Kosmologie für die Schule

Matthias Bartelmann[1] & Tobias Kühnel
[1] Max-Planck-Institut für Astrophysik

Ein symmetrisches Universum

- Die moderne Kosmologie beruht auf Einsteins *Allgemeiner Relativitätstheorie*.
- Das kosmologische Modell wird durch *Symmetrieannahmen* stark vereinfacht.
- Angenommen wird, dass es von uns aus gesehen in *jeder Richtung gleich aussieht*, und
- dass dies nicht nur für uns, sondern *für jeden Beobachter* im Universum gilt.

Gewagte Annahmen?

- Offenbar sieht das Universum *nicht* in jeder Richtung gleich aus!
- Wenn wir in immer größere Entfernungen schauen, wird es aber immer gleichmäßiger.
- Der *Mikrowellenhintergrund* ist fast perfekt richtungsunabhängig.

Kein Mittelpunkt

- Kopernikus hat gezeigt, dass die Erde *nicht im Mittelpunkt* des Sonnensystems steht.
- Die moderne Kosmologie nimmt an, dass wir auch an *keiner ausgezeichneten Stelle* im Universum stehen,
- ebenso wenig wie alle anderen Beobachter.
- Dann muss das Universum *um jedem Punkt herum richtungsunabhängig sein* sein, und es darf *keinen Mittelpunkt* haben.

Idealisierung

- Richtungsunabhängigkeit heißt auch *Isotropie*.
- Ortsunabhängigkeit heißt auch *Homogenität*.
- Die Grundannahmen der modernen Kosmologie lauten also:
- Das Universum ist *um jeden Punkt isotrop*, und
- damit ist es auch *homogen*.

Kugeluniversum

- Also ist *jeder Punkt* im Universum *gleichberechtigt*.
- Wir können also einen *beliebigen Punkt herausgreifen*,
- uns eine *Kugel um ihn herum* denken,
- und ein *Testteilchen auf die Kugeloberfläche* setzen.

Eigenschaften der Kugel

- Die Kugel hat den Radius *R*.
- Ihre Dichte ρ muss überall gleich sein, sonst wäre die Kugel nicht homogen.
- Dasselbe gilt für den Druck *P*.
- Alle Eigenschaften der Kugel können nur noch von der Zeit *t* abhängen.

Größe ist unwichtig

- Das Verhalten der Kugel darf nicht von ihrer *absoluten* Größe abhängen.
- Sonst könnte eine kleine Kugel im Inneren der großen Kugel schneller oder langsamer wachsen oder schrumpfen,
- und die große Kugel könnte nicht homogen bleiben.
- Daraus folgt zweierlei:
- Wir können die Kugel so klein wählen, dass in ihr das *Newtonsche Gravitationsgesetz* gilt, und
- die Kugel kann trotzdem als *Modelluniversum* betrachtet werden.

Ziele

Wir möchten nun zeigen, wie auf Grund dieser Annahmen

- eine Gleichung hergeleitet werden kann, die bestimmt,
- wie sich das Universum ausdehnt,
- wodurch die Entwicklung des Universums bestimmt wird, und
- wie alt das Universum heute ist.

Dazu brauchen wir

- das Newtonsche Gravitationsgesetz,
- das Gesetz Kraft $=$ Masse $\times$ Beschleunigung
- und den Energieerhaltungssatz.

Entwicklung des Kugelradius

- Schwerkraft:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \text{(Volumen)}$$

$$M = V\rho = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \quad \text{(Masse)}$$

$$F_\mathrm{G} = -\frac{GMm}{R^2} = -\frac{4\pi G}{3} R\rho m$$

- Newtons 2. Axiom:

$$m \cdot a = F_\mathrm{G}$$

(Kraft =
Masse × Beschleunigung)

- Beschleunigung:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \wedge \quad v = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \dot{R}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{R}$$

(siehe → Anhang 1)

- Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} R\rho m$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} R\rho$$

Druck wirkt anziehend

- In der Kugel herrscht der Druck P. Er kommt durch die Bewegung der Teilchen zustande, also durch deren kinetische Energie.
- Energie und Masse sind äquivalent, $E = mc^2$. Also entspricht dem Druck eine Masse, die einen Beitrag zur Schwerkraft liefern muss.
- Druck und Dichte:

$$\rho_P = \frac{3P}{c^2} \, .$$

(siehe $\longrightarrow$ Anhang 2)

- gesamte Massendichte:

$$\rho_{\text{gesamt}} = \rho + \rho_P = \rho + \frac{3P}{c^2}$$

- Statt ρ muss ρ_{gesamt} eingesetzt werden:

$$\Rightarrow \qquad \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} R \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right)$$

Energieerhaltung

- In der Kugel muss der *Energieerhaltungssatz* gelten: Die innere Energie U ändert sich um ΔU, wenn sich das Volumen V aufgrund des Drucks P um ΔV ändert:

$$\Delta U = -P\Delta V$$

$$\Rightarrow \quad \dot{U} = -P\dot{V} \, .$$

- Innere Energie:

$$U = Mc^2 = V\rho c^2 = \frac{4\pi}{3}R^3\rho c^2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{U} = \frac{4\pi}{3}(3R^2\dot{R}\rho + R^3\dot{\rho})c^2$$

- Volumen:

$$\dot{V} = \frac{4\pi}{3}\frac{\mathrm{d}(R^3)}{\mathrm{d}t} = \frac{4\pi}{3}(3R^2\dot{R})$$

- Energieerhaltung:

$$\Rightarrow \quad (3R^2\dot{R}\rho + R^3\dot{\rho})c^2 + 3PR^2\dot{R} = 0$$

Energieerhaltung und Bewegung

- Energieerhaltung:

$$(3R^2\dot{R}\rho + R^3\dot{\rho})c^2 + 3PR^2\dot{R} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2R\dot{R}\rho + \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)R\dot{R} + R^2\dot{\rho} = 0$$

- Bewegungsgleichung:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}R\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) = -\frac{3}{4\pi G}\frac{\ddot{R}}{R}$$

- beide Gleichungen kombinieren:

$$2R\dot{R}\rho - \frac{3}{4\pi G}\dot{R}\ddot{R} + R^2\dot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}\left(2R\dot{R}\rho + R^2\dot{\rho}\right)$$

Integration

- Bewegungsgleichung:

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}\left(2R\dot{R}\rho + R^2\dot{\rho}\right)$$

- Produktregel:

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{\mathrm{d}(\dot{R}^2)}{\mathrm{d}t}$$

$$2R\dot{R}\rho + R^2\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}(R^2\rho)}{\mathrm{d}t}$$

- Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(\dot{R}^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\mathrm{d}(R^2\rho)}{\mathrm{d}t}$$

- Integration:

$$\int \frac{\mathrm{d}(\dot{R}^2)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{8\pi G}{3}\int \frac{\mathrm{d}(R^2\rho)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}R^2\rho + K$$

(K ist die *Integrationskonstante*)

- Diese Gleichung zeigt, wie sich der Kugelradius R mit der Zeit ändert.

Die kosmologische Konstante

- Albert Einstein selbst hat die *kosmologische Konstante* Λ eingeführt:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2 \rho + K + \frac{\Lambda}{3} R^2 \; .$$

- Sie ermöglicht ein *statisches* Universum, das um 1915 noch als wahrscheinlich galt.
- 1929 entdeckte Edwin Hubble, dass das Universum sich *ausdehnt*.
- Damit war Λ nicht mehr nötig, wurde aber beibehalten.
- Heute wird Λ auf Grund von Messungen als *unverzichtbar* angesehen.

Der Skalenfaktor

- Die heutige Größe der Kugel wird als R_0 bezeichnet. Das Verhältnis des Kugelradius R zum heutigen Radius R_0 wird Skalenfaktor a genannt: $a = \frac{R}{R_0}$
- Gleichung für $\dot{R}^2$:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2 \rho + K + \frac{\Lambda}{3} R^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho + \frac{K}{R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} a^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{K}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

- Dies ist eine Form der *Friedmann-Gleichung*, die Alexander Friedmann 1920 fand.

Staub und Strahlung

- Wir müssen nun noch festlegen, wie der Druck von der Dichte abhängen soll. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- Für *nichtrelativistische Materie* ist der Druck sehr viel kleiner als die Energiedichte ρc^2. Dann kann man

$$P = 0$$

setzen.

- In diesem Fall spricht man von „Staub“.

- Für *relativistische Materie* ist der Druck gleich einem Drittel der Energiedichte,

$$P = \frac{\rho c^2}{3} \ .$$

(siehe $\longrightarrow$ Anhang 2)

- Man spricht in diesem Fall von „Strahlung“.

- Heute überwiegt *Staub* bei Weitem.

Änderung der Dichte

- Energieerhaltungssatz:

$$\left(3R^2\dot{R}\rho + R^3\dot{\rho}\right)c^2 + 3PR^2\dot{R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3\dot{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) + a\dot{\rho} = 0$$

- für $P = 0$ (*Staub*):

$$3\dot{a}\rho + a\dot{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \rho = \frac{\rho_0}{a^3}$$

- für $P = \frac{\rho c^2}{3}$ (*Strahlung*):

$$4\dot{a}\rho + a\dot{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \rho = \frac{\rho_0}{a^4}$$

- Friedmann-Gleichung für ein Staubuniversum:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^3} + \frac{K}{a^2R_0^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Parameter

- $H = \dfrac{\dot{a}}{a}$ heißt *Hubble-Funktion*.
  Ihr heutiger Wert H_0 ist die *Hubble-Konstante*:

  $$H_0 \approx 70 \, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\,Mpc}}$$

  $$\approx 3 \times 10^{-18} \, \frac{1}{\mathrm{s}} \approx \frac{1}{10^{10}\,\mathrm{J}}$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{1}{H_0} \approx 10 \text{ Milliarden Jahre}$$

- *kritische Dichte*:

  $$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 2 \times 10^{-29} \, \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

- *Dichteparameter*:

  $$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{cr}} \,, \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3\,H_0^2}$$

- Messungen zeigen:

  $$\Omega_0 \approx \frac{1}{3} \,, \qquad \Omega_\Lambda \approx \frac{2}{3} \,,$$

  $$\Rightarrow \quad \Omega_0 + \Omega_\Lambda \approx 1 \,.$$

Die Krümmung

- Friedmann-Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^3} + \frac{K}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} = H_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3H_0^2}\frac{\rho_0}{a^3} + \frac{K}{a^2 R_0^2 H_0^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{K}{a^2 R_0^2 H_0^2} + \Omega_\Lambda\right]$$

- heute: $a = 1$ und $H = H_0$ (*per Definition*);

$$\Rightarrow \quad H_0^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 + \frac{K}{R_0^2 H_0^2} + \Omega_\Lambda\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{R_0^2 H_0^2} = 1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda$$

  K wird durch die Summe aus beiden Dichteparametern bestimmt.

- In der Allgemeinen Relativitätstheorie legt K die *Krümmung* des Raumes fest.

Die Friedmann-Gleichung

- Mit diesem Ausdruck für K lässt sich die Friedmann-Gleichung in folgende Form bringen:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda}{a^2} + \Omega_\Lambda\right] .$$

- Sie beschreibt, wie sich die Größe des Universums mit der Zeit ändert.
- Die Änderung wird durch die Dichteparameter Ω_0 und Ω_Λ bestimmt.
- Die Friedmann-Gleichung ist eine der ganz zentralen Gleichungen der Kosmologie.

Eine spezielle Lösung

- Beobachtungen zeigen, dass

$$\Omega_0 + \Omega_\Lambda \approx 1 \quad \text{ist, also} \quad \Omega_\Lambda \approx 1 - \Omega_0 \; .$$

- Damit vereinfacht sich die Friedmann-Gleichung zu:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_0}{a^3} + (1 - \Omega_0)\right] \; .$$

- Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$a(t) = \left[\sqrt{\frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0}} \sinh\left(\frac{3\sqrt{1 - \Omega_0}\, H_0 t}{2}\right)\right]^{2/3} \; .$$

(siehe $\longrightarrow$ Anhang 3)

Größe und Alter des Universums

- Diese Formel gibt an, wie sich das Universum mit der Zeit ausdehnt.
- Man kann $a(t)$ umkehren:

$$t(a) = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_0}H_0} \operatorname{arsinh}\left(a^{3/2}\sqrt{\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}} \right) .$$

- Diese Formel zeigt, wie die Zeit während der Ausdehnung fortschreitet.
- Heute ist definitionsgemäß $a = 1$. Damit beträgt das Alter des Universums

$$t_0 = t(1) = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_0}H_0} \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}} \right) .$$

Größe und Alter des Universums (II)

- Für $\Omega_0 = 0.3$ und $H_0 = 70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\,Mpc}}$ wächst das Universum, wie hier gezeigt.
- Heute ist $a(t) = 1$. Um dorthin zu kommen, braucht das Universum $t_0 = 13.4$ Milliarden Jahre.
- Vor 7.5 Milliarden Jahren war das Universum halb so groß wie heute.
- Das Alter des Universums t_0 nimmt ab, wenn der Dichteparameter zunimmt.

Zusammenfassung

- Die Kosmologie nimmt an, dass das Universum *homogen* und *isotrop* sei.
- Dann kann das Verhalten irgend eines *kugelförmigen Ausschnitts* als *Modell für das gesamte Universum* dienen.
- Auf ihn lässt sich das *Newtonsche Gravitationsgesetz* anwenden; zusätzlich muss die *Energie erhalten* sein.
- Der *Druck* wirkt in der Allgemeinen Relativitätstheorie als zusätzliche *Quelle der Gravitation*.
- Daraus lässt sich die *Friedmann-Gleichung* herleiten, die beschreibt, wie sich die *Größe des Universums ändert* bzw. wie *alt das Universum* ist.
- Heute ist das Universum etwa 13.4 Milliarden Jahre alt.

Anhang I: Zeitliche Ableitungen

- Alle Größen in der Kugel können nur von der Zeit t abhängen:
- Radius $R(t)$, Dichte $\rho(t)$, Druck $P(t)$ usw.
- Ableitungen nach der Zeit werden durch Punkte gekennzeichnet:

$$\begin{aligned}
\dot{f}(t) &= \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \,, \\
\ddot{f}(t) &= \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] \,.
\end{aligned}$$

Anhang II: Druck und Bewegung (1)

- Ein Teilchen der Masse m bewege sich mit der Geschwindigkeit v_x auf eine Wand zu.
- Dort wird es reflektiert und fliegt mit der Geschwindigkeit $-v_x$ zurück.
- Sein Impuls ändert sich also um

$$\Delta p = 2mv_x \; .$$

Anhang II: Druck und Bewegung (2)

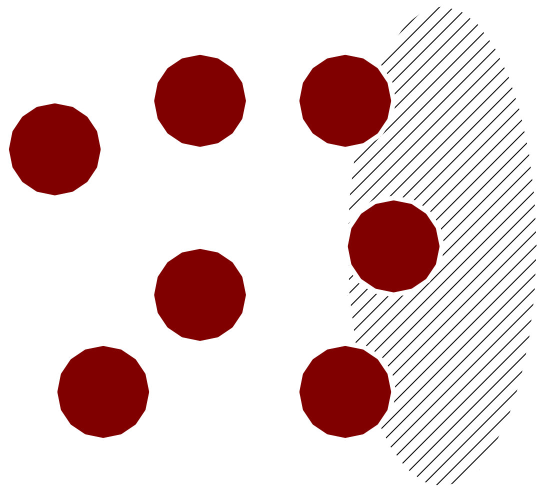
- Die Dichte der Teilchen sei n.
  Pro Zeiteinheit t fliegen

$$N = \frac{1}{2} A v_x t\, n$$

  Teilchen gegen die Fläche A (die andere Hälfte fliegt in die andere Richtung).

- Die gesamte Impulsänderung in der Zeit t ist also

$$N \Delta p = A v_x^2 n m t\ .$$



Anhang II: Druck und Dichte

- Impulsänderung pro Zeit ist Kraft:

$$F = \frac{N\Delta p}{t} = Amnv_x^2 \,.$$

- Kraft pro Fläche ist Druck,

$$P = \frac{F}{A} = mnv_x^2 \,,$$

wobei $mn = \rho$ die Massendichte ist.

- Keine Bewegungsrichtung ist bevorzugt, also

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3} \,,$$

und damit $P = \dfrac{\rho \overline{v^2}}{3}$.

- Für relativistische Teilchen (z.B. Photonen) ist $v \approx c$, also

$$P = \frac{\rho c^2}{3} \,.$$

Anhang III: Der hyperbolische Sinus

- $\sinh(x)$ ist der *hyperbolische Sinus*,

  $$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \ .$$

- Ableitung:

  $$\sinh'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x)$$

  (*hyperbolischer Cosinus*)

  $$\Rightarrow \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$$

- Umkehrfunktion:

  $$\sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$$

  (*hyperbolischer Area-Sinus*)