

## Vordiplom in Theoretischer Physik, Sommersemester 2004

Freitag, 13.08.2004; Bearbeitungszeit: 180 Minuten; insgesamt 30 Punkte; mindestens erforderlich: 9; Rückseite beachten!

1. Angetriebener Oszillator: Ein reibungsfreier harmonischer Oszillator mit Kraftkonstante  $k$  befinde sich für  $t < 0$  in Ruhe. Zwischen  $t = 0$  und  $t = \tau$  wirkt auf ihn die konstante Kraft  $F_0$ . (4P)

- (a) Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Bewegungsgleichung dieses angetriebenen harmonischen Oszillators für alle Zeiten  $t > 0$ . (3P)
- (b) Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude für  $t > \tau$ . (1P)

2. Gekoppelte Pendel: Drei Pendel der Länge  $l$  hängen jeweils im Abstand  $d$  nebeneinander. Die Pendelfäden werden als masselos angenommen und die angehängten Massen als punktförmig. Die äußeren Pendel haben die Masse  $m$ , das mittlere die Masse  $M > m$ . Die Pendel sind mit Federn mit den Kraftkonstanten  $k$  gekoppelt, deren Ruhelänge gleich  $d$  ist. (8P)

- (a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion dieses Systems aus gekoppelten Pendeln in der Form

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2) + \frac{M}{2} l^2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_3^2) - \frac{Mgl}{2} \varphi_2^2 - \frac{k}{2} l^2 [(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2]$$

geschrieben werden kann, wenn man annimmt, dass die Auslenkungen der Pendel klein sind. (4P)

- (b) Begründen Sie, dass sich die Eigenschwingungen des Systems aus der Bedingung

$$\begin{vmatrix} g/l + k/m - \lambda & -k/m & 0 \\ -k/m & (gM)/(lm) + 2k/m - \lambda M/m & -k/m \\ 0 & -k/m & g/l + k/m - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ergeben. (1P)

- (c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems und diskutieren Sie deren physikalische Bedeutung. (3P)

3. Streuproblem: Gegeben sei das (abstoßende) Potential  $V = \alpha/r^2$  mit  $\alpha > 0$ . Ein Massenpunkt der Masse  $m$  bewegt sich aus dem Unendlichen kommend durch dieses Potential; sein Stoßparameter sei  $b$ , seine Geschwindigkeit im Unendlichen sei  $v_\infty$ . (9P)

- (a) Begründen Sie, warum Energie und Drehimpuls bei der Bewegung in diesem Potential erhalten bleiben, aber nicht der Impuls. (1P)

- (b) Zeigen Sie, dass der minimale Abstand des Massenpunkts vom Ursprung des Potentials

$$r_0 = b \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{b^2 m v_\infty^2}}$$

ist. (1P)

- (c) Begründen Sie, dass Sie zur Behandlung des Streuproblems die Gleichung

$$\varphi - \varphi_0 = L_3 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m[E - U_L(r')]}}$$

verwenden können. Was ist  $U_L(r)$ ? Zeigen Sie, dass

$$U_L(r) = E \left( \frac{r_0}{r} \right)^2$$

ist, und leiten Sie damit ab, dass der Massenpunkt um den Winkel

$$\vartheta = \pi \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\alpha}{b^2 m v_\infty^2} \right)^{-1/2} \right]$$

abgelenkt wird. (5P) *Hinweis:*  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

- (d) Berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt für die Ablenkung im Potential  $V$ . (2P)

4. Kugelbahn: Eine Kugel mit Masse  $M$  und Radius  $R$  rollt reibungsfrei eine Kugelbahn der Form  $y = \cosh x$  hinunter. Bei  $t = 0$  werde Sie in der Höhe  $h$  über der tiefsten Stelle losgelassen. (9P)

- (a) Diskutieren Sie zunächst, ob Energie, Impuls und Drehimpuls erhalten bleiben. (1P)
- (b) Wählen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate und stellen Sie die Lagrange-Funktion der Kugel auf. Nehmen Sie dabei an, dass die Kugel rollt, ohne zu gleiten, und dass  $R$  klein genug ist, dass angenommen werden kann, dass sich der Schwerpunkt der Kugel längs der Kugelbahn bewegt. (4P)
- (c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung der Kugel ab. Mit welcher Geschwindigkeit rollt die Kugel durch den tiefsten Punkt der Bahn? (2P)
- (d) Bestimmen Sie den verallgemeinerten Impuls und die Hamilton-Funktion der Kugel. (2P)

## Lösungen

### 1. Angetriebener Oszillator:

- (a) Für  $0 \leq t \leq \tau$  lautet die Bewegungsgleichung  $m\ddot{x} + kx = F_0$ . Ihre vollständige Lösung ist  $x = x_p + x_h$ , wobei  $x_p$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und  $x_h$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung sind. Der Ansatz  $x_p = C = \text{konst.}$  führt auf  $C = F_0/k$ , und  $x_h = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t$  mit  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Die Koeffizienten  $D_{1,2}$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen  $x(t=0) = 0 = \dot{x}(t=0)$  zu  $D_1 = -F_0/k$  und  $D_2 = 0$ . Damit lautet die Lösung für  $0 \leq t \leq \tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t) .$$

Zur (stetig differenzierbaren) Fortsetzung nach  $t > \tau$  setzt man für  $t > \tau$  die allgemeine Lösung  $x = B_1 \cos \omega(t - \tau) + B_2 \sin \omega(t - \tau)$  an und bestimmt die beiden Koeffizienten aus den Bedingungen, dass  $x$  und  $\dot{x}$  bei  $t = \tau$  stetig sein müssen. Daraus erhält man

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [(1 - \cos \omega\tau) \cos \omega(t - \tau) + \sin \omega\tau \sin \omega(t - \tau)] .$$

- (b) Die Amplitude für  $t > \tau$  erhält man aus

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2} \frac{F_0}{k} \sqrt{1 - \cos \omega\tau} = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

### 2. Gekoppelte Pendel:

- (a) Die Lagrange-Funktion setzt sich aus drei Beiträgen zusammen: der kinetischen Energie

$$T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2) + \frac{M}{2} l^2 \dot{\varphi}_2^2 ,$$

der potentiellen Energie im Schwerfeld,

$$V_1 = mgl(1 - \cos \varphi_1 + 1 - \cos \varphi_2) + Mgl(1 - \cos \varphi_2)$$

und der potentiellen Energie der Federspannungen,

$$V_2 = \frac{k}{2} \left[ \left( \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - d \right)^2 + \left( \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} - d \right)^2 \right] ,$$

wobei  $x_i = l \sin \varphi_i + (i - 1)d$  und  $y_i = -l \cos \varphi_i$  sind. Unter der Annahme kleiner Auslenkungen,  $\varphi_i \ll 1$ , gelten  $\sin \varphi \approx \varphi$  und  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ . Deswegen sind in  $V_2$  die  $y_{i+1} - y_i$  wesentlich kleiner als die  $x_{i+1} - x_i$  und können weggelassen werden. Man erhält

$$V_2 \approx \frac{kl^2}{2} [(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2]$$

und

$$V_1 \approx \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_3^2) + \frac{Mgl}{2} \varphi_2^2 .$$

Aus  $L = T - V = T - V_1 - V_2$  folgt dann die angegebene Lagrange-Funktion.

(b) Die Matrizen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{V}$  können aus der Lagrange-Funktion abgelesen werden:

$$\mathcal{T} = \frac{l^2}{2} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \frac{gl}{2} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} + \frac{kl^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenschwingungen (Eigenfrequenzen)  $\lambda_i$  ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom  $|\mathcal{V} - \lambda\mathcal{T}| = 0$ . Setzt man die obigen Matrizen ein und klammert  $ml^2/2$  aus, findet man die angegebene Bedingung.

(c) Aus dem charakteristischen Polynom erhält man zunächst

$$\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda\right) \left[ \left(\frac{gM}{lm} + \frac{2k}{m} - \frac{\lambda M}{m}\right) \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda\right) - \frac{k^2}{m^2} \right] - \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda\right) = 0.$$

Der Faktor  $(g/l + k/m - \lambda)$  ist allen Termen gemeinsam; daraus erhält man den ersten Eigenwert

$$\lambda_1 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}.$$

Die beiden anderen Eigenwerte ergeben sich als Lösungen der gemischt-quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{gM}{lm} + \frac{2k}{m} - \frac{\lambda M}{m}\right) \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \lambda\right) - \frac{2k^2}{m^2} = 0$$

zu

$$\lambda_2 = \frac{g}{l}, \quad \lambda_3 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{M} + \frac{k}{m}.$$

Da  $\sqrt{g/l}$  die Pendelfrequenz und  $\sqrt{k/m}$  bzw.  $\sqrt{k/M}$  die Schwingungsfrequenzen der Federn sind, lässt sich die Bedeutung der  $\lambda_i$  erraten:  $\lambda_2$  entspricht einer gleichphasigen Pendelschwingung aller drei Pendel (denn offenbar wird keine Feder gedehnt);  $\lambda_1$  entspricht der gegenphasigen Schwingung der beiden äußeren Pendel bei ruhendem mittlerem Pendel (denn es tritt nur die Schwingungsfrequenz der Massen  $m$  an den Federn auf); und  $\lambda_3$  entspricht der gleichphasigen Schwingung der beiden äußeren Pendel bei gegenphasig schwingendem mittlerem Pendel (denn es treten die Schwingungsfrequenzen der Massen  $m$  und  $M$  an den Federn auf).

### 3. Streuproblem:

- (a) Die Zeit ist homogen, der Raum ist inhomogen, aber isotrop, deswegen folgt aus dem Noether-Theorem, dass Energie und Drehimpuls, aber nicht der Impuls erhalten sind.
- (b) Die Gesamtenergie des Massenpunkts ist offenbar  $E = mv_\infty^2/2$ . Im minimalen Abstand  $r_0$  vom Streuzentrum ist  $\dot{r} = 0$  und damit

$$E = U_L(r_0) = \frac{\alpha}{r_0^2} + \frac{L_3^2}{2mr_0^2}.$$

Mit  $L_3 = bmv_\infty$  folgt der angegebene Ausdruck, wenn man nach  $r_0$  auflöst.

Die angegebene Gleichung für  $\varphi - \varphi_0$  war in der Vorlesung für die Bewegung in allgemeinen Zentralkraftfeldern hergeleitet worden, gilt also auch hier.  $U_L$  ist das Zentrifugalpotential, das einen Drehimpulsterm enthält, dessen negativer Gradient die Zentrifugalkraft ist. Der angegebene Ausdruck für  $U_L$  folgt sofort daraus, dass  $U_L \propto r^{-2}$  und für  $r = r_0$  gleich  $E$  ist.

Der Streuwinkel ist  $\vartheta = \pi - 2(\varphi - \varphi_0)$ . Zunächst erhält man aus den obigen Beziehungen

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L_3}{\sqrt{2mE}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r'}\right)^2}} .$$

Die Substitution  $x := r_0/r$ ,  $dx = -r_0 dr/r^2$ , führt auf

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{b}{r_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{b}{r_0} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{b}{r_0} \frac{\pi}{2} .$$

Damit ist

$$\vartheta = \pi \left( 1 - \frac{b}{r_0} \right) ,$$

woraus die angegebene Gleichung folgt, wenn man  $r_0$  von oben einsetzt. *Das ist nicht das Kepler-Problem, da die potentielle Energie  $\propto r^{-2}$  und nicht  $\propto r^{-1}$  ist. Daher gelten die Bahngleichungen des Kepler-Problems nicht!*

(c) Der differentielle Streuquerschnitt ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \vartheta} \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| .$$

Zunächst löst man  $\vartheta$  nach  $b^2$  auf,

$$b^2 = \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \left( \frac{\pi^2}{(\pi - \vartheta)^2} - 1 \right)^{-1}$$

und erhält durch Ableitung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{2 \sin \vartheta} \frac{\partial b^2}{\partial \vartheta} = \frac{2\pi^2 \alpha}{mv_\infty^2 \sin \vartheta} \frac{\pi - \vartheta}{[\vartheta(2\pi - \vartheta)]^2} .$$

#### 4. Kugelbahn:

- (a) Die Zeit ist homogen, der Raum ist weder isotrop noch homogen. Also bleibt die Energie erhalten, Impuls und Drehimpuls aber nicht.
- (b) Eine gut geeignete verallgemeinerte Koordinate ist  $x$ . Die Bogenlänge der Kugelbahn ist

$$l = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sinh x .$$

Die Abrollbedingung der Kugel ist  $Rd\varphi = dl$ . Die Annahme eines kleinen Kugelradius erlaubt,  $y = \cosh x$  zu setzen, aber nicht, die Rotationsenergie zu vernachlässigen, weil die Kugel bei kleinem Radius umso schneller rollt! Die kinetische Energie der Translation ist

$$T_1 = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{M}{2}\dot{x}^2(1 + \sinh^2 x) = \frac{M}{2}\dot{x}^2 \cosh^2 x ,$$

die der Rotation ist

$$T_2 = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{MR^2}{5} \frac{\dot{l}^2}{R^2} = \frac{M}{5}\dot{x}^2 \cosh^2 x ,$$

unabhängig von  $R$ ! Mit der potentiellen Energie  $V = Mgcosh x$  erhält man die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{7M}{10}\dot{x}^2 \cosh^2 x - Mgcosh x .$$

- (c) Da es nur eine verallgemeinerte Koordinate gibt, gibt es auch nur eine Bewegungsgleichung. Sie folgt aus der Lagrange-Gleichung und lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{7M}{5} (\ddot{x} \cosh^2 x + \dot{x}^2 \cosh x \sinh x) + Mgsinh x = 0$$

Da die Energie erhalten und die Kugel anfänglich in Ruhe ist, gilt im tiefsten Punkt der Bahn  $(T_1 + T_2)(x=0) = Mgh$ , also (da dort auch  $\dot{y} = 0$  ist)

$$\frac{7M}{10}v^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} .$$

- (d) Der verallgemeinerte Impuls ist

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{7M}{5}\dot{x} \cosh^2 x .$$

Setzt man

$$\dot{x} = \frac{5p_x}{7M \cosh^2 x}$$

in die Lagrange-Funktion ein, erhält man die Hamilton-Funktion

$$H = p_x \dot{x} - L = \frac{5p_x^2}{14M \cosh^2 x} + Mgcosh x .$$