

# Aufgaben zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Matthias Bartelmann  
Institut für Theoretische Astrophysik  
Universität Heidelberg



# Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 1

Abgabetermin: Di., 27.04.2004, in der Vorlesung

## 1. Nützliche Formeln für die Vektorrechnung

- (a) Beweisen Sie Identität

$$\epsilon_{ijs}\epsilon_{kls} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

(2P)

- (b) Beweisen Sie damit und mithilfe des Levi-Civita-Symbols  $\epsilon_{ijk}$  die folgenden Vektoridentitäten:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Diese Formeln sind für viele Rechnungen äußerst nützlich und werden in der Vorlesung noch oft vorkommen. (4P)

## 2. Gebremster Wurf

- (a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall aus geringer Höhe mit Luftwiderstand für  $v > 0$ , d.h. für einen Massenpunkt, der nach oben geworfen wird. (3P)
- (b) Spezialisieren Sie die Lösung für den Fall, dass die Anfangshöhe  $r(t = 0) = 0$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $v(t = 0) = v_0$  sind. (3P)
- (c) Vergleichen Sie die Zeit, während der der Massenpunkt steigt, mit der Zeit, die er braucht, um wieder zurück zu fallen. (1P)

## 3. Die Freifall-Zeitskala: Gegeben sei eine Gaskugel der Masse $M$ mit dem Radius $R$ . Ein Testteilchen sei bei $t = 0$ auf der Kugel-, „Oberfläche“ in Ruhe.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens auf. Argumentieren Sie, warum nur die Masse *innerhalb* des momentanen Radius eine Schwerkraft auf das Teilchen ausüben kann. (2P)
- (b) Nehmen Sie an, die Dichte  $\rho$  der Gaskugel sei konstant. Lösen Sie die Bewegungsgleichung mithilfe des Energiesatzes mit den Anfangsbedingungen  $r(t = 0) = R$  und  $\dot{r}(t = 0) = 0$ . (3P)
- (c) Bestimmen Sie die Zeit, nach der das Teilchen den Mittelpunkt der Gaskugel durchläuft. (2P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 2

Abgabetermin: Di., 04.05.2004, in der Vorlesung

1. Gegeben sei ein reibungsfreies Federpendel mit der Federkonstante  $k$ , an dem eine ferromagnetische Masse  $m$  hängt. Unter dem Federpendel befindet sich ein Elektromagnet, der zur Zeit  $t = t_0 = 0$  langsam angeschaltet wird. Ab dem Zeitpunkt  $t = t_1 > t_0$  wird die Kraft des Elektromagneten auf dem konstanten Wert  $F_0$  gehalten. Es wirkt also die äußere Kraft

$$F_e = F_0 \cdot \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t/t_1 & (0 < t < t_1) \\ 1 & t > t_1 \end{cases} \quad (1)$$

Bis zur Zeit  $t = 0$  befinde sich das Federpendel in Ruhe.

- (a) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Bewegungsgleichung des Federpendels für  $0 \leq t \leq t_1$ . (4P)
  - (b) Setzen Sie diese Lösung für  $t > t_1$  fort, indem Sie Stetigkeit der Lösung und ihrer Ableitung fordern. (4P)
  - (c) Wie hängt die Amplitude der Schwingung für  $t > t_1$  von der Anschaltzeit  $t_1$  ab? Wie groß ist sie, wenn die magnetische Kraft instantan eingeschaltet wird (d.h.  $t_1 = 0$ )? (3P)
2. Der relative Dichtekontrast  $\delta$  kosmischer Strukturen wird näherungsweise durch

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} + \left( \frac{4\pi^2 c_s^2}{\lambda^2} - \frac{2}{3t^2} \right) \delta = 0 \quad (2)$$

bestimmt, wobei  $c_s$  die Schallgeschwindigkeit im kosmischen Material und  $\lambda$  die räumliche Größe der Dichteschwankung sind.

- (a) Für genügend kleine Wellenlängen entfallen der Reibungsterm und der zweite Term in Klammern. Bestimmen Sie die Wellenlänge  $\lambda_J$  so, dass für  $\lambda < \lambda_J$  der Ausdruck mit der Schallgeschwindigkeit dominiert. Welche Frequenz hat die Schwingung für  $\lambda \ll \lambda_J$ ? (3P)
- (b) Für  $\lambda \gg \lambda_J$  entfällt der erste Term in Klammern. Bestimmen Sie die beiden linear unabhängigen Lösungen für  $\delta$ . *Hinweis:* Da die Koeffizienten Potenzen von  $t$  sind, liegt es nahe, auch für  $\delta$  eine Potenz von  $t$  anzusetzen. (3P)
- (c) Der Reibungsterm und die Zeitabhängigkeit des Terms  $2/3t^2$  werden durch die Ausdehnung des Universums erzeugt. In einem statischen Hintergrund würde der Dichtekontrast großer Strukturen die Gleichung

$$\ddot{\delta} - \frac{2}{3}\delta = 0 \quad (3)$$

erfüllen, die sich durch ein Vorzeichen von der harmonischen Oszillatorgleichung unterscheidet. Zeigen Sie, dass statt der trigonometrischen die hyperbolischen Sinus- und Cosinusfunktionen linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sind. *Hinweis:*

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad , \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (4)$$

(3P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 3

Abgabetermin: Di., 11.05.2004, in der Vorlesung

1. Flug über die Potentialkante: Im linken Halbraum  $x_1 < 0$  herrsche das konstante Potential  $V_1$ , im rechten Halbraum das konstante Potential  $V_2 < V_1$ . Ein Teilchen der Masse  $m$  fliegt mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$  von links auf die Potentialkante zu.
  - (a) Begründen Sie, wo und in welcher Richtung eine Kraft wirkt. Welche Komponenten des Impulses bleiben erhalten? (3P)
  - (b) Leiten Sie daraus und aus dem Energiesatz her, wie sich die Richtung der Teilchenbewegung beim Übergang in den rechten Halbraum ändert. (4P)
  - (c) Wie ändert sich die Lösung, wenn  $V_2 > V_1$  ist? (2P)
2. Geladenes Teilchen im Magnetfeld: Im elektrischen Feld  $\vec{E}$  und magnetischen Feld  $\vec{B}$  erfährt ein Teilchen der Ladung  $e$  die Lorentzkraft

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (5)$$

wenn  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit des Teilchens und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit sind. Wir vernachlässigen das elektrische Feld,  $\vec{E} = 0$ , und nehmen ein räumlich und zeitlich konstantes Magnetfeld an, das in  $z$ -Richtung orientiert sei,

$$\vec{B} = B\vec{e}_z \quad (6)$$

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens auf und konstruieren Sie die allgemeine Lösung für die Anfangsbedingungen  $\vec{x}(t=0) = 0$  und

$$\vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{y,0} \\ v_{z,0} \end{pmatrix} \quad (7)$$

*Hinweis:* Am einfachsten geht das, wenn Sie  $x_1$  und  $x_2$  zu einer komplexen Zahl  $\xi = x_1 + ix_2$  kombinieren und  $\xi = \xi_0 e^{i\omega t}$  versuchen. (5P)

- (b) Welche Komponenten des Impulses bleiben erhalten? Ist die Kraft, die das Magnetfeld auf das Teilchen ausübt, konservativ? Welche Arbeit verrichtet sie am Teilchen? (2P)
- (c) Bestimmen Sie Tangential- und Normalvektoren der Bahnkurve sowie deren Krümmungsradius. (2P)
- (d) Berechnen Sie das Drehmoment des Teilchens bezüglich des Koordinatenursprungs. Welche Komponenten des Drehimpulses bleiben erhalten? (2P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 4

Abgabetermin: Di., 18.05.2004, in der Vorlesung

1. Keplersche Gleichung: Um die Position eines Planeten auf seiner Ellipsenbahn als Funktion der Zeit anzugeben, führt man die exzentrische Anomalie  $\psi$  ein, die definiert ist durch

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \psi) \quad (8)$$

- (a) Zeigen Sie, dass sich der Polarwinkel  $\varphi$  aus  $\psi$  durch

$$\cos \varphi = \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad (9)$$

ergibt.  $\varphi$  und  $\psi$  laufen also beide von 0 bis  $2\pi$ . Im Perihel ist offenbar  $\psi = 0$ . (2P)

- (b) Zeigen Sie, dass die Zeit, zu der sich der Planet im Radius  $r$  befindet, in der Form

$$t = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{r' - \frac{r'^2}{2a} - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{2}}} \quad (10)$$

geschrieben werden kann, wenn  $t(r = r_0) = 0$  gesetzt wird. (2P)

- (c) Formen Sie diese Gleichung mithilfe von (8) um in

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int_0^\psi (1 - \varepsilon \cos \psi') d\psi' \quad (11)$$

(3P)

- (d) Begründen Sie damit das 3. Keplersche Gesetz und die Keplersche Gleichung

$$\omega t = \psi - \varepsilon \sin \psi \quad (12)$$

wobei  $\omega = 2\pi/\tau$  und  $\tau$  die Umlaufperiode sind. Zu vorgegebener Zeit  $t$  kann aus (12)  $\psi$  berechnet werden, was durch (8) auf  $r$  und (9) auf  $\varphi$  führt. (3P)

2. Periheldrehung: Wenn das Potential  $V = -\alpha/r$  um einen kleinen Betrag  $\delta V$  gestört wird, sind finite Bahnen nicht mehr geschlossen, und das Perihel dreht sich bei jedem Umlauf um einen kleinen Betrag  $\delta\varphi$  weiter.

- (a) Zeigen Sie, dass sich der Polarwinkel um

$$\Delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial L_3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - V) - \frac{L_3^2}{r^2}} dr \quad (13)$$

ändert, während der Körper im ungestörten Potential  $V$  von  $r_{\min}$  nach  $r_{\max}$  und zurück läuft. (4P)

- (b) Stören Sie nun das Potential um  $\delta V$ . Zeigen Sie, dass sich dadurch der Polarwinkel nach einem vollen Umlauf um

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{2m}{L_3} \int_0^{2\pi} r^2 \delta V d\varphi \quad (14)$$

ändert. *Hinweis:* Entwickeln Sie zunächst den Integranden in (13) bis zur ersten Ordnung in  $\delta V$ . Führen Sie dann  $\varphi$  statt  $r$  als Integrationsvariable ein. (4P)

- (c) Berechnen Sie die Periheldrehung für das Störpotential  $\delta V = \beta/r^2$ . (2P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 5

Abgabetermin: Di., 25.05.2004, in der Vorlesung

1. Dynamische Reibung: Ein Massenpunkt  $M$  bewege sich durch eine Ansammlung kleinerer Massenpunkte  $m < M$ . Wir betrachten die Wirkung *eines* kleinen Massenpunkts  $m$  beim Vorbeiflug an  $M$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Änderung der Geschwindigkeit  $\vec{v}_M$  von  $M$  gegeben ist durch

$$\Delta \vec{v}_M = - \left( \frac{m}{m+M} \right) \Delta \vec{v}, \quad (15)$$

wobei  $\vec{v}$  die Relativgeschwindigkeit von  $m$  und  $M$  und  $\Delta \vec{v}$  deren Änderung sind. (2P)

- (b) Im Ruhesystem von  $M$  fliegt  $m$  auf einer Hyperbelbahn vorbei und dabei um den Winkel  $\vartheta$  abgelenkt. Zeigen Sie, dass für den Streuwinkel  $\vartheta$  gilt

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\alpha}{bmv_\infty^2}, \quad (16)$$

wobei  $b$  der Stoßparameter von  $m$  bezüglich  $M$ ,  $v_\infty$  die Geschwindigkeit von  $m$  im Ruhesystem von  $M$  vor dem Stoß und  $\alpha = G(M+m)m$  sind. (2P)

- (c) Leiten Sie daraus ab, dass sich durch den Vorbeiflug von  $m$  die Geschwindigkeit von  $M$  parallel und senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung um die Beträge

$$\begin{aligned} |\Delta v_{M\parallel}| &= \frac{2mv_\infty}{M+m} \left[ 1 + \left( \frac{bmv_\infty^2}{\alpha} \right)^2 \right]^{-1}, \\ |\Delta v_{M\perp}| &= \frac{2bm^2v_\infty^3}{\alpha(M+m)} \left[ 1 + \left( \frac{bmv_\infty^2}{\alpha} \right)^2 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

ändert.  $M$  wird also abgebremst; er erfährt eine „dynamische Reibung“. Wohin geht seine Energie? (6P)

(10P)

2. Streuung an sphärischer Potentialmulde: Ein Massenpunkt  $m$  werde an einer sphärischen Potentialmulde mit dem Radius  $a$  und der Tiefe  $-V_0$  gestreut, d.h. das Potential ist  $V = 0$  für  $r > a$  und  $V = -V_0$  für  $r \leq a$ .

- (a) Stellen Sie zunächst einen Zusammenhang her zwischen dem Einfallswinkel des Massenpunkts relativ zur Normalenrichtung an die Potentialmulde am Einfallspunkt, dem Winkel relativ zur Normalen, unter dem der Massenpunkt innerhalb der Potentialmulde weiterfliegt, und dem Streuwinkel. Zeigen Sie, dass der Stoßparameter  $b$  und der Streuwinkel  $\vartheta$  durch

$$b^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 - 2n \cos \frac{\vartheta}{2} + n^2} \quad (18)$$

verknüpft sind, wobei

$$n := \sqrt{1 + \frac{2V_0}{mv_\infty^2}} \quad (19)$$

ist. *Hinweis:* Dabei ist die Lösung von Aufgabe 1b aus dem 3. Übungsblatt sehr nützlich. (5P)

(b) Berechnen Sie daraus den differentiellen Streuquerschnitt. (3P)

(c) Zeigen Sie, dass der totale Streuquerschnitt gleich  $\pi a^2$  ist. (2P)

(10P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 6

Abgabetermin: Di., 01.06.2004, in der Vorlesung

1. Looping: Ein Wagen durchfährt auf einer Achterbahn einen senkrecht stehenden Looping. Der Wagen werde durch einen Massenpunkt der Masse  $m$  beschrieben, der Looping sei eine Kreisbahn vom Radius  $R$ , auf der der Wagen reibungsfrei läuft.

(a) Formulieren Sie zunächst in kartesischen Koordinaten die Zwangsbedingung an den Wagen, während er den Looping durchläuft, und stellen Sie eine Gleichung für die Zwangskraft auf. (2P)

(b) Führen Sie Polarkoordinaten ein und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung in der Form

$$R\ddot{\varphi} + g \cos \varphi = 0 \quad (20)$$

geschrieben werden kann, wenn  $\varphi$  der Polarwinkel und  $g$  die Erdbeschleunigung ist. (2P)

(c) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Wagens auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung ab. Wie lautet die verallgemeinerte Kraft? (2P)

(6P)

2. Atwoodsche Fallmaschine: Zwei Massenpunkte  $m_1$  und  $m_2$  seien über einen Faden miteinander verbunden, der über eine Rolle läuft. Die Masse der Rolle und die Reibung ihrer Lagerung werden vernachlässigt.

(a) Führen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten für das System aus zwei Massen ein und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. (3P)

(b) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab und geben Sie die allgemeine Lösung an. (3P)

(6P)

3. Feder-Fadenpendel: Ein Massenpunkt der Masse  $m$  ist an einem Gummiband aufgehängt. Er kann wie ein mathematisches Pendel seitlich und wie ein Federpendel längs des Bandes schwingen. Die Federkonstante des Gummibandes sei  $k$ , seine Ruhelänge sei  $l_0$ .

(a) Führen Sie geeignete Koordinaten ein und bestimmen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Massenpunkts. (4P)

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab und spezialisieren Sie sie für kleine Auslenkungen aus der Vertikalen. (4P)

(8P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 7

Abgabetermin: Di., 08.06.2004, in der Vorlesung

1. Kettenlinie: Gegeben sei eine Kette, deren Masse pro Längeneinheit konstant gleich  $\lambda$  sei. Die Kette hänge unter dem Einfluss der Schwerkraft zwischen zwei festen Punkten.

- (a) Stellen Sie eine Gleichung für die potentielle Energie der Kette auf. (2P)  
(b) Die Form der Kette minimiert die potentielle Energie. Zeigen Sie mithilfe der Variationsrechnung, dass die Form der Kette die Differentialgleichung

$$yy'' - y'^2 - 1 = 0 \quad (21)$$

erfüllt, wenn die  $x$ -Achse horizontal und die  $y$ -Achse vertikal verläuft. Zeigen Sie, dass die „Kettenlinie“  $y(x) = \cosh(x)$  diese Differentialgleichung erfüllt. (4P)

(6P)

2. Hamiltonfunktion im Zentralfeld: Ein Massenpunkt der Masse  $m$  bewege sich im Feld einer ortsfesten Zentralkraft

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{x}}{r} \quad (22)$$

- (a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Massenpunkts in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten auf. (2P)  
(b) Bestimmen Sie die entsprechenden verallgemeinerten Impulse und transformieren Sie die Lagrange-Funktion zur Hamilton-Funktion. Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und begründen Sie deren physikalische Bedeutung. (4P)

(6P)

3. Ebenes Schienenpendel: Ein Massenpunkt  $m_2$  sei an einer masselosen Stange der Länge  $l$  an einem Massenpunkt  $m_1$  aufgehängt, der sich reibungsfrei auf einer horizontalen Schiene bewegen kann.

- (a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten auf. (2P)  
(b) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse. Identifizieren Sie zyklische Koordinaten. (2P)  
(c) Wählen Sie den zur zyklischen Koordinate konjugierten Impuls geeignet und transformieren Sie auf die Hamilton-Funktion. (2P)  
(d) Lösen Sie die verbliebene Bewegungsgleichung. (2P)

(8P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 8

Abgabetermin: Di., 22.06.2004, in der Vorlesung

1. Foucaultsches Pendel: Ein Körper der Masse  $m$  pendelt an einem masselosen Faden der Länge  $l$  an einem Ort auf der Erde mit geografischer Breite  $\beta$ .

- (a) Vergleichen Sie die Zentrifugal- und die Corioliskraft. Begründen Sie, warum eine der beiden vernachlässigt werden kann. (2P)
- (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Pendelkörpers auf. Begründen Sie, warum die Bewegung in vertikaler Richtung vernachlässigt werden kann. (4P)
- (c) Lösen Sie die beiden verbliebenen Gleichungen, indem Sie sie zu einer komplexen Gleichung kombinieren. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Pendelebene? (4P)

(10P)

2. Freier Fall auf der rotierenden Erde: An einem Ort auf der Erde mit geografischer Breite  $\beta$  fällt ein Körper frei aus einer Höhe  $\vec{r}_0$ .

- (a) Begründen Sie, warum eine der beiden Trägheitskräfte in der Bewegungsgleichung vernachlässigt werden kann und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. (2P)
- (b) Begründen Sie, warum die Erdrotation nur eine kleine Änderung gegenüber dem freien Fall in einem nicht-rotierenden Bezugssystem bewirkt. Setzen Sie dementsprechend  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \delta\vec{v}$  an, wobei  $\vec{v}_1$  die Geschwindigkeit in einem nicht-rotierenden Bezugssystem und  $\delta\vec{v}$  die Änderung relativ dazu ist, und lösen Sie die Bewegungsgleichung in erster Ordnung in  $\delta\vec{v}$ . (4P)

(6P)

3. Wurf auf der rotierenden Erde: Von einem Ort auf der Erde mit geografischer Breite  $\beta$  wird ein Körper fortgeworfen. Bestimmen Sie seine Abweichung von seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung. (4P)

(20P)

# 1. Klausur zur Theoretischen Mechanik

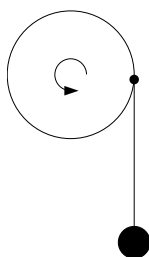
Samstag, 12.06.2004; Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. Streuung an harter Kugel: Ein Massenpunkt der Masse  $m$  wird an der Oberfläche einer harten Kugel mit Radius  $R$  gestreut. Die Kugel wird als ortsfest angenommen. (3P)
  - (a) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter und dem Streuwinkel des Massenpunkts her. (1P)
  - (b) Berechnen Sie daraus den differentiellen Streuquerschnitt und zeigen Sie, dass der totale Streuquerschnitt gleich der Querschnittsfläche der Kugel ist. (2P)
2. Erzwungene Schwingung: An einer Spiralfeder mit Federkonstante  $k$  hängt eine Masse  $m$  in Ruhe. Zwischen  $t = 0$  und  $t = t_0 > 0$  wird die Masse mit der linear ansteigenden Kraft  $F(t) = F_0 t/t_0$  nach unten gezogen, bei  $t = t_0$  wird sie losgelassen. Reibung wird vernachlässigt. (5P)
  - (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Masse auf. Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung für  $0 \leq t \leq t_0$ . (2P)
  - (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für  $t > t_0$  und schließen sie diese stetig differenzierbar an die vorige an. (2P)
  - (c) Geben Sie die Schwingungsamplitude für  $t > t_0$  und deren Grenzwerte für  $t_0 \rightarrow 0$  und  $t_0 \rightarrow \infty$  an. (1P)
3. Ende eines Kometen: Ein Komet mit positiver Energie  $E$  bewegt sich auf die Sonne zu. Die Masse der Sonne ist  $M$ , ihr Radius ist  $R$ . (5P)
  - (a) Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass der Komet in die Sonne stürzt. Formulieren Sie diese Bedingung mithilfe der Energie  $E$  und des Stoßparameters  $b$ . (3P)
  - (b) Ermitteln Sie daraus den maximalen Stoßparameter, der zum Absturz führt, und bestimmen Sie den „Einfangquerschnitt“ der Sonne. (2P)
4. Rotierendes Pendel: Am Rand einer vertikalen Scheibe mit Radius  $R$ , die mit der konstanten Kreisfrequenz  $\omega$  rotiert, ist ein Pendel der Länge  $l$  befestigt, an dem die Masse  $m$  hängt. Bei  $t = 0$  befindet sich der Aufhängepunkt bei  $x = R, y = 0$ . (7P)
  - (a) Führen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate für das Pendel ein und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. (3P)
  - (b) Begründen Sie, dass diese Lagrange-Funktion in die Form

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mlR\omega^2 \sin(\varphi - \omega t) + mgl \cos \varphi$$

gebracht werden kann, ohne dass die Bewegungsgleichungen sich ändern. Wie lautet der kanonisch konjugierte Impuls? (4P)

*Hinweis:*  $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$



Skizze zu Aufgabe 4

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 9

Abgabetermin: Di., 29.06.2004, in der Vorlesung

1. Das Jojo: Ein homogener Hohlzylinder, um den ein Faden gewickelt ist, wird fallen gelassen, wobei das Ende des Fadens festgehalten wird. Es wird angenommen, dass die Symmetrieachse des Hohlzylinders waagrecht bleibt. Der Hohlzylinder hat die Masse  $M$ , den äußeren Radius  $R$  und den inneren Radius  $fR$ , mit  $0 \leq f < 1$ .

- (a) Berechnen Sie den Trägheitstensor des Hohlzylinders. (3P)
- (b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des fallenden und rotierenden Hohlzylinders auf. *Hinweis:* Bedenken Sie, dass die Fallhöhe durch den Faden mit dem Drehwinkel verknüpft ist. (4P)
- (c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung ab und lösen Sie sie unter der Annahme, dass der Hohlzylinder bei  $t = 0$  ruht. (2P)
- (d) Vergleichen Sie die Fallzeit des Hohlzylinders mit der Fallzeit im freien Fall bei gleicher Fallhöhe. Warum hängt die Fallzeit nicht vom Radius des Hohlzylinders ab? Wie ändert sich die Fallzeit mit  $f$ , und warum? (3P)

(12P)

2. Doppelpendel: Am Ende eines Pendels der Länge  $l$  mit der Masse  $m$  hängt ein weiteres, gleichartiges Pendel. Reibung und die Masse der Aufhängung seien vernachlässigbar klein.

- (a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Doppelpendels auf. (3P)
- (b) Nähern Sie die Lagrange-Funktion für kleine Auslenkwinkel der Pendel und zeigen Sie, dass sie in die Form

$$L = ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}_2^2 + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - mgl\varphi_1^2 - \frac{m}{2}gl\varphi_2^2 \quad (23)$$

gebracht werden kann. (2P)

- (c) Bestimmen Sie die Matrizen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{V}$  der quadratischen Formen für die kinetische und die potentielle Energie und berechnen Sie die Frequenzen der Normalschwingungen. (3P)

(8P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 10

Abgabetermin: Di., 06.07.2004, in der Vorlesung

1. Gradient, Divergenz und Laplaceoperator in ebenen Polarkoordinaten: Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f(x, y)$  der kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  in der Ebene.

- (a) Zeigen Sie, indem Sie das vollständige Differential der Funktion  $f$  in kartesischen und in Polarkoordinaten schreiben, dass der Gradient in ebenen Polarkoordinaten

$$\vec{\nabla} f(r, \varphi) = \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (24)$$

lautet, wobei

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (25)$$

die Einheitsvektoren in  $r$ - bzw.  $\varphi$ -Richtung sind. (3P)

- (b) Zeigen Sie ebenso, dass die Divergenz in ebenen Polarkoordinaten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r g_r(r, \varphi))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (26)$$

lautet, wobei  $g_{r,\varphi} = \vec{g} \cdot \vec{e}_{r,\varphi}$  die Komponenten von  $\vec{g}$  in  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$ -Richtung sind. (3P)

- (c) Kombinieren Sie beide Ergebnisse, um zu zeigen, dass der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten

$$\Delta f(r, \varphi) := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \quad (27)$$

lautet. (1P)

(7P)

2. Trommel: Eine kreisförmige Membran sei am Rand fest eingespannt. Wie in der Vorlesung gezeigt, wird die senkrechte Auslenkung  $q(x, y, t)$  der Membran durch die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] q(x, y, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + v^2 \Delta \right) q(x, y, t) = 0 \quad (28)$$

beschrieben.

- (a) Verwenden Sie zunächst den Separationsansatz  $q(x, y, t) = f(x, y)g(t)$  und bestimmen Sie die Funktion  $g(t)$ . (4P)

- (b) Verwenden Sie den weiteren Separationsansatz  $f(r, \varphi) = F(r)G(\varphi)$  und zeigen Sie, dass sich (28) dann in die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r^2 F''(r) + rF'(r) + \left( \frac{\omega^2}{v^2} r^2 - c \right) F(r) &= 0 \\ G''(\varphi) + cG(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

zerlegen lässt, wobei  $c$  eine Konstante ist. *Hinweis:* Benutzen Sie dabei die Darstellung des Laplace-Operators in ebenen Polarkoordinaten. (4P)

- (c) Geben Sie die allgemeine Lösung für die Funktion  $G(\varphi)$  an. Begründen Sie, dass  $c = n^2$  mit  $n \in \mathbb{N}$  sein muss. (2P)
- (d) Zeigen Sie, dass sich die verbliebene Gleichung für  $F(r)$  durch eine geeignete Substitution in die Form der *Besselschen Differentialgleichung*

$$\rho^2 \frac{d^2 F(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dF(\rho)}{d\rho} + (\rho^2 - n^2)F(\rho) = 0 \quad (30)$$

bringen lässt. Deren Lösungen sind die Bessel-Funktionen  $J_n(\rho)$ , die sich z.B. durch

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt \quad (31)$$

ausdrücken lassen. Begründen Sie aus den Randbedingungen an die Membran Bedingungen an die Lösungsfunktionen  $J_n(\rho)$ . Diskutieren Sie die Knotenlinien der Schwingungen der Membran. (3P)

(13P)

(20P)

## Übungsaufgaben zur Theoretischen Mechanik, Blatt 11

Abgabetermin: Di., 13.07.2004, in der Vorlesung

1. Flug eines Neutrons: Das freie Neutron ist instabil und hat eine mittlere Lebensdauer von etwa  $\tau = 900$  s.

(a) Drücken Sie die Flugstrecke im Laborsystem durch Impuls und Energie des Neutrons aus. (2P)

(b) Berechnen Sie seine mittlere Flugstrecke, wenn seine kinetische Energie  $T = E - mc^2 = fmc^2$  ist und spezialisieren Sie auf die Fälle  $f = 10^{-2}$  und  $f = 10^6$ . (2P)

(4P)

2. Eigenschaften der speziellen Lorentztransformation:

(a) Zeigen Sie, dass sich die spezielle Lorentztransformation (bei Bewegung längs der  $x_3$ -Achse) in der Form

$$\Lambda(\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & 0 & 0 & \sinh \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \lambda & 0 & 0 & \cosh \lambda \end{pmatrix} \quad (32)$$

schreiben lässt, wobei  $\lambda := \operatorname{arctanh}(\beta)$  ist. (2P)

(b) Zeigen Sie damit, dass zwei aufeinanderfolgende spezielle Lorentztransformationen in der Form

$$\Lambda(\lambda_1)\Lambda(\lambda_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & \sinh(\lambda_1 + \lambda_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & \cosh(\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix} \quad (33)$$

geschrieben werden können. (2P)

(4P)

3. Zerfall eines  $\pi^0$ -Mesons: Ein  $\pi^0$ -Meson zerfällt in seinem Ruhesystem isotrop in zwei Photonen. Das  $\pi^0$ -Meson bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  längs der  $x_3$ -Achse.

(a) Zeigen Sie mithilfe der Impulserhaltung und der Tatsache, dass Photonen keine Ruhemasse haben, dass der Viererimpuls der beiden Photonen im Laborsystem in der Form

$$q'_1 = \frac{mc}{2} \begin{pmatrix} \gamma(1 + \beta \cos \theta) \\ \sin \theta \\ 0 \\ \gamma(\beta + \cos \theta) \end{pmatrix}, \quad q'_2 = \frac{mc}{2} \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta \cos \theta) \\ -\sin \theta \\ 0 \\ \gamma(\beta - \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (34)$$

geschrieben werden kann. Dabei ist  $\theta$  der Winkel zwischen der  $x_3$ -Achse und der Flugrichtung eines der beiden Photonen im Ruhesystem des  $\pi^0$ -Mesons. *Hinweis:* Betrachten Sie den Zerfall zunächst im Ruhesystem des  $\pi^0$ -Mesons und transformieren Sie anschließend in das Laborsystem. (4P)

- (b) Zeigen Sie, dass die Winkel  $\theta'_1$  und  $\theta'_2$ , unter denen die Photonen im Laborsystem relativ zur  $x_3$ -Achse wegfliegen, mit  $\theta$  durch

$$\cos \theta'_{1,2} = \frac{\beta \pm \cos \theta}{1 \pm \beta \cos \theta} \quad (35)$$

verknüpft sind. *Hinweis:* Verwenden Sie die Impulskomponenten im Laborsystem, um die Winkel auszudrücken. (4P)

- (c) Verwenden Sie die erste dieser Beziehungen und die Isotropie des Zerfalls im Ruhesystem des  $\pi^0$ -Mesons, um zu zeigen, dass die Winkelverteilung des Photons 1 im Laborsystem durch

$$p(\theta) = \gamma^2 (1 + \beta \cos \theta)^2 \quad (36)$$

gegeben ist *Hinweis:* Berechnen Sie dazu das Verhältnis der Raumwinkelemente im Ruhe- und im Laborsystem. (4P)

(12P)

(20P)

## 2. Klausur zur Theoretischen Mechanik

Samstag, 17.07.2004; Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Es gibt 22 Punkte. 20 Punkte gelten als 100%, d.h. 6 reichen zum Bestehen.

1. Spin eines relativistisch bewegten Elektrons: Im Ruhesystem eines Elektrons ist dessen Spin (Eigendrehimpuls) durch den Vierervektor  $s = (0, \vec{s})$  gegeben. (3P)

(a) Welche Form hat dieser Vektor in einem System, in dem das Elektron den Impuls  $\vec{p} = p\vec{e}_3$  hat? (2P)

(b) Berechnen Sie das Produkt  $g_{\mu\nu}p^\mu s^\nu = p^0 s^0 - \vec{p} \cdot \vec{s}$ . (1P)

2. Ein System mit zwei Freiheitsgraden werde durch die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

beschrieben. (5P)

(a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen dieses Systems. (3P)

(b) Wie lauten die Eigenvektoren zu diesen Eigenfrequenzen? Welche physikalische Bedeutung haben sie? (2P)

3. Kugel auf schiefer Ebene: Auf einer schiefen Ebene, die um den Winkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen geneigt ist, rolle eine homogene Kugel reibungsfrei. Zur Zeit  $t = 0$  sei sie in Ruhe. Die Kugel habe die Masse  $M$  und den Radius  $R$ . (7P)

(a) Zeigen Sie, dass die Hauptträgheitsmomente der Kugel  $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 2MR^2/5$  sind. (3P)

(b) Führen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate ein und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. (3P)

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung und vergleichen Sie die „Fallzeit“ der Kugel mit der Fallzeit im freien Fall. Diskutieren Sie die Grenzfälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \pi/2$ . (1P)

4. Symmetrischer Kegelkreisel: Gegeben sei ein homogener, gerader Kreisegel mit dem Radius der Grundfläche  $R$ , der Höhe  $h$  und der Masse  $M$ . Dieser Kegel rotiere kräftefrei um eine Achse, die auf dem Kegelmantel liegt und durch die Kegelspitze geht. (7P)

(a) Zeigen Sie, dass die Hauptträgheitsmomente des Kegelkreisels

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{3M}{5} \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right), \quad \Theta_3 = \frac{3MR^2}{10}$$

lauten. (4P)

(b) Stellen Sie die Eulerschen Gleichungen  $\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = 0$  für den Kegelkreisel auf. Geben Sie deren Lösung an und bestimmen Sie die Präzessionsfrequenz des Kreisels, d.h. die Kreisfrequenz, mit der die Drehachse um die Kegelachse läuft. (3P)