

Der Kosmische Mikrowellen-Hintergrund

3. Thermodynamik des Urknalls

Matthias Bartelmann
MPA Garching

Wintersemester 2000/2001

Thermodynamik des heißen Universums (I)

- Annahmen:
 - Expansion ist adiatherm (Wärmeströme würden die Isotropie verletzen)
 - Expansion ist adiabatatisch (Entropie durch Photonen dominiert)
 - kosmisches Material kann als ideales Gas angenommen werden
- Temperaturentwicklung in adiabatatisch expandierendem Gas:

$$T \propto a^{3(1-\gamma)}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{Adiabatexponent})$$

- ideales, nichtrelativistisches Gas:

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad T \propto a^{-2}$$

Thermodynamik des heißen Universums (II)

- Besetzungszahl:

$$n = \left[\exp \left(-\frac{\varepsilon - \mu}{kT} \right) \pm 1 \right]^{-1}$$

- im thermischen Gleichgewicht gilt

$$\mu = 0 \quad \text{wegen} \quad \frac{\partial F}{\partial N} = \mu = 0$$

- Energie

$$\varepsilon = (c^2 p^2 + m^2 c^4)^{1/2}$$

Thermodynamik des heißen Universums (III)

- großkanonische Zustandssumme:

$$Z = \prod_{\alpha} Z_{\alpha}, \quad Z_{\alpha} = \begin{cases} 1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\alpha} - \mu}{kT}\right) & \text{(Fermionen)} \\ \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\alpha} - \mu}{kT}\right)\right]^{-1} & \text{(Bosonen)} \end{cases}$$

- großkanonisches Potential:

$$\Phi = -kT \ln Z = \mp kT \sum_{\alpha} \ln \left[1 \pm \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\alpha}}{kT}\right) \right]$$

- mit $F(T, V, N) = U - TS$, $\Phi(T, V, \mu) = F - \mu N$ und $U = TS - PV + \mu N$:

$$P = -\frac{\Phi}{V}, \quad S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T}, \quad N = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}$$

Thermodynamik des heißen Universums (IV)

Für relativistische Bosonen gilt:

$$n_B = g_B \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3$$

$$u_B = g_B \frac{\pi^2}{30} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}$$

$$P_B = \frac{u_B}{3}$$

$$s_B = g_B k \frac{2\pi^2}{45} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3$$

Für relativistische Fermionen gilt:

$$n_F = \frac{3}{4} \frac{g_F}{g_B} n_B$$

$$u_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} u_B$$

$$P_F = \frac{7}{8} \frac{u_F}{3}$$

$$s_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} s_B$$

Thermodynamik des heißen Universums (V)

- adiabatische Expansion relativistischer Materie:

$$\gamma = 4/3, \quad T \propto a^{-1}$$

- heutige Massendichte des Mikrowellenhintergrunds:

$$\Omega_{0,R} = 2.4 \times 10^{-5} h^{-2} \left(\frac{T_0}{2.726\text{K}} \right)^4; \quad z_{\text{eq}} = 4.1 \times 10^4 \Omega_0 h^2 \left(\frac{T_0}{2.726\text{K}} \right)^{-4}$$

- Entropie des Universums ist phänomenal hoch:

$$\frac{s}{\rho} = 1.1 \times 10^{16} (\Omega_0 h^2)^{-1} \frac{\text{erg}}{\text{gK}}$$

Thermodynamik des heißen Universums (VI)

Einstellung thermischen Gleichgewichts:

- Expansionszeit in der strahlungsdominierten Ära:

$$t \propto a^2$$

- Stoßrate für Zweikörperprozesse:

$$\Gamma \propto a^{-3}$$

- thermisches Gleichgewicht kann sich trotz anfänglicher schneller Expansion einstellen