &\quad + \int dV' \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}' 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= 4\pi \langle \rho(\vec{r}) \rangle - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \int dV' \vec{P}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= 4\pi \langle \rho(\vec{r}) \rangle - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

- In dieser Rechnung wurde zuerst benutzt, dass die Reihenfolge der Operatoren Δ und $\vec{\nabla}'$ vertauscht werden kann. Dann wurde (2.27) verwendet, um die δ -Funktion einzusetzen. Im dritten Schritt wurde $\vec{\nabla}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ angewandt, und außerdem die Identität

$$\begin{aligned} \int dV' \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') &= \int dV' \vec{\nabla}' \cdot [\vec{P}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}')] \\ &\quad - \int dV' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}_{=0} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \int dV' \vec{P}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (4.20)$$

- Mit (4.19) erhalten wir die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}), \quad (4.21)$$

wobei \vec{E} jetzt als makroskopisch gemittelte Feldstärke aufzufassen ist. Die Polarisation \vec{P} beschreibt die Antwort des Mediums auf ein anregendes elektrisches Feld \vec{E} , sodass im Medium die Feldstärke \vec{E} zur dielektrischen Verschiebung \vec{D} wird.

- Wegen des angenommenen linearen Zusammenhangs zwischen \vec{D} und \vec{E} , $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ (vgl. Abschnitt 1.4), folgt

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}\vec{E} =: \chi_e\vec{E}, \quad (4.22)$$

also ebenso ein linearer Zusammenhang zwischen \vec{P} und \vec{E} , in dem die *dielektrische Suszeptibilität* χ_e definiert wurde.

4.2 Grenzbedingungen

- Wir gehen davon aus, dass die Dielektrizität ϵ eine Konstante ist und mit ihr auch die Suszeptibilität χ_e . Damit gilt einerseits für die dielektrische Verschiebung, wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = 4\pi \int_V dV \rho = 4\pi q, \quad (4.23)$$

und ebenso für das elektrische Feld \vec{E}

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi(q + q_p), \quad (4.24)$$

worin q_p die Ladung ist, die durch die Polarisation des Mediums entsteht. Zu ihr gehört die Ladungsdichte

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad (4.25)$$

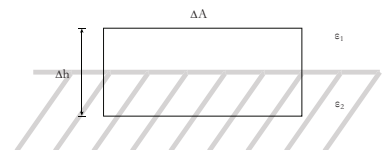
so dass insgesamt gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E} + 4\pi\vec{P}] = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi\rho_p, \quad (4.26)$$

also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_p). \quad (4.27)$$

- Während die Quellen von \vec{D} die freien Ladungen ρ sind, tragen sowohl die freien wie die durch Polarisation induzierten Ladungen als Quellen zu \vec{E} bei.
- Wir betrachten nun, wie in 1.3, eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und ϵ_2 . Die Grenzfläche schließen wir durch ein Prisma der Höhe Δh und der Grundfläche ΔA so, dass ΔA lokal parallel zur Grenzfläche liegt:



Prisma über einer Grenzfläche

- Nun gilt, wegen (4.23),

$$(\vec{D}_1 \cdot \vec{n} - \vec{D}_2 \cdot \vec{n})\Delta A = 4\pi\Delta q, \quad (4.28)$$

wobei Δq die vom Prisma eingeschlossene Ladung ist. Da die Höhe des Prismas verschwindend klein wird, kann es sich dabei nur um eine Flächenladung auf der Grenzfläche handeln. Mit

$$\sigma := \frac{\Delta q}{\Delta A} \quad \text{folgt} \quad D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma \quad (4.29)$$

für die Änderung der Normalenkomponente von \vec{D} .

- Völlig analog erhält man für $\vec{E} \cdot \vec{n}$

$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi(\sigma + \sigma_p). \quad (4.30)$$

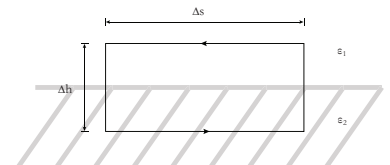
Da \vec{E} nach wie vor ein Gradient ist (vgl. (4.17)), gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (4.31)$$

- Daraus erhalten wir Grenzbedingungen wie folgt: Wir schließen die Grenzfläche durch eine Kurve ein, die oberhalb und unterhalb der Grenzfläche parallel dazu verläuft und deren Höhe Δh beliebig klein wird. Mit dem Stokesschen Satz folgt aus (4.31)

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A} = 0 = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{1t} - E_{2t}, \quad (4.32)$$

wobei E_{1t}, E_{2t} die Tangentialkomponenten von \vec{E} auf beiden Seiten der Grenzfläche sind. Die Tangentialkomponenten von \vec{E} sind also an einer Grenzfläche stetig;



Geschlossene Kurve um eine Grenzfläche

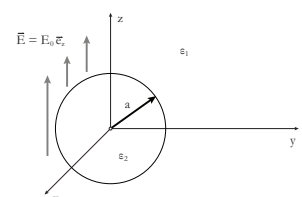
4.3 Kugel im Dielektrikum

- Gegeben sei eine Kugel vom Radius a mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 , eingebettet in ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 . In Abwesenheit der Kugel sei ein homogenes elektrisches Feld

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \quad (4.33)$$

in diesem Gebiet. Wie sehen Potential und Feld in Anwesenheit der Kugel aus?

- Die Kugel sei auf den Ursprung zentriert. Aufgrund der Symmetrie liegt es nahe, Zylinderkoordinaten r, φ und z einzuführen. Wir brauchen außerdem den Winkel θ zwischen Ortsvektoren und der \vec{z} -Achse.



Kugel im Dielektrikum

- Das \vec{E} -Feld wird die Kugel polarisieren, d.h. es werden Polarisationsladungen auf der Kugeloberfläche auftreten. Da es sich dabei nicht um wahre Ladungen handelt, wird die Normalkomponente von \vec{D} auf der Kugeloberfläche stetig sein,

$$D_{r2} = D_{r1} . \quad (4.34)$$

außerdem muss die tangentielle Komponente von \vec{E} auf der Kugeloberfläche stetig sein,

$$E_{\theta 1} = E_{\theta 2} \quad (4.35)$$

(wegen der Symmetrie muss $E_\varphi = 0$ sein).

- Die Gleichungen, die erfüllt sein müssen, sind demnach

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 = \varepsilon_i \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = 0 , \quad (4.36)$$

denn die beiden ε_i seien konstant.

- In großem Abstand von der Kugel muss das äußere Potential

$$\phi_1 = -E_0 z \quad \text{für} \quad z \gg a \quad (4.37)$$

sein. Durch die polarisierte Oberflächenladung wird außerdem die Kugel von außen wie ein Dipol aussehen, denn wegen der Konstanz von $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ wird \vec{P} parallel zum angelegten \vec{E} -Feld sein. Nach (2.38) und (3.83) ist das Potential eines Dipols

$$\phi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} . \quad (4.38)$$

wir setzen also das Potential außerhalb der Kugel mit

$$\phi_1 = -E_0 z + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (4.39)$$

an. Innerhalb wird

$$\phi_2 = -E_i z \quad (4.40)$$

sein, da die Medien linear reagieren. Sowohl ϕ_1 wie ϕ_2 erfüllen die Laplace-Gleichung.

- Die Grenzbedingung (4.34) erfordert

$$\varepsilon_1 \left. \frac{\partial\phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon_2 \left. \frac{\partial\phi_2}{\partial r} \right|_{r=a} , \quad (4.41)$$

also, mit (4.39) und (4.40):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial r} \left[-E_0 r \cos\theta + p_z \frac{\cos\theta}{r^2} \right] \Big|_{r=a} &= \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial r} (-E_i r \cos\theta) \Big|_{r=a} \\ \Rightarrow \varepsilon_1 \left[-E_0 \cos\theta - 2p_z \frac{\cos\theta}{a^3} \right] &= -\varepsilon_2 E_i \cos\theta . \end{aligned} \quad (4.42)$$

weiterhin verlangt (4.35)

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right|_{r=a}, \quad (4.43)$$

woraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-E_0 r \cos \theta + p_z \frac{\cos \theta}{r^2} \right] \Big|_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (-E_i r \cos \theta) \Big|_{r=a} \\ \Rightarrow E_0 a \sin \theta - p_z \frac{\sin \theta}{a^2} &= E_i a \sin \theta \end{aligned} \quad (4.44)$$

folgt. Insbesondere muss (4.42) bei $\theta = 0$ gelten, also

$$\varepsilon_1 \left(E_0 + \frac{2p_z}{a^3} \right) = \varepsilon_2 E_i, \quad (4.45)$$

und (4.44) bei $\theta = \pi/2$, also

$$E_0 - \frac{p_z}{a^3} = E_i. \quad (4.46)$$

- Daraus folgt durch Eliminierung von p_z/a^3 aus (4.46)

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} [E_0 + 2(E_0 - E_i)] \Rightarrow E_i \left(1 + 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) = 3E_0 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ \Rightarrow E_i &= E_0 \cdot \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

mithin ist

$$\phi_2 = -E_0 \cdot \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} r \cos \theta. \quad (4.48)$$

- Schließlich folgt aus (4.46) mit (4.47)

$$p_z = a^3(E_0 - E_i) = a^3 E_0 \left(1 - \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 E_0, \quad (4.49)$$

also für das Potential im Außenraum

$$\phi_1 = -E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (4.50)$$

- An der Oberfläche der Kugel tritt eine Brechung auf, die wir zunächst für \vec{E} betrachten. Die Normalkomponente von \vec{E} ist

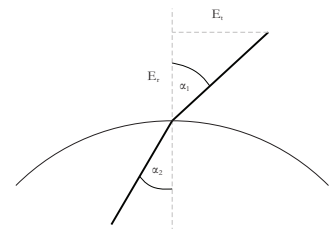
$$\begin{aligned} E_{r1} &= - \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = E_0 \cos \theta + 2E_0 \cos \theta \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{außen,} \\ E_{r2} &= - \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = E_0 \cos \theta \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{innen;} \end{aligned} \quad (4.51)$$

die Tangentialkomponente bleibt stetig. Bezeichnet α den Winkel zwischen der Normalen und der Richtung von \vec{E} , folgt

$$\tan \alpha_1 = \frac{E_{t1}}{E_{r1}}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{E_{t2}}{E_{r2}}. \quad (4.52)$$

also

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{r2}}{E_{r1}} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (4.53)$$



Normal- und Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes

- Ebenso folgt für das \vec{D} -Feld

$$\begin{aligned} D_{r1} &= D_{r2} . \\ D_{\theta 1} &= -\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\varepsilon_1 E_0 \left(a \sin \theta - a \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sin \theta \right) , \\ D_{\theta 2} &= -\varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -E_0 \frac{3\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a \sin \theta . \end{aligned} \quad (4.54)$$

- Wenn β der Winkel zwischen \vec{D} und der Normalenrichtung ist, folgt

$$\begin{aligned} \tan \beta_1 &= \frac{D_{\theta 1}}{D_{r1}} , \quad \tan \beta_2 = \frac{D_{\theta 2}}{D_{r2}} , \quad \text{und damit} \\ \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} &= \frac{D_{\theta 1}}{D_{\theta 2}} = \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1}{3\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} . \end{aligned} \quad (4.55)$$

- \vec{D} und \vec{E} werden also auf dieselbe Weise gebrochen. Wenn die Kugel „dichter“ als das umgebende Dielektrikum ist, also $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, ist offenbar

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} < 1 , \quad (4.56)$$

mithin werden dann \vec{E} und \vec{D} zur Normalen *hin* gebrochen (im Gegensatz zur Optik!)

- Die Polarisation \vec{P} wird durch die Oberflächenladung σ_p auf der Kugel hervorgerufen. Wegen (4.25) ist

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \int_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{A} = -\sigma_p A \quad \Rightarrow \quad P_{1r} - P_{2r} = -\sigma_p . \quad (4.57)$$

nun ist wegen (4.22)

$$P_{1r} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_{1r} , \quad P_{2r} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_{2r} \quad (4.58)$$

und damit, mit (4.51)

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_0 \cos \theta \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\ &\quad - \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \left(1 + 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) E_0 \cos \theta \\ &= -\frac{E_0 \cos \theta}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot 3\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2 - 1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot 3\varepsilon_1 \right) \\ &= -3 \frac{E_0 \cos \theta}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} . \end{aligned} \quad (4.59)$$

- Dazu gehört offenbar die Ladungsdichte

$$\rho_p(\vec{r}) = \sigma_p \delta(r - a) . \quad (4.60)$$

ihr Monopol verschwindet offensichtlich. Ihr Dipolmoment ist nach (3.71)

$$\begin{aligned}
 q_{10} &= \int \sigma_p \delta(r - a) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta r^3 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\
 &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{3/2} E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d(\cos \theta) \cdot 2\pi \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3, \tag{4.61}
 \end{aligned}$$

und q_{11} bzw. $q_{1,-1}$ verschwinden wegen der Symmetrie. Zur Flächenladung (4.59) auf der Kugel gehört also das Potential (vgl. 3.71)

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= Y_{10}(\theta, \varphi) \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 \\
 &= E_0 \cos \theta \frac{a^3}{r^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

also genau das in (4.50) geforderte Potential.

4.4 Molekulare Polarisierbarkeit

- Unter der Annahme, dass das Dielektrikum linear auf das äußere Feld reagiert, war die Polarisation proportional zum \vec{E} -Feld,

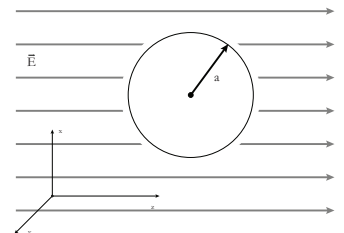
$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \tag{4.63}$$

vgl. (4.22). Nach (4.16) und (4.11) setzt sich die Polarisation aus den Dipolmomenten der einzelnen Moleküle zusammen,

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \frac{1}{V} \int_V dV' \pi(\vec{r} + \vec{r}') = \frac{1}{V} \int_V \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \delta(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}_i) \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = n \langle \vec{p} \rangle, \tag{4.64}
 \end{aligned}$$

wobei $\langle \vec{p} \rangle$ das mittlere Dipolmoment pro Molekül und n deren Anzahldichte ist.

- Das mittlere Dipolmoment wird etwa proportional zum angelegten *lokalen* Feld \vec{E}_{loc} sein, nicht zum makroskopisch gemittelten Feld \vec{E} . Um \vec{E}_{loc} zu bestimmen zerlegen wir es in das makroskopische Feld \vec{E} und das Feld der Polarisation um das betrachtete Molekül herum. Dazu umgeben wir das betrachtete Molekül mit einer Kugel vom Radius a .



Zur molekularen Polarisierbarkeit

- Das äußere Feld \vec{E} erzeugt eine Flächenladung σ auf der Innenseite des kugelförmigen Hohlraums, zu der wegen (4.57) die Polarisation

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = -P \cos \theta = \sigma \quad (4.65)$$

gehört. Das Vorzeichen ergibt sich daraus, dass \vec{n} nun nach innen zeigt.

- Das Ladungselement $\sigma dA = \sigma a^2 d\Omega = \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ erzeugt am Ort des Moleküls das Coulombfeld

$$d\vec{E} = -\frac{\sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{a^2} \vec{e}_r, \quad (4.66)$$

das in z -Richtung die Komponente

$$dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{e}_z = -\sigma \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = P \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi \quad (4.67)$$

hat; Integration über die Kugel ergibt

$$E_z = 2\pi P \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \frac{4\pi}{3} P. \quad (4.68)$$

- Nun ist also

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} P \vec{e}_z = \vec{P} \left(\frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \quad (4.69)$$

wegen (4.63). Unter der Annahme

$$\langle \vec{p} \rangle = \gamma \vec{E}_{\text{loc}} \quad \text{folgt} \quad \langle \vec{p} \rangle = \gamma \vec{P} \left(\frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \quad (4.70)$$

oder, mit (4.64)

$$\begin{aligned} \vec{P} &= n \langle \vec{p} \rangle = n\gamma \vec{P} \left(\frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \\ \Rightarrow 1 &= n\gamma \left(\frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \\ \Rightarrow \chi_e &= \left(\frac{1}{n\gamma} - \frac{4\pi}{3} \right)^{-1} = \frac{n\gamma}{1 - \frac{4\pi}{3} n\gamma}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

- Außerdem war die Suszeptibilität nach (4.22) durch

$$\chi_e = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \quad (4.72)$$

mit der Dielektrizitätskonstanten verknüpft. Damit schließt man aus (4.71) auf die *Clausius-Mossotti-Formel*

$$\gamma = \frac{1}{n \left(\frac{4\pi}{\varepsilon - 1} + \frac{4\pi}{3} \right)} = \frac{3}{4\pi n} \frac{\varepsilon - 1}{3 + \varepsilon - 1} = \frac{3}{4\pi n} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad (4.73)$$

für die *molekulare Polarisierbarkeit* γ .

4.5 Modell für die molekulare Polarisierbarkeit

- Ein einfaches Modell für die molekulare Polarisierbarkeit lässt sich unter der Annahme konstruieren, Elektronen seien harmonisch an (ortsfeste) Kerne gebunden. Die Bewegungsgleichung für ein solches Elektron ist

$$m\ddot{\vec{x}} + m\omega^2\vec{x} = -e\vec{E}, \quad (4.74)$$

wobei ω die Oszillationsfrequenz des Elektrons ist.

- Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{i\omega t} - \frac{e}{m\omega^2} \vec{E}, \quad (4.75)$$

ergibt also das Dipolmoment

$$\vec{p} = -e\vec{x} = -e\vec{x}_0 e^{i\omega t} + \frac{e^2}{m\omega^2} \vec{E} \quad (4.76)$$

für das Elektron.

- Gemittelt über Zeiten, die gegenüber der Schwingungszeit ω^{-1} lang sind, verschwindet der erste Term, und das mittlere Dipolmoment wird zu

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{e^2}{m\omega^2} \vec{E}, \quad (4.77)$$

woraus die molekulare Polarisierbarkeit

$$\gamma = \frac{e^2}{m\omega^2} \quad (4.78)$$

folgt.

Kapitel 5

Magnetostatik

5.1 Das Vektorpotential

- Wir gehen ähnlich wie in der Elektrostatik von stationären Feldern aus, setzen also $\dot{\vec{B}} = 0$ voraus, und verlangen außerdem $\dot{\vec{D}} = 0$. Dann gilt aufgrund der Maxwell-Gleichungen (1.69)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (5.1)$$

worin jetzt \vec{j} der reine Ladungsstrom ist (weil kein Verschiebungsstrom auftritt). Im Vakuum gilt außerdem $\mu = 1$, $\vec{H} = \vec{B}$, und damit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (5.2)$$

Das Magnetfeld hat offenbar nur dort eine Rotation, wo die Stromdichte nicht verschwindet. Außerhalb von Leitern ist offenbar auch $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$, sodass *dort* $\vec{H} = \vec{\nabla} \phi_M$ als Gradient eine magnetischen Skalarpotentials ϕ_M geschrieben werden kann. Im Gegensatz zum elektrischen Feld, das *überall* als Gradient eines Potentials ϕ geschrieben werden kann, brauchen wir hier eine allgemeinere Beschreibung, die in Leitern und außerhalb gilt.

- Wegen der ersten Gleichung (5.1) folgt, dass jede Rotation einer beliebigen Funktion \vec{A} als \vec{B} -Feld dort eingesetzt werden kann, denn da die Divergenz einer Rotation identisch verschwindet, folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.3)$$

da außerdem die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet, kann \vec{A} durch $\vec{A} + \vec{\nabla} \psi$ verändert werden, ohne dass das \vec{B} -Feld sich ändert,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi. \quad (5.4)$$

dieser Spezialfall einer Eichtransformation wird uns später mehr beschäftigen.

- Setzt man $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ an, muss wegen der zweiten Gleichung (5.1) bzw. der Gleichung (5.2) gelten

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (5.5)$$

wobei im zweiten Schritt die Vektoridentität für doppelte Kreuzprodukte verwendet wurde.

- Wir verwenden nun die Eichfreiheit (5.4), um $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ zu erreichen, d.h. wir suchen eine Funktion ψ so, dass

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} + \vec{\nabla}\psi] = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta\psi = 0 \quad (5.6)$$

gilt. Das ist immer möglich, denn wegen (2.29) genügt es,

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (5.7)$$

zu setzen. Mit dieser so genannten Coulomb-Eichung folgt aus (5.5) die Bedingung

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (5.8)$$

oder, wieder mit (2.29)

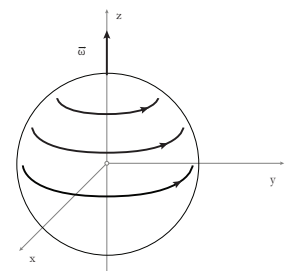
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (5.9)$$

dies ist das *Vektorpotential* des magnetischen Feldes. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für \vec{A} aus (5.9) die Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ gilt.

- Da das Vektorpotential ebenso wie das skalare Potential ϕ aus einer Poisson-Gleichung folgt, gelten die Aussagen aus 2.5 und 2.6 über die Eindeutigkeit des Potentials genauso für das Vektorpotential.

5.2 Beispiel: Magnetfeld einer geladenen, rotierenden Kugel

- Eine Kugel vom Radius R trage die Ladung q und rotiere (starr) mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Die Ladung sei auf der Kugeloberfläche verteilt und die Drehachse gehe durch das Zentrum der Kugel. Wir suchen das Vektorpotential \vec{A} und das magnetische Feld \vec{B} dieser Kugel.



Zum Magnetfeld einer rotierenden, geladenen Kugel

- Die Stromdichte ist durch

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (5.10)$$

gegeben, wobei ρ die Ladungsdichte ist. Da die Ladung auf der Kugeloberfläche sitzt, ist

$$\rho = \sigma \delta(r - R) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R), \quad (5.11)$$

wobei σ die Flächenladung ist. Offenbar ist

$$\int \rho(\vec{r}) d^3 r = \frac{q}{4\pi R^2} \int r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \delta(r - R) = q, \quad (5.12)$$

wie es sein muss.

- Die Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (5.13)$$

und damit ist

$$\vec{j} = \frac{q}{4\pi R^2} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \delta(r - R), \quad (5.14)$$

woraus mit (5.9) das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{q}{4\pi R^2} (\vec{\omega} \times \vec{r}') \frac{\delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.15)$$

folgt. Darin bleibt das Integral

$$\int d^3 r' \vec{r}' \frac{\delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =: F(\vec{r}) \quad (5.16)$$

zu bestimmen. Dazu schreiben wir zunächst

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta']^{1/2}, \quad (5.17)$$

worin θ' der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' ist. Zur Auswertung des Integrals können wir o.B.d.A. \vec{r} in Richtung der \vec{z} -Achse legen, wodurch θ' der Polarwinkel wird. es folgt für $\vec{F}(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= \int r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi' \frac{\delta(r' - R)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \\ &\times r' \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

da die Integrale über φ' von 0 bis 2π reichen, verschwinden die x' - und die y' -Komponenten von \vec{F} , und für die z' -Komponente bleibt

$$F_z(\vec{r}) = 2\pi R^3 \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \theta') \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'}}. \quad (5.19)$$

das verbleibende Integral ist von der Art

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x \, dx}{\sqrt{a - bx}}, \quad \text{mit } a = r^2 + R^2, \quad b = 2rR. \quad (5.20)$$

es hat die Lösung

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{x \, dx}{\sqrt{a - bx}} &= \frac{2}{3b^2} (-bx - 2a) \sqrt{a - bx} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2}{3b^2} \left[(b + 2a) \sqrt{a - b} - (-b + 2a) \sqrt{a + b} \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

damit folgt

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= 2\pi R^2 \left(-\frac{2}{3 \cdot 4r^2 R^2} \left[(2rR + 2(r^2 + R^2)) \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (-2rR + 2(r^2 + R^2)) \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} \right] \right) \\ &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left[(r^2 + R^2 + rR)|r - R| - (r^2 + R^2 - rR)(r + R) \right]. \end{aligned}$$

innerhalb der Kugel ist $r < R$, also $|r - R| = R - r$, und

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left[(r^2 + R^2)(R - r - R - r) + rR(R - r + R + r) \right] \\ &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left(-2r(r^2 + R^2) + 2rR^2 \right) = \frac{4\pi}{3} rR, \end{aligned} \quad (5.22)$$

während außerhalb der Kugel gilt

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left[(r^2 + R^2)(r - R - r - R) + rR(r - R + r + R) \right] \\ &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left(-2R(r^2 + R^2) + 2r^2 R \right) = \frac{4\pi R^4}{3 r^2}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

da $\vec{F}(\vec{r})$ in Richtung von \vec{r} zeigt (alle anderen Komponenten waren verschwunden), ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_z(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.24)$$

also ist das Vektorpotential nach (5.15)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi c R^2} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \begin{cases} \frac{4\pi}{3} R & (r < R) \\ \frac{4\pi R^4}{3 r^3} & (r > R) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{q}{3cR} (\vec{\omega} \times \vec{r}) & (r < R) \\ \frac{qR^2}{3cr^3} (\vec{\omega} \times \vec{r}) & (r > R) \end{cases}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

da $\vec{\omega}$ als konstant angenommen wurde, ist für $r < R$

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{q}{3cR} \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{q}{3cR} \left[\vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} \right] \\ &= \frac{q}{3cR} \left(3\vec{\omega} - \omega_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \right) = \frac{2q}{3cR} \vec{\omega} \quad (r < R). \end{aligned} \quad (5.26)$$

für $r > R$ dagegen ist

$$\vec{B} = \frac{qR^2}{3c} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\omega} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{qR^2}{3c} \left[\vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right]. \quad (5.27)$$

nun ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} &= \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})r^3 - \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} r^3)}{r^6} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0, \\ (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \frac{x_j}{r^3} &= \left(\omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{r^3} = \omega_i \left[\frac{r^3 \cdot \delta_{ij} - x_j 3r^2 \frac{x_i}{r}}{r^6} \right] \\ &= \omega_i \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

also, für $r > R$,

$$\vec{B} = \frac{qR^2}{3c} \left(\frac{3}{r^5} (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} - \frac{\vec{\omega}}{r^3} \right) = \frac{qR^2}{3c} \cdot \frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\omega}}{r^3}. \quad (5.29)$$

ein Vergleich mit (2.38) legt nahe, das magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} := \frac{qR^2}{3c} \vec{\omega} \quad (5.30)$$

einzuführen, mit dem sich das Magnetfeld außerhalb der Kugel als Dipolfeld

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{m}}{r^3} \quad (r > R) \quad (5.31)$$

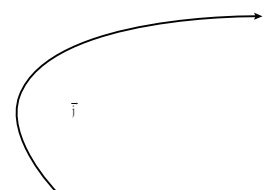
schreiben lässt, während innerhalb der Kugel

$$\vec{B} = \frac{2\vec{m}}{R^3} \quad (r < R) \quad (5.32)$$

gilt.

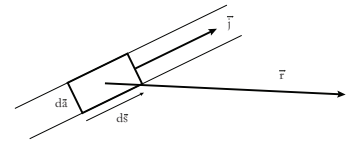
5.3 Das Biot-Savartsche Gesetz

- Sei ein Leiter vorgegeben, in dem die Stromdichte \vec{j} fließt. Der Querschnitt des Leiters sei $d\vec{a}$, und er sei durch eine Kurve $\vec{s}(\lambda)$ beschrieben.



Teil einer Stromschleife

- Wir betrachten ein infinitesimales Element des Leiters mit der Länge $|d\vec{s}|$ und der Richtung $d\vec{s}$.
- Im Abstand \vec{r} erzeugt das Leiterelement das Vektorpotential



Infinitesimales Leiterelement, das von einem Strom durchflossen wird

$$d\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\vec{j} \cdot d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \frac{\vec{j} d^3r'}{r}, \quad (5.33)$$

wobei \vec{r}' innerhalb des Leiterelements variiert und daher gegenüber \vec{r} vernachlässigt werden kann .

- Außerhalb ist nach Voraussetzung $\vec{j} = j d\vec{s}/|d\vec{s}|$ und $d^3r' = |d\vec{a}| \cdot |d\vec{s}|$. Der Strom I ist schließlich

$$I = \vec{j} \cdot d\vec{a} = j |d\vec{a}|, \quad (5.34)$$

denn $d\vec{a}$ zeigt in Richtung von \vec{j} .

- Damit folgt für das Element des Vektorpotentials

$$d\vec{A} = \frac{1}{cr} \cdot j \frac{d\vec{s}}{|d\vec{s}|} \cdot |d\vec{a}| \cdot |d\vec{s}| = \frac{I \cdot d\vec{s}}{cr}. \quad (5.35)$$

die Rotation davon ist der Betrag des Leiterelements zum Magnetfeld,

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \vec{\nabla} \times d\vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{I \cdot d\vec{s}}{cr} = -\frac{I \cdot d\vec{s}}{c} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{I \cdot d\vec{s}}{c} \times \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{I}{c} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

das ist das Biot-Savartsche Gesetz.

- Beispielsweise erzeugt ein Strom I in einem kreisförmigen Leiter mit Radius R das Magnetfeld

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi - r_x \\ R \sin \varphi - r_y \\ 0 - r_z \end{pmatrix} \frac{d\varphi}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

wobei angenommen wurde, dass die Stromschleife in der x - y -Ebene liegt. Längs der z -Achse etwa ist $\vec{r} = (0, 0, r)$, und damit

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left| \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ -r \end{pmatrix} \right|^3 = (R^2 + r^2)^{3/2}, \quad (5.38)$$

und

$$\begin{aligned} d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= - \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ -r \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ R \end{pmatrix} d\varphi, \end{aligned} \quad (5.39)$$

womit für das \vec{B} -Feld folgt

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} R d\varphi \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ R \end{pmatrix} \frac{1}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (5.40)$$

5.4 Das magnetische Moment

- Sei eine lokalisierte Stromverteilung vorgegeben, also eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$, die auf ein endliches Volumen begrenzt ist. Sie erzeugt das Vektorpotential \vec{A} mit den Komponenten

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{j_i(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.41)$$

für einen Punkt \vec{r} weit entfernt von V kann der Nenner in (5.41) entwickelt werden,

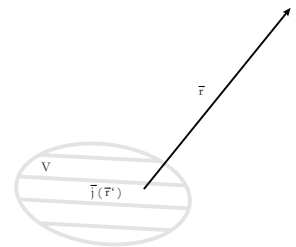
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2} \right), \quad (5.42)$$

wobei nur der Term erster Ordnung in $|\vec{r}'|$ mitgenommen wurde. ein Vergleich mit (3.71) zeigt, dass die beiden Terme in (5.42) dem Monopol und dem Dipol entsprechen. Für den Dipol etwa hatten wir dort ($l = 1$)

$$\begin{aligned} &\int_V d^3 r' \rho(\vec{r}') P_1(\cos \alpha) \left(\frac{r'}{r} \right) \frac{1}{r} = \int_V d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{r' r \cos \alpha}{r^3} \\ &= \int_V d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

wir betrachten nun für zunächst beliebige, nicht singuläre Funktionen $f(\vec{r}), g(\vec{r})$ das Integral

$$\int_V d^3 r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) \quad (5.44)$$



Zur Entwicklung des Vektorpotentials

und zeigen, dass es verschwindet, wenn $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ist. Dazu integrieren wir im zweiten Term partiell ,

$$\int_V d^3r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) = \int_V d^3r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g - f \vec{\nabla} \cdot (g \vec{j})) , \quad (5.45)$$

denn die Randterme verschwinden, weil die Stromverteilung nach Voraussetzung lokalisiert ist. Nun verwenden wir im zweiten Term in (5.45) die Identität

$$\vec{\nabla} \cdot (g \vec{j}) = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g , \quad (5.46)$$

denn $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ nach Voraussetzung, also verschwindet, wie behauptet, das Integral (5.45).

- Mit $f = 1$ und $g = x_i$ speziell folgt

$$\int_V d^3r \left(j_k \frac{\partial}{\partial x_k} x_i \right) = \int_V d^3r j_i(\vec{r}) = 0 , \quad (5.47)$$

und damit verschwindet auch der Monopol von A_i :

$$\frac{1}{c} \int_V \frac{j_i(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{cr} \int_V d^3r' j_i(\vec{r}') = 0 . \quad (5.48)$$

Den Dipol erhält man, indem man $f = x_i$ und $g = x_j$ setzt:

$$\int d^3r \left(x_i j_k \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_j j_k \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) = \int d^3r (x_i j_j + x_j j_i) = 0 . \quad (5.49)$$

Daraus erhalten wir für den Dipolterm der i -Komponente des Vektorpotentials

$$\begin{aligned} & \frac{1}{cr^3} \vec{r} \cdot \int_V d^3r' \vec{r}' j_i(\vec{r}') = \frac{1}{cr^3} x_k \int_V d^3r' x'_k j_i(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{2cr^3} x_k \int_V d^3r' [x'_k j_i(\vec{r}') - x'_i j_k(\vec{r}')] \\ &= -\frac{1}{2cr^3} x_k \epsilon_{ikl} \int_V d^3r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]_l \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \left[\vec{r} \times \int_V d^3r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \right]_i , \end{aligned} \quad (5.50)$$

worin das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} eingeführt wurde. Das *magnetische Moment* \vec{m} der Stromverteilung ist durch

$$\vec{m} := \frac{1}{2c} \int_V d^3r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \quad (5.51)$$

definiert, woraus sich das Vektorpotential in Dipolnäherung zu

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.52)$$

ergibt. Das Magnetfeld ist dann

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{m} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (5.53)$$

wie wir in (5.28) gesehen haben, ist

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0, \quad (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{x_j}{r^3} = m_i \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right), \quad (5.54)$$

also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}}{r^3}, \quad (5.55)$$

das ist das Dipolfeld, das uns schon in (5.31) begegnet war.

- Denkt man sich die Stromverteilung aus einzelnen diskreten Ladungsträgern an den Orten \vec{r}_i zusammengesetzt, die sich mit den Geschwindigkeiten \vec{v}_i bewegen, ist

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (5.56)$$

und das magnetische Moment wird

$$\begin{aligned} \vec{m}(\vec{r}) &= \frac{1}{2c} \int_V d^3 r' \left[\vec{r}' \times \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2c} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2cm_i} \vec{L}_i, \end{aligned} \quad (5.57)$$

wobei die Drehimpulse \vec{L}_i der Ladungsträger eingeführt wurden. Sind alle $q_i = q$ und $m_i = m$ gleich, folgt

$$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{q}{2cm} \vec{L} \quad (5.58)$$

für den Zusammenhang von Drehimpuls und magnetischen Moment.

5.5 Magnetisierungsstrom und Magnetisierung

- Wir haben uns bisher auf Situationen beschränkt, in denen \vec{j} bekannt war. Dies ist in Medien nicht mehr notwendiger Weise der Fall, denn die molekularen oder atomaren Bestandteile dieser Medien können (etwa aufgrund molekularer Ströme) magnetische Momente tragen.

- Wenn \vec{j} die vorgegebene Stromdichte und \vec{m} die magnetischen Momente der Moleküle an den Orten \vec{r}_i sind, ist das gesamte Vektorpotential durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (5.59)$$

gegeben.

- Analog zur Elektrostatik in Medien führen wir die Magnetisierung \vec{M} (analog zur Polarisation \vec{P}) ein. Sie ist die mittlere Dichte des magnetischen Moments \vec{m} , oder

$$\vec{M} = n\vec{m} . \quad (5.60)$$

damit kann das Vektorpotential nach einem Grenzübergang zu (makroskopisch) kontinuierlichen Medien in der Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (5.61)$$

geschrieben werden.

- Der zweite Term in (5.61) kann umgeschrieben werden zu

$$\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' = \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (5.62)$$

oder, wegen der Identität

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{M}) = \vec{\nabla} f \times \vec{M} + f\vec{\nabla} \times \vec{M} , \quad (5.63)$$

in der man $f := |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ setzt,

$$\begin{aligned} & \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= - \int_V \left[\vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^3 r' . \end{aligned} \quad (5.64)$$

der erste Term kann in ein Oberflächenintegral verwandelt werden, das verschwindet. Damit bleibt der zweite Term aus (5.64) im Vektorpotential (5.61) bestehen, und wir bekommen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (5.65)$$

der Magnetisierung \vec{M} entspricht also der Magnetisierungsstrom

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = c\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}) . \quad (5.66)$$

das ist das Analogon zur polarisierten Ladungsdichte.

- Wenden wir auf das Vektorpotential \vec{A} aus (5.65) zwei Mal die Rotation an, folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}(\vec{r}') + \vec{j}_M(\vec{r}')) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \\ &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_M). \end{aligned} \quad (5.67)$$

es ist also der Gesamtstrom, der in den Maxwell-Gleichungen zur Quelle von \vec{B} wird.

- Wir hatten in Kapitel 1 die magnetische Erregung \vec{H} so eingeführt, dass ihre Rotation allein durch Ladungs- und Verschiebungströme, aber nicht durch den Magnetisierungsstrom gegeben war,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (5.68)$$

(vgl. 1.69). Dementsprechend gilt mit (5.67) und (5.66)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{H} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{H} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M}, \quad (5.69)$$

also

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}, \quad (5.70)$$

in vollkommener Analogie zu (4.21) für den elektrostatischen Fall.

- Ebenfalls in Abschnitt 1 hatten wir die Permeabilität μ durch

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.71)$$

eingeführt. Mit der *magnetischen Suszeptibilität* χ_M (vgl. 4.22) nehmen wir

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (5.72)$$

an und erhalten

$$\vec{B} = \vec{H}(1 + 4\pi\chi_M) \Rightarrow \mu = 1 + 4\pi\chi_M \quad (5.73)$$

für die Permeabilität μ .

- Je nach μ bzw. χ_M gelten folgende Bezeichnungen:

Diamagnetika: $\mu < 1$ $\chi_M < 0$
 Paramagnetika: $\mu > 1$ $\chi_M > 0$
 Ferromagnetika: $\mu \gg 1$ $\chi_M \approx \frac{\mu}{4\pi}$, $\mu = \mu(H)$

- Für Paramagnetika ist die Suszeptibilität temperaturabhängig. Es gilt das Curiesche Gesetz

$$\chi_M \propto \frac{1}{T}. \quad (5.74)$$

Paramagnetika sind Medien, deren Moleküle ein eigenes magnetisches Moment haben. In Diamagnetika erzeugen äußere Felder Ströme, die nach der Lenzschen Regel ihrer Ursache entgegen wirken und das Feld im Inneren des Diamagnetikums abschwächen. Daher ist \vec{M} dort dem Feld \vec{H} entgegen gerichtet.

5.6 Grenzbedingungen für \vec{B} und \vec{H}

- Wir hatten bereits in Kapitel 1 gesehen, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ bedingt, dass die Normalkomponente von \vec{B} über Grenzflächen hinweg stetig sein muss,

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 . \tag{5.75}$$

völlig analog zur Betrachtung in 4.2 folgt aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} , \tag{5.76}$$

dass die Tangentialkomponente von \vec{H} höchstens um den Betrag von Oberflächenströmen springen darf,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot d\vec{A} =: \frac{4\pi}{c} I_s , \tag{5.77}$$

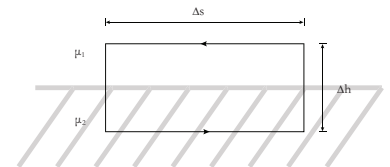
wobei I_s der Oberflächenstrom ist.

- Wenn Oberflächenströme verschwinden, (*nicht* in Supraleitern!), ist die Tangentialkomponente von \vec{H} stetig,

$$H_{1t} - H_{2t} = 0 . \tag{5.78}$$

die Bedingung (5.75) und (5.71) erfordern, dass die Normalkomponente von \vec{H} springt, und zwar um

$$\mu_1 H_{1n} - \mu_2 H_{2n} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n} . \tag{5.79}$$

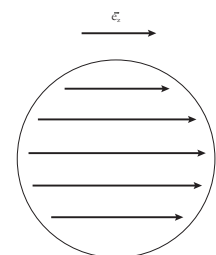


Zu den Grenzbedingungen für \vec{B} und \vec{H}

5.7 Beispiel: Magnetfeld einer homogen magnetisierten Kugel

- Eine Kugel mit Radius R sei magnetisiert durch

$$\vec{M} = M_0 \vec{e}_z \tag{5.80}$$



Zum Magnetfeld einer homogen magnetisierten Kugel

- Da keine Ströme fließen, ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_a = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_a = 0 \quad (5.81)$$

für das äußere Feld. Daher muss es ein magnetisches Skalarpotential ϕ_M geben so, dass $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_M$ ist und ϕ_M die Laplace-Gleichung $\Delta\phi_M = 0$ erfüllt. Wir setzen wie in der Elektrostatik

$$\phi_M = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \quad (5.82)$$

mit Entwicklungskoeffizienten α_l und den Legendrepolyomen $P_l(\cos \theta)$ an.

- In der Kugel ist $\vec{H}_i = \vec{B}_i - 4\pi\vec{M}$, wobei wir aus Symmetriegründen annehmen, dass \vec{B} ebenfalls in z -Richtung zeigt,

$$\vec{B}_i = B_0\vec{e}_z, \quad \vec{H}_i = (B_0 - 4\pi M_0)\vec{e}_z. \quad (5.83)$$

an der Kugeloberfläche gilt nach (5.75) und (5.78)

$$\begin{aligned} \vec{B}_i \cdot \vec{e}_r &= \vec{B}_a \cdot \vec{e}_r, \\ \vec{H}_i \cdot \vec{e}_\theta &= \vec{H}_a \cdot \vec{e}_\theta = \vec{B}_a \cdot \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (5.84)$$

wegen $\vec{B}_a = -\vec{\nabla}\phi_M$ folgt aus der ersten Gleichung (5.84)

$$\begin{aligned} B_0 \cos \theta &= B_0 P_1(\cos \theta) \\ &= -\left. \frac{\partial \phi_M}{\partial r} \right|_R = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l (l+1) \frac{P_l(\cos \theta)}{R^{l+2}}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (5.84)

$$(B_0 - 4\pi M_0) \sin \theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi_M}{\partial \theta} = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{R^{l+2}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \quad (5.86)$$

wegen $\sin \theta = -\frac{d}{d\theta} P_1(\cos \theta)$ ergibt ein Koeffizientenvergleich in (5.85) und (5.86)

$$B_0 = \frac{2\alpha_1}{R^3}, \quad (B_0 - 4\pi M_0) = \frac{\alpha_1}{R^3}, \quad (5.87)$$

woraus sofort

$$M_0 = \frac{\alpha_1}{4\pi R^3}, \quad \alpha_1 = 4\pi R^3 M_0 \quad (5.88)$$

folgen, und damit

$$B_0 = 8\pi M_0, \quad \vec{B}_i = 8\pi\vec{M}, \quad \vec{H}_i = 4\pi\vec{M}. \quad (5.89)$$

das äußere Feld ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\vec{B}_a &= -\vec{\nabla}\phi_M = -\vec{\nabla}\left(4\pi R^3 M_0 \frac{\cos\theta}{r^2}\right) \\ &= 8\pi R^3 M_0 \frac{\cos\theta}{r^3} \vec{e}_r + 4\pi R^3 M_0 \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{e}_\theta.\end{aligned}\quad (5.90)$$

dies ist natürlich wieder ein Dipolfeld (vgl. 5.55), das zum magnetischen Moment

$$\vec{m} = 4\pi R^3 \vec{M} \quad (5.91)$$

gehört.

Kapitel 6

Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Lorentz-Transformation

- Wir hatten schon in der Einleitung gesehen, dass eine Feldtheorie notwendigerweise relativistisch formuliert werden muss: Feldtheorien verbinden Kräfte mit dem Raum, und Raum und Zeit werden durch die Relativitätstheorie miteinander verknüpft. Die Elektrodynamik als erstes und klassisches Beispiel einer Feldtheorie gibt die Newtonsche Vorstellung der instantanen „Fernwirkung“ auf, akzeptiert eine „Nahwirkung“, die sich mit endlicher Geschwindigkeit, ausbreitet, und kommt so zu dem Konzept einer universellen Geschwindigkeit, die vom Bewegungszustand der Bezugssysteme unabhängig ist.
- Die spezielle Relativitätstheorie erhebt zum Prinzip, dass die Lichtgeschwindigkeit c diese universelle Grenzgeschwindigkeit sei. Aus dieser Forderung ergibt sich, dass Raum- und Zeitkoordinaten \vec{x} und t durch die Lorentztransformation untereinander verknüpft sind.
- Zwischen zwei Systemen (\vec{x}, t) und (\vec{x}', t') , die sich relativ zueinander entlang ihrer gemeinsamen x^3 -Achse mit konstanter Geschwindigkeit v bewegen, vermittelt die spezielle Lorentztransformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

worin $\beta = v/c$ die Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit ist, und γ ist der bekannte Lorentzfaktor

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.2)$$

Beachten Sie, dass jetzt die Indizes von Vektorkomponenten oben stehen. Das hat einen tieferen mathematischen Sinn, der gleich klar werden wird.

- Die allgemeine Lorentztransformation setzt sich aus der speziellen Lorentztransformation, den orthogonalen dreidimensionalen Transformationen und der Zeitumkehrtransformation zusammen. Die orthogonalen dreidimensionalen Transformationen bilden die sechsexparametrische Gruppe $O(3)$, die durch drei Winkel (etwa die Eulerwinkel) und drei Translationen bestimmt ist. Die spezielle Lorentztransformation gibt drei Geschwindigkeitskomponenten dazu, und die Zeitumkehr einen weiteren Parameter. Insgesamt entsteht die zehnp-parametrische Lorentzgruppe oder Poincaré-Gruppe, die in der relativistischen Mechanik an die Stelle der Galilei-Gruppe tritt.

- Offenbar lässt die Lorentztransformation die Größe

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad \text{mit} \quad x^0 := ct \quad (6.3)$$

invariant. Das ist für die spezielle Lorentztransformation aus (6.1) leicht einzusehen,

$$\begin{aligned} & -(x'^0)^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ &= -(\gamma x^0 + \beta \gamma x^3)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (\beta \gamma x^0 + \gamma x^3)^2 \\ &= -(x^0)^2 \gamma^2 \underbrace{(1 - \beta^2)}_{=\gamma^{-2}} - \underbrace{(2\beta \gamma^2 x_0 x_3 - 2\beta \gamma^2 x_0 x_3)}_{=0} \\ &+ (x^3)^2 \gamma^2 \underbrace{(1 - \beta^2)}_{=\gamma^{-2}} + (x^1)^2 + (x^2)^2 \\ &= -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

und physikalisch anschaulich, denn die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit war gerade das Konstruktionsprinzip der Lorentz-Transformation.

- Die Lorentz-Transformation induziert also in der vierdimensionalen Minkowski-Welt (x_0, \vec{x}) die Minkowski-Metrik

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (6.5)$$

anstelle der Euklidischen Metrik

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Demzufolge ist der Minkowski-Raum ein vierdimensionaler, hyperbolischer, metrischer Raum.

- Das invariante Linienelement der Metrik (6.5) ist die (negative) Eigenzeit,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &=: -c^2 d\tau^2 . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Das ist offenbar die Zeit, die im Ruhesystem des jeweiligen Körpers vergeht: Im Ruhesystem hat der Körper die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

d.h. zwei aufeinander folgende Ereignisse haben den invarianten Abstand

$$c^2 d\tau^2 = -(dx^0)^2 , \quad (6.9)$$

der im Ruhesystem ein reiner Zeitunterschied ist.

- Die Minkowski-Metrik definiert ein Skalarprodukt zwischen Vierervektoren,

$$\langle x, y \rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu , \quad (6.10)$$

das nicht mehr positiv-semidefinit ist. Durch die Definition

$$x_\nu := \eta_{\mu\nu} x^\mu \quad (6.11)$$

werden Dualvektoren eingeführt, die den Index unten tragen. Da die Minkowski-Metrik nicht mehr euklidisch ist, haben Dualvektoren die Komponenten

$$x_\nu = (-x^0, x^i) . \quad (6.12)$$

Vektoren werden in der älteren Literatur auch als kontravariant bezeichnet, Dualvektoren als kovariant. Mit der Einsteinschen Summenkonvention ist dann

$$x^2 = \langle x, x \rangle = x_\mu x^\mu = -x_0 x^0 + x_i x^i = -c^2 t^2 + \vec{x}^2 , \quad (6.13)$$

was sich mittels der Metrik in der Form

$$x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (6.14)$$

schreiben lässt.

- Die Schreibweise der Vierervektoren und ihrer Dualvektoren wird konsistent, wenn die inverse Metrik η^{-1} die Indizes oben trägt, denn dann ist

$$x^\mu = \eta^{\mu\alpha} x_\alpha = \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} x^\nu = \delta_\nu^\mu x^\nu . \quad (6.15)$$

Also muss

$$\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (6.16)$$

sein, woraus

$$(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (6.17)$$

folgt.

- Die Lorentztransformation lautet in dieser Schreibweise

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad \text{mit} \quad \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

für die spezielle Lorentztransformation. Entsprechend (6.16) ist

$$\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\Lambda_{\nu}^{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda^{\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha}\Lambda_{\alpha}^{\mu}. \quad (6.19)$$

Summiert wird über gleiche Indizes nur dann, wenn sie auf verschiedenen Ebenen stehen, also einer unten und einer oben.

6.2 Eigenschaften der Minkowski-Welt

- Wir fassen hier kurz die wesentlichen Folgerungen aus der Lorentz-Invarianz der Minkowski-Welt zusammen:
- Seien zunächst im ungestrichenen System zwei Ereignisse am selben Ort $\vec{x} = (0, 0, 0)$ im Zeitabstand x^0 gegeben,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

dann werden diese beiden Ereignisse im gestrichenen System zu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma x^0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta\gamma x^0 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

d.h. sie haben dort den größeren Abstand γx^0 . Bewegte Uhren gehen also langsamer (Zeitdilatation).

- Wir betrachten nun einen Einheitsmaßstab in Bewegungsrichtung im ungestrichenen System, also einen Maßstab, der durch die Vierervektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

begrenzt wird. Er soll zum festen Zeitpunkt $x^0 = 0$ im gestrichenen System beobachtet werden. Wegen

$$x'^0 = \gamma x^0 + \beta \gamma x^3 \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.23)$$

entspricht dies dem Zeitpunkt

$$x^0 = -\beta x^3 = -\beta \quad (6.24)$$

im ungestrichenen System, also ist

$$x'^3 = \beta \gamma x^0 + \gamma x^3 = \gamma(1 - \beta^2) = \sqrt{1 - \beta^2} < 1. \quad (6.25)$$

Bewegte Maßstäbe erscheinen also verkürzt (Lorentzkontraktion).

- Sei schließlich w die Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich längs der 3-Achse im ungestrichenen System bewegt, also

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ wt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ wx^0/c \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

- Dies wird transformiert zu

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma x^0 + \beta \gamma wx^0/c \\ 0 \\ 0 \\ \beta \gamma x^0 + \gamma wx^0/c \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

d.h. die Geschwindigkeit im gestrichenen System

$$w' = \frac{x'^3}{x'^0} c = \frac{\beta + w/c}{1 + \beta w/c} c = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}. \quad (6.28)$$

Das ist das Geschwindigkeits-Additionstheorem.

6.3 Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls

- Da die Zeit keine invariante Bedeutung mehr hat, muss die Definition der Geschwindigkeit verändert werden. Die Vierergeschwindigkeit wird eingeführt als Ableitung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten nach der invarianten Eigenzeit,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (6.29)$$

- Dabei ist

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

- Die Komponenten der Vierergeschwindigkeit sind

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \gamma = c\gamma, \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma \vec{v}, \quad (6.31)$$

also ist ihr (Minkowski-) Quadrat

$$u^2 = u^\mu u_\mu = -\gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = -\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -c^2 \quad (6.32)$$

natürlich invariant. Da $d\tau$ invariant ist, transformiert sich u^μ wie der Vierervektor x^μ , ist also selbst einer.

- Entsprechend ist der Viererimpuls definiert durch

$$p^\mu = mu^\mu, \quad p^0 = mc\gamma, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}. \quad (6.33)$$

Entwickelt bis zur zweiten Ordnung in β ist

$$p^0 \approx mc \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{m}{2}v^2\right). \quad (6.34)$$

Also spielt mc^2 die Rolle einer Ruheenergie.

6.4 Das relativistische Wirkungsprinzip

- Wir suchen nun in Analogie zur klassischen Mechanik nach der Wirkungsfunktion S eines zunächst freien, relativistischen Teilchens, d.h. eines Teilchens, das sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte relativistisch bewegt.
- Die Wirkung muss natürlich lorentzinvariant sein und darf daher nur von Lorentzskalaren abhängen, die sich für das freie Teilchen bilden lassen. Dafür kommt nur die (möglicherweise noch skalierte) Eigenzeit in Frage:

$$S = \alpha \int_a^b d\tau, \quad (6.35)$$

wobei a und b die (vierdimensionalen) festen Anfangs- und Endpunkte der Bahn kennzeichnen.

- Die Wirkung muss die Dimension [Energie·Zeit] haben. Da $d\tau$ die Dimension einer Zeit hat, muss die Konstante α die Dimension [Energie] haben. Das werden wir später genauer sehen.
- Ausgedrückt durch die Zeit t lautet die Wirkung

$$S = \frac{\alpha}{c} \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} = \alpha \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (6.36)$$

d.h. die Lagrangefunktion des freien Teilchens ist

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \alpha \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.37)$$

- Diese Lagrangefunktion muss für $\beta \ll 1$ (also $v \ll c$) die Lagrangefunktion ergeben, die für das freie Teilchen aus der nichtrelativistischen Mechanik bekannt ist, also muss

$$L \rightarrow \frac{m}{2} v^2 \quad \text{für} \quad \frac{v}{c} \ll 1 \quad (6.38)$$

gelten. Nun ist für $\beta \ll 1$

$$L = \alpha \sqrt{1 - \beta^2} \approx \alpha \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right). \quad (6.39)$$

der erste Term ist eine unerhebliche Konstante, der zweite ist

$$-\alpha \frac{\beta^2}{2} = -\alpha \frac{v^2}{2c^2} = -\frac{\alpha}{c^2} \frac{v^2}{2}. \quad (6.40)$$

Dies ergibt (6.38), wenn $\alpha = -mc^2$ gewählt wird. Dies hat genau die geforderte Dimension [Energie].

- Demgemäß lautet die Wirkung des freien, relativistischen Teilchens

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau, \quad (6.41)$$

und seine Lagrange-Funktion ist

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.42)$$

- Mit dieser Lagrange-Funktion lauten die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt} \left(\gamma mc^2 \frac{\vec{\beta}}{c} \right) = mc \frac{d}{dt} (\gamma \vec{\beta}) = 0, \quad (6.43)$$

woraus $\dot{\vec{\beta}} = \dot{\vec{v}}/c = 0$ folgt, wie erwartet.

6.5 Energie und Impuls

- Aus der Lagrangefunktion ergibt sich der Impuls nach

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \gamma mc^2 \frac{\vec{\beta}}{c} = \gamma mc \vec{\beta} = \gamma m \vec{v}, \quad (6.44)$$

wie in (6.33).

- Die Energie ergibt sich aus der Legendre-Transformation

$$\vec{p} \cdot \vec{v} - L(\vec{x}, \vec{v}, t) = H(\vec{x}, \vec{p}, t), \quad (6.45)$$

die auf die Hamiltonfunktion führt, deren Bedeutung die Energie ist. daraus und mit (6.44) und (6.42) folgt

$$E = \gamma m \vec{v}^2 + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma mc^2 [\beta^2 + (1 - \beta^2)] = \gamma mc^2. \quad (6.46)$$

Für $v = 0$ ist $\gamma = 1$ und $E = mc^2$, in Übereinstimmung mit der Ruheenergie, die wir in (6.34) gefunden hatten.

- Quadriert man (6.46) und subtrahiert das Quadrat von (6.44), erhält man

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = (mc^2 \gamma)^2 - (m \gamma \vec{v})^2 c^2 = m^2 \gamma^2 c^4 [1 - \beta^2] = (mc^2)^2, \quad (6.47)$$

das ist die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, die an die Stelle der nichtrelativistischen Beziehung

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (6.48)$$

tritt.

- Aus (6.46) und (6.44) folgt außerdem die Beziehung

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (6.49)$$

Die Lichtgeschwindigkeit ist für Teilchen mit endlicher Ruhemasse nicht erreichbar, weil deren Energie dann unendlich groß würde. Für Teilchen mit verschwindender Ruhemasse, etwa Photonen, ist $v = c$, und (6.49) ergibt

$$p = \frac{E}{c}. \quad (6.50)$$

6.6 Variation der Wirkung und der Energie-Impuls-Vierervektor

- Die Wirkung (6.41) hat die Variation

$$\delta S = -mc^2 \delta \int_a^b d\tau, \quad (6.51)$$

die für wahre Bahnen verschwinden muss. Mit

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} \quad (6.52)$$

folgt für die Variation von $d\tau$

$$\delta(d\tau) = \frac{1}{2c^2 d\tau} (-dx_\mu \delta dx^\mu - dx^\mu \delta dx_\mu) = -\frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{c^2 d\tau}, \quad (6.53)$$

und damit aus (6.51)

$$\delta S = 0 = m \int_a^b \frac{dx_\mu}{d\tau} \delta dx^\mu = m \int_a^b u_\mu \delta dx^\mu. \quad (6.54)$$

dabei wurde die Vierergeschwindigkeit u_μ aus (6.29) eingeführt.

- Partielle Integration führt in (6.54) auf

$$\delta S = m u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b - m \int_a^b \frac{du_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau. \quad (6.55)$$

Darin verschwindet der erste Term nach Voraussetzung, denn bei der Variation der Wirkung werden die Endpunkte a und b der Bahn festgehalten. Also muss der zweite Term für beliebige Variationen δx^μ verschwinden, was

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = 0 \quad (6.56)$$

erfordert. Das ist die Trägheitsbewegung des relativistischen freien Teilchens: Die Viererbeschleunigung verschwindet.

- Ähnlich wie in der Hamilton-Jacobi-Theorie der klassischen Mechanik betrachten wir jetzt die Wirkung als Funktion der Koordinaten. Dazu beginnen wir mit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (6.57)$$

halten den Anfangspunkt $q(t_1)$ der Bahn fest, aber variieren deren Endpunkt $q(t_2)$,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt, \end{aligned} \quad (6.58)$$

wobei im zweiten Term partiell integriert wurde. Für wahre Bahnen verschwindet das verbliebene Integral, und es bleibt

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = p \delta q, \quad (6.59)$$

woraus folgt, dass die Ableitungen von S nach q die verallgemeinerten Impulse sind,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}. \quad (6.60)$$

- Die totale zeitliche Ableitung von S ist L nach Definition, also

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} = \frac{\partial S}{\partial t} + p \dot{q}, \quad (6.61)$$

woraus mit der Hamiltonfunktion $H = p \dot{q} - L$ folgt

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -(p \dot{q} - L) = -H. \quad (6.62)$$

Die partielle Ableitung von S nach t ist also die negative Energie.

- Aus der Variation der Wirkung (6.55) erhalten wir entsprechend

$$\delta S = m u_\mu \delta x^\mu \quad (6.63)$$

für wahre Bahnen eines freien Teilchens. Das bedeutet, dass

$$m u_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} =: p_\mu \quad (6.64)$$

ein dualer Vierervektor ist, dessen räumliche Komponenten nach (6.60) gerade dem räumlichen Impuls und dessen zeitliche Komponente gerade der (negativen) Energie entspricht,

$$p_0 = -\frac{E}{c}, \quad p_i = \vec{p}. \quad (6.65)$$

Der dazugehörige Energie-Impuls-Vierervektor lautet

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (6.66)$$

- Die Transformation von Energie und Impuls ist jetzt leicht anzugeben. Nach (6.18) ist

$$p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu, \quad (6.67)$$

also etwa

$$\frac{E'}{c} = \gamma \frac{E}{c} + \beta \gamma p^3 \quad \Rightarrow \quad E' = \frac{E + v p^3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.68)$$

- Das Quadrat des Viererimpulses ist, schon wegen (6.33),

$$p^\mu p_\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2 c^2, \quad (6.69)$$

reproduziert also die relativistische Energie-Impuls-Beziehung (6.47).

6.7 Wechselwirkung von Ladungen mit dem Feld

- Um zu beschreiben, wie Ladungen mit dem Feld wechselwirken, muss die Wirkung bzw. die Lagrangefunktion des freien Teilchens durch Terme ergänzt werden, die sowohl Bewegungsgrößen des Teilchens als auch Feldgrößen enthalten. Wir hatten die elektrische Feldstärke so eingeführt, dass sie einer Kraft pro Ladung entspricht, und andererseits gesehen, dass im elektrostatischen Fall

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (6.70)$$

ist. Damit würde die potentielle Energie

$$V = e\phi \quad (6.71)$$

der Wechselwirkung zwischen Ladung und Feld den Beitrag $-V = -e\phi$ zur Lagrange-Funktion liefern, $L \rightarrow L - e\phi$.

- Die Frage ist nun, wie (6.71) relativistisch zu verallgemeinern wäre. Da wir insgesamt vier Potentiale eingeführt haben, nämlich ϕ und die drei Komponenten von \vec{A} , liegt es nahe, zu fordern, dass das *Viererpotential*

$$A^\mu := (\phi, \vec{A}) \quad (6.72)$$

einen Vierervektor bilde. Daraus muss nun mithilfe eines weiteren Vierervektors ein Skalar gebildet werden, und dieser weitere Vierervektor muss die Bewegung des Teilchens beschreiben. Dafür kommt etwa der Ortsvektor des Teilchens in Frage. Wir versuchen es mit der Wirkung

$$S_{\text{int}} = \sigma \int_a^b A_\mu dx^\mu, \quad (6.73)$$

die offenbar ein Lorentzskalar ist.

- Um daraus die Lagrangefunktion der Wechselwirkung zu bekommen, setzen wir

$$dx^\mu = u^\mu d\tau = u^\mu \frac{dt}{\gamma}, \quad (6.74)$$

wobei (6.29) und (6.30) verwendet wurden. Damit folgt aus (6.73)

$$L_{\text{int}} = \frac{\sigma}{\gamma} u^\mu A_\mu. \quad (6.75)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist $\gamma \approx 1$ und $u^0 \approx c$. Setzen wir $\vec{A} = 0$, folgt

$$L_{\text{int}} \approx -\sigma c \phi. \quad (6.76)$$

- Da dies $-V$ aus (6.71) ergeben muss, folgt $\sigma = e/c$ für die Konstante und wir erhalten den richtigen nichtrelativistischen Grenzfall aus

$$L_{\text{int}} = \frac{e}{c\gamma} u^\mu A_\mu, \quad A_\mu = (-\phi, \vec{A}). \quad (6.77)$$

- Zusammen mit der Wirkung bzw. der Lagrange-Funktion des freien Teilchens, (6.41) bzw. (6.42), erhalten wir für die Wirkung

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu \quad (6.78)$$

und für die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{e}{c\gamma} u^\mu A_\mu \\ &= -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e\phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

- Der verallgemeinerte Impuls \vec{P} folgt dann aus

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = mc^2 \frac{\vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \gamma m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} \\ &= \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}, \end{aligned} \quad (6.80)$$

wobei \vec{p} der gewöhnliche, dreidimensionale Impuls aus (6.33) ist.

- Die Hamilton-Funktion ergibt sich aus

$$H = \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \vec{v} \cdot \vec{P} - L. \quad (6.81)$$

Verwenden wir hier

$$\vec{v} = \frac{1}{\gamma m} \vec{P} = \frac{1}{\gamma m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \quad (6.82)$$

und ersetzen damit \vec{v} durch \vec{P} auch in der Lagrange-Funktion L , dann folgt

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\gamma m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{P} + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} \\ &\quad - \frac{e}{\gamma mc} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{A} + e\phi \\ &= \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \frac{1}{\gamma m} + \frac{mc^2}{\gamma} + e\phi. \end{aligned} \quad (6.83)$$

- Nun ist

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}{\gamma^2 m^2 c^2}, \quad (6.84)$$

also, nach Multiplikation mit γ^2 ,

$$\gamma^2 = 1 + \frac{(\vec{P} - e\vec{A}/c)^2}{m^2c^2} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{mc}{\sqrt{(\vec{P} - e\vec{A}/c)^2 + m^2c^2}}, \quad (6.85)$$

woraus mit (6.83) folgt

$$\begin{aligned} H &= \frac{c}{\sqrt{(\vec{P} - e\vec{A}/c)^2 + m^2c^2}} \left[(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^2 \right] + e\phi \\ &= \sqrt{c^2 \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + m^2c^4} + e\phi. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Dieser Ausdruck ersetzt die relativistische Energie-Impuls-Beziehung (6.47) bzw. (6.69).

- Im Grenzfall $v \ll c$ lautet die Lagrange-Funktion

$$L = -mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi, \quad (6.87)$$

und die Hamilton-Funktion geht über in

$$\begin{aligned} H &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{(\vec{P} - e\vec{A}/c)^2}{m^2c^2}} + e\phi \\ &\approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2m^2c^2} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \right] + e\phi \\ &= mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + e\phi. \end{aligned} \quad (6.88)$$

6.8 Die Lorentzkraft

- Aus der Lagrange-Funktion (6.80) folgen die Bewegungsgleichungen nach den Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0. \quad (6.89)$$

Zunächst ist

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\gamma\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (6.90)$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} &= \vec{\nabla}L = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) \\ &= -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c} [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]. \end{aligned} \quad (6.91)$$

- Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} - e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})] . \quad (6.92)$$

- Die totale Zeitableitung von \vec{A} ist

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} , \quad (6.93)$$

weshalb sich der Term $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ weghebt. Es bleibt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})] . \quad (6.94)$$

- $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ist die magnetische Feldstärke \vec{B} , und

$$-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =: \vec{E} \quad (6.95)$$

kann im Einklang mit der bisherigen elektrostatischen Definition als elektrische Feldstärke bezeichnet werden. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} =: \vec{F}_L . \quad (6.96)$$

Das ergibt die *Lorentzkraft* \vec{F}_L .

Kapitel 7

Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik

7.1 Der Tensor des elektromagnetischen Feldes

- Unsere Herleitung der Lorentzkraft im letzten Kapitel war dreidimensional insofern, als wir die Wirkung aufgefasst haben als Integral über eine Lagrangefunktion nach der Zeit, wobei die Lagrangefunktion von dreidimensionalen Orten und Geschwindigkeiten abhängt.
- Wir kehren noch einmal zur Wirkung (6.78) zurück und variieren diese,

$$\delta S = \delta \left[-mc^2 \int_a^b d\tau + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu \right] = 0 . \quad (7.1)$$

Mit $d\tau = c^{-1} \sqrt{-dx_\mu dx^\mu}$ ist

$$\delta S = m \int_a^b \frac{dx_\mu d\delta x^\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} \int_a^b \delta A_\mu dx^\mu + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu d\delta x^\mu . \quad (7.2)$$

Der erste und der dritte Term werden wieder partiell integriert:

$$m \int_a^b \frac{dx_\mu d\delta x^\mu}{d\tau} = m u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b - m \int_a^b \delta x^\mu du_\mu , \quad (7.3)$$

wobei die Vierergeschwindigkeit $u_\mu = dx_\mu/d\tau$ eingeführt wurde. Außerdem ist

$$\frac{e}{c} \int_a^b A_\mu d\delta x^\mu = \frac{e}{c} A_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b - \frac{e}{c} \int_a^b \delta x^\mu dA_\mu . \quad (7.4)$$

die Randterme in (7.3) und (7.4) verschwinden jeweils, weil die Endpunkte der Bahn festgehalten werden. Dann folgt mit (7.3)

und (7.4) aus (7.2)

$$\delta S = -m \int_a^b du_\mu \delta x^\mu - \frac{e}{c} \int_a^b dA_\mu \delta x^\mu + \frac{e}{c} \int_a^b \delta A_\mu dx^\mu . \quad (7.5)$$

Wir verwenden nun die folgenden Ausdrücke:

$$du_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau , \quad dx^\mu = u^\mu d\tau \quad (7.6)$$

sowie

$$dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu d\tau , \quad \delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu . \quad (7.7)$$

damit lauten die Terme aus (7.5)

$$\begin{aligned} m \int_a^b du_\mu \delta x^\mu &= m \int_a^b \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau \delta x^\mu , \\ \frac{e}{c} \int_a^b dA_\mu \delta x^\mu &= \frac{e}{c} \int_a^b \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu d\tau \delta x^\mu , \\ \frac{e}{c} \int_a^b \delta A_\mu dx^\mu &= \frac{e}{c} \int_a^b \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\mu d\tau \delta x^\nu \\ &= \frac{e}{c} \int_a^b \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\nu d\tau \delta x^\mu . \end{aligned} \quad (7.8)$$

Bringt man diese Terme zurück in die Variation der Wirkung (7.5), erhält man

$$\delta S = \int_a^b \left[-m \frac{du_\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu \right] d\tau \delta x^\mu = 0 , \quad (7.9)$$

was wegen der beliebigen Variation δx^μ impliziert, dass der Integrand verschwinden muss, also

$$m \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu . \quad (7.10)$$

Darin tritt der offensichtlich antisymmetrische Tensor

$$F_{\mu\nu} := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (7.11)$$

auf, mit dem sich die Bewegungsgleichung (7.10) in die Form

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad (7.12)$$

bringen lässt, die jetzt offensichtlich lorentzinvariant ist.

- Setzt man den Vierervektor $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ in die Definition (7.11) des Tensors $F^{\mu\nu}$ ein, bzw. $A_\mu = (-\phi, \vec{A})$ in die Definition von $F_{\mu\nu}$, folgt

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \frac{\partial A_i}{\partial x^0} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = -E_i \quad (1 \leq i \leq 3), \\ F_{ij} &= \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \epsilon_{ijk} B_k, \end{aligned} \quad (7.13)$$

oder, in Matrixschreibweise

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E} \\ \vec{E} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{B}_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k. \quad (7.14)$$

Dieser Tensor fasst also die Feldstärken zusammen und zeigt damit, dass es sich bei den Feldstärken nicht um Vektoren und ihre Komponenten, sondern um Tensorelemente handelt. Im Tensor $F^{\mu\nu}$ sind nur die Vorzeichen der E_i vertauscht,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E} \\ -\vec{E} & \mathcal{B} \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

7.2 Lorentztransformation der Felder

- Das Viererpotential A^μ bildet einen Vierervektor, wird also nach (6.18) lorentztransformiert: $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$, und daher

$$\phi' = \gamma\phi + \beta\gamma A_3, \quad A'_3 = \beta\gamma\phi + \gamma A_3, \quad A'_{1,2} = A_{1,2}. \quad (7.16)$$

Wie jeder Tensor zweiter Stufe wird $F_{\mu\nu}$ bzw. $F^{\mu\nu}$ nach

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (7.17)$$

transformiert. Für die in (6.18) angegebene spezielle Lorentztransformation lässt sich dies vereinfachen, weil dieses Λ^μ_ν jeweils 1- und 2-Komponenten invariant lässt. Es ist also

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^0_\alpha F^{\alpha 1} = \Lambda^0_0 F^{01} + \Lambda^0_3 F^{31} \\ F'^{02} &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^2_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^0_\alpha F^{\alpha 2} = \Lambda^0_0 F^{02} + \Lambda^0_3 F^{32} \\ F'^{12} &= \Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\beta F^{\alpha\beta} = F^{12} \\ F'^{13} &= \Lambda^1_\alpha \Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^3_\beta F^{1\beta} = \Lambda^3_0 F^{10} + \Lambda^3_3 F^{13} \\ F'^{03} &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^0_\alpha (\Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta}) \\ &= \Lambda^0_3 \Lambda^3_0 F^{30} + \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} = (\Lambda^0_3 \Lambda^3_0 - \Lambda^0_0 \Lambda^3_3) F^{03} \\ F'^{23} &= \Lambda^2_\alpha \Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^3_\beta F^{2\beta} = \Lambda^3_0 F^{20} + \Lambda^3_3 F^{23}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Aus diesen Gleichungen folgt mit Λ^μ_ν aus (6.18) und $F^{\mu\nu}$ aus (7.15)

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma E_x + \beta\gamma B_y, & E'_y &= \gamma E_y - \beta\gamma B_x, & E'_z &= E_z, \\ B'_x &= \gamma B_x - \beta\gamma E_y, & B'_y &= \gamma B_y + \beta\gamma E_x, & B'_z &= B_z \end{aligned} \quad (7.19)$$

- Diese Transformationsregeln zeigen nochmals deutlich, dass \vec{E} und \vec{B} keine Vektoren sind, und dass sie auch nicht getrennt voneinander existieren. Ist etwa im ungestrichenen System $\vec{B} = 0$, folgt aus (7.19)

$$\vec{B}' = \beta\gamma \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}' = \begin{pmatrix} \gamma E_x \\ \gamma E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Ist im ungestrichenen System $\vec{E} = 0$, folgt dagegen

$$\vec{E}' = \beta\gamma \begin{pmatrix} B_y \\ -B_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}' = \begin{pmatrix} \gamma B_x \\ \gamma B_y \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

- Es gilt dann offenbar jeweils $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$, d.h. in diesem Fall stehen \vec{E}' und \vec{B}' senkrecht aufeinander. Umgekehrt gilt, dass sich ein Bezugssystem finden lässt, in dem das Feld rein magnetisch oder rein elektrisch ist, wenn die beiden Felder senkrecht aufeinander stehen.
- Im Grenzfall $v \ll c$ ist $\gamma \approx 1$ und die Transformationen (7.19) werden zu

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x + \frac{v}{c} B_y, & E'_y &= E_y - \frac{v}{c} B_x, & E'_z &= E_z \\ B'_x &= B_x - \frac{v}{c} E_y, & B'_y &= B_y + \frac{v}{c} E_x, & B'_z &= B_z. \end{aligned} \quad (7.22)$$

7.3 Das Wirkungsintegral des elektromagnetischen Feldes

- Bisher enthält die Wirkung (6.78) zwar den Beitrag des freien Teilchens und den der Wechselwirkung geladener Teilchen mit äußeren elektromagnetischen Feldern, aber noch nicht den Beitrag des Feldes selbst.
- Um diesen zu konstruieren, müssen wir aus dem Feldstärkensor $F^{\mu\nu}$ einen Skalar bilden. Etwa F^μ_μ , weil die Wirkung ein Skalar sein muss. Allerdings müssen wir dafür sorgen, dass die Feldgleichungen, die aus der Variation der Wirkung folgen, linear in $F^{\mu\nu}$ sind, denn die Erfahrung zeigt, dass elektromagnetische Felder linear überlagert werden können (Superpositionsprinzip). Also brauchen wir einen Skalar, der quadratisch in $F^{\mu\nu}$ ist, etwa $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$.
- Wir versuchen es also mit dem Beitrag

$$S_f = \alpha \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x \quad (7.23)$$

zur Wirkung, wobei die Konstante α noch zu bestimmen bleibt.

- Wir müssen nun auch den Term

$$\frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu \quad (7.24)$$

aus der Wirkung (6.78) in eine Form bringen, in der über d^4x integriert wird. Dazu beobachten wir, dass die im räumlichen Volumen d^3x enthaltene Ladung $de = \rho d^3x$ invariant sein muss, woraus zunächst folgt, dass

$$de dx^\mu = \rho d^3x dx^\mu = \rho d^3x dx^0 \frac{dx^\mu}{cdt} = \rho d^4x \frac{dx^\mu}{c dt} \quad (7.25)$$

ein Vierervektor ist, denn der Ausdruck auf der linken Seite ist linear in dx^μ . Nun ist aber d^4x ein Lorentzskalar, also ist der Ausdruck

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \quad (7.26)$$

ein Vierervektor, der so genannte Viererstrom. Seine räumlichen Komponenten sind

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (7.27)$$

bilden also die gewöhnliche dreidimensionale Stromdichte, und seine zeitliche Komponente ist offenbar wegen $dx^0 = c dt$

$$j^0 = \rho c. \quad (7.28)$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.49) lässt sich mithilfe des Viererstroms durch die vierdimensionale Divergenz

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (7.29)$$

ausdrücken, die oft abkürzend in der Form

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{oder} \quad j^\mu_{;\mu} = 0 \quad (7.30)$$

geschrieben wird.

- Wir schreiben nun (7.24) um, indem wir

$$dx^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} dt \quad \text{und} \quad e \rightarrow \int_V \rho d^3x \quad (7.31)$$

verwenden. Damit erhalten wir

$$\frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu \rightarrow \frac{1}{c} \int_a^b \int_V \rho A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} dt d^3x, \quad (7.32)$$

was sich mit (7.26) auf die Form

$$\frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4x \quad (7.33)$$

bringen lässt.

- Wir erhalten somit die Wirkung

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau + \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4x + a \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x . \quad (7.34)$$

Wir variieren diese Wirkung nun bezüglich der Felder A_μ und ihrer Ableitungen,

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} =: A_{\mu,\nu} , \quad (7.35)$$

wobei die Bewegung der Ladungen vorgegeben sei. Demnach verschwindet die Variation des ersten Terms in (7.34), und aus der Variation der beiden anderen Terme folgt

$$\delta S = \frac{1}{c^2} \int j^\mu \delta A_\mu d^4x + 2a \int F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4x = 0 , \quad (7.36)$$

denn

$$\delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = (\delta F^{\mu\nu}) F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} . \quad (7.37)$$

Wegen

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (7.38)$$

ist

$$\delta F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu , \quad (7.39)$$

weshalb der zweite Term aus (7.36) lautet

$$\begin{aligned} 2a \int F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4x &= 2a \int F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right) d^4x \\ &= 2a \int \left[(F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}) \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu} \right] d^4x \\ &= -4a \int F^{\mu\nu} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu} d^4x . \end{aligned} \quad (7.40)$$

Partielle Integration überführt diesen Ausdruck in

$$-4a \int F^{\mu\nu} \delta A_\mu dS_\nu + 4a \int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \delta A_\mu d^4x , \quad (7.41)$$

wobei im ersten Term über den Rand des Volumens im vierdimensionalen Raum integriert wird, wo die Variationen δA_μ der Felder nach Voraussetzung verschwinden. Deswegen fällt der erste Term aus (7.41) weg, und wir erhalten aus (7.39) mit (7.41) und (7.39)

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c^2} \int j^\mu \delta A_\mu d^4x + 4a \int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \delta A_\mu d^4x \\ &= \int \left(4a \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{j^\mu}{c^2} \right) \delta A_\mu d^4x = 0 . \end{aligned} \quad (7.42)$$

Daraus folgt, weil die Variationen δA_μ beliebig sind,

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{j^\mu}{4ac^2}. \quad (7.43)$$

Die Zeitkomponente dieser Gleichung lautet

$$\underbrace{\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3}}_{=\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} = -\frac{\rho}{4ac}, \quad (7.44)$$

was mit $a = -1/16\pi c$ mit der Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ übereinstimmt.

- Die räumlichen Komponenten von (7.43) ergeben dann

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c} j_x \quad \text{usw.}, \quad (7.45)$$

also

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x \quad \text{usw.}, \quad (7.46)$$

insgesamt also die Maxwell-Gleichung

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} = c \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (7.47)$$

Wir finden also zweierlei: Erstens lässt sich die Wirkung des freien elektromagnetischen Feldes durch

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x \quad (7.48)$$

darstellen, und zweitens ergibt die Variation der gesamten Wirkung im Hinblick auf die Feldstärken „nur“ die beiden Maxwell-Gleichungen, die die Felder zu Strömen bzw. Ladungsdichten in Beziehung setzen.

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad c \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}. \quad (7.49)$$

Die beiden anderen Gleichungen setzen \vec{E} und \vec{B} zueinander in Beziehung. Man erhält sie aus $F^{\mu\nu}$, indem man feststellt, dass die folgende Identität gilt:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (7.50)$$

Dies ist offensichtlich, wenn man $F_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}$ einsetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} &= (A_{\beta,\alpha\gamma} - A_{\alpha,\beta\gamma}) + (A_{\gamma,\beta\alpha} - A_{\beta,\gamma\alpha}) \\ &+ (A_{\alpha,\gamma\beta} - A_{\gamma,\alpha\beta}) = 0. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Auf der linken Seite von (7.50) steht ein Tensor dritter Stufe, der in allen Indizes antisymmetrisch ist. Deshalb können nur seine Elemente mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ nicht verschwinden. Also enthält (7.50) nur vier Gleichungen, die nicht identisch verschwinden. Diese Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 2) : \quad & \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial x^0} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial B_z}{\partial t} = -c (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z \end{aligned} \quad (7.52)$$

und ebenso für die anderen Komponenten der Gleichung

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \vec{\nabla} \times \vec{E} . \quad (7.53)$$

Außerdem folgt mit

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3) : \quad & \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 . \end{aligned} \quad (7.54)$$

Die Maxwell-Gleichungen lassen sich vierdimensional also in der Form

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 , \quad F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (7.55)$$

darstellen und erweisen damit ihre Lorentz-Invarianz. Die gesamte Wirkung von geladenen, relativistischen Teilchen und elektromagnetischen Feldern lautet schließlich

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau + \frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) d^4x . \quad (7.56)$$

Der erste Term im zweiten Integral beschreibt die Wechselwirkung von Teilchen und Feldern, der zweite die Feldgleichungen. Durch Variation von S im Hinblick auf die Teilchenbahn hatten wir die Lorentzkraft erhalten, durch Variation bezüglich der Potentiale A_μ und ihrer Ableitungen $A_{\mu,\nu}$ die Feldgleichungen.

7.4 Der Energie-Impuls-Tensor

- Die Wirkung des elektromagnetischen Feldes hat, wie wir gesehen haben, die Form

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}) d^4x , \end{aligned} \quad (7.57)$$

wobei \mathcal{L} eine *Lagrangedichte* ist, die von den „verallgemeinerten Koordinaten“ A_μ und ihren Ableitungen $A_{\mu,\nu}$ abhängt. Ein Faktor c^{-1} wird vor das Integral gezogen, damit die Lagrangedichte die Dimension einer Energiedichte erhält.

- Man geht in der Feldtheorie häufig den Weg, die Lagrangedichte aus allgemeinen Forderungen an die Theorie vorzugeben, so wie wir gefordert haben, dass sie quadratisch in $F^{\mu\nu}$ sein soll, und dann die beobachtbaren Konsequenzen einer solchen Theorie auszuarbeiten.
- Sei also eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(q, q_{,\mu})$ vorgegeben, die von verallgemeinerten Koordinaten q und deren Ableitungen $q_{,\mu}$ abhängen möge. Diese verallgemeinerten Koordinaten entsprechen in einer Feldtheorie den Feldern und ihren Ableitungen. Weiterhin verlangen wir, dass die Feldgleichungen aus dem Wirkungsprinzip

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(q, q_{,\mu}) d^4x = 0 \quad (7.58)$$

folgen mögen.

- Durch die Variation (7.58) erhalten wir

$$\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) d^4x = 0, \quad (7.59)$$

was sich in der Form

$$\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^\mu \partial q_{,\mu}} \right] d^4x = 0 \quad (7.60)$$

schreiben lässt. Der zweite Term ist eine Divergenz, die nach dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden kann, das verschwindet, wenn der Rand das System umschließt. Damit folgt wegen der beliebigen Variation δq aus (7.60) die Feldgleichung

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^\mu \partial q_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \quad (7.61)$$

die wie die Lagrangegleichungen zweiter Art der Mechanik die Eulergleichungen des Variationsprinzips (7.58) sind.

- Wir verwenden nun

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x^\nu} \quad (7.62)$$

und setzen darin (7.61) ein. Das ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^\mu \partial q_{,\mu}} \frac{\partial q}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(q_{,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \right). \quad (7.63)$$

dabei wurden im zweiten Term die Summationsindizes μ und ν vertauscht. Da außerdem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad (7.64)$$

ist, kann (7.63) in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(q_{,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) =: \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\nu^\mu = 0 \quad (7.65)$$

geschrieben werden.

- Diese verschwindende Viererdivergenz eines Tensors T_ν^μ bedeutet, wie die Kontinuitätsgleichung (7.29), einen Erhaltungssatz. Dazu betrachten wir das 0-0-Element des Tensors T_ν^μ , also

$$T_0^0 = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}. \quad (7.66)$$

In der klassischen Mechanik ist das die Legendre-Transformation, die die Lagrangefunktion in die Hamiltonfunktion überführt, also in die Energie. Da wir hier die Lagrangedichte Legendre-transformieren, setzen wir daher diesen Ausdruck der Energiedichte des Feldes gleich, das durch die Lagrangedichte \mathcal{L} beschrieben wird.

- Die Viererdivergenz (7.65) lässt sich in dreidimensionaler Form als

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial T_0^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) = 0 \quad (7.67)$$

schreiben, wobei \vec{S} der dreidimensionale Vektor

$$S^i = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,i}} = c T_0^i \quad (7.68)$$

ist. Da T_0^0 die Energiedichte ist, muss \vec{S} die Energiestromdichte sein, also die pro Zeit und Fläche fließende Energie. Dann formuliert (7.67) die Energieerhaltung.

- Da Energie und Impuls zusammen einen Vierervektor bilden, liegt es nahe, die anderen drei Gleichungen aus (7.65) als Ausdrücke der Impulserhaltung aufzufassen. Etwa

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T_i^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial T_i^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} T_i^j = 0. \quad (7.69)$$

Demnach wäre T_i^0/c die Impulsdichte, die nach (7.68) gerade gleich dem $1/c^2$ -fachen der Energiestromdichte ist. Die Dimension der Energiestromdichte ist

$$\left[c T_0^i \right] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ s}}, \quad (7.70)$$

also ist die Dimension von

$$\left[\frac{1}{c} T_i^0 \right] = \frac{\text{s}^2}{\text{cm}^2} \cdot \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{s}} = \frac{\text{s}}{\text{cm}^4} \cdot \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{g cm}}{\text{s cm}^3}, \quad (7.71)$$

also tatsächlich eine Impulsdichte. Der Vektor

$$T_i^j \quad \text{für festes } i \quad (7.72)$$

gibt also die Impulsstromdichte an, also die Stromdichte der i -Komponente des Impulses in j -Richtung. Der 3×3 -Tensor

$$T_j^i = q_{,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,i}} - \delta_j^i \mathcal{L}, \quad (7.73)$$

der den Impulstransport kennzeichnet, heißt Spannungstensor.

- Der Energie-Impuls-Tensor ist nicht eindeutig definiert, denn die Transformation

$$T_\nu^\mu \rightarrow T_\nu^\mu + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \psi_\nu^{\mu\lambda} \quad \text{mit} \quad \psi_\nu^{\mu\lambda} = -\psi_\nu^{\lambda\mu} \quad (7.74)$$

lässt die Erhaltungssätze invariant, weil die Viererdivergenz

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \psi_\nu^{\mu\lambda} \quad (7.75)$$

wegen der Antisymmetrie von $\psi_\nu^{\mu\lambda}$ verschwindet. Der Energie-Impuls-Tensor wird eindeutig, wenn man fordert, dass er symmetrisch sei

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (7.76)$$

7.5 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

- Wir spezialisieren nun die erhaltenen Beziehungen auf die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (7.77)$$

des freien elektromagnetischen Feldes, also des Feldes ohne Quellen j^μ . Da $F^{\mu\nu}$ nur Ableitungen der Potentiale enthält, lautet der Energie-Impuls-Tensor nach (7.65)

$$T_\nu^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 A_{\lambda,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\mu}} + \delta_\nu^\mu \frac{F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}{16\pi}. \quad (7.78)$$

Um die Ableitungen von \mathcal{L} nach den $A_{\lambda,\mu}$ zu bestimmen, variieren wir \mathcal{L} ,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{16\pi} \cdot 2F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \delta(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\beta} \delta A_{\beta,\alpha} \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\mu}} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda},\end{aligned}\quad (7.79)$$

woraus der Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\nu}^{\mu} = -\frac{1}{4\pi} A_{\lambda,\nu} F^{\mu\lambda} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\nu}^{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (7.80)$$

folgt. Da dieser Tensor nicht symmetrisch ist, verwenden wir die Freiheit (7.75), um ihn zu symmetrisieren. Dazu setzen wir

$$\psi_{\nu}^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} A_{\nu}, \quad (7.81)$$

was wegen der Antisymmetrie des Feldtensors offenbar die Antisymmetriebedingung an $\psi_{\nu}^{\mu\lambda}$ erfüllt. Die Divergenz dieses Ausdrucks ist

$$\partial_{\lambda} \psi_{\nu}^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi} (\partial_{\lambda} F^{\mu\lambda} A_{\nu} + F^{\mu\lambda} A_{\nu,\lambda}) = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} A_{\nu,\lambda}, \quad (7.82)$$

weil das freie Feld die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt,

$$\partial_{\lambda} F^{\mu\lambda} = 0. \quad (7.83)$$

Addieren wir die Divergenz (7.82) zum Energie-Impuls-Tensor (7.80), erhalten wir

$$\begin{aligned}T_{\nu}^{\mu} &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} (A_{\lambda,\nu} - A_{\nu,\lambda}) + \frac{1}{16\pi} \delta_{\nu}^{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[-F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right],\end{aligned}\quad (7.84)$$

so dass $T^{\mu\nu}$ nun offensichtlich ein symmetrischer Tensor ist. Dies ist der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes.

- Für das Produkt $F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda}$ folgt zunächst aus (7.14) und (7.16)

$$\begin{aligned}F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} &= F^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu}^T = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^T \\ -\vec{E} & \mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^T \\ -\vec{E} & \mathcal{B}^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\vec{E}^2 & \vec{E}^T \mathcal{B}^T \\ -\mathcal{B} \vec{E} & -\vec{E} \vec{E}^T + \mathcal{B} \mathcal{B}^T \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (7.85)$$

Außerdem ist

$$(\mathcal{B} \mathcal{B}^T)_{ik} = \epsilon_{ija} B_a \epsilon_{kjb} B_b = (\delta_{ik} \delta_{ab} - \delta_{ib} \delta_{ak}) B_a B_b = \delta_{ik} \vec{B}^2 - B_i B_k, \quad (7.86)$$

und deswegen folgt

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \text{tr}(F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda}) = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (7.87)$$

- Damit folgt für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$T_0^0 = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (7.88)$$

und für die Komponenten der Energiestromdichte

$$cT_0^i = \frac{c}{4\pi} \mathcal{B} \vec{E} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) =: \vec{S} . \quad (7.89)$$

Dieser Vektor heißt *Poynting-Vektor*; mit ihm lautet die Energieerhaltung für das elektromagnetische Feld

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \right] = 0 . \quad (7.90)$$

Wir bemerken noch, dass die Spur von $T^{\mu\nu}$ verschwindet, denn wegen $\delta_\mu^\mu = 4$ ist

$$T_\mu^\mu = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0 . \quad (7.91)$$

Kapitel 8

Teilchen in Feldern, Energie-Impuls-Erhaltung

8.1 Energie-Impuls-Bilanz und ohmsches Gesetz

- Wir haben in 7.4 ein allgemeines Verfahren kennengelernt, den Energie-Impuls-Tensor T_ν^μ eines Feldes zu bestimmen, das die Lagrangedichte \mathcal{L} hat. Spezifiziert auf die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (8.1)$$

und nach Symmetrisierung hatten wir

$$T_\nu^\mu = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{16\pi} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (8.2)$$

erhalten. Die Energie-Impuls-Erhaltung wird durch die verschwindende Viererdivergenz

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (8.3)$$

ausgedrückt.

- Wenn wir nun Wechselwirkung zwischen (geladenen) Teilchen und Feldern mit berücksichtigen, gelten die Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \text{statt} \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (8.4)$$

aber der Energie-Impuls-Tensor des *freien* Feldes bleibt unverändert. Dadurch ändert sich die Divergenz von T_ν^μ zu

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_\nu^\mu &= -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu \left(F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[\partial_\mu F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + F^{\mu\lambda} \partial_\mu F_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial_\nu F^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Der erste Term ergibt nun, wegen der inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (7.54)

$$\partial_\mu F^{\mu\lambda} = -\frac{4\pi}{c} j^\lambda, \quad (8.6)$$

womit (8.5) sich zu

$$\partial_\mu T_\nu^\mu - \frac{1}{c} F_{\nu\lambda} j^\lambda = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} \left(\partial_\mu F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu F_{\mu\lambda} \right) \quad (8.7)$$

umformen lässt. Dabei wurden im zweiten Term die Summationsindizes α, β durch μ, λ ausgetauscht.

- Nun verwenden wir im ersten Term auf der rechten Seite von (8.7) die homogene Maxwell-Gleichung (7.54)

$$\partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} = 0, \quad (8.8)$$

um zu schreiben

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu F_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\lambda\nu} - \partial_\lambda F_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Dieser Tensor 3. Stufe ist offenbar in λ und μ symmetrisch. Wenn er wie in (8.7) mit dem antisymmetrischen Tensor $F^{\mu\lambda}$ kontrahiert wird, verschwindet das Ergebnis, und daher wird (8.7) zu

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{c} F_{\nu\lambda} j^\lambda, \quad (8.10)$$

was die Erhaltungsgleichung $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$ in solchen Situationen ersetzt, in denen Felder und geladene Teilchen wechselwirken.

- Der duale Vierervektor auf der rechten Seite von (8.10),

$$f_\nu = \frac{1}{c} F_{\nu\lambda} j^\lambda \quad (8.11)$$

hat offenbar die folgenden Komponenten:

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}, \\ \vec{f} &= \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (8.12)$$

also

$$f^\mu = \left(\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}, \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right). \quad (8.13)$$

Der räumliche Anteil von f^μ ist also die Dichte der Lorentzkraft (??).

- Damit lautet die Energieerhaltungsgleichung, also die 0-Komponente der Divergenzgleichung (8.10)

$$c\partial_\mu T_0^\mu = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \right] = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (8.14)$$

Auf der linken Seite steht die Energieänderung des Feldes, auf der rechten Seite ein Ausdruck, der beschreibt, welche Arbeit das Feld an den Ladungen pro Zeit verrichtet.

- Wir sehen daraus zweierlei: Offenbar führt die Wechselwirkung des Feldes mit den Ladungen zu einem Energieverlust des Feldes, der pro Zeit und Volumen

$$-\vec{E} \cdot \vec{j} \quad (8.15)$$

beträgt. An diesem Energieverlust ist das Magnetfeld nicht beteiligt.

- Wenn, wie in (1.50) angenommen,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (8.16)$$

gilt, wird der Energieverlust pro Zeit und Volumen zu

$$-\vec{E} \cdot \vec{j} = -\sigma \vec{E}^2 = -\frac{\vec{j}^2}{\sigma}, \quad (8.17)$$

verschwindet also bei unendlicher Leitfähigkeit und endlichen Stromdichten. Die Gleichungen (8.15) bzw. (8.17) generalisieren das ohmsche Gesetz.

- Die Impulserhaltung wird durch den räumlichen Teil der Divergenzgleichung (8.10) formuliert,

$$\begin{aligned} \partial_0 T_i^0 + \partial_j T_i^j &= f_i = \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right)_i \\ \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{S} + (\partial_j T_i^j) &= \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right)_i, \end{aligned} \quad (8.18)$$

die Änderung der Impulsdichte \vec{S}/c^2 ist also durch die Divergenz des Spannungstensors T_i^j und durch die Lorentzkraftdichte gegeben.

8.2 Bewegung in homogenen, statischen Feldern

- Vorgegeben sei zunächst ein homogenes, statisches elektrisches Feld $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_z$. Die Bewegung eines Teilchens der Ladung e ist

durch die Lorentzkraft bestimmt (vgl. ??),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{E}, \quad (8.19)$$

woraus folgt

$$\dot{p}_z = eE, \quad \dot{p}_x = 0 = \dot{p}_y. \quad \text{also} \quad \vec{p} = \vec{p}_0 + eEt\vec{e}_z \quad (8.20)$$

nach der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung (6.69) ist

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + c^2(eEt)^2} \quad (8.21)$$

die kinetische Energie des Teilchens, wenn $p_{z0} = 0$ angenommen wird. Zur Unterscheidung vom elektrischen Feld E wird die Energie hier durch \mathcal{E} ausgedrückt. Bei $t = 0$ ist dann

$$\mathcal{E} =: \mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2} \quad (8.22)$$

und damit

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \quad (8.23)$$

die Geschwindigkeit folgt dann aus (6.49),

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} = \frac{c^2(\vec{p}_0 + eEt\vec{e}_z)}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}, \quad (8.24)$$

für die Komponente von v in Feldrichtung also

$$v_z = \frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}. \quad (8.25)$$

durch Integration ergibt sich für die Ortskoordinate

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t \frac{c^2eEt' dt'}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt')^2}} = \frac{1}{2eE} \int_0^{(ceEt)^2} \frac{d(ceEt')^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt')^2}} \\ &= \frac{1}{2eE} \int_{\mathcal{E}_0^2}^{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{eE} \left(\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} - \mathcal{E}_0 \right), \end{aligned} \quad (8.26)$$

während für die anderen Koordinaten folgt

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{c^2}{\mathcal{E}} p_x = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} \quad (8.27) \\ \Rightarrow \quad x &= c^2 p_0 \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt')^2}} = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arcsinh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}, \end{aligned}$$

wenn $x(t = 0) = 0$ gesetzt wird. Dasselbe folgt für v_y bzw. y , wenn \vec{p}_0 eine Komponente in y -Richtung hat.

- Setzen wir $\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_x$ und $z(0) = \mathcal{E}_0/(eE)$ voraus, erhalten wir zunächst aus (8.26)

$$t = \frac{\mathcal{E}_0}{ceE} \sinh \frac{eEx}{cp_0}, \quad (8.28)$$

und damit aus (8.27)

$$z(x) = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_0^2 \sinh^2 \frac{eEx}{cp_0}} = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \frac{eEx}{cp_0}. \quad (8.29)$$

das Teilchen beschreibt offenbar eine *Kettenlinie*. Im Grenzfall $v \ll c$ ist $p_0 \approx mv_0$ und $E \approx mc^2$, also

$$z(x) \approx \frac{mc^2}{eE} \cosh \frac{eEx}{cmv_0}. \quad (8.30)$$

Wegen

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} \quad (x \ll 1) \quad (8.31)$$

folgt dann die aus der klassischen (nicht-relativistischen) Mechanik erwartete Wurfparabel,

$$z(x) \approx \frac{mc^2}{eE} \left[1 + \left(\frac{eEx}{cmv_0} \right)^2 \frac{1}{2} \right] = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 + \text{const.} \quad (8.32)$$

- Im homogenen, statischen Magnetfeld, $\vec{B} = B \vec{e}_z$, lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{E} \vec{v}}{c^2} \right), \quad (8.33)$$

wobei im zweiten Schritt verwendet wurde, dass die Energie \mathcal{E} im reinen Magnetfeld konstant ist (vgl. 8.13). Es folgt dann in Komponenten

$$\dot{v}_z = 0, \quad \dot{v}_x = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \frac{e}{c} v_y B = \frac{ceB}{\mathcal{E}} v_y, \quad \dot{v}_y = -\frac{ceB}{\mathcal{E}} v_x. \quad (8.34)$$

Die Größe

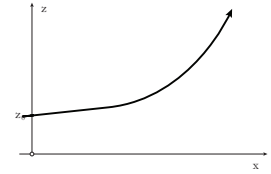
$$\frac{ceB}{\mathcal{E}} =: \omega \quad (8.35)$$

hat offenbar die Dimension einer Frequenz, also 1/Zeit. Aus (8.34) erhalten wir

$$(v_x + iv_y)' = -i\omega(v_x + iv_y), \quad (8.36)$$

also eine Gleichung für die komplexe Geschwindigkeit $v_x + iv_y$. Der naheliegende Ansatz

$$(v_x + iv_y) = ae^{-i\omega t} \quad (8.37)$$



Bewegung im homogenen elektrischen Feld

löst offenbar diese Gleichung. Wir schreiben die (komplexe) Amplitude noch in der Form

$$a = v_t e^{-i\alpha} \quad (8.38)$$

mit reellem v_t und der Phase α und erhalten

$$v_x = v_t \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_t \sin(\omega t + \alpha). \quad (8.39)$$

die Bewegung findet offenbar in der x - y -Ebene entlang einer Kreisbahn statt, die mit der Kreisfrequenz ω durchlaufen wird; $v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ist die konstante (tangentielle) Umlaufgeschwindigkeit.

- Integration von (8.39) ergibt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_t \sin(\omega t + \alpha) \frac{1}{\omega}, \\ y(t) &= y_0 + v_t \cos(\omega t + \alpha) \frac{1}{\omega}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Dabei ist der *Bahnradius* offenbar

$$r = \frac{v_t}{\omega} = \frac{v_t E}{ceB} = \frac{cp_t}{eB}. \quad (8.41)$$

die Bewegung in z -Richtung (längs des Feldes) erfolgt unbeschleunigt, also ist

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t. \quad (8.42)$$

Demnach erfolgt die Bewegung des Teilchens auf einer Schraubenbahn mit Radius (8.41) und Ganghöhe

$$\Delta z = v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi v_{0z} \frac{\mathcal{E}}{ceB} = 2\pi v_{0z} \frac{r}{v_t}. \quad (8.43)$$

im nichtrelativistischen Grenzfall ist

$$\omega \approx \frac{ceB}{mc^2} = \frac{eB}{mc}, \quad r \approx \frac{v_t mc}{eB}. \quad (8.44)$$

8.3 Adiabatische Invarianz

- Wir betrachten nun ganz allgemein ein abgeschlossenes, begrenztes System, das eine finite Bewegung ausführt, die durch eine Bewegungsperiode τ gekennzeichnet ist. Dieses System möge von einem Parameter λ abhängen.
- Wenn dieser Parameter λ sich mit der Zeit ändert, ist das System nicht mehr abgeschlossen. Wir betrachten nun die Situation, in der sich λ langsam ändert, also auf einer Zeitskala, die gegenüber τ klein ist, so dass

$$\tau \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \quad (8.45)$$

ist. Solche Änderungen heißen *adiabatisch*.

- Wegen der Änderung von λ wird sich auch die Energie des Systems ändern, aber sie wird dies langsam tun. Wir fragen nun nach Größen, die während derart langsamer Änderungen als „adiabatische Invariante“ betrachtet werden können.
- Sei $H(p, q, \lambda)$ die Hamiltonfunktion dieses Systems, dann ist

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad (8.46)$$

die zeitliche Änderung der Energie \mathcal{E} , denn wegen der Hamiltonschen Gleichungen ist

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} = \dot{q}\dot{p} - \dot{p}\dot{q} = 0. \quad (8.47)$$

Wir mitteln nun die Gleichung (8.46) über eine Bewegungsperiode, um die Abhängigkeit der rechten Seite von p und q loszuwerden,

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{\tau} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right\rangle_{\tau} = \frac{d\lambda}{dt} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\tau}, \quad (8.48)$$

wobei benutzt wurde, dass sich λ während einer Bewegungsperiode nur sehr wenig ändert, weshalb $\frac{d\lambda}{dt}$ vor das Mittelungssymbol gezogen werden kann. Die Mittelung von $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ lautet explizit

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (8.49)$$

wobei man $dt = dq/\dot{q}$ schreiben kann, worin $\dot{q} = \partial H/\partial p$ nach den Hamiltonschen Gleichungen verwendet werden kann. Damit wird das Mittel zu

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \oint \frac{dq}{\partial H/\partial p} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) = \frac{\oint \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} dq}{\oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}}, \quad (8.50)$$

denn die Umlaufperiode τ ist

$$\tau = \oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}. \quad (8.51)$$

Das Integral erstreckt sich dabei jeweils über eine volle (geschlossene) Bahn. Dabei wird λ als konstant angesehen, sodass auch die Energie als konstant angenommen werden kann.

- Wir betrachten nun den Impuls p als Funktion des Ortes q und der beiden konstanten Parameter \mathcal{E} und λ ,

$$p = p(q; \mathcal{E}, \lambda), \quad (8.52)$$

und betrachten die Änderung von \mathcal{E} mit λ ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0, \quad (8.53)$$

woraus folgt, dass

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (8.54)$$

ist, was in (8.50) gebraucht wird.

- Damit ergibt sich für das Zeitmittel der Energieänderung

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{\tau} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p/\partial \lambda}{} dq}{\oint \frac{\partial p/\partial \mathcal{E}}{} dq}, \quad (8.55)$$

wobei

$$\frac{1}{\partial H/\partial p} = \frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} \quad (8.56)$$

geschrieben wurde, denn wir haben ja den Impuls p als Funktion auch der Energie \mathcal{E} ausgedrückt.

- Damit erhalten wir

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{\tau} \oint \frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} dq + \frac{d\lambda}{dt} \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq = 0 \quad (8.57)$$

oder, indem wir die Konstanz von $\langle d\mathcal{E}/dt \rangle_{\tau}$ und $d\lambda/dt$ benutzen,

$$\oint \left[\frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{\tau} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right] dq = 0. \quad (8.58)$$

Sei nun die Größe I definiert durch

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (8.59)$$

dann ist der Mittelwert über eine Umlaufperiode ihrer zeitlichen Änderung

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle_{\tau} = \frac{1}{2\pi} \oint \left[\frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{\tau} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right] dq = 0, \quad (8.60)$$

also ist I wegen (8.58) im Rahmen der adiabatischen Näherung eine Invariante, eben die gesuchte *adiabatische Invariante*.

- Im einfachen Beispiel des harmonischen Oszillators ist

$$p = m\dot{q}, \quad q = q_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (8.61)$$

also

$$p = -mq_0\omega \sin(\omega t + \alpha), \quad dq = \dot{q}dt = \frac{p}{m}dt \quad (8.62)$$

und

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{p^2}{m} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} m\omega^2 q_0^2 \sin^2(\omega t + \alpha) dt \\ &= \frac{m\omega q_0^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \sin^2 x dx = \frac{m\omega q_0^2}{2} = \frac{\mathcal{E}}{\omega}, \end{aligned} \quad (8.63)$$

worin $\mathcal{E} = m\omega^2 q_0^2/2$ die Energie des harmonischen Oszillators ist. Damit I invariant sein kann, muss also \mathcal{E} sich proportional zu ω ändern, wenn sich ein Parameter des Oszillators adiabatisch ändert (also m oder k).

8.4 Bewegung im schwach veränderlichen Magnetfeld

- Wir wenden nun die Betrachtung der adiabatischen Invarianten auf die Bewegung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld an, das sich langsam zeitlich und räumlich ändert. Dabei bedeutet „langsam“, dass die Zeitskala der Änderung groß gegenüber der Umlaufzeit

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\mathcal{E}}{ceB} \quad (8.64)$$

des Teilchens im Magnetfeld ist.

- Nach (8.59) ist die maßgebliche adiabatische Invariante

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{P}_t \cdot d\vec{x}, \quad (8.65)$$

wobei \vec{P}_t die Tangentialkomponente des kanonischen Impulses aus (6.81) ist,

$$\vec{P}_t = \vec{p}_t + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (8.66)$$

denn nur die Bewegung des Teilchens senkrecht zum Magnetfeld ist periodisch.

- Also ist

$$I = \frac{1}{2\pi} \left[\oint \vec{p}_t \cdot d\vec{x} + \frac{e}{c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \right], \quad (8.67)$$

wobei im ersten Term \vec{p}_t dem Betrag nach konstant bleibt und parallel zu $d\vec{x}$ ist, also

$$\oint \vec{p}_t \cdot d\vec{x} = 2\pi r p_t. \quad (8.68)$$

im zweiten Term verwenden wir den Stokesschen Satz, um das Linien- durch ein Flächenintegral zu ersetzen,

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = -r^2 \pi B, \quad (8.69)$$

da ja \vec{B} senkrecht auf der von der Bahn eingeschlossenen Fläche steht. Mit

$$r = \frac{cp_t}{eB} \quad (8.70)$$

aus (8.63) folgt

$$I = \frac{cp_t^2}{eB} - \frac{B}{2} \left(\frac{cp_t}{eB} \right)^2 \cdot \frac{e}{c} = \frac{cp_t^2}{2eB} \quad (8.71)$$

für die adiabatische Invariante: p_t verändert sich also proportional zu \sqrt{B} .

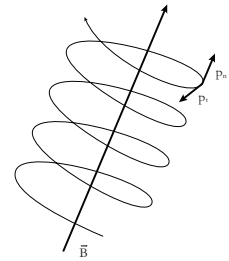
- Dies gilt auch für räumliche Änderungen des Magnetfeldes, wenn sie „vom Teilchen aus betrachtet“ langsam sind, d.h. wenn die räumliche Änderung auf einer Längenskala stattfindet, die groß gegenüber dem Radius r aus (8.70) und der Ganghöhe Δz aus (8.43) ist.
- Daraus lässt sich eine interessante Schlussfolgerung ziehen: Zerlegen wir den Impuls in die (bezüglich der Bahn des Teilchens) normale bzw. tangentielle Komponente p_t und p_n , dann gilt offenbar

$$p_n^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - C \cdot B, \quad (8.72)$$

worin C eine Proportionalitätskonstante ist. Wegen $p_n^2 \geq 0$ ist Bewegung nur möglich, wo

$$CB \leq p^2 \quad (8.73)$$

ist. Erreicht ein Teilchen diese Grenze, wird es gespiegelt, d.h. p_n kehrt die Richtung um.



Impulskomponenten bei der Bewegung im Magnetfeld

8.5 Bewegung in kombinierten, homogenen und statischen Feldern

- Wir betrachten nun in nichtrelativistischer Näherung die Bewegung eines Teilchens der Ladung e und der Masse m , d.h. der Impuls des Teilchens ist

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (8.74)$$

und seine Bewegungsgleichung ist

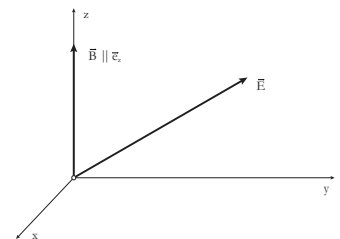
$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.75)$$

Wir wählen die z -Richtung in Richtung von \vec{B} , $\vec{B} = B\vec{e}_z$, und drehen das Koordinatensystem so, dass \vec{E} in der y - z -Ebene liegt. Dann lauten die Komponenten der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}yB, \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}B, \\ m\ddot{z} &= eE_z, \end{aligned} \quad (8.76)$$

weil \vec{E} keine x -Komponente hat. Die dritte Gleichung (8.76) hat die offensichtliche Lösung

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0, \quad (8.77)$$



Zur Anordnung kombinierter, homogener und statischer Felder

denn in z -Richtung wird das Teilchen konstant beschleunigt. Multiplikation der zweiten Gleichung (8.76) mit i und Addition zur ersten ergibt

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) + i\frac{e}{m}E_y, \quad (8.78)$$

wobei ω in der nichtrelativistischen Näherung (8.44) zu verwenden ist, also

$$\omega = \frac{eB}{mc}. \quad (8.79)$$

Diese Gleichung (8.78) braucht die allgemeine Lösung ihrer homogenen Form und eine spezielle inhomogene Lösung. Für die allgemeine homogene Lösung setzen wir an

$$(\dot{x} + i\dot{y})_h = ae^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{C}, \quad (8.80)$$

während eine inhomogene Lösung durch

$$(\dot{x} + i\dot{y})_p = \frac{eE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{B} \quad (8.81)$$

gegeben ist. Die vollständige Lösung lautet also

$$(\dot{x} + i\dot{y}) = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{B}, \quad (8.82)$$

wobei die komplexe Zahl a durch die Anfangsbedingungen gegeben ist.

- Wir setzen

$$a = be^{i\alpha} \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{R} \quad (8.83)$$

und wählen den Zeitnullpunkt so, dass a rein reell wird. Durch Zerlegung von (8.82) in Real- und Imaginärteil folgt

$$\dot{x} = a \cos \omega t + \frac{cE_y}{B}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t, \quad (8.84)$$

d.h. bei $t = 0$ zeigt v_t in Richtung der x -Achse.

- Offensichtlich sind x und y periodische Funktionen der Zeit, wobei der Mittelwert von \dot{y} verschwindet, der Mittelwert von \dot{x} aber eine Driftgeschwindigkeit darstellt:

$$\langle \dot{x} \rangle_\tau = \frac{cE_y}{B}. \quad (8.85)$$

Offenbar steht die Driftgeschwindigkeit auf \vec{E} und \vec{B} senkrecht und hat den Betrag

$$\langle \vec{v} \rangle_\tau = c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (8.86)$$

Die Bahn des Teilchens ergibt sich aus (8.84) durch die weitere Integration nach t ,

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{B} t + x_0, \quad y = \frac{a}{\omega} \cos \omega t + y_0. \quad (8.87)$$

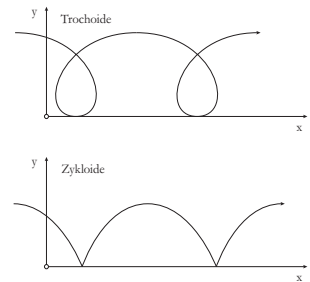
wenn $x = 0 = y$ bei $t = 0$ sein sollen, folgt $x_0 = 0$ und $y_0 = -a/\omega$, mithin

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{B} t, \quad y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1). \quad (8.88)$$

dies stellt eine Trochoide dar, die für

$$a = -\frac{cE_y}{B} \quad (8.89)$$

zu einer Zykloide entartet.



Trochoide und Zykloide

Kapitel 9

Elektromagnetische Wellen

9.1 Eichinvarianz

- Wir beschreiben das elektromagnetische Feld durch den Vierervektor A^μ der Potentiale, aus denen die Feldkomponenten durch Ableitung folgen,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (9.1)$$

Wenn die A^μ bestimmt sind, sind damit auch die Felder \vec{E} und \vec{B} festgelegt.

- Umgekehrt gilt dies nicht, da die Felder durch Ableitung aus den A^μ hervorgehen. Zu einer bestimmten Feldkonfiguration gehören also viele Potentiale.
- Wie in der klassischen Mechanik folgt dies direkt aus dem Wirkungsprinzip. Dort hatten wir gesehen, dass die Transformation

$$L(q, p, t) \rightarrow L(q, p, t) + \frac{df(q, t)}{dt} \quad (9.2)$$

die Wirkung um

$$S \rightarrow S + f(q_1, t_1) - f(q_0, t_0) \quad (9.3)$$

erweitert und dadurch deren Variation invariant lässt.

- Die Bewegungsgleichung von Ladungen im Feld hatten wir aus der Wirkung

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu \quad (9.4)$$

gefolgert. Daran sieht man, dass Transformationen der Potentiale von der Form

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad (9.5)$$

mit beliebigem $f(x^\mu)$ die Wirkung um Konstanten erweitern, die bei der folgenden Variation wegfallen.

- In Komponenten lautet die Transformation (9.5)

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (9.6)$$

für die Felder folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow -\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} f) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f}_{=0} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Entsprechend bleibt der Feldtensor unverändert,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(A_\nu + \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right), \quad (9.8)$$

denn wegen der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ entfallen die zweifachen Ableitungen von f .

- Die Transformation (9.5), die Eichtransformation des Feldes A^μ , erlaubt es, *eine* Zusatzbedingung an die Potentiale zu stellen. So etwa die, dass das skalare Potential verschwinde,

$$\phi = A^0 = 0, \quad A^\mu = (0, \vec{A}). \quad (9.9)$$

Häufige Eichtransformationen stellen die Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (9.10)$$

das ist die *Coulomb-Eichung*, oder

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (9.11)$$

das ist die *Lorenz-Eichung*, dar.

- Um etwa (9.10) zu erfüllen, muss f die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} f) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \vec{\nabla}^2 f = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (9.12)$$

erfüllen. Da dies nur die räumliche Abhängigkeit von f festlegt, kann zusätzlich noch $\phi = 0$ verlangt werden.

9.2 Wellen im Vakuum

- Im Vakuum sind Ladungs- und Stromdichte gleich Null, und die Maxwell-Gleichungen lauten (vgl. 1.69)

$$\begin{aligned}\dot{\vec{B}} &= -c\vec{\nabla} \times \vec{E}, & \dot{\vec{E}} &= c\vec{\nabla} \times \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0.\end{aligned}\quad (9.13)$$

Felder, die diesen Gleichungen genügen sollen, müssen veränderlich sein. Wäre nämlich $\dot{\vec{E}} = 0 = \dot{\vec{B}}$, wären Rotation und Divergenz beider Felder gleichzeitig gleich Null, und die Felder verschwänden.

- Sei aufgrund der Eichfreiheit angenommen, dass

$$\phi = 0, \quad (9.14)$$

dann ist offenbar

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (9.15)$$

und die Gleichung $\dot{\vec{E}} = c\vec{\nabla} \times \vec{B}$ aus (9.13) wird zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (9.16)$$

Wir verlangen nun zusätzlich die Coulomb-Eichung (9.10), also $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, und erhalten aus (9.16) die Gleichung

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0. \quad (9.17)$$

Das ist eine Wellengleichung oder d'Alembert-Gleichung, die auch schon in der Mechanik bei der Behandlung kontinuierlicher Medien aufgetreten war.

- Seien $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ die neuen Koordinaten

$$\vec{\xi} := \vec{x} - \vec{v}t, \quad \vec{\eta} := \vec{x} + \vec{v}t, \quad \vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{\xi} + \vec{\eta}), \quad \vec{v}t = \frac{1}{2}(\vec{\eta} - \vec{\xi}), \quad (9.18)$$

dann lauten die Ableitungen einer beliebigen Funktion $g(\vec{\eta}, \vec{\xi})$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} g &= \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}} \right) = \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}}, \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}} \right) = -\vec{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \vec{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}}.\end{aligned}\quad (9.19)$$

Der Differentialoperator in (9.17) wird also auf

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \rightarrow -\left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} \right)^2 \\ & = -\frac{\vec{v}^2}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} - \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} \right)^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \vec{\eta} \partial \vec{\xi}} \end{aligned} \quad (9.20)$$

transformiert, wenn $\vec{v}^2 = c^2$ ist.

- Seien nun $g(\vec{\xi})$ und $h(\vec{\eta})$ zwei beliebige Funktionen von $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$, ferner $f(\vec{\eta}, \vec{\xi}) = g(\vec{\xi}) + h(\vec{\eta})$, dann erfüllt f offensichtlich die Gleichung (9.20).
- f ist zusammengesetzt aus einer vorwärts- und einer rückwärtslaufenden Welle *beliebiger Form*, d.h. die Lösungen der d'Alembert-Gleichung (9.17) sind beliebig geformte Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.
- Bisher ist unsere Herleitung der Wellengleichung nicht kovariant. Um das zu beheben, gehen wir von den Maxwell-Gleichungen in kontravarianter Form aus,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu = 0 \quad (9.21)$$

wenn $j^\mu = 0$ ist [vgl. (7.54)]. Ausgedrückt durch die Potentiale ist (9.21)

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \right) = \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\nu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\nu \partial x_\nu} = 0. \quad (9.22)$$

Hier fordern wir die Lorenz-Eichung (9.11), um zu sehen, dass

$$\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x_\nu \partial x^\nu} = 0. \quad (9.23)$$

gilt. Das ist genau die Wellengleichung (9.17) in Viererschreibweise, denn

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x^\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \right) =: \square \quad (9.24)$$

ist gerade der *d'Alembert-Operator*.

- Offenbar ist die Eichung $\phi = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ spezieller als die Lorentzeichung (9.11), denn Felder, die $\phi = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ erfüllen, sind auch lorentzgeeicht.

9.3 Ebene Wellen

- Wir bezeichnen mit \vec{n} einen Einheitsvektor in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit \vec{c} der Welle,

$$\vec{n} := \frac{\vec{c}}{c} \quad (9.25)$$

und drehen das Koordinatensystem so, dass \vec{n} in Richtung der x -Achse zeigt, $\vec{n} = \vec{e}_x$.

- Beliebige Funktionen $g_1(x - ct)$, $g_2(x + ct)$ stellen dann beliebig geformte Wellenprofile dar, die sich mit der Zeit in positiver bzw. negativer x -Richtung ausbreiten. Weiter sollen g_1 und g_2 nicht von y und z abhängen. Sie sind also konstant auf Ebenen $x = \text{const.}$ und beschreiben daher ebene Wellen.
- Wir verwenden die Eichung $\phi = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, der zufolge (vgl. 6.93) das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.26)$$

lautet. Da \vec{A} nicht von y oder z abhängen kann (weil die Welle in der y - z -Ebene liegt), folgt aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, dass

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \quad (9.27)$$

sein muss, also $A_x = \text{const.}$. Mit der Wellengleichung (9.17) folgt dann

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const.} \quad (9.28)$$

und folglich muss die zu A_x gehörende Komponente E_x des elektrischen Feldes konstant sein. Da dies nicht zum angenommenen Wellenverhalten passt, setzt man $A_x = 0$. Demnach steht also das Vektorpotential der ebenen Welle senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.

- Wir betrachten nun Wellen, die in positiver x -Richtung reisen. Alle Größen hängen dann nur von $t - x/c$ ab, d.h. aus

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9.29)$$

folgt

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \vec{A}' \\ B_i &= \left[\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot A'_k \right] = \epsilon_{ijk} \delta_{j1} A'_k \cdot \left(-\frac{1}{c} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \vec{e}_{xj} A'_k = \left[-\frac{1}{c} (\vec{n} \times \vec{A}') \right]_i, \end{aligned} \quad (9.30)$$

worin \vec{n} der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle und \vec{A}' die Ableitung von \vec{A} nach seinem Argument $t - x/c$ darstellt.

- Da nach der ersten Gleichung (9.30) $\vec{A}' = -c\vec{E}$ ist, folgt aus der zweiten

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}. \quad (9.31)$$

Folglich stehen sowohl \vec{E} als auch \vec{B} auf der Ausbreitungsrichtung der Welle senkrecht und auch senkrecht aufeinander. Elektromagnetische Wellen im Vakuum sind daher transversal. Weiter haben \vec{B} und \vec{E} offenbar denselben Betrag.

- Der Poynting-Vektor solcher ebenen Wellen ist

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})] = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 \cdot \vec{n}, \quad (9.32)$$

da wegen der Transversalität $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ist. Die Energiestromdichte ist also vom Betrag

$$\frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 \quad (9.33)$$

und fließt in Richtung \vec{n} , also (natürlich) in Ausbreitungsrichtung der Welle.

- Da die Energiedichte des Feldes

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2 \quad (9.34)$$

ist, folgt

$$\vec{S} = cw\vec{n} \quad (9.35)$$

für den Poynting-Vektor, d.h. das Feld transportiert seine Energie mit Lichtgeschwindigkeit.

9.4 Monochromatische ebene Wellen

- Die vor- und rücklaufenden Wellen, die die d'Alembert-Gleichung lösen, haben die Form

$$g(\vec{\xi}) + h(\vec{\eta}), \quad (9.36)$$

mit $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{v}t = \vec{x} - c\vec{n}t$ bzw. $\vec{\eta} = \vec{x} + \vec{v}t = \vec{x} + c\vec{n}t$, wie in (9.18) definiert. Wir greifen nun $g(\vec{\xi}) = g(\vec{x} - c\vec{n}t)$ heraus.

- Die Welle breitet sich in Richtung \vec{n} aus, also ist $\vec{x} = x\vec{n}$ und $g(\vec{\xi}) = g((x - ct)\vec{n})$. g ist konstant auf Ebenen senkrecht zu \vec{n} . Wir führen zur Beschreibung dieser Ebenen den Vektor

$$k^\mu = \frac{\omega}{c}(1, \vec{n}) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad (9.37)$$

ein, mit dem die Ebenen, auf denen g konstant ist, durch die Bedingung

$$k_\mu x^\mu = -\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x} = \text{const.} \quad (9.38)$$

ausgedrückt werden können. In der Umformung

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \omega t + \text{const.} \quad (9.39)$$

stellt die Bedingung (9.38) die Ebenen in Hessescher Normalform dar.

- Der Vektor k^μ hat offenbar den Betrag Null,

$$k_\mu k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\vec{n}^2 - 1) = 0. \quad (9.40)$$

Sein räumlicher Anteil

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (9.41)$$

heißt auch *Wellenvektor* der betrachteten Welle.

- g ist demnach konstant auf Ebenen konstanter Phase

$$k_\mu x^\mu = -\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad (9.42)$$

wobei der Wellenvektor \vec{k} der Gradient dieser Phasenfunktion ist,

$$\vec{k} = \vec{\nabla}(k_\mu x^\mu). \quad (9.43)$$

Der Abstand einer Wellenfläche vom Ursprung ändert sich gemäß

$$|\vec{x}| = \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{k}(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}) + \frac{\omega t}{k} = \text{const.} + \frac{\omega t}{k}, \quad (9.44)$$

d.h. die Geschwindigkeit der Welle ist

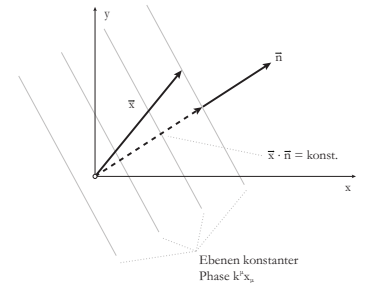
$$v = \frac{\omega}{k} = c \quad \text{bzw.} \quad \vec{v} = \frac{\omega}{k} \frac{\vec{k}}{k} = c \vec{n}. \quad (9.45)$$

- Jede zweimal differenzierbare Funktion der Phase, $g(k_\mu x^\mu)$, ist also eine Lösung der Wellengleichung. Insbesondere sind dies die harmonischen Funktionen

$$g(k_\mu x^\mu) = e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (9.46)$$

Sie bilden eine vollständige Orthonormalbasis des Raums der C^∞ -Funktionen, die aus Eigenfunktionen des d'Alembert-Operators bestehen. Sie stellen die so genannten *monochromatischen ebenen Wellen* dar. Jedes andere Wellenprofil kann daher durch vierdimensionale Fourier-Transformation aus monochromatischen Wellen zusammengesetzt werden,

$$G(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu \hat{G}(k^\mu) e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (9.47)$$



Ebenenscharen konstanter Phase

Es ist bequem, bei der komplexen Schreibweise zu bleiben und etwa die Feldstärke einer monochromatischen ebenen Welle durch

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \Re \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right], \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \Re \left[\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right]\end{aligned}\quad (9.48)$$

auszudrücken. Der Realteil stellt sicher, dass trotz der komplexen Formulierung die physikalischen Felder reell bleiben.

- Differentialoperatoren, die auf solche Fourier-zerlegten Felder wirken, werden zu algebraischen Operatoren. So etwa bewirkt der Gradient eine Multiplikation mit $i\vec{k}$

$$\vec{\nabla} \longrightarrow i\vec{k}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot (i\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E}, \quad (9.49)$$

während die Zeitableitung eine Multiplikation mit $-i\omega$ bewirkt,

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = -i\omega \vec{E}. \quad (9.50)$$

Für Felder, die aus monochromatischen ebenen Wellen zusammengesetzt sind, lauten also die Maxwell-Gleichungen (9.13)

$$\begin{aligned}-i\omega \vec{B} &= -i c \vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}, \\ -i\omega \vec{E} &= i c \vec{k} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c} \vec{E}, \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0.\end{aligned}\quad (9.51)$$

Die beiden letzten Gleichungen formulieren, dass die Wellen transversal sind.

- Aus der ersten Gleichung (9.51), kombiniert mit der zweiten, folgt

$$\begin{aligned}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \\ \Rightarrow -\vec{k}^2 \vec{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned}\quad (9.52)$$

Das ist identisch mit der Bedingung (9.40), $k_\mu k^\mu = 0$. die Beziehung (9.52) zwischen Frequenz ω und Wellenvektor \vec{k} heißt *Dispersionsrelation*. Sie folgt auch durch Anwendung der Wellengleichung auf \vec{E} oder \vec{B} ,

$$\begin{aligned}\square \vec{E} = 0 &\Rightarrow \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E} = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 \right) \vec{E} &= 0 \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned}\quad (9.53)$$

9.5 Polarisation ebener Wellen

- Zusammen mit der Ausbreitungsrichtung \vec{k} definieren \vec{E} und \vec{B} ein Dreibein. Sei etwa \vec{k} in Richtung der x-Achse orientiert, \vec{E} in Richtung der y-Achse, dann zeigt wegen der ersten Gleichung (9.51) \vec{B} in Richtung der z-Achse: Allgemein definiert \vec{k} den zweidimensionalen Raum senkrecht zu \vec{k} , in dem die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \tag{9.54}$$

gewählt werden können, um ein kartesisches Koordinatensystem aufzuspannen.

- Wegen des engen Zusammenhangs zwischen \vec{E} und \vec{B} reicht die Angabe von entweder \vec{E} oder \vec{B} zur Beschreibung der Welle. Dafür wird üblicherweise das elektrische Feld \vec{E} gewählt. Man spannt demnach \vec{E} durch die beiden Richtungen \vec{e}_1 und \vec{e}_2 auf,

$$\vec{E} = (E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \tag{9.55}$$

wobei E_1 und E_2 komplexe Amplituden sein können, um eine Phasenverschiebung zwischen beiden anzugeben.

- Wenn die beiden Wellenzüge nicht phasenverschoben sind, ist die Welle *linear polarisiert* und beschreibt mit der \vec{e}_1 -Achse den Winkel

$$\Theta = \arctan \frac{E_2}{E_1}, \tag{9.56}$$

und ihre Amplitude ist

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \tag{9.57}$$

- Wenn beide Wellenzüge eine Phasenverschiebung φ haben, nennt man sie *elliptisch polarisiert*. Dann ist

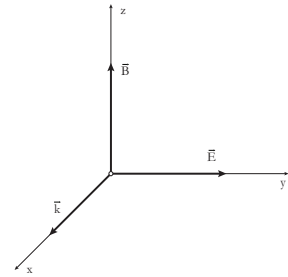
$$\vec{E} = E_1 \vec{e}_1 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + E_2 \vec{e}_2 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi)}, \tag{9.58}$$

weil dann der \vec{E} -Vektor auf einer Ellipse läuft. Um das zu sehen, gehen wir zum Realteil von (9.58) über und schreiben

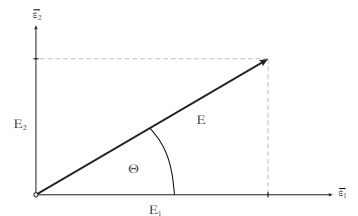
$$\begin{aligned} E_1(\vec{x}, t) &= \Re(\vec{e}_1 \cdot \vec{E}) = E_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t), \\ E_2(\vec{x}, t) &= \Re(\vec{e}_2 \cdot \vec{E}) = E_2 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{9.59}$$

Mit $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ haben wir

$$E_2(\vec{x}, t) = E_2 \left[\cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \cos \varphi - \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \sin \varphi \right]. \tag{9.60}$$



Relative Orientierung der Vektoren \vec{E} , \vec{B} und \vec{k}

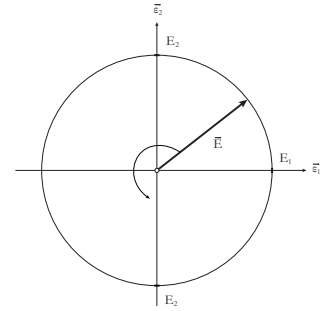


Zur Polarisationsrichtung

Damit folgt

$$\left(\frac{E_1(\vec{x}, t)}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2(\vec{x}, t)}{E_2}\right)^2 = \cos^2 \psi + (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi)^2 = 1, \quad (9.61)$$

wenn φ ein Vielfaches von π ist. Das ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen E_1 und E_2 . Der \vec{E} -Vektor läuft also auf einer Ellipse um die Ausbreitungsrichtung der Welle



Drehung der Polarisationsrichtung

- Wenn $E_1 = E_2$ und die Phasenverschiebung $\varphi = \pm\pi/2$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} E_1(\vec{x}, t) &= E_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t), \\ E_2(\vec{x}, t) &= E_2 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t \pm \frac{\pi}{2}) = \pm E_1 \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t). \end{aligned} \quad (9.62)$$

Dann läuft der \vec{E} -Vektor auf einem Kreis um, und man spricht von rechts- bzw. linkszirkular polarisiertem Licht, je nach dem Vorzeichen der Phasenverschiebung φ .

9.6 Beispiel: „Lichtdruck“ einer ebenen Welle

- Als Anwendung der Beschreibung ebener elektromagnetischer Wellen berechnen wir zunächst den Energie-Impuls-Tensor solcher Felder. Dazu kehren wir zu (7.85) zurück,

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (9.63)$$

Für den zweiten Term hatten wir in (7.86)

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (9.64)$$

erhalten. Außerdem war

$$\begin{aligned} F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} &= \begin{pmatrix} -\vec{E}^2 & \vec{E}^T \mathcal{B}^T \\ -\mathcal{B} \vec{E} & -\vec{E} \vec{E}^T + \mathcal{B} \mathcal{B}^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\vec{E}^2 & \vec{E} \times \vec{B} \\ -\vec{E} \times \vec{B} & -\vec{E} \vec{E}^T + \mathcal{B} \mathcal{B}^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Eine ebene Welle, die sich etwa in x-Richtung ausbreitet, hat wegen ihres transversalen Charakters $E_x = 0 = B_x$. Außerdem ist wegen (9.31)

$$\vec{B} = \vec{e}_x \times \vec{E}, \quad \Rightarrow \quad B_y = -E_z, \quad B_z = E_y, \quad (9.66)$$

und wir hatten gesehen, dass $\vec{E} \times \vec{B} = \vec{E}^2 \vec{e}_x$ gilt. Dementsprechend lässt sich die Matrix \mathcal{B} in der Form

$$\mathcal{B}_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k = \begin{pmatrix} 0 & E_y & E_z \\ -E_y & 0 & 0 \\ -E_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.67)$$

schreiben, so dass der Spannungstensor

$$-\vec{E}\vec{E}^T + \mathcal{B}\mathcal{B}^T = \begin{pmatrix} E_y^2 + E_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.68)$$

lautet. Demzufolge hat der Spannungstensor T_j^i nur ein nicht-verschwindendes Element, nämlich (vgl. 9.34)

$$T_1^1 = \frac{1}{4\pi} (E_y^2 + E_z^2) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2 = w. \quad (9.69)$$

Das entspricht der Erwartung, denn der Spannungstensor kann nur den Transport der x -Komponente des Impulses in x -Richtung beschreiben. Da $\vec{E}^2 = \vec{B}^2$ ist, verschwindet $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ ganz, und für den Energie-Impuls-Tensor bleibt übrig

$$T_\nu^\mu = w \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.70)$$

- Die Einheit von T_j^i ist, ebenso wie die von T_0^0 , gleich der einer Energiedichte, oder

$$[T_j^i] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} = \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \right]. \quad (9.71)$$

Da der Spannungstensor die Impulsstromdichte angibt, also Impuls pro Flächen- und Zeiteinheit, und Impuls pro Zeiteinheit einer Kraft entspricht, sind unsere Überlegungen konsistent.

- Pro Fläche übt die Welle die Kraft

$$f^i = T^{ij} a_j \quad (9.72)$$

auf eine Wand aus, deren Flächennormale \vec{a} ist. Sei etwa

$$\vec{a} = \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.73)$$

dann ist

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w \vec{e}_x. \quad (9.74)$$

Dies gilt, falls die Welle vollkommen absorbiert wird.

- Beträgt das Reflexionsvermögen der Wand R , wird ein Teil R der einfallenden Energiedichte reflektiert. Deren Energie-Impuls-Tensor ist

$$(T_j^i)' = \begin{pmatrix} Rw & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = RT_j^i. \quad (9.75)$$

Die reflektierte Welle breitet sich in $-x$ -Richtung aus und $\vec{d}' = -\vec{d}$, also wird die Gesamtkraft

$$\vec{f} = w(1 + R)\vec{e}_x \quad (9.76)$$

pro Flächeneinheit der reflektierten Wand.

9.7 Eigenschwingungen des Feldes

- Das Vektorpotential kann durch das Fourierintegral

$$\vec{A} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (9.77)$$

dargestellt werden (vgl. 3.33), wobei die Eichbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ offenbar $\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}) = 0$ bedeutet:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \vec{A}(\vec{k}) \vec{\nabla} \left[e^{i\vec{k}\vec{x}} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[i\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k}\vec{x}} = 0, \end{aligned} \quad (9.78)$$

was nur dann identisch verschwindet, wenn $\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}) = 0$ ist. Die komplexen Amplituden $\vec{A}(\vec{k})$ stehen also auf \vec{k} senkrecht.

- Da $\vec{A}(\vec{x})$ reell sein muss, muss $\vec{A}^*(\vec{k}) = \vec{A}(-\vec{k})$ gelten, denn dann ist

$$\begin{aligned} \Im \vec{A}(\vec{x}) &= \Im \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \right] \\ &= \Im \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^{3/2}} \vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \right] \\ &= \Im \left[\int_0^{\infty} \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^{3/2}} \left[\vec{A}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} + \vec{A}^*(-\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right] \right] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^{3/2}} \left[\Re \vec{A}(\vec{k}) - \Re \vec{A}(-\vec{k}) \right] \sin(\vec{k}\vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (9.79)$$

Die Wellengleichung (9.17) erfordert

$$\begin{aligned} \square \vec{A} = 0 &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} + \vec{A}(\vec{k}) \cdot \vec{k}^2 \right) \\ \Rightarrow \ddot{\vec{A}}(\vec{k}) + c^2 \vec{k}^2 \vec{A}(\vec{k}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Jede einzelne Fouriermode erfüllt also die Schwingungsgleichung (9.80) mit der Frequenz

$$\omega = ck = 2\pi \frac{c}{\lambda}, \quad (9.81)$$

worin $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge der Fouriermode mit der Wellenzahl k ist.

- Die elektrischen und magnetischen Felder sind

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}}(\vec{x}) = -\frac{1}{c} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \dot{\vec{A}}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} (\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})) e^{i\vec{k}\vec{x}}. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Demnach ist die Energiedichte

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{c^2} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \dot{\vec{A}}(\vec{k}) \dot{\vec{A}}^*(\vec{k}') e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} (\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})) (\vec{k}' \times \vec{A}^*(\vec{k}')) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (9.83)$$

Durch Integration über $dV = d^3x$ ergibt sich die Gesamtenergie der elektromagnetischen Wellen im Volumen. Wegen (3.30) ist

$$\int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (9.84)$$

und damit erhalten wir aus (9.84)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int d^3x w \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3k \left[\dot{\vec{A}}(\vec{k}) \dot{\vec{A}}^*(\vec{k}) \frac{1}{c^2} + (\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})) (\vec{k} \times \vec{A}^*(\vec{k})) \right]. \end{aligned} \quad (9.85)$$

Wegen der Eichbedingung $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$ ist

$$(\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})) (\vec{k} \times \vec{A}^*(\vec{k})) = k^2 \vec{A}(\vec{k}) \vec{A}^*(\vec{k}), \quad (9.86)$$

also ist die Gesamtenergie des Feldes

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3k \left[|\dot{\vec{A}}|^2 + \omega^2 |\vec{A}|^2 \right]. \quad (9.87)$$

Wir zerlegen nun $\vec{A}(\vec{k})$ in fortschreitende Wellen, also

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\vec{a}_k e^{i\vec{k}\vec{x}} + \vec{a}_k^* e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right), \quad (9.88)$$

worin die \vec{a}_k die Zeitabhängigkeit

$$\vec{a}_k \propto e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck \quad (9.89)$$

haben müssen, damit die Wellen auf $(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)$ konstant sein können. Ein Vergleich von (9.89) und (9.77) ergibt, dass

$$\vec{A}(\vec{k}) = \vec{a}_k + \vec{a}_{-k}^* \quad (9.90)$$

sein muss. Die Zeitableitung ist wegen (9.89)

$$\dot{\vec{A}}(\vec{k}) = -i\omega_k(\vec{a}_k - \vec{a}_k^*) . \quad (9.91)$$

Damit erhalten wir die Feldenergie

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3k \left[c^2 k^2 (\vec{a}_k - \vec{a}_k^*)(\vec{a}_k^* - \vec{a}_k) \right. \\ &\quad \left. + c^2 k^2 (\vec{a}_k + \vec{a}_{-k}^*)(\vec{a}_k^* - \vec{a}_{-k}) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3k k^2 \left[\vec{a}_k \vec{a}_k^* - \vec{a}_k^2 - \vec{a}_k^{*2} + \vec{a}_k \vec{a}_k^* + \right. \\ &\quad \left. + \vec{a}_k \vec{a}_k^* + \vec{a}_k \vec{a}_{-k} + \vec{a}_k^* \vec{a}_{-k}^* + \vec{a}_{-k} \vec{a}_{-k}^* \right] . \end{aligned} \quad (9.92)$$

Wegen

$$\vec{A}(\vec{k}) = \vec{A}^*(-\vec{k}) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{-k} + \vec{a}_k^* = \vec{a}_k + \vec{a}_{-k}^* , \quad (9.93)$$

also ist

$$\vec{a}_k - \vec{a}_{-k} = \vec{a}_k^* - \vec{a}_{-k}^* . \quad (9.94)$$

Damit vereinfacht sich (9.92) zu

$$E = \int d^3k E_k , \quad E_k := \frac{k^2}{2\pi} \vec{a}_k \vec{a}_k^* . \quad (9.95)$$

Führt man als kanonische Variable

$$\vec{Q}_k := (\vec{a}_k + \vec{a}_k^*) \sqrt{\frac{1}{4\pi c^2}} , \quad \vec{P}_k = \dot{\vec{Q}}_k = -i\omega_k(\vec{a}_k - \vec{a}_k^*) \sqrt{\frac{1}{4\pi c^2}} \quad (9.96)$$

ein, erhält man die Hamiltonfunktion des Feldes,

$$H = \int d^3k H_k . \quad H_k = \frac{1}{2} (\vec{P}_k^2 + \omega_k^2 \vec{Q}_k^2) . \quad (9.97)$$

hier entsteht ein Übergang zur Quantenelektrodynamik.

Kapitel 10

Elektromagnetische Wellen in Materie

10.1 Wellen in homogenen, linearen Medien

- Wir betrachten nun, wie sich elektromagnetische Wellen in unendlich ausgedehnten, homogenen Medien ausbreiten können, die durch eine (räumlich und zeitlich) konstante Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilität μ gekennzeichnet sind.
- Dementsprechend gelten im Medium die linearen Gleichungen

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (10.1)$$

Zudem sei das Medium neutral, d.h. die (freie) Ladungsdichte verschwinde,

$$\rho = 0. \quad (10.2)$$

Demnach lauten die Maxwell-Gleichungen (1.69)

$$\begin{aligned} \mu \dot{\vec{H}} &= -c \vec{\nabla} \times \vec{E}, & \epsilon \dot{\vec{E}} + 4\pi\sigma \vec{E} &= c \vec{\nabla} \times \vec{H}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Wir nehmen zuerst die Rotation der zweiten Gleichung (10.3)

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} + 4\pi\sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} &= c \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\ &= c \left[\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H})}_{=0} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} \right] \\ &= -c \Delta \vec{H}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

und ersetzen $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ aus der ersten Gleichung (10.3). Damit erhal-

ten wir

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -c\Delta\vec{H} \\ \Rightarrow \Delta\vec{H} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{H}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{H}}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Genauso können wir mit der ersten Gleichung (10.3) beginnen und aus der zweiten $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ ersetzen, um

$$\Delta\vec{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{E}} \quad (10.6)$$

zu erhalten. Diese beiden Gleichungen (10.5) und (10.6) heißen auch Telegrafengleichungen.

- Wenn die Leitfähigkeit verschwindet, also in Isolatoren, gehen die Telegrafengleichungen in die gewöhnlichen Wellengleichungen

$$\left(\frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0, \quad \left(\frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{H} = 0 \quad (10.7)$$

über, in denen jetzt aber die Lichtgeschwindigkeit

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (10.8)$$

auftritt. Das Verhältnis

$$n := \frac{c}{c'} = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (10.9)$$

heißt *Brechungsindex* aus Gründen, die später deutlich werden. Da in vielen Medien $\mu \approx 1$ ist, gilt oft $n \approx \sqrt{\epsilon}$ in guter Näherung.

- Allgemein werden ϵ und μ von der Frequenz ω der Welle abhängen, $\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$. Dementsprechend überprüfen wir zunächst, ob monochromatische ebene Wellen,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \quad (10.10)$$

Lösungen der Maxwell-Gleichungen (10.3) sein können.

- Wir erhalten mit $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, $\partial/\partial \vec{x} \rightarrow i\vec{k}$

$$\begin{aligned} -i\mu\omega\vec{H} &= -i\vec{k} \times \vec{E}, \quad -i\epsilon\omega\vec{E} + 4\pi\sigma\vec{E} = i\vec{k} \times \vec{H} \\ \vec{k} \cdot \vec{H} &= 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Die zweite Gleichung lässt sich mit

$$\eta := \epsilon + \frac{4\pi\sigma i}{\omega} \quad (10.12)$$

in die Form

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \eta \vec{E} \quad (10.13)$$

bringen, die für $\sigma = 0$ die vereinfachte Form

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E} \quad (10.14)$$

annimmt. Die Größe η übernimmt also in leitenden Medien die Rolle von ϵ , d.h. die Dielektrizitätskonstante wird komplex, wobei ihr Imaginärteil durch die Leitfähigkeit σ gegeben ist.

- Die beiden Gleichungen $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = \vec{k} \cdot \vec{H}$ zeigen, dass die Wellen nach wie vor transversal sind, was eine Folge davon ist, dass ϵ als Skalar (und nicht als Tensor) angenommen wurde. Jedoch sind die Beträge von \vec{E} und \vec{H} nun nicht mehr gleich, denn

$$|\vec{E}| = \frac{\omega \mu}{kc} |\vec{H}|. \quad (10.15)$$

Bilden wir in (10.13) das Kreuzprodukt mit \vec{k} ,

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}) = \vec{k} \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{H})}_{=0} - k^2 \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \eta \vec{k} \times \vec{E}, \quad (10.16)$$

folgt mit

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\mu \omega}{c} \vec{H} \quad (10.17)$$

aus der ersten Gleichung (10.11), dass k durch den Zusammenhang

$$k^2 \vec{H} = \frac{\omega}{c} \eta \cdot \frac{\mu \omega}{c} \vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \eta \vec{H} \quad (10.18)$$

gegeben sein muss, also durch die Dispersionsrelation

$$k^2 = \mu \eta \frac{\omega^2}{c^2} = \mu \epsilon \left(1 + \frac{4\pi \sigma i}{\epsilon \omega} \right) \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (10.19)$$

die die Relation (9.53) für leitende Medien verallgemeinert. Wenn die Leitfähigkeit verschwindet, $\sigma = 0$, gilt

$$k^2 = \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c'^2}, \quad (10.20)$$

wobei der Brechungsindex aus (10.9) verwendet wurde.

10.2 Verallgemeinerter Brechungsindex und Eindringtiefe

- Wir schreiben die Wellenzahl explizit in komplexer Form,

$$k = \alpha + i\beta, \quad (10.21)$$

nehmen das Quadrat

$$k^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i, \quad (10.22)$$

setzen dies in die Dispersionsrelation (10.19) ein und vergleichen Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \Re k^2 &= \alpha^2 - \beta^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}, \\ \Im k^2 &= 2\alpha\beta = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen zunächst α eliminiert, folgt

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \alpha^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\pi\sigma}{\epsilon\omega} \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 \frac{1}{\beta^2} - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \\ \Rightarrow \beta_{\pm}^2 &= \frac{1}{2} \left[-\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{\left(\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 \right)} \right] \\ &= -\frac{\mu\epsilon \omega^2}{2 c^2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Da für $\sigma = 0$ auch $\beta = 0$ werden muss, ist nur das negative Vorzeichen vor der Wurzel physikalisch sinnvoll, also folgt

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\mu\epsilon \omega^2}{2 c^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right] \\ \Rightarrow \beta_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\mu\epsilon \omega}{2 c}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (10.25)$$

für den Imaginärteil von k .

- Ebenso ergibt sich für α aus (10.23) mit (10.25)

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mu\epsilon \omega^2}{2 c^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} + 1 \right] \\ \Rightarrow \alpha_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\mu\epsilon \omega}{2 c}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

da die rechte Seite der zweiten Gleichung (10.23) positiv ist, müssen α und β dasselbe Vorzeichen haben. Wir werden gleich sehen, dass es positiv sein muss.

- Die Amplitude von k muss natürlich

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 \right]^{1/4} \quad (10.27)$$

sein, im Einklang mit der Dispersionsrelation (10.19). Zusätzlich haben wir die Phase (der komplexen Zahl k) gewonnen,

$$\varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha} . \quad (10.28)$$

Wegen

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad (10.29)$$

ist, mit $x = \arctan u$ und $y = \arctan v$,

$$x + y = \arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u + v}{1 - uv} . \quad (10.30)$$

Damit folgt aus (10.28) mit $u = \beta/\alpha = v$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}(\arctan u + \arctan v) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\beta/\alpha}{1 - \beta^2/\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} , \end{aligned} \quad (10.31)$$

wobei (10.23) verwendet wurde.

- Wir verallgemeinern nun den Brechungsindex, indem wir statt $n = \sqrt{\epsilon\mu}$

$$p := \sqrt{\eta\mu} = p_1 + ip_2 \quad (10.32)$$

einführen. Da wegen der Dispersionsrelation (10.19)

$$k = \sqrt{\eta\mu} \frac{\omega}{c} = \alpha + i\beta \quad (10.33)$$

ist, folgt sofort

$$p_1 = \frac{c}{\omega} \alpha , \quad p_2 = \frac{c}{\omega} \beta , \quad (10.34)$$

und p hat dieselbe Phase wie k , also φ aus (10.31).

- Nun betrachten wir eine ebene Welle, die sich in positiver x -Richtung ausbreitet, also mit $\vec{k}\vec{x} = kx$. Dann ist

$$e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = e^{i[(\alpha + i\beta)x - \omega t]} = e^{i(\alpha x - \omega t)} e^{-\beta x} . \quad (10.35)$$

Der Realteil von k beschreibt also die Propagation der Welle, während der Imaginärteil eine Dämpfung bewirkt.

- Diese Dämpfung hat die Längenskala

$$d = \beta^{-1}, \quad (10.36)$$

die so genannte Eindringtiefe. Die Wellenlänge im Medium ist offenbar

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (10.37)$$

d.h. innerhalb dieser Strecke wird sie um den Faktor

$$e^{-2\pi\beta/\alpha} = e^{-2\pi p_2/p_1} \quad (10.38)$$

gedämpft. Das ist der so genannte Extinktionskoeffizient.

10.3 Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit

- Die Leitfähigkeit kommt durch Elektronen zustande, die sich im Medium mehr oder weniger frei bewegen können, aber eine gewisse Reibung erfahren. Seien N Elektronen im Volumen V , auf die das elektrische Feld \vec{E} wirkt, dann gilt für das i -te Elektron die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{e}{m}\vec{E}_i - \gamma\vec{v}_i, \quad (10.39)$$

wobei γ der Reibungskoeffizient ist.

- Die Stromdichte der Elektronen ist

$$\vec{j} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N e\vec{v}_i. \quad (10.40)$$

Um sie zu erhalten, multiplizieren wir (10.39) mit e/V und summieren über alle Elektronen,

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{e^2}{mV} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i - \gamma\vec{j}. \quad (10.41)$$

Die mittlere Feldstärke ist

$$\vec{E} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{Vn} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad (10.42)$$

wobei n die Elektronendichte ist. Nähern wir die Summe über die Feldstärken in (10.41) durch die mittlere Feldstärke, lautet (10.41)

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\vec{E} - \gamma\vec{j}. \quad (10.43)$$

Das mittlere elektrische Feld soll harmonisch schwingen, $|\vec{E}| \propto e^{-i\omega t}$. Dann ist es plausibel anzunehmen, dass auch \vec{j} harmonisch schwingen wird, und dann ist

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -i\omega\vec{j}. \quad (10.44)$$

Damit erhalten wir aus (10.43)

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} \vec{E} \quad (10.45)$$

für die Stromdichte, also nach (10.1) die komplexe, frequenzabhängige Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \cdot \frac{1}{\gamma - i\omega}. \quad (10.46)$$

Im statischen Fall, $d\vec{j}/dt = 0$, ergibt (10.43)

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{\gamma m}, \quad (10.47)$$

d.h. der Reibungskoeffizient γ hängt nach (10.47) mit der Leitfähigkeit σ_0 für stationäre Ströme zusammen. Demnach ist (10.46)

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega/\gamma} =: \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (10.48)$$

Der inverse Reibungskoeffizient in (10.48) hat die Dimension einer Zeit,

$$\frac{1}{\gamma} =: \tau = \frac{m\sigma_0}{ne^2}. \quad (10.49)$$

Für kleine Frequenzen, $\omega \ll 1/\tau$, geht $\sigma(\omega)$ nach σ_0 . Für große Frequenzen, $\omega \gg 1/\tau$, wird $\sigma(\omega)$ rein imaginär und fällt wie $1/\omega$ ab. In diesem Fall wird \vec{j} um $\pi/2$ phasenverschoben relativ zu \vec{E} , und der spezifische Widerstand nimmt linear mit ω zu.

10.4 Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex

- Der verallgemeinerte (komplexe) Brechungsindex war nach (10.32)

$$p = \sqrt{\eta\mu} \quad \text{mit} \quad \eta = \epsilon + \frac{4\pi\sigma i}{\omega}. \quad (10.50)$$

Mit der frequenzabhängigen Leitfähigkeit (10.48) erhalten wir zunächst die verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante

$$\begin{aligned} \eta &= \epsilon + \frac{4\pi i}{\omega} \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} = \epsilon \left[1 + \frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon\tau} \frac{i\tau}{\omega(1 - i\omega\tau)} \right] \\ &=: \epsilon \left[1 + \frac{i\omega_p^2\tau}{\omega(1 - i\omega\tau)} \right], \end{aligned} \quad (10.51)$$

wobei die *Plasmafrequenz* ω_p eingeführt wurde,

$$\omega_p := \sqrt{\frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon\tau}}, \quad (10.52)$$

die die Frequenz der Eigenschwingungen eines Plasmas angibt.

- Zurück in (10.50) setzen wir näherungsweise $\epsilon \approx 1 \approx \mu$, weil es uns alleine auf die Frequenzabhängigkeit von p ankommt. Dann ist

$$p \approx \sqrt{\eta} = \left[1 + \frac{i\omega_p^2\tau}{\omega(1-i\omega\tau)} \right]^{1/2}. \quad (10.53)$$

Für lange Wellen, also kleine Frequenzen, $\omega \ll 1/\tau$, ist

$$p \approx \sqrt{1 + \frac{i\omega_p^2\tau}{\omega}} \approx \omega_p \sqrt{\frac{i\tau}{\omega}}. \quad (10.54)$$

Wegen

$$i = e^{i\pi/2} \quad \text{ist} \quad \sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad (10.55)$$

also ist

$$p \approx \omega_p \sqrt{\frac{\tau}{2\omega}}(1+i). \quad (10.56)$$

Nach (10.36) und (10.34) folgt damit für die Eindringtiefe für lange Wellen

$$d = \frac{1}{\beta} = \frac{c}{\omega p_2} \approx \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2\omega}{\tau}} \frac{1}{\omega_p}. \quad (10.57)$$

Im Grenzfall kurzer Wellen (hoher Frequenz), $\omega \gg 1/\tau$, ist

$$p \approx \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad (10.58)$$

was imaginär werden kann, wenn $\omega < \omega_p$ ist.

- Für $\omega \ll \omega_p$ wird $\Im p \approx \omega_p/\omega$, und die Dämpfungslänge wird frequenzabhängig,

$$d \approx \frac{c}{\omega p_2} = \frac{c}{\omega_p}. \quad (10.59)$$

Wenn ω oberhalb der Plasmafrequenz liegt, $\omega > \omega_p$, ist p rein reell,

$$p = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}, \quad (10.60)$$

d.h. Dämpfung findet dann nicht mehr statt: Metalle werden bei genügend hohen Frequenzen durchsichtig (etwa für harte Röntgenstrahlung).

10.5 Reflexion bei senkrechtem Einfall

- Wir betrachten nun die Grenzfläche zweier Medien, die durch Indizes 1 und 2 unterschieden werden. Wenn eine elektromagnetische Welle auf die Grenzfläche trifft, wird in der Regel ein Teil reflektiert werden und der Rest in das Medium eindringen.
- Bei verschwindender freier Ladungsdichte gelten die Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}, \quad (10.61)$$

woraus wir bereits in I.3 geschlossen hatten, dass die Normalkomponenten der Felder stetig sein müssen,

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \quad D_n^{(1)} = D_n^{(2)}. \quad (10.62)$$

Bezüglich der Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} benutzen wir die Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{D}}, \quad (10.63)$$

die in Abwesenheit von Strömen gelten. Weiterhin legen wir eine kleine Fläche ΔA senkrecht zur Trennfläche und wenden darauf den Stokesschen Satz an:

$$\int_{\Delta A} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial(\Delta A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E_t^{(1)} - E_t^{(2)}) l, \quad (10.64)$$

da wir die Höhe Δh der Fläche beliebig klein wählen können. Außerdem haben wir

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta A} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_{\perp} (l \cdot \Delta h), \quad (10.65)$$

wobei B_{\perp} senkrecht zur Fläche ΔA steht. Wegen $\Delta h \rightarrow 0$ verschwindet dies, und die erste Gleichung (10.62) liefert mit (10.63)

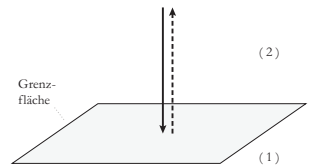
$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}. \quad (10.66)$$

Ebenso schließt man aus der zweiten Gleichung (10.62), dass

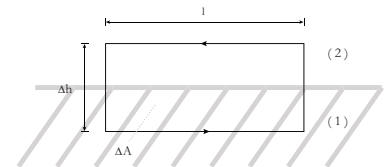
$$H_t^{(1)} = H_t^{(2)}. \quad (10.67)$$

Wir haben also an der Grenzfläche der beiden Medien die Anschlussbedingungen, dass die Normalkomponenten von \vec{D} und \vec{B} sowie die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} stetig sein müssen.

- Die Trennfläche falle nun in die x - z -Ebene. Im linken Halbraum sei Vakuum, im rechten ein Medium mit Dielektrizität ϵ , Permeabilität μ und Leitfähigkeit σ_0 . Elektromagnetische Wellen fallen



Reflexion bei senkrechtem Einfall auf eine Grenzfläche



Zur Anwendung des Stokesschen Satzes an einer Grenzfläche

längs der y -Achse auf die Grenzfläche, das elektrische Feld sei längs der x -Achse polarisiert, also

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_x = a e^{i(ky - \omega t)}, \quad (10.68)$$

wobei a die Amplitude ist.

- Da die Welle sich im Vakuum ausbreitet, gilt (9.52), insbesondere

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}), \quad \vec{E} = -\frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{B}) \quad (10.69)$$

und außerdem die Dispersionsrelation im Vakuum,

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (10.70)$$

Mit $\vec{E} = |\vec{E}| \vec{e}_x$, $\vec{k} = |\vec{k}| \vec{e}_y$ folgt $\vec{B} = -|\vec{B}| \vec{e}_z$, und wegen $|\vec{B}| = |\vec{E}|$ ist

$$\vec{H} = \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} e^{i(ky - \omega t)}. \quad (10.71)$$

Die reflektierte Welle setzen wir als

$$E_x^{(r)} = -a'' e^{i(k''y - \omega''t)}, \quad H_z^{(r)} = -a'' e^{i(k''y - \omega''t)}. \quad (10.72)$$

an. Dagegen wird die in das Medium eindringende Welle der Dispersionsrelation (10.19) genügen, so dass

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\eta\mu} \quad (10.73)$$

sein muss. Außerdem gilt im Medium die Gleichung

$$\vec{k}' \times \vec{E}^{(e)} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}^{(e)}, \quad (10.74)$$

aus der folgt

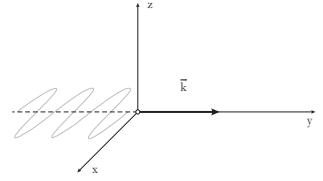
$$\vec{H}^{(e)} = \frac{c}{\omega\mu} \vec{k}' \times \vec{E}^{(e)} = \frac{c}{\omega\mu} \frac{\omega}{c} \sqrt{\eta\mu} \frac{\vec{k}'}{k'} \times \vec{E}^{(e)} = \frac{p}{\mu} \frac{\vec{k}'}{k'} \times \vec{E}^{(e)}, \quad (10.75)$$

wobei wir vom verallgemeinerten Brechungsindex p aus (10.32) Gebrauch gemacht haben.

- Demnach wird die eindringende Welle durch den Ansatz

$$\vec{E}_x^{(e)} = a' e^{i(k'y - \omega't)}, \quad \vec{H}_z^{(e)} = -\frac{p}{\mu} a' e^{i(k'y - \omega't)} \quad (10.76)$$

beschrieben.



Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle trifft auf eine Grenzfläche

- Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} bei $y = 0$ und $t = 0$ schließen wir

$$\begin{aligned} E_x + E_x^{(r)} = E_x^{(e)} &\Rightarrow a - a'' = a' , \\ H_z + H_z^{(r)} = H_z^{(e)} &\Rightarrow a + a'' = \frac{p}{\mu} a' . \end{aligned} \quad (10.77)$$

Dasselbe muss für beliebige Zeiten gelten, woraus folgt

$$\begin{aligned} ae^{-i\omega t} - a''e^{-i\omega''t} &= a'e^{-i\omega't} , \\ ae^{-i\omega t} + a''e^{-i\omega''t} &= \frac{p}{\mu} a'e^{-i\omega't} , \end{aligned} \quad (10.78)$$

und mit den Ergebnissen aus (10.77) schließen wir

$$\begin{aligned} ae^{-i\omega t} - a''e^{-i\omega''t} &= (a - a'')e^{-i\omega't} \\ ae^{-i\omega t} + a''e^{-i\omega''t} &= (a + a'')e^{-i\omega't} . \end{aligned} \quad (10.79)$$

Die Summe beider Gleichungen zeigt sofort

$$\omega = \omega' , \quad (10.80)$$

und die Differenz ergibt

$$\omega'' = \omega' , \quad (10.81)$$

also sind alle drei Frequenzen gleich.

- Aus (10.77) folgt auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned} 2a &= \left(1 + \frac{p}{\mu}\right) a' \Rightarrow a' = \frac{2\mu}{p + \mu} a , \\ 2a'' &= \left(\frac{p}{\mu} - 1\right) a' \Rightarrow a'' = \frac{p - \mu}{2\mu} \cdot \frac{2\mu}{p + \mu} a = \frac{p - \mu}{p + \mu} a . \end{aligned} \quad (10.82)$$

Der Reflexionskoeffizient R ist das Verhältnis der einfallenden zur reflektierten Energie, also

$$R = \frac{|a''|^2}{|a|^2} = \frac{a'' a''^*}{a a^*} , \quad (10.83)$$

woraus mit (10.83) folgt

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{p - \mu}{p + \mu} \right|^2 = \frac{|p - \mu|^2}{|p + \mu|^2} = \frac{(p - \mu)(p^* - \mu)}{(p + \mu)(p^* + \mu)} \\ &= \frac{(p_1 - \mu)^2 + p_2^2}{(p_1 + \mu)^2 + p_2^2} , \end{aligned} \quad (10.84)$$

wobei p_1 und p_2 durch (10.34) gegeben sind.

- Im Grenzfall langer Wellen ist nach (10.26) bzw. (10.25) und (10.34)

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \pm \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0\mu\omega}{\epsilon c^2}}, \\ \beta &\approx \alpha, \\ p_1 &\approx p_2 \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0\mu}{\epsilon\omega}}, \end{aligned} \quad (10.85)$$

und der Reflexionskoeffizient wird

$$\begin{aligned} R &\approx \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1\mu}{p_1^2 + p_2^2 + 2p_2\mu} \approx 1 - \frac{4p_1\mu}{p_1^2 + p_2^2} \approx 1 - \frac{2p_1\mu}{p_1^2} = 1 - \frac{2\mu}{p_1} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{4\mu^2\epsilon\omega}{2\pi\sigma_0\mu}} = 1 - \sqrt{\frac{2\omega\mu\epsilon}{\pi\sigma_0}}. \end{aligned} \quad (10.86)$$

Wenn andererseits $\mu \approx 1$ ist, folgern wir aus $p_2 \approx p_1 = n$:

$$R \approx \frac{(n-1)^2 + n^2}{(n+1)^2 + n^2} = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1} \approx \frac{n-1}{n+1} \approx 1 - \frac{2}{n}. \quad (10.87)$$

10.6 Brechung und Reflexion im allgemeinen Fall

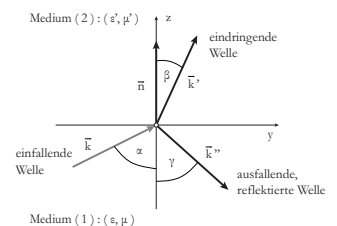
- Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, in dem eine Welle aus einem Medium (1) unter einem Winkel α auf die Grenzfläche zu einem Medium (2) trifft. Das Medium (1) sei durch (ϵ, μ) gekennzeichnet, das Medium (2) durch (ϵ', μ') . Beide Medien seien isotrop.
- Die Grenzfläche liege bei $z = 0$. Die einfallende Welle habe den Wellenvektor \vec{k} , der mit der Flächennormalen der Grenzfläche die y - z -Ebene aufspanne. Reflektierte und eindringende Welle seien wie folgt gegeben:
- Die einfallende Welle sei also durch

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k} \quad (10.88)$$

gegeben, wobei wieder von der Dispersionsrelation (10.20) für nichtleitende Medien Gebrauch gemacht wurde.

- Entsprechend sei die eindringende Welle

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}'\vec{x}' - \omega't)}, \quad \vec{B}' = \sqrt{\epsilon'\mu'} \frac{\vec{k}' \times \vec{E}'}{k'} \quad (10.89)$$



Geometrie bei Brechung und Reflexion im allgemeinen Fall

und die reflektierte Welle

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x}'' - \omega'' t)}, \quad \vec{B}'' = \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\vec{k}'' \times \vec{E}''}{k''}. \quad (10.90)$$

Zunächst müssen bei $z = 0$ die Stetigkeitsbedingungen

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)}, \quad D_n^{(1)} = D_n^{(2)}, \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)} \quad (10.91)$$

erfüllt sein, woraus folgt, dass die Phasenfaktoren bei $z = 0$ für alle Zeiten gleich sind:

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)} = e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} \quad (z = 0). \quad (10.92)$$

Dies verlangt

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t + 2\pi \cdot m_1 = \vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t + 2\pi m_2 \quad (10.93)$$

mit ganzen Zahlen m_1, m_2 .

- Gleichung (10.93) muss insbesondere bei $\vec{x} = 0$ stimmen, wo die Welle auftrifft, und für $m_1 = 0 = m_2$, woraus

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (10.94)$$

folgt: Brechung und Reflexion ändern die Frequenz nicht. Ferner impliziert (10.94) mit (10.93)

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k}' \cdot \vec{x} = \vec{k}'' \cdot \vec{x}, \quad (10.95)$$

also liegen $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ in einer Ebene, der Einfallsebene.

- Für einen beliebigen Punkt auf der y -Achse,

$$\vec{x} = y \vec{e}_y, \quad (10.96)$$

ergibt (10.95)

$$ky \sin \alpha = k' y \sin \beta = k'' y \sin \gamma. \quad (10.97)$$

Wegen (10.94) folgt weiter

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} = k'', \quad k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu'} \quad (10.98)$$

und damit

$$\begin{aligned} \sin \alpha = \sin \gamma &\Rightarrow \alpha = \gamma, \\ \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{\epsilon' \mu'}}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{n'}{n}, \end{aligned} \quad (10.99)$$

wobei der Brechungsindex (10.9) verwendet wurde. Dies sind die Gesetze der Brechung und der Reflexion.

10.7 Die Fresnelschen Formeln

- Die Existenz der Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche erfordert das Brechungs- und das Reflexionsgesetz. Wir werden nun weitere Folgerungen aus der Form der Stetigkeitsbedingung ziehen.
- Die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \vec{E} bedeutet

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0') \times \vec{n} = 0, \quad (10.100)$$

während sich die Stetigkeit der Normalkomponente von \vec{B} in

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' - \vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{n} = 0 \quad (10.101)$$

übersetzen lässt, weil wegen (10.98)

$$\frac{\sqrt{\epsilon' \mu'}}{k'} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{k} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{k''} \quad (10.102)$$

ist.

- Für die Tangentialkomponente von \vec{H} erhalten wir entsprechend

$$\left[\frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} (\vec{k}' \times \vec{E}_0') \right] \times \vec{n} = 0, \quad (10.103)$$

und für die Normalkomponente von \vec{D}

$$[\epsilon (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') - \epsilon' \vec{E}_0'] \cdot \vec{n} = 0. \quad (10.104)$$

Wir nehmen nun zunächst an, \vec{E} sei senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, also $\vec{E} \parallel \vec{e}_y$. Dann folgt aus (10.100) sofort

$$-(E_0 + E_0'' - E_0') \vec{e}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 + E_0'' - E_0' = 0. \quad (10.105)$$

Dasselbe folgt aus (10.101), wenn man das Brechungs- und das Reflexionsgesetz berücksichtigt.

- Dagegen ergibt (10.103) mit

$$\begin{aligned} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \times \vec{n} &= \underbrace{\vec{E}_0 (\vec{n} \cdot \vec{k})}_{=k \cos \alpha} - \underbrace{\vec{k} (\vec{n} \cdot \vec{E}_0)}_{=0} \\ (\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \times \vec{n} &= \underbrace{\vec{E}_0'' (\vec{n} \cdot \vec{k}'')}_{=-k'' \cos \gamma} - \underbrace{\vec{k}'' (\vec{n} \cdot \vec{E}_0'')}_{=0}, \\ (\vec{k}' \times \vec{E}_0') \times \vec{n} &= \underbrace{\vec{E}_0' (\vec{n} \cdot \vec{k}')}_{=k' \cos \beta} - \underbrace{\vec{k}' (\vec{n} \cdot \vec{E}_0')}_{=0}, \end{aligned} \quad (10.106)$$

die Bedingung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} (E_0 k \cos \alpha - E_0'' k'' \cos \gamma) - \frac{k'}{\mu'} E_0' \cos \beta = 0 \\ \Rightarrow & \frac{E_0 - E_0''}{\mu} k \cos \alpha - E_0' \frac{k'}{\mu'} \cos \beta = 0 \\ \Rightarrow & (E_0 - E_0'') \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos \alpha - E_0' \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \cos \beta = 0. \quad (10.107) \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Bedingungen an E_0 , E_0' , E_0'' , nämlich (10.105) und (10.107), aus denen sich die Verhältnisse E_0'/E_0 und E_0''/E_0 bestimmen lassen. Wegen (10.105) ist $E_0' = E_0 + E_0''$, und damit nach (10.107)

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{E_0''}{E_0}\right) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos \alpha - \left(1 + \frac{E_0''}{E_0}\right) \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \cos \beta = 0 \\ \Rightarrow & \frac{E_0''}{E_0} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{\mu' \epsilon} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{\mu' \epsilon} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}}} = \frac{1 - \frac{\mu}{\mu'} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}}{1 + \frac{\mu}{\mu'} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}}, \quad (10.108) \end{aligned}$$

wobei das Brechungsgesetz (10.99) verwendet wurde. Analog findet man

$$\frac{E_0'}{E_0} = 1 + \frac{E_0''}{E_0} = \frac{2}{1 + \frac{\mu}{\mu'} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}}. \quad (10.109)$$

Unter der oft brauchbaren Annahme $\mu = \mu'$ folgen aus (10.108) und (10.109) die *Fresnelschen Formeln* für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht,

$$\begin{aligned} \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \beta + \tan \alpha} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}. \\ \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2 \tan \beta}{\tan \beta + \tan \alpha} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\beta + \alpha)}. \quad (10.110) \end{aligned}$$

Für Wellen, die parallel zur Einfallsebene polarisiert sind, folgt aus den Gleichungen (10.106)

$$\begin{aligned} & (E_0 - E_0'') \cos \alpha - E_0' \cos \beta = 0, \\ & (E_0 + E_0'') \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} - E_0' \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} = 0. \quad (10.111) \end{aligned}$$

woraus sich wieder mit (10.105) schließen lässt

$$\begin{aligned} \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}}{1 + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}}, \\ \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2 \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}}{1 + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}} \quad (10.112) \end{aligned}$$

oder, wieder unter der Annahme $\mu = \mu'$,

$$\begin{aligned}\frac{E''_0}{E_0} &= \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}, \\ \frac{E'_0}{E_0} &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)},\end{aligned}\quad (10.113)$$

die Fresnel-Formeln für parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht.

Kapitel 11

Felder bewegter Ladungen

11.1 Die Greensfunktion der Wellengleichung

- In 9.1 haben wir gesehen, dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (11.1)$$

in der Lorenz-Eichung der Potentiale,

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (11.2)$$

auf die Wellengleichung (9.24) führen,

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \square A^\mu = 0. \quad (11.3)$$

Entsprechend führen die Maxwell-Gleichungen mit Quelltermen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (11.4)$$

auf die inhomogene Wellengleichung

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (11.5)$$

die wir lösen müssen, wenn wir die Felder bewegter Ladungen verstehen wollen.

- Wie in der Elektrostatik, wo wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho \quad (11.6)$$

zu lösen hatten, empfiehlt sich auch hier die Konstruktion einer Greensfunktion. Diese muss aber nun, da wir es nicht mehr mit statischen Problemen zu tun haben, sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen.

- In Analogie zur Greensfunktion (2.57) fordern wir

$$\begin{aligned}\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \\ &= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t').\end{aligned}\quad (11.7)$$

Die Greensfunktion ist also nun ein Produkt aus δ -Funktionen in Raum und Zeit. Eine solche Greensfunktion erlaubt, die inhomogene Wellengleichung wie folgt zu lösen: Sei $\psi(\vec{r}, t)$ die gesuchte Funktion und $f(\vec{r}, t)$ die Inhomogenität, also

$$\square \psi(\vec{r}, t) = -4\pi f(\vec{r}, t), \quad (11.8)$$

dann ist

$$\psi(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t') d^3 r' dt', \quad (11.9)$$

denn da der d'Alembert-Operator \square nur auf die ungestrichenen Koordinaten wirkt, gilt mit (11.9) und (11.7)

$$\begin{aligned}\square \psi(\vec{r}, t) &= \int \square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= -4\pi \int \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') f(\vec{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= -4\pi f(\vec{r}, t),\end{aligned}\quad (11.10)$$

wie gewünscht. Hätte man sich also *einmal* die Greensfunktion der Wellengleichung bzw. des d'Alembert-Operators verschafft, könnte man aus (11.9) sofort die Potentiale für jedes beliebig vorgegebene j^μ bekommen.

- Wie lässt sich nun die Greensfunktion bestimmen? Dazu verwenden wir den Zusammenhang (3.30)

$$\delta(x - x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')}, \quad (11.11)$$

um das Produkt der δ -Funktion in (11.7) in der Form

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int d\omega e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} e^{-i\omega(t-t')} \quad (11.12)$$

darzustellen.

- Ebenso schreiben wir die Greensfunktion durch ihre Fouriertransformierte $\hat{G}(\vec{k}, \omega)$, also

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int d^3 k \int d\omega \hat{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \quad (11.13)$$

und wenden darauf den d'Alembert-Operator \square an. Das ergibt, da \square nur auf \vec{r} und t wirkt,

$$\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = - \int d^3k \int d\omega \hat{G}(\vec{k}, \omega) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} . \tag{11.14}$$

eingesetzt in die Ausgangsgleichung (11.7) ergibt dies mit (11.12)

$$\begin{aligned} \hat{G}(\vec{k}, \omega) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^4} = \frac{1}{4\pi^3} , \\ \Rightarrow \hat{G}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2} , \end{aligned} \tag{11.15}$$

was uns die Fourier-Transformierte der Greensfunktion verschafft. die Greensfunktion selbst ist also durch

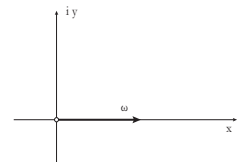
$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int d^3k \int d\omega \frac{c^2}{4\pi^3} \frac{1}{\omega^2 - k^2c^2} e^{i[\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - \omega(t-t')]} \tag{11.16}$$

gegeben.

- Offenbar hat der Integrand in (11.16) Pole bei $\omega = \pm kc$, die sorgfältig untersucht werden müssen. Um das zu tun, fassen wir den Ausdruck

$$\frac{1}{\omega^2 - k^2c^2} \tag{11.17}$$

als Funktion in der komplexen Ebene auf, wo sie zunächst längs der reellen Achse in ω integriert wird:



Zur Integration in der komplexen Ebene

- Wir verwenden nun zwei Definitionen und Sätze aus der Theorie der komplexen Funktionen. Sei also $z \in \mathbb{C}$ und $f(z)$ eine komplexe Funktion. Sie heißt *holomorph* auf einem Gebiet G der komplexen Ebene, wenn sie für $z \in G$ differenzierbar ist.
- Wenn die Funktion bei $z_0 \in G$ einen Pol der Ordnung eins hat, dann heißt der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) := \text{Res}_{z_0} f(z) \tag{11.18}$$

das *Residuum* von f bei z_0 .

- Seien nun $f(z)$ holomorph auf G und C eine einfach geschlossene Kurve, dann ist

$$\oint_C f(z) dz = 0 . \tag{11.19}$$

Das ist der *Cauchysche Integralsatz*.

- Schließlich sei $f(z)$ holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G , außer an endlich vielen Punkten

a_1, \dots, a_n . Das Integral, das über f längs einer positiv orientierten, geschlossenen Kurve genommen wird, die die a_i enthält, ist

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n (2\pi i) \text{Res}_{a_i} f(z), \quad (11.20)$$

also gleich der Summe der eingeschlossenen Residuen, multipliziert mit $2\pi i$. Das ist der *Residuensatz*.

- Diese Anleihen aus der Funktionentheorie verwenden wir nun, um die Greensfunktion (11.16) näher zu untersuchen. Zunächst halten wir fest, dass die Greensfunktion $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ den Einfluss einer Ladung am Ort \vec{r}' zur Zeit t' auf den Punkt \vec{r} zur Zeit t beschreibt. Aus Kausalitätsgründen darf die Ladung keine Zeiten t beeinflussen, die vor t' liegen, also muss $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ für $t < t'$ verschwinden,

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0 \quad \text{für } t < t' \quad (\text{Kausalität}). \quad (11.21)$$

- Umgekehrt muss G beschreiben, wie sich der Einfluss der Ladung bei t' nach $t \geq t'$ ausbreitet. Wir werden nun die funktionentheoretischen Ergebnisse benutzen, um G so zu bestimmen, dass es kausal mögliche Wechselwirkungen beschreibt.
- Dazu verschieben wir die Pole im Integranden der Greensfunktion um infinitesimale Beträge von der reellen Achse weg, und zwar so: Wir ersetzen also $\omega \in \mathbb{R}$ durch $\omega + i\epsilon \in \mathbb{C}$, mit beliebig kleinem $\epsilon \in \mathbb{R}$. Dadurch werden die Pole zu

$$\omega = \pm kc \quad \rightarrow \quad \omega = \pm kc - i\epsilon \quad (11.22)$$

verschoben.

- Nun legen wir eine geschlossene Kurve auf die komplexe Ebene, um das Integral

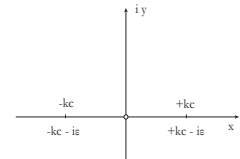
$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{c^2}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)}}{k^2 c^2 - (\omega + i\epsilon)^2} \quad (11.23)$$

auszuführen.

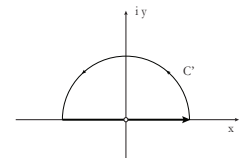
- Sei die Kurve zunächst so gelegt, dass sie längs der x -Achse läuft und durch einen Halbkreis durch die positive imaginäre Ebene geschlossen wird. Dafür ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\oint_{C'} \frac{e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)}}{k^2 c^2 - (\omega + i\epsilon)^2} d\omega = 0, \quad (11.24)$$

weil die Kontur C' jetzt keine Pole mehr einschließt.



Pole in der komplexen Ebene



Geschlossene Kontur in der komplexen Ebene

- Legen wir die Kurve so, dass sie durch einen Halbkreis in der negativen imaginären Ebene geschlossen wird, besagt der Residuensatz

$$\oint_C \frac{e^{i(\vec{k}\vec{R}-\omega\tau)} d\omega}{k^2c^2 - (\omega + i\epsilon)^2} = \sum_{i=1}^2 (2\pi i) \text{Res}_i f(\omega, \vec{k}) \quad (11.25)$$

in symbolischer Schreibweise.

- Nun betrachten wir den Beitrag des Integrals über die Halbkreise, die eingeführt wurden, um die Integralkurven zu schließen. Der Integrand der ω -Integration ist verkürzt

$$\frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} \quad (11.26)$$

Er hat den Betrag

$$\left| \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} \right| = \left| \frac{e^{-i\rho(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)\tau}}{k^2c^2 - \rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} \right|, \quad (11.27)$$

wobei $\omega = \rho e^{i\varphi}$ durch Amplitude ρ und Phase φ ausgedrückt wurde.

- Auf dem Halbkreis hat $\rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ konstant den Betrag ρ^2 , während der Betrag des Zählers durch

$$\left| e^{-i\rho \cos \varphi \tau} e^{\rho \sin \varphi \tau} \right| = e^{\rho \sin \varphi \tau} \quad (11.28)$$

gegeben ist. Für beliebige, große ρ , $\rho \gg kc$, gilt damit

$$\left| \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} \right| \xrightarrow{(\rho \rightarrow \infty)} \frac{e^{\rho \sin \varphi \tau}}{\rho^2} \quad (11.29)$$

damit ist das Integral über den positiven Halbkreis

$$\int_{\cap} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} < \int_0^\pi \rho d\varphi \frac{e^{\rho \sin \varphi \tau}}{\rho^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \quad \text{wenn } \tau < 0, \quad (11.30)$$

denn hier ist $\sin \varphi > 0$. Außerdem ist das Integral über den negativen Halbkreis

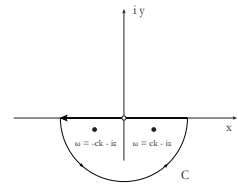
$$\int_{\cup} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} < \int_\pi^{2\pi} \rho d\varphi \frac{e^{\rho \sin \varphi \tau}}{\rho^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0, \quad \text{wenn } \tau > 0, \quad (11.31)$$

denn hier ist $\sin \varphi < 0$.

- Damit haben wir zugleich die Möglichkeit gewonnen, die Integrationskurven so zu schließen, dass die Greensfunktion die Kausalitätsforderung (11.21) erfüllt: für $t < t'$ ist

$$\tau = t - t' < 0, \quad (11.32)$$

d.h. wenn wir die Integrationskurve durch den oberen Halbkreis schließen, wenn $\tau < 0$ ist, ist dafür auch $G = 0$, und für $\tau > 0$ schließen wir die Integrationskurve durch den unteren Halbkreis.



Geschlossene Kontur, die die Pole einschließt

- Nun ist

$$\oint_C \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} d\omega = \left(\int_{+\infty}^{-\infty} d\omega + \int_U d\omega \right) \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} \quad (11.33)$$

$$= 2\pi i (\text{Res}_{\omega=-ck-i\epsilon} + \text{Res}_{\omega=ck-i\epsilon}) \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} .$$

Wenn wir den Halbkreis beliebig groß machen, verschwindet das Integral über ihn, und das gesuchte Integral über die reelle Achse ist gleich der Summe der Residuen an den beiden Polstellen. Diese berechnen wir als nächstes.

- Seien $\omega_1 = -ck - i\epsilon$ und $\omega_2 = ck - i\epsilon$, dann ist

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\omega=\omega_1} f(\omega, k) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} (\omega - \omega_1) \quad (11.34) \\ &= e^{-i\omega_1\tau} \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{\omega + ck + i\epsilon}{k^2c^2 - (\omega + i\epsilon)^2} \\ &= e^{-i\omega_1\tau} \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{\omega + ck + i\epsilon}{[ck - (\omega + i\epsilon)][ck + (\omega + i\epsilon)]} \\ &= e^{-i\omega_1\tau} \frac{1}{ck - (\omega_1 + i\epsilon)} = \frac{e^{ick\tau}}{2ck} \quad (\epsilon \rightarrow 0) , \end{aligned}$$

und ebenso erhält man

$$\text{Res}_{\omega=\omega_2} f(\omega, k) = -\frac{e^{-ick\tau}}{2ck} , \quad (11.35)$$

wobei gleich die Grenzübergänge $\epsilon \rightarrow 0$ mit durchgeführt wurden.

- Aus (11.34) schließlich folgt nun

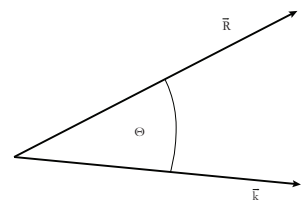
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2c^2 - \omega^2} &= -2\pi i \left(\frac{e^{ick\tau}}{2ck} - \frac{e^{-ick\tau}}{2ck} \right) \\ &= \frac{2\pi}{ck} \sin(ck\tau) , \quad (11.36) \end{aligned}$$

ein einfaches Ergebnis nach komplizierter Rechnung.

- Benutzt man (11.36) in (11.23), folgt für die gesamte Greensfunktion

$$G(\vec{R}, \tau) = \begin{cases} 0 & (\tau < 0) \\ \frac{c}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{\sin(ck\tau)}{k} & (\tau > 0) \end{cases} . \quad (11.37)$$

Die Integration im k -Raum lässt sich durchführen, indem wir zunächst Polarkoordinaten einführen und den Winkel zwischen \vec{R} und \vec{k} als Polarwinkel θ wählen:



Zur Koordinatenwahl

- Dann ist $\vec{k}\vec{R} = kR \cos \theta$, und für $\tau > 0$ wird die Greensfunktion

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, \tau) &= \frac{c}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\sin(ck\tau)}{k} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikR \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{c}{\pi} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\sin(ck\tau)}{k} \int_{-1}^1 d\mu e^{ikR\mu}, \end{aligned} \quad (11.38)$$

worin $\mu = \cos \theta$ substituiert wurde, also $d\mu = -\sin \theta d\theta$.

- Nun ist

$$\int_{-1}^1 d\mu e^{ikR\mu} = \frac{1}{ikR} \int_{-ikR}^{ikR} d\mu' e^{\mu'} = \frac{1}{ikR} (e^{ikR} - e^{-ikR}) = \frac{2 \sin kR}{kR}, \quad (11.39)$$

also erhalten wir

$$G(\vec{R}, \tau) = \frac{2c}{\pi R} \int_0^\infty dk \sin(ck\tau) \sin(kR). \quad (11.40)$$

Weiter verwenden wir $x := ck$ und

$$\begin{aligned} \sin(ck\tau) \sin(kR) &= -\frac{1}{4} (e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}) (e^{ikR} - e^{-ikR}) \\ &= -\frac{1}{4} (e^{ix\tau} - e^{-ix\tau}) (e^{iR/cx} - e^{-iR/cx}) \\ &= -\frac{1}{4} [e^{i(x\tau+R/cx)} + e^{-i(x\tau+R/cx)} - e^{i(x\tau-R/cx)} - e^{-i(x\tau-R/cx)}]. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Wir setzen nun (11.42) in (11.40) ein und erweitern den Integrationsbereich von $[0, \infty)$ auf $(-\infty, +\infty)$, um Beiträge in (11.42) mit negativem und positivem x zusammenzufassen. Damit folgt

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, \tau) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^\infty dx [e^{i(\tau-R/c)x} - e^{i(\tau+R/c)x}] \\ &= \left[\delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{R}{c}\right) \right] \frac{1}{R}, \end{aligned} \quad (11.42)$$

da die Integrale δ -Funktionen ergeben (vgl. 3.30). Da das Argument der zweiten δ -Funktion für $\tau > 0$ nirgendwo verschwindet, liefert sie keinen Beitrag, und wir bekommen das einfache Endergebnis

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, \tau) &= \frac{1}{R} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right), \quad \text{bzw.} \\ G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right). \end{aligned} \quad (11.43)$$

Diese Greensfunktion ist auf sehr anschauliche Weise interpretierbar: Die Wirkung von \vec{r}' nach \vec{r} breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Je größer der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ zwischen den

beiden Punkten, umso größer muss der zeitliche Abstand $t - t'$ zwischen Ursache und Wirkung sein. durch die Kausalitätsforderung (11.21) haben wir außerdem sichergestellt, dass sich die Wirkung in die Zukunft ausbreitet. Diese Greensfunktion heißt *retardiert*, weil die Wirkung gegenüber der Ursache verzögert ist, wie die Kausalität verlangt.

- In einem Raum-Zeit-Diagramm definiert die δ -Funktion in (11.43) den Vorwärtslichtkegel der Quelle am Ort \vec{r}' zur Zeit t' :
- Hätten wir die Pole $\omega = \pm ck$ in die positive imaginäre Richtung verschoben, hätten wir die *avancierte* Greensfunktion

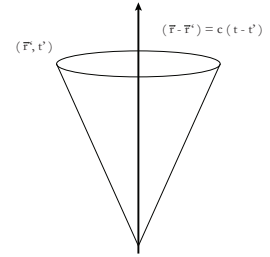
$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(- (t - t') - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \quad (11.44)$$

erhalten, die eine Wirkung in die Vergangenheit hinein beschreiben. Sie spielt in der relativistischen Quantenfeldtheorie eine Rolle.

- Mit (11.9) schließlich ergibt die retardierte Greensfunktion (11.43) die retardierten Potentiale

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' , \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' . \end{aligned} \quad (11.45)$$

Wieder haben sie die sehr anschauliche Bedeutung, dass die Wirkung von Ladungen und Strömen umso mehr verzögert ist, je weiter sie vom betrachteten Punkt entfernt liegen.



Vorwärtslichtkegel eines Ereignisses

11.2 Die Liénard-Wiechert-Potentiale

- Die Retardierung der Potentiale (11.45) macht sie im allgemeinen Fall schwierig zu berechnen: Um das Potential am Ort \vec{r} zu kennen, muss man über Ladungen bzw. Ströme auf dem Rückwärts-Lichtkegel des Ereignisses (\vec{r}, t) integrieren. Etwas weiter kommt man, wenn man eine Ladung betrachtet, deren Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ man kennt.
- Sei also $\vec{r}_0(t)$ diese Trajektorie, und damit die Ladungs- und Stromdichte gegeben,

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta[\vec{r} - \vec{r}_0(t)] , \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta[\vec{r} - \vec{r}_0(t)] . \quad (11.46)$$

Mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ gehen wir zurück in Gleichung (11.9), um das skalare Potential ϕ zu schreiben,

$$\phi(\vec{r}, t) = \int dV' \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) q \delta[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')] , \quad (11.47)$$

wobei die Greensfunktion (11.43) verwendet wurde. Hier kann die räumliche Integration sofort ausgeführt werden, und man erhält

$$\phi(\vec{r}, t) = \int dt' \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right); \quad (11.48)$$

wir substituieren nun das verbleibende Argument der δ -Funktion,

$$\begin{aligned} u &:= t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \\ &= t' - t + \frac{1}{c} \left[(x - x_0(t'))^2 + (y - y_0(t'))^2 + (z - z_0(t'))^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (11.49)$$

so dass die Ableitung nach t'

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt'} &= 1 - \frac{1}{c|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} [(x - x_0)\dot{x}_0 + (y - y_0)\dot{y}_0 + (z - z_0)\dot{z}_0] \\ &= 1 - \frac{[\vec{r} - \vec{r}_0(t')] \cdot \dot{\vec{r}}_0(t')}{c|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} =: 1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c} \end{aligned} \quad (11.50)$$

ist, worin \vec{n} der Einheitsvektor von der Ladung zum betrachteten Punkt ist.

- Mit (11.50) und (11.50) schreibt sich (11.48) in der Form

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{du}{1 - \vec{n}(u)\vec{v}(u)/c} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(u)|} \delta(u) \\ &= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(u)|} \frac{1}{1 - \vec{n}(u)\vec{v}(u)/c} \Big|_{u=0}, \end{aligned} \quad (11.51)$$

d.h. der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung wird bei $u = 0$ oder

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \quad (11.52)$$

ausgewertet: Die Ladung bestimmt das Potential am Ort \vec{r} zur Zeit t aufgrund ihrer früheren Position und Bewegung.

- Ebenso ergibt sich das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{v}(t')}{c|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{1}{1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')/c} \Big|_{t'=t-|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|/c}. \quad (11.53)$$

Die Potentiale (11.51) und (11.53) heißen *Liénard-Wiechert-Potentiale*. Sie sind exakte Potentiale für bewegte Punktladungen.

11.3 Beispiel: Potentiale und Felder einer geradlinig-gleichförmig bewegten Ladung

- Wir betrachten also die Liénard-Wiechert-Potentiale im Falle $\vec{v}_0(t) = \text{konst.}$ und setzen

$$\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0 \cdot t. \quad (11.54)$$

Das skalare Potential ist

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{1}{1 - \vec{n}(t')\vec{v}(t')/c}, \quad (11.55)$$

worin wir $\vec{R} := \vec{r} - \vec{v}_0 \cdot t'$ einsetzen und außerdem benutzen, dass

$$\vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot \vec{n} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{R} \quad (11.56)$$

ist, also:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{cq}{c|\vec{R}| - \vec{R}\vec{v}_0}. \quad (11.57)$$

Der Zeitpunkt t' muss gerade so gewählt werden, dass

$$t - t' = \frac{|\vec{R}|}{c} \Rightarrow |\vec{R}| = c(t - t') \quad (11.58)$$

gilt. Für den einfachen Fall geradlinig-gleichförmiger Bewegung ist also

$$c(t - t') = |\vec{r} - \vec{v}_0 \cdot t'| = \sqrt{r^2 + v_0^2 t'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}_0 t'}, \quad (11.59)$$

was aufgelöst nach t' die gemischt-quadratische Gleichung

$$(c^2 - v_0^2)t'^2 + 2(\vec{r} \cdot \vec{v}_0 - c^2 t) + c^2 t^2 - r^2 = 0 \quad (11.60)$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} t'_\pm &= \frac{\left[(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0) \pm \sqrt{(\vec{r} \cdot \vec{v}_0 - c^2 t)^2 - (c^2 - v_0^2)(c^2 t^2 - r^2)} \right]}{c^2 - v_0^2} \\ &= \frac{c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0}{c^2 - v_0^2} \pm \sqrt{\frac{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0)^2}{(c^2 - v_0^2)^2} - \frac{c^2 t^2 - r^2}{c^2 - v_0^2}} \end{aligned} \quad (11.61)$$

ergibt. Darin hat nur das negative Vorzeichen physikalischen Sinn, denn für $\vec{v}_0 = 0$ ist

$$t'_\pm = t \pm \sqrt{t^2 + \frac{r^2}{c^2}} = t \pm \frac{r}{c}, \quad (11.62)$$

aber wegen $t' < t$ muss das negative Vorzeichen gewählt werden.

- Damit erhalten wir für den Nenner in (11.55)

$$\begin{aligned} c|\vec{R}| - \vec{R} \cdot \vec{v}_0 &= c^2(t - t') - (\vec{r} - \vec{v}_0 t') \vec{v}_0 & (11.63) \\ &= (v_0^2 - c^2)t' + c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0 \\ &= \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0)^2 - (c^2 - v_0^2)(c^2 t^2 - r^2)}, \end{aligned}$$

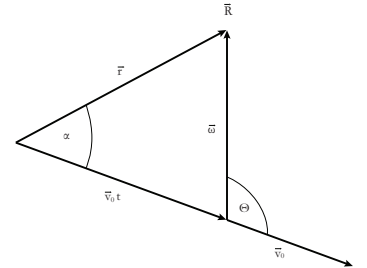
wobei das Ergebnis (11.61) im letzten Schritt verwendet wurde.

- Wir führen nun in (11.64) den Vektor $\vec{\omega}$ vom *momentanen* Ort der Ladung, $\vec{r}' = \vec{v}_0 \cdot t$, zum Ort \vec{r} ein,

$$\vec{\omega} = \vec{r} - \vec{v}_0 \cdot t. \quad (11.64)$$

Dies ergibt für den Ausdruck unter der Wurzel

$$\begin{aligned} &(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0)^2 - (c^2 - v_0^2)(c^2 t^2 - r^2) \\ &= (\vec{r} \cdot \vec{v}_0)^2 - r^2 v_0^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}_0 c^2 t + c^2 r^2 + c^2 v_0^2 t^2 \\ &= (\cos^2 \alpha - 1)r^2 v_0^2 + c^2 \vec{\omega}^2 \\ &= -r^2 v_0^2 \sin^2 \alpha + c^2 \vec{\omega}^2 \end{aligned} \quad (11.65)$$



Zur Erläuterung der Geometrie

wobei α der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{v}_0 ist:

- Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\omega}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{r}{\sin \theta}, \quad (11.66)$$

also ist die rechte Seite von (11.65)

$$c^2 \omega^2 \left(1 - \frac{r^2 v_0^2}{c^2 \omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{r^2} \sin^2 \theta \right) = c^2 \omega^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta \right), \quad (11.67)$$

was mit (11.64) und (11.56)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{cq}{c\omega \sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}} = \frac{q}{\omega \sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}} \quad (11.68)$$

ergibt. Das Vektorpotential lautet entsprechend

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{v}_0}{c\omega \sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}}. \quad (11.69)$$

Nach (6.96) sind das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (11.70)$$

und das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (11.71)$$

Nun ist offenbar nach (11.69) und (11.68)

$$\vec{A} = \phi \frac{\vec{v}_0}{c} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{v}_0}{c} \right)}_{=0} \cdot \phi - \frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{\nabla} \phi = -\frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{\nabla} \phi, \quad (11.72)$$

und wegen $\partial \vec{A} / \partial t \parallel \vec{v}_0$ folgt aus (11.72), (11.71) und (11.70)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{E}. \quad (11.73)$$

Der Gradient des skalaren Potentials folgt am einfachsten aus (11.64),

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} = \frac{cq}{(c|\vec{R}| - \vec{R}\vec{v}_0)^3} \cdot \left[(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0) \vec{v}_0 - (c^2 - v_0^2) \vec{r} \right], \quad (11.74)$$

ebenso wie die Zeitableitung von $\vec{A}(\vec{r}, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}_0}{c} \phi \right) = \frac{\vec{v}_0}{c} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \frac{-q\vec{v}_0}{(c|\vec{R}| - \vec{R}\vec{v}_0)^3} \left[(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}_0) c^2 - (c^2 - v_0^2) c^2 t \right]. \end{aligned} \quad (11.75)$$

Daraus erhält man mit $\vec{\omega}$ aus (11.64)

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{cq(c^2 - v_0^2)(\vec{r} - \vec{v}_0 t)}{(c|\vec{R}| - \vec{R}\vec{v}_0)^3} \\ &= \frac{c^3 q (1 - v_0^2/c^2) \vec{\omega}}{c^3 \omega^3 \sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}} = \frac{q\vec{\omega}}{\omega^3} \frac{(1 - v_0^2/c^2)}{\sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}} \end{aligned} \quad (11.76)$$

und

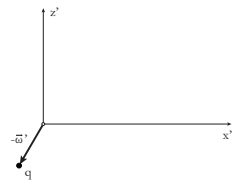
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{E}. \quad (11.77)$$

- Völlig entsprechend lassen sich die Felder durch Lorentztransformation gewinnen. Dazu betrachten wir ein Koordinatensystem K' , in dem die Ladung q am Ort $-\vec{\omega}'$ ruht:
- Sie erzeugt in K' das Coulombfeld

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{\omega}'}{\omega'^3} \quad (11.78)$$

am Ursprung und kein Magnetfeld, also ist $\vec{B}' = 0$, und wir wissen aus der Lorentztransformation der Felder, (7.17), sofort, dass in einem relativ zu K' mit $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_z$ bewegten Bezugssystem K das Magnetfeld

$$\vec{B} = \gamma \frac{v_0}{c} \begin{pmatrix} E'_y \\ -E'_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \frac{v_0}{c} \begin{pmatrix} E'_y \\ -E'_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11.79)$$



Ruhesystem der Ladung

entsteht, im Einklang mit (11.77). Außerdem folgt aus (7.18)

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \gamma E'_x \\ \gamma E'_y \\ E'_z \end{pmatrix}. \quad (11.80)$$

Andererseits wird auch der Vektor $\vec{\omega}'$ lorentztransformiert zu

$$\begin{pmatrix} \omega'_0 \\ \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma\omega'_0 - \beta\gamma\omega'_z \\ \omega'_x \\ \omega'_y \\ -\beta\gamma\omega'_0 + \gamma\omega'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (11.81)$$

Da bei $\omega_0 = 0$ im ungestrichenen System beobachtet wird, ist

$$\gamma\omega'_0 = \beta\gamma\omega'_z \Rightarrow \omega'_0 = \beta\omega'_z, \quad (11.82)$$

also

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \gamma(1 - \beta^2)\omega'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z/\gamma \end{pmatrix}. \quad (11.83)$$

wegen $\omega'_y = 0$ ist $\omega_y = 0$. Außerdem ist dann

$$\begin{aligned} \omega'^2 &= \omega_x'^2 + \omega_z'^2 = \omega_x^2 + \gamma^2\omega_z^2 = \gamma^2 \left(\omega_x^2 - \frac{v_0^2}{c^2}\omega_x^2 + \omega_z^2 \right) \\ &= \gamma^2\omega^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (11.84)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma\omega \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta} \\ \frac{\vec{\omega}'}{\omega'^3} &= \frac{1}{\gamma^3\omega^3 \sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma\omega_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11.85)$$

und das \vec{E} -Feld im ungestrichenen System ist nach (11.80) und (11.78)

$$\vec{E} = \frac{q\vec{\omega}}{\gamma^2\omega^3} \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}} = \frac{q\vec{\omega}}{\omega^3} \frac{1 - v_0^2/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2 \sin^2 \theta / c^2}}, \quad (11.86)$$

wie in (11.77).

Kapitel 12

Der Hertzsche Dipol und die Larmor-Formel

12.1 Liénard-Wiechert-Potentiale eines zeitabhängigen Dipols

- Als Anwendung der Liénard-Wiechert-Potentiale betrachten wir nun einen zeitabhängigen Dipol, also ein System aus zwei Ladungen $\pm e$ im Abstand $\vec{y}(t)$ voneinander, das aus dem Abstand \vec{r} betrachtet werde.
- Der Dipol hat also das Dipolmoment

$$\vec{p}(t) = -\frac{e\vec{y}}{2} - \frac{e\vec{y}}{2} = -e\vec{y}. \quad (12.1)$$

Für die Liénard-Wiechert-Potentiale brauchen wir Ausdrücke der Form

$$1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t)|} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c}, \quad t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}, \quad (12.2)$$

wie sie im Nenner der Potentiale (11.51) und (11.53) auftreten. Dabei nehmen wir an, dass der Dipol klein gegenüber dem Abstand $|\vec{r}| =: r$ sei, also

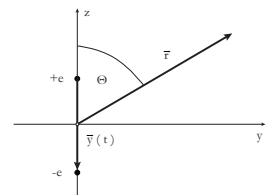
$$|\vec{r}| =: r \gg |\vec{y}|, \quad (12.3)$$

womit wir

$$1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c} \approx 1 - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{1}{2c} [\pm \dot{\vec{y}}(t')] \quad (12.4)$$

bekommen. Außerdem ist dann

$$t' \approx t - \frac{r}{c}. \quad (12.5)$$



Dipol

Damit lautet das skalare Potential aus (11.51)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{ec}{cr + \vec{r} \cdot \dot{\vec{y}}/2} - \frac{ec}{cr - \vec{r} \cdot \dot{\vec{y}}/2}, \quad (12.6)$$

und das Vektorpotential wird

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{-e\dot{\vec{y}}/2}{cr + \vec{r} \cdot \dot{\vec{y}}/2} - \frac{e\dot{\vec{y}}/2}{cr - \vec{r} \cdot \dot{\vec{y}}/2}, \quad (12.7)$$

denn die Geschwindigkeit der positiven Ladung ist $-\dot{\vec{y}}/2$, die der negativen ist $\dot{\vec{y}}/2$.

- Wir nehmen nun zusätzlich an, dass der Dipol langsam im Vergleich zu Lichtgeschwindigkeit oszilliert, also

$$|\dot{\vec{y}}| \ll c. \quad (12.8)$$

Dann kann das Vektorpotential in der Form

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{e\dot{\vec{y}}(t')}{cr} = \frac{\dot{\vec{p}}(t')}{cr}, \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad (12.9)$$

geschrieben werden, wobei (12.1) benutzt wurde.

- Offenbar würde in derselben Näherung das skalare Potential aus (12.6) verschwinden. Deswegen verwenden wir zu seiner konsistenten Bestimmung die Lorenz-Eichbedingung (9.12),

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (12.10)$$

um mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr} \right] \quad (12.11)$$

zu erhalten

$$\phi(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \int dt \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (12.12)$$

Die Divergenz lässt sich mithilfe der Formel

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \quad (12.13)$$

berechnen, womit

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) - \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \\ &= \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2 c} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (12.14)$$

folgt, worin der erste Term Folge der Retardierung ist.

- Sehr nahe am Dipol überwiegt der zweite Term wegen seiner steileren r -Abhängigkeit, und das skalare Potential wird zu

$$\phi \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (12.15)$$

Das ist das übliche skalare Potential des statischen Dipols. Weit entfernt vom Dipol überwiegt der erste Term in (12.14), und

$$\phi \approx \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2 c}. \quad (12.16)$$

12.2 Felder des Dipols

- Mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$ folgt aus den Potentialen (12.9) und (12.14)

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{cr} = \vec{\nabla} \frac{1}{cr} \times \dot{\vec{p}} + \frac{1}{cr} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}} \\ &= \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3 c} \end{aligned} \quad (12.17)$$

sowie

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{rc} - \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2 c} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc^2} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^3 c^2} + \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^4 c} - \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2 c} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \end{aligned} \quad (12.18)$$

In der *Nahzone* des Dipols überwiegen die Terme mit der steilsten r -Abhängigkeit, also

$$\vec{B} \approx \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3 c}, \quad \vec{E} \approx \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (12.19)$$

Dies sind wieder die Felder eines statischen Dipols, wobei hier das Dipolmoment \vec{p} zeitabhängig ist.

- In der *Fernzone* überwiegen die Felder mit der flachsten r -Abhängigkeit, also

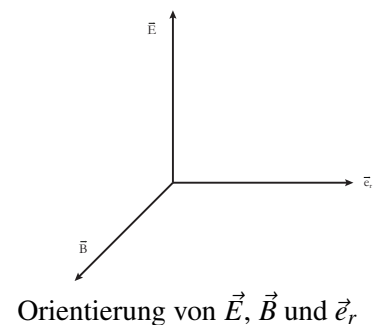
$$\vec{B} \approx \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2}, \quad \vec{E} \approx \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^3 c^2} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{rc^2} = \frac{1}{r^3 c^2} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}. \quad (12.20)$$

Daraus sieht man, dass in der Fernzone \vec{E} und \vec{B} von gleichem Betrag sind,

$$|\vec{E}| = |\vec{B}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}| \sin \theta}{c^2 r}, \quad (12.21)$$

und außerdem mit \vec{r} ein Orthogonalsystem bilden, denn offenbar ist

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{e}_r, \quad \vec{B} = -\vec{E} \times \vec{e}_r. \quad (12.22)$$



- Da θ der Winkel zwischen dem Dipolmoment und \vec{r} ist, zeigt (12.21) bereits, dass der Dipol in der Fernzone *nicht* in Richtung seiner Achse strahlt.

12.3 Der Poynting-Vektor des Dipols

- Der Energiefluss, der vom Dipol ausgeht, wird durch den Poynting-Vektor beschrieben,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) . \quad (12.23)$$

Setzen wir hier die Felder in der Fernzone ein, folgt

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi} (\vec{B} \times \vec{e}_r) \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} (\vec{B}^2 \vec{e}_r - (\vec{B} \cdot \vec{e}_r) \vec{B}) . \quad (12.24)$$

Da aber \vec{B} senkrecht auf \vec{e}_r steht (vgl. 12.19), folgt

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi} \vec{B}^2 \vec{e}_r = \frac{c}{4\pi} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2}{c^4 r^4} \vec{e}_r , \quad (12.25)$$

d.h. \vec{S}_{fern} zeigt in radialer Richtung, und sein Betrag ist

$$|\vec{S}_{\text{fern}}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \theta}{4\pi r^2 c^3} . \quad (12.26)$$

Der Energiefluss nimmt also wie $1/r^2$ ab. Weiterhin ist er proportional zur Beschleunigung der Ladung, also zu $|\ddot{\vec{p}}|$, und die Abhängigkeit von $\sin^2 \theta$ zeigt wieder, dass in Richtung der Dipolachse nichts abgestrahlt wird.

- Die abgestrahlte Energie ergibt sich aus dem Integral über den Poynting-Vektor in der Fernzone,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^T dt \oint d\vec{A} \cdot \vec{S}_{\text{fern}} = \int_0^T dt \oint r^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi c^3 r^2} \\ &= \frac{1}{2c^3} \int_0^T dt |\ddot{\vec{p}}|^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{=4/3} = \frac{2}{3c^3} \int_0^T \ddot{p}^2 dt , \quad (12.27) \end{aligned}$$

wobei im Regelfall die Retardierung zu beachten ist,

$$\ddot{p}^2 = \ddot{p}^2(t - r/c) . \quad (12.28)$$

Um das verbleibende Zeitintegral in (12.27) zu berechnen, muss vorgegeben werden, wie der Dipol sich verändert. Für einen harmonischen Dipol ist

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_0 \sin \omega t' = \vec{p}_0 \sin \omega(t - r/c) \\ \Rightarrow \ddot{p} &= -p_0 \omega^2 \sin \omega(t - r/c) . \quad (12.29) \end{aligned}$$

Setzt man dies in (12.27) ein und integriert, folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{2}{3c^3} p_0^2 \omega^4 \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt \\ &= \frac{2}{3c^3} p_0^2 \omega^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi p_0^2 \omega^3}{3c^3},\end{aligned}\quad (12.30)$$

wenn sich das Integral über eine Schwingungsperiode des Dipols erstreckt.

- In der *Nahzone* sieht der Energiefluss des Dipols erheblich komplizierter aus. Wegen

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}, \quad \vec{B} = \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3 c} \quad (12.31)$$

ist

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{nah}} &= \frac{1}{4\pi r^8} \left(3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p} \right) \times \left(\dot{\vec{p}} \times \vec{r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} \left(3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} \times (\dot{\vec{p}} \times \vec{r}) - r^2 \vec{p} \times (\dot{\vec{p}} \times \vec{r}) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} \left[3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \left(r^2 \dot{\vec{p}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}})\vec{r} \right) - r^2 \left((\vec{p} \cdot \vec{r})\dot{\vec{p}} - (\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}})\vec{r} \right) \right].\end{aligned}\quad (12.32)$$

Nun ist jedenfalls $\vec{p} \parallel \dot{\vec{p}}$ und daher

$$\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}} = \pm p \dot{p}, \quad \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} = \mp r \dot{p} \cos \theta, \quad (12.33)$$

wobei die beiden Vorzeichen berücksichtigen, dass $\dot{\vec{p}}$ auch gegen \vec{p} gerichtet sein kann. Damit folgt aus (12.33)

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{nah}} &= \frac{1}{4\pi r^8} \left[2pr \cos \theta r^2 \dot{\vec{p}} \mp 3r^2 p \dot{p} \cos^2 \theta \vec{r} \mp r^2 p \dot{p} \cos \theta \vec{r} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} \left[2(\vec{p} \cdot \vec{r}) r^2 \dot{\vec{p}} \mp p \dot{p} r^2 \cos \theta (3 \cos \theta + 1) \vec{r} \right].\end{aligned}\quad (12.34)$$

Der Energiestrom in der Nahzone fällt also wie $1/r^5$ ab, und das Nahfeld strahlt Energie durchaus auch in Richtung der Dipolachse ab:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{nah}} \cdot \frac{\vec{p}}{p} &= \frac{1}{4\pi r^8} \left[2(\vec{p} \cdot \vec{r}) r^2 (\pm \dot{p} \cos \theta) \mp (\vec{p} \cdot \vec{r}) r^2 \dot{p} \cos \theta (3 \cos \theta + 1) \right] \\ &= \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) r^2 \dot{p} \cos \theta (\pm 1 \mp 3 \cos \theta)}{4\pi r^8}.\end{aligned}\quad (12.35)$$

12.4 Strahlung einer beliebigen, schwingenden Ladungsverteilung

- Wir betrachten nun das Fernfeld einer beliebigen, schwingenden Ladungsverteilung im Grenzfall $v \ll c$. Ihr Vektorpotential ist nach (11.45)

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &\approx \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) d^3 r',\end{aligned}\quad (12.36)$$

wobei $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ verwendet wurde.

- Das Magnetfeld ist

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{c} \left(\vec{e}_r \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = -\frac{1}{c} \vec{e}_r \times \dot{\vec{A}}. \quad (12.37)$$

Dies sieht man, indem man etwa verwendet

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{1}{cr} \int j_k(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) d^3 r' \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \left[\left(\partial_j \frac{1}{r} \right) A_k + \frac{\partial}{\partial t} A_k \cdot \left(-\frac{1}{c} \partial_j r \right) \right] \\ &= \epsilon_{ijk} \left(-\frac{e_{rj}}{r^2} A_k - \frac{1}{c} \frac{x_j}{r} \dot{A}_k \right),\end{aligned}\quad (12.38)$$

was fern von der Ladungsverteilung in (12.37) übergeht.

- Wegen der Maxwell-Gleichung

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (12.39)$$

folgt aus (12.37) ebenso

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\epsilon_{klm} \frac{x_l}{r} \dot{A}_m \right) = -\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \left(\frac{x_l}{r} \dot{A}_m \right) \\ &= -\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \left[\left(\frac{\delta_{jl}}{r} - \frac{x_l x_j}{r^3} \right) \dot{A}_m + \frac{x_l}{r} \partial_j \dot{A}_m \right].\end{aligned}\quad (12.40)$$

Wie in (12.37) ist

$$\begin{aligned}\partial_j \dot{A}_m &= \partial_j \left[\frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \int j_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) d^3 r' \right] \\ &= -\frac{x_j}{r^2} \dot{A}_m - \frac{x_j}{rc} \ddot{A}_m \approx -\frac{x_j}{rc} \ddot{A}_m\end{aligned}\quad (12.41)$$

in führender Ordnung. Damit folgt aus (12.40)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \left[\left(\frac{\delta_{jl}}{r} - \frac{x_l x_j}{r^3} \right) \dot{A}_m - \frac{x_l x_j}{r^2 c} \ddot{A}_m \right] \\ &\approx \frac{1}{r^2 c} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} x_j x_l \ddot{A}_m, \end{aligned} \quad (12.42)$$

wieder unter Vernachlässigung aller Terme außer dem mit der flachsten r -Abhängigkeit. Also ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{r^2 c} \left[\vec{r} \times (\vec{r} \times \ddot{A}_m) \right]. \quad (12.43)$$

Wir schreiben nun die Änderung der Ladung im Volumen V in der Form

$$\dot{q} = \int \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' = cr \dot{A} \quad (12.44)$$

und erhalten aus (12.38) und (12.43) nach Zeitintegration

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\dot{q}}{cr} = \frac{\dot{q} \times \vec{r}}{c^2 r^2}, \\ \vec{E} &= \frac{1}{r^2 c} \left[\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \frac{\dot{q}}{rc} \right) \right] = \frac{(\dot{q} \times \vec{r}) \times \vec{r}}{c^2 r^3}, \end{aligned} \quad (12.45)$$

was zu Fernfeldern des Hertzschen Dipols (12.19) offenbar völlig analog ist. Damit ergibt sich, dass auch für beliebige schwingende Ladungsverteilungen \vec{E} , \vec{B} und \vec{r} im Fernfeld ein Orthogonalsystem bilden, wobei \vec{E} und \vec{B} dem Betrag nach gleich sind,

$$|\vec{B}| = |\vec{E}| = \frac{|\dot{q}| \sin \theta}{c^2 r}. \quad (12.46)$$

wieder fallen die Felder wie $1/r$ ab, der Energiestrom also wie $1/r^2$, wie es zur Energieerhaltung nötig ist.

12.5 Felder bei relativistischer Bewegung

- Wir geben nun die bisherige Näherung auf, dass die Geschwindigkeit der Ladung sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sei. Um die Felder einer relativistisch bewegten Ladung zu berechnen, kehren wir zu den Liénard-Wiechert-Potentialen

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q \vec{\beta}}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \quad (12.47)$$

zurück, in denen

$$\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}_0(t'), \quad \vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c} \quad (12.48)$$

gesetzt wurde, wobei

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad (12.49)$$

die retardierte Zeit ist.

- Die Felder folgen natürlich durch Ableitungen der Potentiale, wobei bedacht werden muss, dass für die partiellen Ableitungen $\partial/\partial t$, $\vec{\nabla}$ die Koordinaten *beim Beobachter* (und nicht bei der Ladung) jeweils bis auf eine konstant gehalten werden müssen.
- Zunächst ist, wegen der Definition der retardierten Zeit (12.49)

$$dt' = dt - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} dt', \quad (12.50)$$

und wegen (12.48) ist

$$\frac{dR}{dt'} = \frac{d}{dt'} \sqrt{\vec{R}^2} = \frac{1}{R} \left(-\vec{R} \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} \right) = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} \quad (12.51)$$

bei konstantem \vec{r} , d.h. für die partielle Zeitableitung nach t gilt

$$dt' \left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} \right] = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R}, \quad (12.52)$$

wobei $\vec{e}_R := \vec{R}/R$ eingeführt wurde. Somit ist \vec{e}_R ein Einheitsvektor, der *zur retardierten Zeit* t' von der Ladung zum Beobachter zeigt.

- Ebenso ist, bei konstantem t, y und z wegen (12.49)

$$\begin{aligned} dt' &= -\frac{1}{c} \frac{dR}{dx} dx = -\frac{dx}{c} \frac{d\sqrt{\vec{R}^2}}{dx} \\ &= -\frac{dx}{c} \frac{1}{2R} \frac{d}{dx} \left[(x - x_0(t'))^2 + (y - y_0(t'))^2 + (z - z_0(t'))^2 \right] \\ &= -\frac{dx}{cR} \left[(x - x_0(t')) \left(1 - \frac{dx_0(t')}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. - (y - y_0(t')) \frac{dy_0(t')}{dx} - (z - z_0(t')) \frac{dz_0(t')}{dx} \right] \\ &= -\frac{dx}{cR} \left[(x - x'_0) - \vec{R} \cdot \dot{\vec{r}}_0 \frac{dt'}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (12.53)$$

daraus folgt

$$dt' = -\frac{x dx}{cR} + \vec{e}_R \cdot \vec{\beta} dt' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \frac{x}{cR}, \quad (12.54)$$

und entsprechend ist

$$\vec{\nabla} t' = -\frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \frac{\vec{R}}{cR} = -\frac{1}{c} \frac{\vec{e}_R}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R}. \quad (12.55)$$

Dies beschreibt die Änderung der retardierten Zeit mit dem Ort des Beobachters.

- Mit der Kettenregel ergeben die Formeln (12.52) und (12.55)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(t') &= \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \cdot \dot{f}(t') \quad \text{und} \\ \vec{\nabla} f(\vec{r}', t') &= \vec{\nabla}' f - \frac{\vec{e}_R}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)} \dot{f}(t').\end{aligned}\quad (12.56)$$

Dabei beschreibt $\vec{\nabla}' f$ die Änderung von f mit den räumlichen Koordinaten zur retardierten Zeit t' .

- Dies ergibt zunächst für die Zeitableitung des Vektorpotentials

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & \quad (12.57) \\ &= \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \left(\frac{q \dot{\vec{\beta}}}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} - \frac{q \vec{\beta}}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^2} \cdot (\dot{R} - \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R} - \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{R}}) \right) \\ &= \frac{q \dot{\vec{\beta}}}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^2} + \frac{q \vec{\beta}}{R^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{R}} + c\vec{\beta}^2 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R),\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass bei festem \vec{r}'

$$\dot{\vec{R}} = -\dot{r}'_0 = -c\dot{\vec{\beta}} \quad \text{und} \quad \dot{R} = -c\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{e}_R \quad (12.58)$$

ist.

- Der Gradient des skalaren Potentials ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \left(\frac{q}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \right) - \frac{\vec{e}_R}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{q}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \right) \\ &= \frac{-q}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^2} (\vec{e}_R - \vec{\beta}) \\ &\quad + \frac{\vec{e}_R}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)} \frac{q}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^2} (\dot{R} - \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R} - \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{R}}) \\ &= \frac{-q(\vec{e}_R - \vec{\beta})}{R^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^2} \\ &\quad - \frac{q\vec{e}_R}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3 R^2} (c\vec{\beta} \cdot \vec{e}_R + \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R} - c\vec{\beta}^2).\end{aligned}\quad (12.59)$$

Das elektrische Feld ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \\ &= \frac{q}{R^2} \left[\frac{(\vec{e}_R - \vec{\beta})(1 - \vec{\beta}^2)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} \right] \\ &\quad - \frac{q}{c} \left[\frac{\dot{\vec{\beta}}}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)} + \frac{\vec{\beta}(c\beta^2 + \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} - c\vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)}{R^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} \right]\end{aligned}\quad (12.60)$$

Unter Verwendung von

$$\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] = (\vec{e}_R \cdot \dot{\vec{\beta}})(\vec{e}_R - \vec{\beta}) - (1 - \vec{e}_R \cdot \vec{\beta})\dot{\vec{\beta}} \quad (12.61)$$

lässt sich der Zähler des zweiten Terms aus (12.60) vereinfachen, so dass sich das \vec{E} -Feld in die Form

$$\vec{E} = \frac{q}{R^2} \frac{(1 - \beta^2)(\vec{e}_R - \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} + \frac{q}{c} \frac{\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} \quad (12.62)$$

bringen lässt.

- Die Rotation des Vektorpotentials folgt entsprechend:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (12.63) \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \frac{q\vec{\beta}}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} - \frac{\vec{e}_R}{c(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)} \times \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{q}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \right) \\ &= \frac{q}{R^2} \frac{(\vec{e}_R \times \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} - \frac{q}{c} \frac{\vec{e}_R \times [\dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R) + \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{e}}_R)]}{Rc(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3}. \end{aligned}$$

Offenbar ist auch hier, in dem man (2.61) benutzt,

$$\vec{B} = \vec{e}_R \times \vec{E}. \quad (12.64)$$

12.6 Die Larmor-Formel

- Betrachten wir die beiden Ausdrücke für die Felder \vec{E} und \vec{B} , (12.62) und (12.64), fällt auf, dass der jeweils erste Term um eine Potenz in R steiler abfällt als der zweite. Fern der Ladung spielt also nur der zweite eine Rolle, und wir haben

$$\vec{E} = \frac{q}{c} \frac{\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3}, \quad \vec{B} = \vec{e}_R \times \vec{E}. \quad (12.65)$$

Der Poynting-Vektor ist also, fern von der Ladung

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times (\vec{e}_R \times \vec{B})] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{e}_R, \quad (12.66)$$

wobei (12.64) verwendet wurde. Mit (12.65) folgt

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi} \frac{q^2}{c^2 R^2} \frac{|\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^6} \vec{e}_R. \quad (12.67)$$

Der Poynting-Vektor (12.67) zeigt an, wie groß die Energiestromdichte der Strahlung ist, die die beschleunigte Ladung abgibt. Die

Energie, die pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ abgestrahlt wird, ist also

$$dE = \underbrace{R^2 \vec{e}_R d\Omega}_{\text{Flächenelement}} \cdot \vec{S}_{\text{fern}} \cdot dt = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^6} d\Omega, \quad (12.68)$$

also wird pro Zeiteinheit (des Beobachters, $dt!$) die Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^6} \quad (12.69)$$

abgegeben. Pro Zeiteinheit der Ladung, d.h. pro Einheit der *retardierten* Zeit dt' , ist dies nach (12.52)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^5}. \quad (12.70)$$

Diese wichtige Formel erlaubt es, die Abstrahlung einer beschleunigten Ladung mit ihrer Winkelabhängigkeit zu berechnen.

- Um die Gesamtleistung zu berechnen, muss über den Raumwinkel integriert werden, was wegen der komplizierten Winkelabhängigkeit von (12.70) sehr aufwändig ist. Wir geben daher nur das Ergebnis an, d.h. die gesamte pro Zeiteinheit der Ladung abgegebene Energie

$$P = \frac{2q^2}{3c(1 - \beta^2)^3} \left[\dot{\beta}^2 - |\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}|^2 \right]. \quad (12.71)$$

Das ist die *relativistische Larmor-Formel*.

- Der nichtrelativistische Grenzfall ist bedeutend einfacher. Die Felder (12.65) reduzieren sich auf

$$\vec{E} = \frac{q}{c^2 R} (\vec{e}_R \times \dot{\vec{v}}) \cdot \vec{B} = \vec{e}_R \times \vec{E}; \quad (12.72)$$

daher wird der Poynting-Vektor zu

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q}{c^2 R} \right)^2 (\vec{e}_R \times \dot{\vec{v}})^2 \vec{e}_R. \quad (12.73)$$

Die Leistung, die in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlt wird, ist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{e}_R \times \dot{\vec{v}}|^2, \quad (12.74)$$

und hier ist die Raumwinkel-Integration leicht auszuführen:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \int (\vec{e}_R \times \dot{\vec{v}})^2 d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} \int d\Omega [\dot{v}^2 - (\vec{e}_R \cdot \dot{\vec{v}})^2] \\
 &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \left(4\pi \dot{v}^2 - 2\pi |\dot{\vec{v}}| \underbrace{\int \sin \Omega d\theta \cos^2 \theta}_{=\int_{-1}^1 \cos^2 \theta d(\cos \theta)=2/3} \right) \\
 &= \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2 .
 \end{aligned} \tag{12.75}$$

Das ist die *nichtrelativistische Larmorformel*.

- Setzt man hier die Beschleunigung $|\dot{\vec{v}}|$ des Hertzschen Dipols ein, erhält man Gleichung (12.31) zurück.
- Von der Larmor-Formel aus führt die Parsevalsche Gleichung (3.41) auf die Berechnung abgestrahlter Spektren.

12.7 Strahlungsdämpfung und natürliche Linienbreite

- Wir betrachten nun als Beispiel für die Rückwirkung der Abstrahlung auf die Ladung ein Elektron, das harmonisch an einen Atomkern gebunden sei. Der Kern sei ortsfest im Ursprung angebracht, und das Elektron schwinde ohne Berücksichtigung der Abstrahlung mit der Kreisfrequenz ω_0 längs der z -Achse:
- Seine Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0 \tag{12.76}$$

mit der allgemeinen komplex geschriebenen Lösung

$$x = x_0 e^{i\omega_0 t} . \tag{12.77}$$

Die Beschleunigung ist

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x = -\omega_0^2 x_0 e^{i\omega_0 t} . \tag{12.78}$$

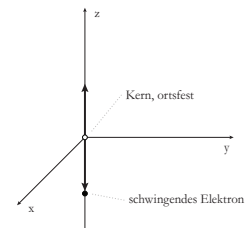
Das Zeitmittel des Beschleunigungsquadrates ist dem Betrag nach

$$\frac{1}{2} (\ddot{x} \ddot{x}^*) = \frac{1}{2} \omega_0^4 |x_0|^2 , \tag{12.79}$$

und damit wird nach der (nichtrelativistischen) Larmor-Formel die Energie pro Zeit

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{2} \omega_0^4 |x_0|^2 = \frac{e^2}{3c^3} \omega_0^4 |x_0|^2 = \frac{dE}{dt} \tag{12.80}$$

abgegeben.



Modellatom: harmonisch gebundenes Elektron im Feld eines Kerns

- Um den Effekt auf das Elektron zu sehen, wenden wir den Energiesatz auf (12.76) an, d.h. wir multiplizieren (12.76) mit \dot{x} und erhalten für das „ungestörte“ Elektron

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right). \quad (12.81)$$

Um dies in Zusammenhang mit (12.80) zu bringen, bemerken wir, dass der Faktor $\omega_0^4 |x_0|^2$ durch das Produkt aus \dot{x} und \ddot{x} dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= i\omega_0 x, & \ddot{x} &= -i\omega_0^3 x = -\omega_0^2 \dot{x} \\ \Rightarrow (\dot{x} \ddot{x}^*) &= -\omega_0^2 \dot{x} \dot{x}^* = -\omega_0^4 |x_0|^2. \end{aligned} \quad (12.82)$$

Die Energiegleichung kann also durch den Abstrahlungsverlust wie folgt ergänzt werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right) = -\frac{e^2}{3c^3} \omega_0^4 |x_0|^2 = \frac{e^2}{3c^3} \dot{x} \ddot{x}^*. \quad (12.83)$$

Daraus sieht man, dass die Bewegungsgleichung einen Reibungsterm bekommt,

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = \frac{e^2}{3c^3} \frac{(\dot{x} \ddot{x}^*)}{\dot{x}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x}, \quad (12.84)$$

der mit der dritten Zeitableitung der Ausstrahlung des Elektrons geht. Ihm entspricht also die „Reibungskraft“

$$F_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x}, \quad (12.85)$$

die auch als „Strahlungsreibung“ oder „Strahlungsdämpfung“ bezeichnet wird.

- Wir betrachten nun (12.84) etwas näher. Zunächst versuchen wir den Lösungsansatz

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad (12.86)$$

aus dem wir die Gleichung für ω erhalten

$$\begin{aligned} -m\omega^2 + m\omega_0^2 &= -i\omega^3 \frac{2e^2}{3c^3} \\ \Rightarrow -\omega^2 + \omega_0^2 &= -i\omega^3 \frac{2e^2}{3c^3}. \end{aligned} \quad (12.87)$$

Unter der Annahme, dass $\omega \approx \omega_0$ sei, lässt sich diese Gleichung in erster Ordnung der Abweichung von ω von ω_0 lösen. Sei

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega_0, \quad (12.88)$$

dann besagt (12.86) in erster Ordnung in $\delta\omega_0$

$$\begin{aligned} -\omega^2 &\approx \omega_0^2 + \frac{2ie^2}{3mc^3} \omega_0^3 = \omega_0^3 \left(1 + \frac{2ie^2}{3mc^3} \omega_0 \right) \\ \Rightarrow \omega &= \omega_0 + \delta\omega_0 = \omega_0 \left(1 + \frac{ie^2}{3mc^3} \omega_0 \right) \\ \Rightarrow \delta\omega_0 &= \frac{ie^2}{3mc^3} \omega_0^2. \end{aligned} \quad (12.89)$$

also tritt in $\vec{x}(t)$ ein Dämpfungsterm auf,

$$x = x_0 e^{i\omega_0 t - \gamma t}, \quad \gamma := \frac{e^2}{3mc^3} \omega_0^2, \quad (12.90)$$

in dem die Dämpfungskonstante γ durch ω_0^2 bestimmt ist.

- Das Spektrum der Abstrahlung folgt durch Fouriertransformation. die gesamte abgestrahlte Energie ist nach (12.75)

$$E = \int dt \frac{2e^2}{3c^3} |\ddot{x}|^2 = \int d\omega \frac{2e^2}{3c^3} |\ddot{x}(\omega)|^2, \quad (12.91)$$

wobei im zweiten Schritt die Parsevalsche Gleichung verwendet wurde, um die gesamte Energiestrahlung durch die Kreisfrequenz ω auszudrücken. Das Spektrum ist also durch

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{2e^2}{3c^3} |\ddot{x}(\omega)|^2 \quad (12.92)$$

gegeben, also durch die Fouriertransformierte der Beschleunigung.

- Mit (12.90) folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{x}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}}_{= \ddot{x}(t)} e^{-i\bar{\omega} t} \right) \\ &= -\omega^2 x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{(i\omega_0 - \gamma - i\bar{\omega})t}. \end{aligned} \quad (12.93)$$

Unter der Annahme, dass das Elektron bei $t = 0$ zu oszillieren beginnt, ist

$$\begin{aligned} \Re(x(t)) &= 0 \quad (t < 0) \\ \Rightarrow x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\gamma t} = \frac{x_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (12.94)$$

was, in (12.93) eingesetzt, folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(\bar{\omega}) &= -\omega^2 x_0 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (e^{-\gamma t - i\omega_0 t - i\bar{\omega} t} + e^{-\gamma t + i\omega_0 t - i\bar{\omega} t}) dt \\ &= \frac{-\omega^2 x_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-1}{-\gamma t - i\omega_0 t - i\bar{\omega} t} + \frac{-1}{-\gamma t + i\omega_0 t - i\bar{\omega} t} \right) \\ &= \frac{-\omega^2 x_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma + i\bar{\omega}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2 + \gamma^2 + 2i\gamma\bar{\omega}}. \end{aligned} \quad (12.95)$$

Das Absolutquadrat davon ist eine typische Resonanzkurve,

$$|\ddot{x}(\bar{\omega})|^2 = \frac{|x_0|^2 \omega^4}{2\pi} \frac{\gamma^2 + \bar{\omega}^2}{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \bar{\omega}^2}. \quad (12.96)$$

Bei kleiner Dämpfung, $\gamma \ll \omega_0$, hat sie ihr Maximum bei $\bar{\omega} \approx \omega_0$, und ihre Breite ist durch γ bestimmt:

$$\Delta\omega \approx 2\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2. \quad (12.97)$$

Dies gibt die „natürliche Linienbreite“ der Emission des oszillierenden Elektrons an. Sie folgt in der Quantenmechanik aus der Unschärferelation zwischen Energie und Zeit. Die „Zerfallszeit“ des Elektronenzustandes ist etwa

$$\Delta t = \frac{1}{2\gamma}, \quad (12.98)$$

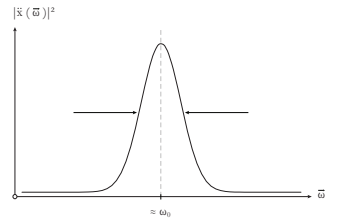
denn die abgestrahlte Energie nimmt wie $e^{-2\gamma t}$ ab. außerdem ist die zu ω_0 gehörende Photonenenergie $E = \hbar\omega_0$. Aus der Unschärfebeziehung

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \quad (12.99)$$

folgt

$$\hbar \Delta\bar{\omega} \frac{1}{2\gamma} \approx \hbar \Rightarrow \Delta\bar{\omega} \approx 2\gamma, \quad (12.100)$$

wie in (12.97).



Zur Definition der natürlichen Linienbreite

Kapitel 13

Thomson-Streuung und Synchrotronstrahlung

13.1 Thomson-Streuung

- Wenn eine ebene, monochromatische, polarisierte elektromagnetische Welle auf ein ruhendes Elektron trifft, beschleunigt sie es zu einer harmonischen Bewegung. Aufgrund dieser beschleunigten Bewegung wird das Elektron zu strahlen beginnen. Wir fragen nun, wie sich die abgestrahlte zur einfallenden Energie verhält.
- Wenn die einfallende Welle ein \vec{E} -Feld

$$\vec{E}' \parallel \vec{e}_x \quad (13.1)$$

hat und das Elektron nun eine Ruhelage im Ursprung schwingt, stellt sich die Situation folgendermaßen dar:

- Das Elektron erfährt eine Lorentzkraft und genügt daher der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = -e\vec{E}' - e\beta \times \vec{B}' , \quad (13.2)$$

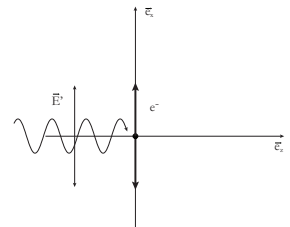
wobei im nichtrelativistischen Grenzfall $\beta \ll 1$ der magnetische Anteil der Lorentzkraft vernachlässigt werden kann. Damit ist für das Elektron

$$\ddot{\vec{x}} = c\dot{\vec{\beta}} = -\frac{e}{m}\vec{E}' . \quad (13.3)$$

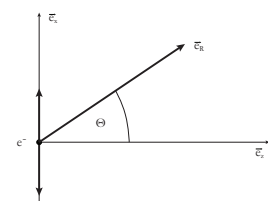
Nach der nichtrelativistischen Larmor-Formel (12.75) ist die pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Energie

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{e}_R \times \dot{\vec{v}}|^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{e}_R \times \dot{\vec{\beta}}|^2 , \quad (13.4)$$

wobei \vec{e}_R der Vektor vom Elektron zum Betrachter ist und Retardierung vernachlässigt wird.



Anregung eines Elektrons durch eine einfallende Welle



Orientierung relativ zum schwingenden Elektron

- Indem man (13.3) und (13.4) kombiniert, folgt bereits

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} |\vec{e}_R \times \vec{E}'|^2 = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} |\vec{E}'|^2 \sin^2 \alpha, \quad (13.5)$$

worin α der Winkel zwischen \vec{E}' und \vec{e}_R ist.

- Der einfallende Energiestrom ist aufgrund des Poynting-Vektors (7.88)

$$S' = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}'|^2, \quad (13.6)$$

das ist die pro Zeiteinheit und Einheitsfläche einfallende Energie. Der Quotient

$$\frac{1}{S'} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \sin^2 \alpha = \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin^2 \alpha \quad (13.7)$$

hat offenbar die Dimension einer Fläche. Er ist der differentielle Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin^2 \alpha, \quad (13.8)$$

der angibt, welcher Anteil des einfallenden Energiestroms durch die Abstrahlung des beschleunigten Elektrons gestreut wird, und zwar in den Raumwinkel $d\Omega$ um die Richtung α .

- Wenn man die gesamte Ruheenergie des Elektrons mc^2 durch die potentielle Energie der Ladung $-e$ auf seiner „Oberfläche“ $4\pi r_e^2$ erklären möchte, erhält man eine Abschätzung des so genannten „klassischen Elektronenradius“, nämlich

$$\frac{e^2}{r_e} = mc^2 \quad \Rightarrow \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2.81 \times 10^{-13} \text{ cm}. \quad (13.9)$$

Der differentielle Streuquerschnitt lässt sich damit in der anschaulichen Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \alpha \quad (13.10)$$

schreiben. Der gesamte Streuquerschnitt ist

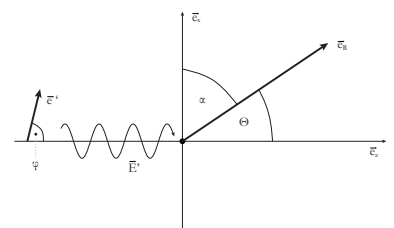
$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = r_e^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \alpha \, d\alpha = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (13.11)$$

Das ist der *Thomsonsche Streuquerschnitt* des Elektrons. Sein Zahlenwert ist

$$\sigma_T = 6.64 \times 10^{-25} \text{ cm}^2. \quad (13.12)$$

Das ist die Fläche, die ein einzelnes, nichtrelativistisches Elektron der einfallenden Strahlung „entgegen stellt“.

- Dieses Ergebnis wurde abgeleitet unter der Voraussetzung, dass die einfallende Strahlung polarisiert sei. Wir drehen nun die Polarisationsrichtung um die z -Achse und mitteln dann über alle Polarisationsrichtungen:



Zur Mittelung über alle Polarisationsrichtungen

- Da \vec{E}' nach Konstruktion senkrecht auf \vec{e}_z steht, ist

$$\vec{E}' = E' \cdot \vec{e}' = E' \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.13)$$

während die ausfallende Richtung

$$\vec{e}_R = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (13.14)$$

ist. Nach (13.4) ist die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\dot{v}^2 - (\vec{e}_R \cdot \dot{v})^2] = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} [1 - (\vec{e}_R \cdot \vec{e}')^2], \quad (13.15)$$

worin die Vektoridentität

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (13.16)$$

verwendet wurde.

- Nach (13.3) ist

$$|\dot{v}|^2 = \frac{e^2}{m^2} |\vec{E}'|^2. \quad (13.17)$$

Außerdem ist wegen (13.13) und (13.14)

$$\vec{e}_R \cdot \vec{e}' = \cos \varphi \sin \theta, \quad (13.18)$$

also folgt für den differentiellen Streuquerschnitt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{S'} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2 c^4} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \\ &= r_e^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (13.19)$$

Mittelung über φ ergibt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle &= r_e^2 - r_e^2 \sin^2 \theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos^2 \varphi}_{=1/2} = \frac{r_e^2}{2} (1 + 1 - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (13.20)$$

Das ist der unpolarisierte Thomson-Querschnitt, der offenbar deutlich in Vorwärtsrichtung zeigt. Natürlich ergibt auch sein Integral über den Raumwinkel den Thomson-Querschnitt σ_T ,

$$\int \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle d\Omega = \frac{r_e^2}{2} \cdot \left(4\pi + 2\pi \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d(\cos \theta) \right) = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (13.21)$$

13.2 Die Eddington-Leuchtkraft

- Als Beispiel zur Veranschaulichung des Thomson-Querschnitts betrachten wir die Situation, dass ionisiertes Gas einen heißen, strahlenden Körper der Masse M umgibt. Die Strahlung führt den Impulsstrom

$$\frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{4\pi} |\vec{E}|^2 \vec{e}_R \quad (13.22)$$

mit sich (vgl. Abschnitt 9.6), Gl. (9.71)), das ist die pro Fläche einer ideal absorbierenden Wand ausgeübte Kraft.

- Die pro Zeiteinheit insgesamt abgegebene Energie des Sterns ist seine Leuchtkraft,

$$L = \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = 4\pi R^2 \cdot \frac{c}{4\pi} |\vec{E}(R)|^2, \quad (13.23)$$

wobei $\vec{E}(R)$ die Feldstärke am Radius R ist. Dort ist nach (13.22) also der Lichtdruck

$$\frac{\vec{S}}{c} = \frac{L}{cR^2} \frac{\vec{e}_R}{4\pi}. \quad (13.24)$$

Ein Elektron hat die streuende Fläche σ_T und erfährt deswegen die Kraft

$$\vec{F}_R = \frac{\vec{S}}{c} \sigma_T = \frac{L}{4\pi R^2 c} \sigma_T \vec{e}_R. \quad (13.25)$$

Dieser nach außen gerichteten Kraft wirkt die Schwerkraft

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{R^2} \vec{e}_R \quad (13.26)$$

entgegen. Beide sind gleich, wenn

$$\frac{L}{4\pi R^2 c} \sigma_T = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow L = \frac{4\pi GMm}{\sigma_T} c \quad (13.27)$$

ist. Bei dieser Leuchtkraft können Elektronen offenbar nicht mehr in den Stern fallen, weil sie von der Abstrahlung des Sterns daran gehindert werden.

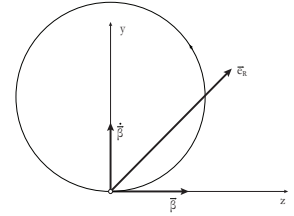
- Mit $m = 9.109 \times 10^{-28} \text{g}$, $G = 6.673 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$ und der Sonnenmasse von $M_0 = 2 \times 10^{33} \text{g}$ folgt

$$L = 6.9 \times 10^{34} \frac{\text{erg}}{\text{s}} = 6.9 \times 10^{28} \text{W}. \quad (13.28)$$

Die Leuchtkraft der Sonne ist $3.85 \times 10^{26} \text{W} = 3.85 \times 10^{33} \text{erg s}^{-1}$, also etwa ein Zwanzigstel dieser Leuchtkraftgrenze, die auch Eddington-Leuchtkraft heißt.

13.3 Synchrotronstrahlung

- Wir betrachten nun die Abstrahlung eines relativistischen Teilchens, das sich auf einer Kreisbahn bewegt. Diese Situation tritt etwa dann auf, wenn stark beschleunigte Elektronen in homogenen Magnetfeldern umlaufen, wie es etwa in irdischen Teilchenbeschleunigern oder in astrophysikalischen Radioquellen vorkommt.
- Die Ebene der Kreisbahn sei die y - z -Ebene. Der Zeitpunkt sei so gewählt, dass $\vec{\beta}$ in z - und $\dot{\vec{\beta}}$ in y -Richtung zeigen.
- Ein Beobachter betrachte dies aus der Richtung



Strahlendes Elektron auf einer Kreisbahn

$$\vec{e}_R = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (13.29)$$

Die Formel (12.70) gibt an, wie die Winkelverteilung der Abstrahlung pro Zeiteinheit des Elektrons (dt') ist:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^5}. \quad (13.30)$$

Setzt man hier \vec{e}_R aus (13.29) ein, verwendet

$$\vec{\beta} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.31)$$

und vereinfacht die entsprechenden Terme, folgt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\beta} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right], \quad (13.32)$$

worin $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ verwendet wurde.

- Für $\beta \rightarrow 1$ wird die Winkelabhängigkeit von $dP/d\Omega$ sehr stark in Vorwärtsrichtung konzentriert. Der mittlere quadratische Winkel θ ist durch

$$\frac{\int \theta^2 \frac{dP}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega} = \langle \theta^2 \rangle \approx \frac{1}{\gamma^2} \quad (13.33)$$

gegeben, wenn $\beta \rightarrow 1$ geht, d.h. die Abstrahlung findet bei ultrarelativistischer Bewegung in einem engen Kegel mit dem Öffnungswinkel $\theta \approx 1/\gamma$ statt.

- Generell erhalten wir das Spektrum der Abstrahlung wie in XII.7 aus der Parsevalschen Gleichung, vgl. (12.91). Da die pro Raumwinkel abgestrahlte Energie durch

$$\frac{dE}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt = \frac{e^2}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^6} dt \quad (13.34)$$

gegeben ist, kann die Parsevalsche Gleichung (3.41) dazu verwendet werden, die Energie pro Raumwinkel auf die Form

$$\frac{dE}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{f}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (13.35)$$

mit

$$\vec{f}(t) := \frac{|\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} \cdot \frac{e}{\sqrt{4\pi c}}, \quad (13.36)$$

was zur retardierten Zeit ausgewertet werden muss.

- Die Integration über negative Frequenzen in (13.35) gewinnt einen Sinn durch die Bedingung, dass $\vec{f}(t)$ reell sein muss, weshalb $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$ ist.
- Die Fouriertransformierte $\hat{f}(\omega)$ ergibt sich aus

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \vec{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t'+R/c)} \vec{f}(t') (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R), \quad (13.37)$$

worin die retardierte Zeit t' eingesetzt und (12.52) verwendet wurde. Wir nehmen nun an, dass sich der Beobachter weit vom strahlenden Elektron entfernt aufhält und deswegen der Vektor \vec{e}_R als unabhängig von der Zeit angesehen werden kann. Der Abstand R vom Elektron zum Beobachter ist dann der Abstand x zum Ursprung des Koordinatensystems in der Ebene der Kreisbewegung, plus die Projektion des Abstandes \vec{r} des Elektrons von diesem Ursprung auf die Richtung zum Beobachter:

$$R = x - \vec{r} \cdot \vec{e}_R, \quad (13.38)$$

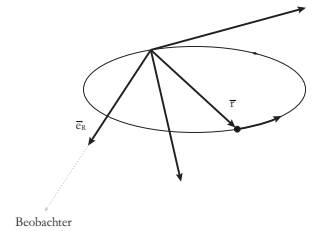
also ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' - \vec{r} \cdot \vec{e}_R/c)} \vec{f}(t') (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R) \\ &= \frac{e}{\sqrt{4\pi c}} \int dt' e^{i\omega(t' - \vec{r} \cdot \vec{e}_R/c)} \frac{\vec{e}_R [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^2} \end{aligned} \quad (13.39)$$

denn der konstante Phasenfaktor $e^{i\omega x}$ ist für alles weitere unerheblich.

- Nun stellt sich heraus, dass der Bruch im Integranden von (13.39) als totale Zeitableitung geschrieben werden kann:

$$\frac{\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^2} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \right), \quad (13.40)$$



Kreisendes Elektron aus der Sicht des Beobachters

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \right) &= \frac{\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \dot{\vec{\beta}})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} + \frac{[\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta})](\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{e}_R)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^2} \\ &= \frac{[\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \dot{\vec{\beta}})](1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R) + [\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta})](\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{e}_R)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^2} \quad (13.41) \end{aligned}$$

woraus (13.40) folgt.

- Setzt man (13.40) in (13.39) ein, folgt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{e}{\sqrt{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{d}{dt'} \left[\frac{\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \right] e^{i\omega(t' - \vec{r} \cdot \vec{e}_R/c)} \\ &= \frac{-e}{\sqrt{4\pi c}} i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R} \frac{d}{dt'} e^{i\omega(t' - \vec{r} \cdot \vec{e}_R/c)} \\ &= \frac{-ie\omega}{\sqrt{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' - \vec{r} \cdot \vec{e}_R/c)} [\vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \dot{\vec{\beta}})], \quad (13.42) \end{aligned}$$

wobei die Randterme fortgelassen wurden. Dieses Integral muss nun zunächst für die Kreisbewegung des Elektrons ausgewertet werden.

- Dazu legen wir das Koordinatensystem wie folgt: Die Ebene der Kreisbahn sei die x - y -Ebene, und wegen der Rotationssymmetrie kann der Vektor \vec{e}_R aus dem Ursprung kommend festgelegt werden:
- Die Kreisbahn habe den Radius ρ und werde mit der dem Betrage nach konstanten Geschwindigkeit v durchlaufen. Der Azimutwinkel φ ist demnach

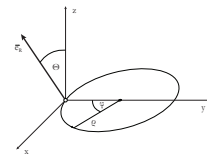
$$\varphi = \frac{vt}{\rho}, \quad (13.43)$$

und die Bahn wird beschrieben durch Radius und Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} \rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi + \rho \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{\beta} &= \frac{\rho}{c} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \cos \frac{vt}{\rho} \\ -\sin \frac{vt}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.44) \end{aligned}$$

- Damit wird zunächst das Argument der Exponentialfunktion aus (13.42) zu

$$\omega \left[t' - \frac{\vec{r}'(t') \cdot \vec{e}_R}{c} \right] := \omega \left[t' - \frac{\rho}{c} \sin \theta \sin \frac{vt'}{\rho} \right], \quad (13.45)$$



Zur Behandlung der Synchrotronstrahlung

denn $\vec{e}_R = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Zur Auswertung des doppelten Kreuzprodukts in (13.42) führen wir den Vektor

$$\vec{e}_\perp = \vec{e}_R \times \vec{e}_y \quad (13.46)$$

ein, der senkrecht auf der Richtung zum Beobachter steht. In Komponenten ist

$$\vec{e}_\perp = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (13.47)$$

und der Ausdruck

$$\begin{aligned} \vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta}) &= \beta \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \beta \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \beta \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos^2 \theta \\ \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.48)$$

kann in der Form

$$\begin{aligned} \vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta}) &= \vec{e}_\perp \cos \varphi \cos \theta + \vec{e}_y \sin \varphi \\ &= \cos \frac{vt}{\rho} \cos \theta \vec{e}_\perp + \sin \frac{vt}{\rho} \vec{e}_y \end{aligned} \quad (13.49)$$

geschrieben werden.

- Im nächsten Schritt können wir benutzen, dass Emission, die den Beobachter erreicht, nur in sehr kurzen Zeiten um $t' = 0$ ausgesandt wird, weil die Strahlung sehr stark in Vorwärtsrichtung fokussiert ist. Unter diesen Umständen ist auch $\varphi \approx 0$, und $\cos \varphi$ bzw. $\sin \varphi$ können entwickelt werden. Dasselbe gilt für θ , da die Abstrahlung fast genau auf die Bahnebene beschränkt sein und deshalb $\theta \approx \pi/2$ sein wird. Also verwenden wir

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6}, \quad \sin \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (13.50)$$

und erhalten aus (13.45)

$$\begin{aligned} \omega \left(t' - \frac{\rho}{c} \sin \theta \sin \varphi \right) &\approx \omega \left[t' - \frac{\rho}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) \right] \\ &= \omega \left[t' - \frac{\rho}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \frac{vt'}{\rho} \left(1 - \left(\frac{vt'}{\rho} \right)^2 \frac{1}{6} \right) \right] \\ &= \omega \left[t' - \beta t' \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \left(1 - \left(\frac{vt'}{\rho} \right)^2 \frac{1}{6} \right) \right] \\ &\approx \omega \left[(1 - \beta) t' + \beta t' \frac{\theta^2}{2} + \frac{\beta t' v^2 t'^2}{6 \rho^2} \right], \end{aligned} \quad (13.51)$$

wobei Terme von der Ordnung $\theta^2 t'^3$ weggelassen wurden. Wir setzen nun relativistische Bewegung voraus, $\beta \lesssim 1$, und verwenden

$$1 - \beta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} \approx \frac{1}{2\gamma^2}, \quad (13.52)$$

um aus (13.51) zu bekommen

$$\omega \left(t' - \frac{\rho}{c} \sin \theta \sin \varphi \right) \approx \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t' + \frac{c^2}{3\rho^2} t'^3 \right]. \quad (13.53)$$

- Durch dieselben Näherungen erhalten wir aus (13.49)

$$\begin{aligned} & \vec{e}_R \times (\vec{e}_R \times \vec{\beta}) \\ & \approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{ct}{\rho} \right)^2 \right] \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right) \vec{e}_\perp + \frac{ct}{\rho} \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{ct}{\rho} \right)^2 \right) \vec{e}_y \\ & \approx \theta \vec{e}_\perp + \frac{ct}{\rho} \vec{e}_y, \end{aligned} \quad (13.54)$$

woraus mit (13.42) folgt

$$\hat{f}(\omega) \approx \frac{-ie\omega}{\sqrt{4\pi c}} \left[\hat{f}_\perp(\omega) \vec{e}_\perp + \hat{f}_y(\omega) \vec{e}_y \right], \quad (13.55)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{f}_\perp(\omega) & := \theta \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp \left[\frac{i\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t' + \frac{c^2}{3\rho^2} t'^3 \right) \right], \\ \hat{f}_y(\omega) & := \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dt' t' \exp \left[\frac{i\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t' + \frac{c^2}{3\rho^2} t'^3 \right) \right] \end{aligned} \quad (13.56)$$

Um die Fourier-Transformation auszuführen, substituieren wir

$$x := \frac{ct'}{\rho \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2}} \quad \text{und} \quad \xi := \frac{\omega\rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2}. \quad (13.57)$$

Damit wird das Argument der Exponentialfunktion in (13.56)

$$\begin{aligned} & \frac{i\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) x\rho \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \frac{1}{c} + \frac{c^2}{3\rho^2} \rho^3 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2} \frac{x^3}{c^3} \right) \\ & = i \left(\frac{3}{2} \xi x + \frac{1}{2} \xi x^3 \right) = \frac{3i}{2} \xi \left(x + \frac{x^3}{3} \right), \end{aligned} \quad (13.58)$$

und die beiden Funktionen aus (13.56) werden zu

$$\begin{aligned} \hat{f}_\perp(\omega) & = \frac{\rho}{c} \theta \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[\frac{3i}{2} \xi \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right], \\ \hat{f}_y(\omega) & = \frac{\rho}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx x \exp \left[\frac{3i}{2} \xi \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (13.59)$$

Die hier auftretenden sogenannten *Airyschen Integrale* führen auf die modifizierten Besselfunktionen $K_{1/3}(\xi)$ und $K_{2/3}(\xi)$.

- Wir fassen zusammen: mit (13.59) gehen wir zurück in (13.55) und von dort in (13.35). Am Ende erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\omega d\Omega} &= 2|\hat{f}(\omega)|^2 \\ &= \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \end{aligned} \quad (13.60)$$

Darin stammt der erste Term in der eckigen Klammer von \hat{f}_y , der zweite von \hat{f}_\perp .

- \hat{f}_y und \hat{f}_\perp beschreiben zwei Polarisationsrichtungen, von denen die eine senkrecht zur projizierten Bewegung des Elektrons steht, die andere dagegen parallel dazu. Mithin beschreibt der erste Term in eckigen Klammern in (13.60) die parallele, der zweite Term die senkrechte Polarisationsrichtung.
- Das Integral über das gesamte Spektrum (13.60) ergibt die in den Raumwinkel $d\Omega$ pro Umlauf des Elektrons abgestrahlte Energie:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{dE}{d\Omega d\omega} d\omega = \frac{7e^2}{16\rho} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{-5/2} \left(1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2}\right), \quad (13.61)$$

wobei wieder der erste Term aus der parallelen, der zweite aus der senkrechten Polarisationsrichtung kommt.

- Wenn man beide Beiträge über alle Winkel integriert, muss man beachten, dass der Winkel θ nur etwa zwischen $-1/\gamma^2$ und $1/\gamma^2$ variieren kann, wegen der in (13.33) ausgedrückten relativistischen Fokussierung. Führt man dann die Winkelintegration durch, ergibt sich, dass die parallel polarisierte Strahlung etwa siebenfach intensiver ist als die senkrecht polarisierte, d.h. die Synchrotronstrahlung ist erheblich linear polarisiert, und zwar in der Bahnebene des umlaufenden Elektrons.
- Die modifizierten Bessel-Funktionen $K_{1/3}(x)$ und $K_{2/3}(x)$ fallen für $x \gg 1$ sehr schnell ab. Wegen (13.57) bedeutet

$$\xi \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega\rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{3/2} \gg 1. \quad (13.62)$$

Dies kann entweder für große θ passieren, was wiederum bekräftigt, dass die Strahlung auf die Bahnebene eingeschränkt ist, oder dass ω groß ist. Für $\theta = 0$, also genau in der Bahnebene, ist

$$\frac{\omega\rho}{3c\gamma^3} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \omega \gg \frac{3c\gamma^3}{\rho} =: \omega_c, \quad (13.63)$$

d.h. es gibt eine kritische Frequenz ω_c , oberhalb derer das Synchrotronspektrum abbricht. Wenn die Bahn exakt kreisförmig ist, ist

$$\omega_0 = \frac{c}{\rho} \quad (13.64)$$

die Kreisfrequenz des Umlaufs, und

$$\omega_c = 3\gamma^3 \omega_0 = 3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \omega_0, \quad (13.65)$$

wobei verwendet wurde, dass die Elektronenenergie $E = \gamma mc^2$ ist. Die kritische Frequenz ω_c ist also durch die Umlauffrequenz und den Lorentzfaktor gegeben.

- Wegen der Einschränkung der Abstrahlung auf die Bahnebene können wir in (13.60) auch $\theta = 0$ setzen, also nach (13.57) und (13.64)

$$\xi = \frac{\omega}{3\omega_0\gamma^3} = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad (13.66)$$

und aus (13.60)

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\gamma^4} K_{2/3}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right). \quad (13.67)$$

Nun setzen wir noch zwei Grenzfälle für die modifizierte Besselfunktion $K_{2/3}(\xi)$ ein, nämlich:

$$\begin{aligned} K_{2/3}(\xi) &\approx \frac{\Gamma(2/3)}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^{2/3} \quad (x \ll 1) \\ K_{1/3}(\xi) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad (x \gg 1). \end{aligned} \quad (13.68)$$

Damit können wir nun das Spektrum der Synchrotronstrahlung für kleine und große Frequenzen angeben. Für $\omega \ll \omega_c$ ist $\xi \ll 1$, also

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\omega d\Omega} &\approx \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\gamma^4} \frac{\Gamma^2(2/3)}{4} 2^{4/3} (\omega_c/\omega)^{4/3} \\ &= \frac{e^2}{3\pi^2 2^{2/3} c} \Gamma^2(2/3) \frac{1}{\gamma^4} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{3\omega_0\gamma^3}{\omega} \right)^{4/3} \\ &= \frac{e^2}{c} \left[\frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi} \right]^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (13.69)$$

- Das Spektrum steigt also weit unterhalb von ω_c wie $\omega^{2/3}$ an. Im

umgekehrten Grenzfall, $\omega \gg \omega_c, \rho \gg 1$, folgt

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\omega d\Omega} &\approx \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\gamma^4} \frac{\pi}{2} \frac{e^{-2\omega/\omega_c}}{\omega/\omega_c} \\ &= \frac{e^2}{6\pi c} \cdot 9 \left(\frac{\omega}{3\omega_0\gamma^3}\right)^2 \gamma^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) e^{-2\omega/\omega_c} \\ &= \frac{3e^2}{2\pi c} \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) e^{-2\omega/\omega_c}. \end{aligned} \quad (13.70)$$

Jenseits der kritischen Frequenz fällt das Spektrum also (fast) exponentiell mit der Frequenz ab.

- Die Winkelverteilung der Strahlung hängt von der Frequenz ab. Im Bereich kleiner Frequenzen, $\omega \ll \omega_c$, ist

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{\omega}{3\omega_0\gamma^3}\right) [1 + (\gamma\theta_c)^2]^{3/2} \approx 1 \\ \Rightarrow \theta_c &\approx \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/3} = \left(\frac{3\omega_0}{\omega}\right)^{1/3} \end{aligned} \quad (13.71)$$

der Grenzwinkel, bei dem die Strahlung stark abfällt. Die Winkelverteilung weit unterhalb der kritischen Frequenz ist also recht breit. Im Grenzfall $\omega \gg \omega_c$ ist in erster Ordnung in θ

$$\xi \approx \xi(0) \left[1 + \frac{3}{2}(\gamma\theta)^2\right] = \frac{\omega}{\omega_c} \left[1 + \frac{3}{2}(\gamma\theta)^2\right]. \quad (13.72)$$

also, nach (13.60)

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\omega d\Omega} &\approx \frac{dE}{d\omega d\Omega} \Big|_{\theta=0} \cdot [1 + (\gamma\theta)^2] \left[1 - \frac{3}{2}(\gamma\theta)^2\right] e^{-3\omega(\gamma\theta)^2/\omega_c} \\ &\approx \frac{dE}{d\omega d\Omega} \Big|_{\theta=0} \cdot e^{-3\omega(\gamma\theta)^2/\omega_c}, \end{aligned} \quad (13.73)$$

d.h. für große Frequenzen fällt die Abstrahlung etwa wie eine Gaußfunktion mit dem Winkel ab, und die Breite der Gaußfunktion ist etwa

$$\theta_c \approx \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{3\omega}\right)^{1/2}. \quad (13.74)$$

Mit zunehmender Frequenz wird die Winkelverteilung also rapide schärfer;

- Das gesamte Spektrum erhält man durch Integration von (13.60) über alle Winkel,

$$\frac{dE}{d\omega} = \int \frac{dE}{d\omega d\Omega} d\Omega \approx 2\pi \int_{-\theta_c}^{\theta_c} \frac{dE}{d\omega d\Omega} d\theta, \quad (13.75)$$

wobei benutzt wurde, dass $d\Omega = \cos \theta d\theta d\varphi$ ist, weil $\theta + \pi/2$ der Polarwinkel ist. Für den Niederfrequenzbereich nähern wir mit (13.69) und (13.71)

$$\frac{dE}{d\omega} \approx 2\pi \cdot \left(\frac{dE}{d\omega d\Omega} \right) \Big|_{\theta=0} \cdot 2\theta_c \approx \frac{e^2}{c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^{1/3} \approx \frac{e^2}{c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/3}. \quad (13.76)$$

Näherungsweise ergibt die Winkelintegration von (13.73)

$$\frac{dE}{d\omega} \approx \theta_c \cdot \frac{e^2}{c} \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) e^{-2\omega/\omega_c} \approx \frac{e^2}{c} \gamma \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} e^{-2\omega/\omega_c}. \quad (13.77)$$

Kapitel 14

Geometrische Optik, Beugung

14.1 Näherungen; die Eikonalgleichung

- Allgemeine Elektromagnetische Wellen sind nicht eben; wenn sich aber Amplitude und Richtung einer Welle nur wenig ändern, während die Welle um eine Wellenlänge λ fortschreitet, kann lokal eine *Wellenfläche* eingeführt werden, die Punkte gleicher Phase der Welle verbindet; diese Fläche ist lokal flach, und ihre Normale zeigt in Ausbreitungsrichtung, wie (9.44) gezeigt hat:

$$\vec{k} = -\vec{\nabla}(k^\mu x_\mu) ; \quad (14.1)$$

Lichtstrahlen sind dann Linien, die in jedem Punkt tangential zur lokalen Ausbreitungsrichtung verlaufen;

- als *geometrische Optik* bezeichnet man dem entsprechend die Lichtausbreitung in der Näherung $\lambda \rightarrow 0$, in der also die endliche Wellenlänge keine Rolle spielt;
- für eine monochromatische Welle hatten wir in (9.47) die Form

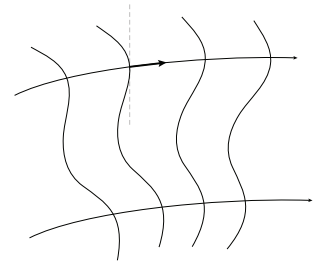
$$g(k_\mu x^\mu) = e^{ik_\mu x^\mu} \quad (14.2)$$

eingeführt; die entsprechende physikalische Größe wird durch $\Re(g)$ oder $\Im(g)$ vertreten;

- allgemein schreiben wir (14.2) in der Form

$$g = a e^{i\psi} , \quad (14.3)$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ eine allgemeine orts- und zeitabhängige Amplitude und ψ die Phase oder das *Eikonal* ist; von ψ ist zunächst nur wichtig, dass es notwendigerweise groß ist, denn es ändert sich beim Fortschreiten um λ um 2π , und λ war sehr klein angenommen, $\lambda \rightarrow 0$;



Veranschaulichung einer Wellenfläche

- für kleine Abweichungen in Raum und Zeit von einem Punkt, wo $\psi = \psi_0$ ist, kann ψ in eine Taylorreihe entwickelt werden,

$$\psi = \psi_0 + \vec{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} + t \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} ; \quad (14.4)$$

hier gilt die ebene Näherung, also ist im Vergleich mit (14.2) und (9.44)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} = -\vec{k}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega, \quad (14.5)$$

oder, mit (9.39)

$$k_\mu = \partial_\mu \psi = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k} \right), \quad (14.6)$$

in Übereinstimmung mit (9.38);

- da die Norm von k_μ verschwindet,

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (14.7)$$

(vgl. 9.39), folgt aus (14.6) die *Eikonalgleichung*

$$\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi = 0, \quad (14.8)$$

das ist die Grundgleichung der geometrischen Optik; sie folgt auch direkt aus der Wellengleichung

$$\square g = 0, \quad (14.9)$$

wenn man g aus (14.3) einsetzt:

$$\begin{aligned} \square g &= (\partial_\mu \partial^\mu)(a e^{i\psi}) = \partial_\mu \left[e^{i\psi} (\partial^\mu a) + i a e^{i\psi} (\partial^\mu \psi) \right] \quad (14.10) \\ &= (\partial^\mu a) i e^{i\psi} (\partial_\mu \psi) + e^{i\psi} (\partial_\mu \partial^\mu a) \\ &+ i (\partial_\mu a) e^{i\psi} (\partial^\mu \psi) - a e^{i\psi} (\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi) + i a e^{i\psi} (\partial_\mu \partial^\mu \psi) \\ &= (\square a) e^{i\psi} + 2i e^{i\psi} (\partial_\mu a) (\partial^\mu \psi) + i g (\square \psi) - a e^{i\psi} (\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi); \end{aligned}$$

nur der letzte Term in (14.11) ist quadratisch in der Amplitude von ψ , d.h. er dominiert die anderen Terme für große ψ ; im Grenzfall der geometrischen Optik, $\lambda \rightarrow 0$, folgt also mit (14.11) und (14.9)

$$\square g = -g (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi) = 0, \quad (14.11)$$

also ebenfalls wieder die Eikonalgleichung;

14.2 Analogie zur klassischen Mechanik

- Die Hamilton-Jacobi-Theorie der klassischen Mechanik zeigt, dass bestimmte kanonische Transformationen des Phasenraums,

$$q \rightarrow q', \quad p \rightarrow p', \quad (14.12)$$

erlauben, ein System „auf Ruhe“ zu transformieren, d.h. dass

$$\dot{q}' = 0 = \dot{p}' \quad (14.13)$$

wird;

- zur Erinnerung: kanonische Transformationen waren solche, die die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen invariant lassen, so dass auch nach der Transformation gilt

$$\dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (14.14)$$

wobei $H(q, p, t)$ die Hamiltonfunktion ist;

- sei $\phi(q, q', t)$ eine zunächst beliebige Funktion, die von den verallgemeinerten Koordinaten q , weiteren Parametern q' und der Zeit t abhängt; die Anzahl der q' sei gleich der Anzahl der Freiheitsgrade, und ϕ erfülle die Bedingung

$$\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial q'} \right| \neq 0; \quad (14.15)$$

dann induziert ϕ die kanonische Transformation

$$p = \frac{\partial \phi}{\partial q}, \quad p' = -\frac{\partial \phi}{\partial q'} \quad (14.16)$$

auf dem erweiterten Phasenraum, und diese Transformation überführt die Hamiltonfunktion in $H' = 0$, wenn ϕ die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(q, \frac{\partial \phi}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (14.17)$$

erfüllt;

- für ein freies (relativistisches!) Teilchen ist (vgl. 6.46)

$$H = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}, \quad (14.18)$$

also lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung in diesem Fall

$$\left[c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 + m^2 c^4 \right]^{1/2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (14.19)$$

oder, für masselose Teilchen,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^2 = 0 = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi), \quad (14.20)$$

das ist identisch mit der Eikonalgleichung, in der ϕ die Rolle der Phase (des Eikonals) übernimmt;

- aus der Darstellung der Wirkung als Funktion der Koordinaten (vgl. Kap. 6.6.) wissen wir, dass die Beziehungen

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (14.21)$$

gelten (vgl. 6.59, 6.61); daraus wird ersichtlich, dass das Eikonal mit der Wirkung in der klassischen Mechanik identifiziert werden kann;

- bei konstanter Energie ist die Lagrange-Funktion

$$L = p\dot{q} - H \quad (14.22)$$

nur durch p und \dot{q} veränderlich, also folgt für die Variation der Wirkung

$$\delta S = \delta \int_a^b p\dot{q} dt = \delta \int_a^b p dq = 0; \quad (14.23)$$

in der geometrischen Optik wird dies zu

$$\delta \int \frac{\partial \phi}{\partial q} dq = \delta \int \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} d\vec{x} = 0 = \delta \int \vec{k} \cdot d\vec{x}; \quad (14.24)$$

nach (9.42) ist $c\vec{k} = \omega\vec{n}$, also folgt, dass

$$\delta \int dl = 0 \quad (14.25)$$

ist: Licht breitet sich im Vakuum entlang gerader Linien aus; allgemein folgt so aus dem Wirkungsprinzip das Fermatsche Prinzip: Licht folgt dem extremalen Lichtweg.

14.3 Das Huygenssche Prinzip

- Die geometrische Optik stößt dort an ihre Grenzen, wo λ nicht im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ betrachtet werden kann, sondern zwar klein, aber endlich ist; wäre die geometrische Optik streng gültig, würden Körper etwa einen scharfen Schatten werfen, während tatsächlich das Intensitätsmuster in der Nähe von Kanten auf komplizierte Weise von hell nach dunkel geht; die Untersuchung solcher Phänomene im Grenzfall kleiner Wellenlängen ist der Gegenstand der Beugungstheorie;
- grundlegend dafür ist das *Huygenssche Prinzip*, das besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfläche Ausgangspunkt einer neuen Welle ist, die sich von dort in alle Richtungen fortpflanzt; das Feld ergibt sich dann durch Überlagerung aller auf diese Weise entstandenen Felder;

- betrachten wir etwa einen lichtundurchlässigen Schirm, in dem sich eine Öffnung befindet, die groß gegenüber der Wellenlänge, aber klein gegenüber dem Schirm ist:
- dem Schirm nähere sich von links eine ebene Welle; in der Öffnung wird jeder Punkt der Welle zu einer Lichtquelle, und die Felder dieser Lichtquellen müssen überlagert werden; die Öffnung zerlegen wir zu diesem Zweck in Flächenelemente $df^{\vec{}}$, deren Projektion auf die Ausbreitungsrichtung \vec{n} der Welle gleich

$$df_n = \vec{n} \cdot d\vec{f} \quad (14.26)$$

ist;

- das Feld F (elektrisch oder magnetisch), das von diesem Flächenelement ausgeht und im Punkt P eintrifft, ist proportional zu

$$F df_n = F \vec{n} \cdot d\vec{f}, \quad (14.27)$$

fällt aber mit dem Abstand R zum Punkt P wie

$$\frac{e^{ikR}}{R} \quad (14.28)$$

ab, denn in der Fernzone fallen die Felder wie $1/R$ ab, und die Phase der Wellen muss berücksichtigt werden, die bei P überlagert werden; also ist das Feld im Punkt P , das von $d\vec{f}$ ausgeht, proportional zu

$$F \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n} \cdot d\vec{f} = F \frac{e^{ikR}}{R} df_n, \quad (14.29)$$

und man erhält durch Integration über die Öffnung

$$F_P = \alpha \int \frac{F e^{ikR}}{R} df_n, \quad (14.30)$$

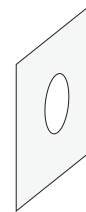
wobei die Proportionalitätskonstante α noch zu bestimmen bleibt;

- die Konstante α kann auf einfache Weise festgelegt werden, indem man eine Welle betrachtet, die sich in x -Richtung ausbreitet, deren Flächen also in der y - z -Ebene liegen, und einem Punkt P , der auf der x -Achse liegt; wenn die Öffnung im Schirm groß ist, muss einerseits

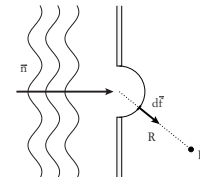
$$F_P = F e^{ikx} \quad (14.31)$$

sein, denn die Welle propagiert einfach weiter längs der x -Achse, andererseits muss nach (14.30)

$$F_P = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{F}{R} e^{ikR} \quad (14.32)$$



Öffnung in einem lichtundurchlässigen Schirm



Lichtausbreitung durch eine schmale Öffnung

sein; da die Welle von der Öffnung kaum gestört wird, liefern nur Teile der Öffnung einen wesentlichen Beitrag, die dicht an der x -Achse sind, für die also gilt:

$$\begin{aligned} y \ll R, \quad z \ll R \\ \Rightarrow R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2}} \\ \approx x \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{2x^2} \right); \end{aligned} \quad (14.33)$$

damit wird (14.32) zu

$$F_P = \alpha \frac{F}{x} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky^2/2x} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ikz^2/2x}; \quad (14.34)$$

die Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky^2/2x} \quad (14.35)$$

lassen sich durch die Substitution $t^2 := y^2 k/2x$, $t = y \sqrt{k/2x}$, in die Gestalt

$$\sqrt{\frac{2x}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it^2} = \sqrt{\frac{2x}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos t^2 + i \sin t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi x}{k}} (1 + i) \quad (14.36)$$

bringen, was mit (14.34) auf

$$F_P = \alpha F e^{ikx} \frac{\pi}{k} (1 + i)^2 = \alpha F e^{ikx} \frac{2\pi i}{k} \quad (14.37)$$

führt; also folgt durch Vergleich mit (14.31)

$$\alpha = \frac{k}{2\pi i}, \quad (14.38)$$

und damit schließlich aus (14.30)

$$F_P = \int \frac{kF}{2\pi i R} e^{ikR} df_n \quad (14.39)$$

als mathematische Darstellung des Huygenschen Prinzips; Licht, das nicht monochromatisch und daher aus Beiträgen mit verschiedenen k zusammengesetzt ist, wird entsprechend noch über das Spektrum integriert, d.h. inkohärent überlagert; für die Beugungstheorie spielt es keine Rolle, ob die Öffnung vom Schirm umschlossen wird oder ob dem Licht ein Hindernis entgegengestellt wird.

14.4 Fresnelsche Beugung

- Man spricht von Fresnelscher Beugung, wenn Quelle und Aufpunkt nahe am betrachteten Schirm stehen; um sie zu untersuchen, teilen wir eine Halbebene durch einen Schirm ab und untersuchen den Schattenwurf dieses Schirms; der Schirm stehe senkrecht zur x - y -Ebene; auf seinem Rand wird ein Ursprung festgelegt, der mit der Quelle die x -Achse markiert:
- der Schirm sei um den Winkel α zur y -Achse geneigt, und der Aufpunkt P befinde sich im Abstand d über oder unter der x -Achse;
- nun verwenden wir (14.39) und integrieren über die Halbebene, die den Schirm zu positiven z hin fortsetzt; auf dieser Halbebene gilt

$$x = y \tan \alpha ; \tag{14.40}$$

das Feld, das von Q herkommt, ist proportional zum Phasenfaktor

$$e^{ikR_Q} , \tag{14.41}$$

wobei in der Integrationsebene

$$R_Q = \sqrt{(D_R + y \tan \alpha)^2 + y^2 + z^2} \tag{14.42}$$

ist; der Abstand R in (14.39) dagegen ist

$$R = \sqrt{(D_P - y \tan \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2} ; \tag{14.43}$$

nun ist die Lichtausbreitung fast geometrisch, d.h. nur Beiträge zu (14.38) nahe von der Schirmkante werden eine Rolle spielen; gegenüber dem mit y und z schnell veränderlichen Exponentialfaktor (14.41) kann die langsame Veränderung von $1/R$ vernachlässigt werden, und es folgt

$$F_P = \frac{kF_Q}{2\pi i R} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz e^{ik(R+R_Q)} , \tag{14.44}$$

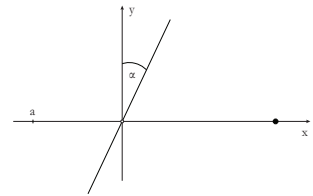
wobei F_Q die Feldstärke ist, die von der Quelle abgegeben wird;

- wieder können wir wegen der fast geometrischen Lichtausbreitung y, z als klein gegenüber D_Q und D_P ansehen und nähern

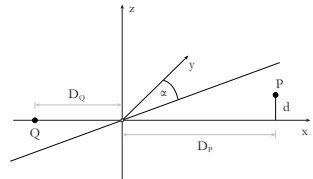
$$R_Q \approx D_Q + y \tan \alpha + \frac{y^2(1 + \tan^2 \alpha) + z^2}{2D_Q} ,$$

$$R \approx D_P - y \tan \alpha + \frac{y^2(1 + \tan^2 \alpha) + (z - d)^2}{2D_P} ; \tag{14.45}$$

für unsere Überlegungen sind nur Terme wesentlich, die von d abhängen, weil wir uns für den Intensitätsverlauf in der Nähe von



Schirm, von oben gesehen



Schirm, von der Seite gesehen

$z = 0$ interessieren, der sich im Abstand D_P einstellt; dann wird nach (14.44) und (14.45)

$$F_P \propto \int_0^\infty \exp\left(ik\left[\frac{z^2}{2D_Q} + \frac{(z-d)^2}{2D_P}\right]\right) \quad (14.46)$$

den Feldstärkeverlauf im Punkt P beschreiben;

- wir schreiben weiter das Argument der Exponentialfunktion als

$$\begin{aligned} & \frac{z^2}{2D_Q} + \frac{(z-d)^2}{2D_P} = z^2\left(\frac{1}{2D_Q} + \frac{1}{2D_P}\right) - \frac{zd}{D_P} + \frac{d^2}{2D_P} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_Q} + \frac{1}{D_P}\right)z^2 - \frac{2zd}{D_P} + \frac{D_P + D_Q}{D_P} \frac{d^2}{D_P + D_Q}\right] \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_Q} + \frac{1}{D_P}\right)^2 z^2 - \left(\frac{1}{D_Q} + \frac{1}{D_P}\right)\frac{2zd}{D_P} + \frac{D_Q}{D_P} \frac{d^2}{D_P + D_Q} \left(\frac{1}{D_Q} + \frac{1}{D_P}\right)\right]}{\left(\frac{1}{D_Q} + \frac{1}{D_P}\right)} \\ &+ \frac{d^2}{2(D_P + D_Q)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_Q} + \frac{1}{D_P}\right)z - \frac{d}{D_P}\right]^2}{\frac{1}{D_Q} + \frac{1}{D_P}} - \frac{d^2}{2(D_P + D_Q)}, \quad (14.47) \end{aligned}$$

so dass die Feldstärke bei P durch

$$F_P \propto \exp\left(\frac{ik}{2} \frac{d^2}{D_P + D_Q}\right) \int_0^\infty dz \exp\left(ik \frac{\frac{1}{2}[(\delta_P + \delta_Q)z - \delta_P d]^2}{\delta_P + \delta_Q}\right) \quad (14.48)$$

ausgedrückt werden kann, wobei $\delta_{P,Q} := D_{P,Q}^{-1}$ abgekürzt wurde;

- da die Intensität wie $F_P F_P^*$ geht, entfällt in der Intensität der Faktor vor dem Integral, und nur der Integralterm bleibt noch auszuwerten; wir setzen dazu

$$\eta^2 := \frac{k}{2(\delta_P + \delta_Q)} [(\delta_P + \delta_Q)z - \delta_P d]^2, \quad (14.49)$$

$$d\eta = \sqrt{\frac{k}{2(\delta_P + \delta_Q)}} (\delta_P + \delta_Q) dz = \sqrt{\frac{k(\delta_P + \delta_Q)}{2}} dz$$

und bekommen

$$F_P \propto \int_{-\omega}^\infty d\eta e^{i\eta^2}, \quad (14.50)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2(\delta_P + \delta_Q)}} \delta_P d = d \sqrt{\frac{kD_Q}{2(\delta_P + \delta_Q)D_P}}, \quad (14.51)$$

d.h. ω skaliert den Abstand d des Punktes P von der geometrischen Schattengrenze;

- wir führen nun die Fresnelschen Integrale ein:

$$C(z) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos \eta^2 d\eta, \quad S(z) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin \eta^2 d\eta; \quad (14.52)$$

für $z \rightarrow \infty$ gehen beide gegen $1/2$,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} C(z) = \frac{1}{2} = \lim_{z \rightarrow \infty} S(z); \quad (14.53)$$

die Intensität am Punkt P ist nach (14.51) mit (14.53) proportional zu

$$\begin{aligned} F_P F_P^* &\propto \left| \int_{-\omega}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} \right|^2 = \int_{-\omega}^{\infty} \cos \eta^2 d\eta + \int_{-\omega}^{\infty} \sin \eta^2 d\eta \\ &\propto \left[\frac{1}{2} + C(\omega) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(\omega) \right]^2; \end{aligned} \quad (14.54)$$

sehr weit von der Schattengrenze entfernt, also für $\omega \rightarrow \infty$, sei die Intensität I_0 , also ist

$$I = \frac{I_0}{2} \left(\left[\frac{1}{2} + C(\omega) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(\omega) \right]^2 \right); \quad (14.55)$$

das ist die gesuchte Intensitätsverteilung um die geometrische Schattengrenze herum;

- im Grenzfall großer positiver oder negativer Abstände von der Schattengrenze, $|\omega| \rightarrow \infty$, kann das Integral

$$\int_{-\omega}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} \quad (14.56)$$

asymptotisch genähert werden; zunächst betrachten wir negative ω und schreiben

$$\int_{|\omega|}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} = \int_{|\omega|}^{\infty} d\eta \frac{2i\eta}{2i\eta} e^{i\eta^2} = \int_{|\omega|}^{\infty} d\eta \frac{1}{2i\eta} \frac{d}{d\eta} (e^{i\eta^2}), \quad (14.57)$$

woraus durch partielle Integration folgt

$$\int_{|\omega|}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} = -\frac{1}{2i|\omega|} e^{i\omega^2} + \frac{1}{2i} \int_{|\omega|}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^2}; \quad (14.58)$$

das verbliebene Integral kann nun fortgesetzt partiell integriert werden, woraus man die asymptotische Reihe

$$\int_{|\omega|}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} = e^{i\omega^2} \left(\frac{-1}{2i|\omega|} + \frac{1}{4|\omega|^3} - \dots \right) \quad (14.59)$$

erhält; demnach fällt weit genug innerhalb der Schattengrenze die Intensität wie

$$I = \frac{I_0}{4\pi\omega^2} \quad (14.60)$$

ab;

- für große positive Abstände ω von der Schattengrenze verwenden wir

$$\begin{aligned} \int_{-\omega}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} - \int_{-\infty}^{-\omega} d\eta e^{i\eta^2} \\ &= (1 + i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{\omega}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2}, \end{aligned} \quad (14.61)$$

und für das restliche Integral kann wieder die Entwicklung in eine asymptotische Reihe aus (14.59) verwendet werden, also wird

$$\int_{-\omega}^{\infty} d\eta e^{i\eta^2} = (1 + i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} - e^{i\omega^2} \left(\frac{-1}{2i\omega} + \frac{1}{4\omega^3} - \dots \right); \quad (14.62)$$

die Intensität nimmt dann asymptotisch die Form

$$I = I_0 \left[1 + \frac{\sin \omega^2 - \cos \omega^2}{\sqrt{2\pi\omega}} \right] = I_0 \left[1 + \frac{\sin(\omega^2 - \pi/4)}{\sqrt{\pi\omega}} \right] \quad (14.63)$$

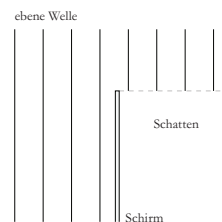
an; im bestrahlten Gebiet durchläuft die Intensität also eine unendliche Reihe von Maxima und Minima um $I = I_0$, deren Höhe aber wie $1/\omega$ abfällt;

14.5 Fraunhofersche Beugung

- Im Grenzfall unendlich entfernter Lichtquellen geht die Fresnel'sche Beugung in die Fraunhofersche Beugung über; dann wird die einfallende Welle eben, und wir müssen das Huygensche Prinzip auf die gesamte Wellenfläche anwenden statt allein auf einen kleinen Ausschnitt der Wellenfläche um die Verbindungslinie von Aufpunkt und Quelle herum;
- dazu betrachten wir die Feldstärke F_0 , die sich einstellen würde, wenn der Grenzfall geometrischer Optik streng erfüllt wäre; sei etwa der Welle ein Hindernis in den Weg gestellt, dann ist F_0 nur dort verschieden von Null und konstant wo das Hindernis nicht abschattet, und Null sonst:
- wenn die geometrische Optik nicht streng gilt, werden kleine Ablenkungen an den Grenzen des Hindernisses auftreten; wir beschreiben sie, indem wir das Feld F_0 Fourier-zerlegen:

$$\hat{F}_0 = \frac{1}{2\pi} \int \int dydz E_0 e^{-ik \cdot \vec{x}}, \quad (14.64)$$

wobei das Integral über den Teil der y - z -Ebene auszuführen ist, wo kein Hindernis ist;



Schattenwurf eines Schirms

- die einfallende Welle hat den Wellenvektor \vec{k}' , der dem Betrag nach gleich \vec{k} ist,

$$|\vec{k}'| = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|, \quad (14.65)$$

da die Beugung die Wellenlänge oder die Frequenz nicht ändert, nur die Richtung von \vec{k} wird leicht von der Richtung \vec{k}' abweichen;

- sei \vec{q} die Differenz der Wellenvektoren \vec{k}' und \vec{k} ,

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} = \frac{\omega}{c}(0, \theta_y, \theta_z)^T, \quad (14.66)$$

wobei θ_y und θ_z die kleinen Richtungsänderungen aufgrund der Beugung sind:

- dann ist nach (14.64) wegen $F_0 \propto e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}}$

$$\hat{F}_0 = \frac{1}{2\pi} \int \int dydz |F_0| e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{1}{2\pi} \int \int dydz |F_0| e^{i(y\theta_y + z\theta_z)\omega/c}; \quad (14.67)$$

als Beispiel betrachten wir die Fraunhofersche Beugung an einem Spalt mit der Breite $\Delta y = a$ und unendlicher Länge, $\Delta z = \infty$;

- wegen der unendlichen Spaltlänge verschwindet der Anteil des Integrals (14.67) aus der Integration in z -Richtung für $q_z \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} = \delta(q_z) \cdot 2\pi \quad (14.68)$$

(vgl. (3.30)), d.h. die Ablenkung findet allein in der x - y -Ebene statt, und es genügt, die Fourierentwicklung in (14.67) nach y durchzuführen:

$$\begin{aligned} \hat{F}_0 &= |F_0| \int_{-a/2}^{a/2} dy e^{i\frac{\omega}{c}\theta_y y} = |F_0| \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\omega}{c}\theta_y y\right) dy \\ &= \frac{2|F_0|}{\omega\theta_y/c} \sin\left(\frac{\omega}{c}\theta_y \frac{a}{2}\right); \end{aligned} \quad (14.69)$$

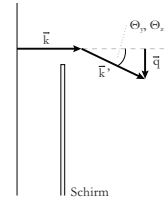
die in Richtung θ_y gestreute Intensität ist daher

$$\begin{aligned} dI &\propto |\hat{F}_0|^2 dq_y = \frac{4|F_0|^2}{k^2\theta_y^2} \sin^2\left(k\theta_y \frac{a}{2}\right) k d\theta_y \\ &\propto \frac{4|F_0|^2}{k} \frac{\sin^2(k\theta a/2)}{\theta^2} d\theta; \end{aligned} \quad (14.70)$$

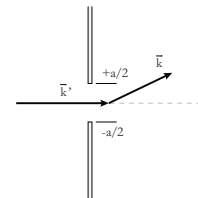
im Grenzfall kleiner Wellenlängen, $k \rightarrow \infty$, gilt

$$\frac{dI}{d\theta} \propto k \left[\frac{\sin(k\theta a/2)}{k\theta} \right]^2 \rightarrow 0 \quad \text{wenn } \theta \neq 0, \quad (14.71)$$

was die strenge geometrische Optik wieder herstellt;



Zur Fraunhoferschen Beugung



Zur Fraunhoferschen Beugung am Spalt

- ansonsten gilt

$$\frac{dI}{d\theta} \propto \frac{ka^2}{4} \left[\frac{\sin(k\theta a/2)}{k\theta a/2} \right]^2, \quad (14.72)$$

d.h. die Intensitätsverteilung als Funktion des Winkels durchläuft eine unendliche Reihe von Maxima und Minima, deren Amplitude wie θ^{-2} abfällt; Nullstellen der Intensität treten bei

$$k\theta \frac{a}{2} = \pm n\pi \Rightarrow \theta = \pm \frac{2n\pi}{ka} \quad (14.73)$$

auf;

Kapitel 15

Zusammenfassung

15.1 Maxwell-Gleichungen

- Im Gaußschen cgs-System lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\vec{B}} &= -c\vec{\nabla} \times \vec{E}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \dot{\vec{D}} + 4\pi\vec{j} &= c\vec{\nabla} \times \vec{H}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\quad (15.1)$$

- Das Magnetfeld \vec{B} und die magnetische Erregung \vec{H} sowie das elektrische Feld \vec{E} und die dielektrische Verschiebung \vec{D} sind im einfachsten Fall durch die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H} \quad (15.2)$$

miteinander verknüpft. Die Dielektrizitätskonstante ϵ und die magnetische Permeabilität μ sind in diesem Einheitensystem reine Zahlen. Im Vakuum gilt $\epsilon = 1 = \mu$.

- Elektrisches und magnetisches Feld haben dieselbe Einheit,

$$[\vec{E}] = \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{cm}^{1/2}\text{s}} = [\vec{B}]. \quad (15.3)$$

Die Einheit der elektrischen Ladung wird

$$[q] = \frac{\text{cm}^{3/2}\text{g}^{1/2}}{\text{s}}, \quad (15.4)$$

und die Elementarladung ist

$$e = 4.8 \times 10^{-10} \frac{\text{cm}^{3/2}\text{g}^{1/2}}{\text{s}}. \quad (15.5)$$

15.2 Elektrostatik

- In der Elektrostatik führt man das skalare Potential Φ durch

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (15.6)$$

ein, um die Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ identisch zu erfüllen. Die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\Phi = -4\pi\rho \quad (15.7)$$

wird in drei Dimensionen durch die Greensfunktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (15.8)$$

gelöst, die definitionsgemäß dem Potential einer Einheits-Punktladung entspricht,

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (15.9)$$

- Randbedingungen können erfüllt werden, indem die Greensfunktion durch eine harmonische Funktion $F(\vec{x}, \vec{x}')$ ergänzt wird, die also die Laplace-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 F(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad (15.10)$$

erfüllt. Einschließlich Randbedingungen lautet das Potential dann

$$\Phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}')G(\vec{x}, \vec{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} \right] da' . \quad (15.11)$$

Für Dirichlet-Randbedingungen ist

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad (15.12)$$

auf dem Rand ∂V des Integrationsvolumens, während für Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \quad (15.13)$$

auf ∂V gilt, wobei S die Oberfläche von V ist.

15.3 Multipolentwicklung

- Durch Taylor-Entwicklung des inversen Abstands $|\vec{x} - \vec{x}'|$ in der Greensfunktion der Elektrostatik gelangt man zur Multipolentwicklung des Potentials,

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} q_{lm}^* \quad (15.14)$$

dessen Summanden mit zunehmender Potenz des Abstands r abfallen. Das Multipolmoment q_{lm} der Ladungsverteilung ist durch

$$q_{lm}^* = \int \rho(\vec{x}') (r')^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') d^3 x' \quad (15.15)$$

gegeben.

15.4 Dielektrika

- Durch Linearisierung in der Ausdehnung mikroskopischer Multipole in einem Dielektrikum und Vernachlässigung höherer Multipole folgt der Zusammenhang

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (15.16)$$

zwischen der dielektrischen Verschiebung \vec{D} , dem elektrischen Feld \vec{E} und der Polarisation \vec{P} . Die polarisierte Ladungsdichte ist

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad (15.17)$$

so dass für das elektrische Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_p) \quad (15.18)$$

gilt.

- Die Clausius-Mossotti-Gleichung

$$\gamma = \frac{3}{4\pi n} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad (15.19)$$

gibt einen Zusammenhang zwischen der molekularen Polarisierbarkeit γ , der Dipoldichte n und der Dielektrizitätskonstante ϵ an. Ein einfaches Modell der molekularen Polarisierbarkeit führt auf

$$\gamma = \frac{e^2}{m_e \omega^2}, \quad (15.20)$$

wobei m_e die Elektronenmasse und ω die Kreisfrequenz seiner angenommenen harmonischen Bindung an das Molekül sind.

15.5 Magnetostatik

- Die Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ wird identisch erfüllt, wenn das Vektorpotential \vec{A} durch

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (15.21)$$

eingeführt wird. Wegen der Gleichung $c\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j}$ in der Magnetostatik müssen die Komponenten von \vec{A} in Coulomb-Eichung die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (15.22)$$

erfüllen. Mit der Greensfunktion des Laplace-Operators folgt direkt

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' . \quad (15.23)$$

- Mit dem magnetischen Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int [\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')] d^3x' \quad (15.24)$$

ist das Vektorpotential durch

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3} \quad (15.25)$$

gegeben.

- Die magnetische Erregung \vec{H} , das Magnetfeld \vec{B} und die Magnetisierung \vec{M} eines Mediums hängen durch

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \quad (15.26)$$

zusammen. Ordnet man der Magnetisierung den Magnetisierungsstrom

$$\vec{j}_M = c\vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (15.27)$$

zu, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi(\vec{j} + \vec{j}_M) . \quad (15.28)$$

15.6 Spezielle Relativitätstheorie

- Zwischen zwei Bezugssystemen S und S' , die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegen, gilt die Lorentztransformation

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad \text{mit} \quad \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15.29)$$

wobei $\beta = v/c$ und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ist. Die Minkowski-Metrik wird durch

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (15.30)$$

dargestellt. Ihr und der Lorentztransformation liegt die Forderung zu Grunde, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand des Bezugssystems gleich c sei.

- Das Eigenzeitintervall $d\tau$ ist mit dem Koordinatenzeitintervall dt durch

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad (15.31)$$

verknüpft. Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls sind durch

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p^\mu = mu^\mu \quad (15.32)$$

gegeben. Der Viererimpuls hat die Komponenten

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma m \vec{v} \right) \quad (15.33)$$

und wird deswegen auch Energie-Impuls-Vierervektor genannt. Seine Komponenten erfüllen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4. \quad (15.34)$$

Impuls \vec{p} und Geschwindigkeit hängen durch

$$\vec{p} = \frac{E \vec{v}}{c^2} \quad (15.35)$$

miteinander zusammen.

15.7 Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik

- Die Wirkung eines Teilchens der Masse m im elektromagnetischen Feld ist

$$S = -mc^2 \int d\tau + \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu. \quad (15.36)$$

Die Bedingung $\delta S = 0$ führt auf die Lorentzkraft

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (15.37)$$

worin der antisymmetrische Feldtensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E} \\ \vec{E} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \quad (15.38)$$

auftritt.

- Die Wirkung einschließlich des Terms für das freie elektromagnetische Feld lautet

$$S = -mc^2 \int d\tau + \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4x - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d^4x. \quad (15.39)$$

Eine Wirkung der Form $S = \int \mathcal{L} d^4x$ mit der Lagrangedichte \mathcal{L} führt durch Variation auf die Feldgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (15.40)$$

Der Energie-Impuls-Tensor des durch \mathcal{L} beschriebenen Feldes q ist

$$T_\nu^\mu = (\partial_\nu q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (15.41)$$

- Mit der Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes folgen daraus die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (15.42)$$

und der Energie-Impuls-Tensor

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \frac{\delta_\nu^\mu}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 & \vec{E} \times \vec{B} \\ -\vec{E} \times \vec{B} & T_{ij} \end{pmatrix}. \quad (15.43)$$

- Die Energieerhaltung des freien elektromagnetischen Feldes wird durch die verschwindende Viererdivergenz

$$\partial_\nu T_\nu^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (15.44)$$

ausgedrückt. Dabei sind w die Energiedichte und \vec{S} die Energiestromdichte oder der Poyntingvektor,

$$w = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{4\pi}, \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (15.45)$$

15.8 Teilchen in Feldern

- In Anwesenheit von Ladungen verändert sich die Energieerhaltung zu

$$\partial_\nu T_\nu^\mu = \frac{1}{c} F^\mu{}_\lambda j^\lambda, \quad (15.46)$$

weil die Lorentzkraft an den Ladungen Arbeit verrichtet.

- Die Gyration von Ladungen mit Energie \mathcal{E} im Magnetfeld B ist durch die Larmorfrequenz

$$\omega = \frac{ceB}{\mathcal{E}} \quad (15.47)$$

gegeben, die im nichtrelativistischen Grenzfall gegen $\omega = (eB)/(mc)$ geht.

- Wenn sich äußere Kontrollparameter eines hamiltonschen Systems höchstens langsam ändern, ist die Größe

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq, \quad (15.48)$$

ausgewertet längs eines Umlaufs auf einer periodischen Bahn, adiabatisch konstant.

15.9 Eichinvarianz und Wellen im Vakuum

- Die Elektrodynamik ist invariant gegenüber Eichtransformationen der Potentiale

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad (15.49)$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $f(t, \vec{x})$. In Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ nehmen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen die Form einer inhomogenen d'Alembert-Gleichung an,

$$\square A^\mu = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (15.50)$$

- Die homogene d'Alembert-Gleichung $\square f = 0$ wird durch jede Funktion f gelöst, die von Ort und Zeit nur durch die Phase $\psi = k_\mu x^\mu$ abhängt. Dabei ist

$$k^\mu = \frac{\omega}{c} (1, \vec{n}) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \quad (15.51)$$

der Vierer-Wellenvektor, in dem \vec{n} ein Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle ist. Beliebige elektromagnetische Wellen im Vakuum lassen sich durch ebene, monochromatische Wellen überlagern.

15.10 Wellen in Materie

- In Materie wird die Wellengleichung $\square \vec{E} = 0$ zur Telegrafengleichung

$$\left[-\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \right] \vec{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{E}}. \quad (15.52)$$

Die Lichtgeschwindigkeit c wird also um den Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (15.53)$$

verringert, und durch eine endliche Leitfähigkeit σ tritt eine Dämpfung auf.

- Die Dämpfung kann durch einen komplexen Brechungsindex

$$n = \sqrt{\eta\mu} \quad \text{mit} \quad \eta = \epsilon + \frac{4\pi\sigma i}{\omega} \quad (15.54)$$

beschrieben werden, worin η die verallgemeinerte, ebenfalls komplexe Dielektrizitätskonstante ist.

- Die Dispersionsrelation $ck = \omega$ für Wellen im Vakuum wird zu

$$ck = \sqrt{\eta\mu}\omega. \quad (15.55)$$

- Die Grenzbedingungen für die Felder, d.h. die Stetigkeit der Normalkomponenten von \vec{B} und \vec{D} sowie der Tangentialkomponenten von \vec{H} und \vec{E} , bedingen die Brechungs- und Reflexionsgesetze.

15.11 Felder bewegter Ladungen

- Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (15.56)$$

werden durch die retardierte Greensche Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}', t, t') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \quad (15.57)$$

gelöst. Das Argument der Delta-Funktion drückt aus, dass nur solche Ladungen zur Zeit t am Ort \vec{x} wirken können, die auf dem Rückwärtslichtkegel des Ereignisses (t, \vec{x}) im Minkowski-Raum liegen.

- Punktladungen, deren Trajektorien $\vec{x}(t)$ bekannt sind, erzeugen die Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\Phi(t, \vec{x}) = \frac{qc}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}}, \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{q\vec{v}}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}}. \quad (15.58)$$

Dabei ist $\vec{R} := \vec{x} - \vec{x}'$. Die rechten Seiten der Liénard-Wiechert-Potentiale müssen zur retardierten Zeit

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad (15.59)$$

ausgewertet werden.

15.12 Der Hertzsche Dipol

- Ein zeitveränderlicher Dipol hat ein Nahfeld, das schnell mit dem Abstand abfällt, und ein Fernfeld, das wie r^{-1} abfällt und damit ins Unendliche reicht,

$$\vec{B}_{\text{fern}} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_r}{rc^2}, \quad \vec{E}_{\text{fern}} = \vec{B}_{\text{fern}} \times \vec{e}_r, \quad (15.60)$$

wobei \vec{p} das Dipolmoment ist. Der Poynting-Vektor des Fernfeldes ist demnach

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi} \vec{B}_{\text{fern}}^2 \vec{e}_r. \quad (15.61)$$

Daraus folgt die (nichtrelativistische) Larmor-Formel für die Strahlungsleistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} (\dot{\vec{v}} \times \vec{e}_r)^2 \quad (15.62)$$

einer Ladung q , die mit $\dot{\vec{v}}$ beschleunigt wird.

15.13 Thomson-Streuung

- Aus der Larmor-Formel für ein freies nichtrelativistisches Elektron, das durch eine einfallende elektromagnetische Welle beschleunigt wird, folgt der differentielle, über die Polarisationsrichtungen der einfallenden Welle gemittelte Thomson-Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{\text{T}}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta), \quad (15.63)$$

wobei

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.81 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (15.64)$$

der klassische Elektronenradius ist. Der totale Thomson-Streuquerschnitt ist

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.64 \times 10^{-25} \text{ cm}^2. \quad (15.65)$$

- Aus dem Thomson-Streuquerschnitt folgt die maximale Leuchtkraft eines Objekts, dessen Leuchtkraft durch sphärisch symmetrische Akkretion von Materie erzeugt werden kann. Es ist die Eddington-Leuchtkraft

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G M m_e c}{\sigma_{\text{T}}} = 6.9 \times 10^{34} \frac{\text{erg}}{\text{s}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right). \quad (15.66)$$

- Verwendet man die Larmor-Formel, um die Abstrahlung eines klassischen Atoms wegen der ständigen Beschleunigung des Elektrons auf seiner Kreisbahn um den Kern zu bestimmen, ergibt sich eine Lebensdauer des Atoms von

$$\tau \approx \left(\frac{n}{\alpha}\right)^6 \frac{r_e}{c} = 6.2 \times 10^{-11} n^6 \text{ s}, \quad (15.67)$$

wobei $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ die Feinstrukturkonstante und n die Hauptquantenzahl der Elektronenbahn ist. Die Stabilität der Atome ist mit der klassischen Elektrodynamik nicht verträglich!

Index

- adiabatische Änderung, 100
- adiabatische Invariante, 101, 102
- Ampèresches Gesetz, 6

- Bahnradius im Magnetfeld, 100
- Biot-Savartsches Gesetz, 59
- Brechung, 49
- Brechungsgesetz, 133
- Brechungsindex, 122
 - verallgemeinerter, 125

- Cauchyscher Integralsatz, 139
- Clausius-Mossotti-Formel, 52
- Coulomb, 2
- Coulomb-Eichung, 55, 108
- Coulombsches Gesetz, 13
- Curiesches Gesetz, 64

- d'Alembert-Gleichung, 109
- d'Alembert-Operator, 110
- Delta-Funktion, 16
- Diamagnetika, 64
- diamagnetisch, 10
- dielektrische Verschiebung, 3, 45
- Dielektrizitätskonstante, 9
 - verallgemeinerte, 127
- Dipol, 17, 38
 - Feld, 18, 62
 - Potential, 17
- Dipolfeld
 - Fernzone, 152
 - Nahzone, 152
- Dipolmoment, 17
- Dipolmomente
 - molekulare, 51
- Dispersionsrelation, 114, 123
- Dualvektor, 70

- ebene Wellen
 - monochromatische, 113
- Eddington-Leuchtkraft, 168

- Eichtransformation, 54, 107
- Eigenzeit, 70
- Eikonalgleichung, 179
 - und Hamilton-Jacobi-Gleichung, 180
- Eindringtiefe, 126
- Elektronenradius
 - klassischer, 166
- Energie
 - potentielle, 40
- Energie-Impuls-Beziehung
 - relativistische, 75
- Energie-Impuls-Tensor, 92
- Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes, 93
- Energieerhaltung, 97
- Extinktionskoeffizient, 126

- Faltung, 32
- Faltungssatz, 32
- Faradaysches Induktionsgesetz, 6
- Feldstärke
 - elektrische, 2
 - magnetische, 4
- Feldtensor, 83
- Ferromagnetika, 64
- Flächenladung, 23
- Fourierintegrale, 31
- Fourierreihen, 31
- Fouriertransformation, 31
- Fraunhofersche Beugung, 187
- Fresnelsche Beugung
 - Intensitätsverlauf, 186
- Fresnelsche Formeln, 135
- Funktionensystem
 - orthogonales, 27
 - orthonormales, 27
 - vollständiges, 29

- geometrische Optik, 178
 Geschwindigkeits-
 Additionstheorem, 72
 Gram-Schmidt-Verfahren, 33
 Greensche Funktion, 21
 Greenscher Satz
 erster, 19
 zweiter, 19
 Greensfunktion, 21
 avancierte, 144
 retardierte, 143
 Hamiltonfunktion
 elektromagnetisches Feld, 120
 holomorphe Funktionen, 139
 Huygenssches Prinzip, 181
 Kettenlinie, 99
 Kugelflächenfunktionen, 35
 Additionstheorem, 35
 Lagrangedichte
 elektromagnetisches Feld, 95
 Lagrangefunktion
 freies Teilchen, 74
 Laplace-Gleichung, 15
 Larmor-Formel
 nichtrelativistische, 161
 relativistische, 160
 Legendre-Polynome, 34
 assoziierte, 35
 Leitfähigkeit, 9
 Lenzsche Regel, 6
 Liénard-Wiechert-Potentiale, 145
 lineare Unabhängigkeit, 32
 Linienbreite
 natürliche, 164
 Lorentzkontraktion, 72
 Lorentzkraft, 81
 Lorentztransformation, 68
 Lorentztransformation der Felder,
 84
 Lorenz-Eichung, 108
 magnetische Erregung, 5, 64
 magnetische Spiegelung, 104
 magnetischer Fluss, 5
 Magnetisierungsstrom, 63
 Maxwell-Gleichungen
 differentielle Form, 9
 Gaußsches System, 12
 integrale Form, 8
 kovariante Form, 89
 Minkowski-Metrik, 69
 Mittelung
 makroskopische, 42
 Moment
 magnetisches, 4, 61
 Monopol, 37
 Multipolmomente, 36
 Ohm, 9
 Ohmsches Gesetz
 allgemeines, 97
 Paramagnetika, 64
 paramagnetisch, 10
 Parsevalsche Gleichung, 32
 Permeabilität, 64
 Permeabilitätskonstante, 9
 Plasmafrequenz, 128
 Poincaré-Gruppe, 69
 Poisson-Gleichung, 15
 Polarisierung, 46
 elliptische, 115
 lineare, 115
 zirkulare, 116
 Polarisationsdichte, 44
 Polarisierbarkeit
 molekulare, 52
 Polstärke, 4
 Potential
 elektrostatisches, 15
 retardierte, 144
 Poynting-Vektor, 94
 ebene Wellen, 112
 Quadrupol, 39
 Randbedingungen
 Dirichletsche, 20
 Neumannsche, 20
 Randbedingungen und Eindeutig-
 keit, 20
 Reflexionsgesetz, 133
 Reibungskoeffizient, 127

- relativistische Fokussierung, 174
- Relativitätstheorie
 - spezielle, 68
- Residuensatz, 140
- Residuum, 139
- Ringspannung
 - elektrische, 6
 - magnetische, 5
- Rodrigues-Formel, 34
- Ruheenergie, 73

- Skalarpotential
 - magnetisches, 54
- Spannung, 3
- Spannungstensor, 92
- Spiegel Ladungen, 22
- Stetigkeit an Grenzflächen, 47
- Stetigkeitsbedingungen, 133
- Strahlungsdämpfung, 162
- Stromdichte, 3
- Stromstärke, 4
- Summenkonvention
 - Einsteinsche, 70
- Superposition von Feldern, 14
- Suszeptibilität, 46, 64
- Synchrotronstrahlung
 - Polarisation, 174
 - Winkelverteilung, 176

- Telegrafengleichungen, 122
- Thomsonscher Streuquerschnitt,
166
- Trochoide, 106

- Vektoren
 - ko- und kontravariante, 70
- Vektorpotential, 55
- Verschiebungsstrom, 4
- Viererbeschleunigung, 76
- Vierergeschwindigkeit, 73
- Viererimpuls, 73
- Viererpotential, 78
- Viererstrom, 86

- Wellengleichung, 109
- Wellenvektor, 113
- Wirkung
 - elektromagnetisches Feld, 88
 - freies Teilchen, 74
 - Teilchen im Feld, 79
- Zeitdilatation, 71
- Zykloide, 106