Übungen zur Einführung in die Computerphysik

Klessen / Spurzem

Sommersemester 2008

Blatt 5 (Abgabe bis spätestens 23. Mai 2008)

Präsenzübung

- Initialisieren und Verwenden der Numerical Recipes Routine `rk4` (Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung oder RK4).

- Testen des Programmes an einer einfachen Differentialgleichung, z.B. Exponentielles Wachstum: das exponentielle Wachstum einer Population in der Populationsdynamik folgt der Differentialgleichung

  $$\dot{N}(t) = \gamma N(t)$$

  mit der exakten Lösung $N(t) = N(0)\exp(\gamma t)$. Lösen Sie die Differentialgleichung numerisch mit Ihrem `rk4`-Algorithmus für $\gamma = 1$, $N_0 = 1$ und mit verschiedenen Schrittweiten h, die über mehrere Größenordnungen variieren. Stellen Sie sicher, daß der Fehler mit der erwarteten Ordnung abnimmt.

- Anpassung des Programms an die Lorenz Differentialgleichungen - Vektorform für drei Gleichungen.

Hausaufgabe: Lorenz-Attraktor (20 Punkte)

Aufgabe 5.1: (13 Punkte)

Integrieren Sie mit Hilfe Ihres RK4-Programmes die folgenden drei gew. Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{0.1}$$

Die Bewegung ist dreidimensional. Sie können die Ergebnisse entweder in wenigstens zwei zweidimensionalen Projektionen plotten (z.B. in der x, y- und x, z-Ebene), oder auch mit Mathematica, gnuplot, o.ä. eine dreidimensionale Darstellung versuchen. Verwenden Sie die Standardwerte $\sigma = 10$ und $b = 8/3$. Die Fixpunkte des Systems wurden in der Vorlesung bestimmt, es sind $O = (x, y, z) = (0, 0, 0)$ (für alle r); hinzu kommen für $r > 1$ die Fixpunkte $C_\pm = (\pm a_0, \pm a_0, r-1)$ mit $a_0 = \sqrt{b(r-1)}$. Lösen Sie die obigen Gleichungen numerisch für $r = 0.5,\ 1.1,\ 1.3456,\ 24.,\ 30.$. Dabei wählen Sie die Anfangsbedingungen jeweils in der Nähe eines der Fixpunkte $C_\pm$ (für $r > 1$) bzw. in der Nähe des Nullpunktes (für $r < 1$). Erklären Sie, soweit möglich, das Lösungsverhalten mit der Stabilitäts-Eigenschaft der Fixpunkte.

Aufgabe 5.2: (7 Punkte)

Bestimmen Sie die Folge z_k zu $r = 30.$ (seltsamer Lorenz-Attraktor), wobei z_k ein lokales Maximum von z auf der Lösungskurve ist. Plotten Sie z_{k+1} als Funktion von z_k. Bei hinreichender Anzahl der Punkte ergibt sich eine Punktmenge für die Funktion $z_{k+1} = f(z_k)$. Wenn es eine einfache periodische Lösung gäbe, müßten die z_k irgendwann (für hinreichend großes k) gegen einen Fixpunkt konvergieren. Mit Hilfe der gewonnenen Lösungskurve und der Winkelhalbierenden können Sie nun die Folgen z_k für jeden Anfangswert geometrisch konstruieren, ohne die DGL des Lorenz-Attraktors numerisch lösen zu müssen. Skizzieren Sie dieses Verfahren (eine schematische Zeichnung, Handzeichnung ausreichend). Vermuten Sie - kann es eine stabile periodische Lösung geben?