Übungen zur Einführung in die Computerphysik

Klessen / Spurzem

Sommersemester 2008

Blatt 5 (Abgabe bis spätestens 30. Mai 2008)

Präsenzübung - Bahnen im Hénon-Heiles Potential

Bewegung eines Körpers im Hénon-Heiles Potential

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

(Anmerkung: anhand von Bahnen in diesem Potential lassen sich typische Eigenschaften von Sternbahnen in Galaxien untersuchen).

- Formulieren Sie die Hamilton-Funktion des Problems, und die Bewegungsgleichungen. Plotten Sie Linien konstanten Potentials $V_0 = \text{const.} = V(x,y)$ (in der x,y-Ebene) für $V_0 = 0.02$ und 0.125.
- Lösen Sie die beiden Bewegungsgleichungen (zwei Gleichungen zweiter Ordnung, reduziert auf vier Gleichungen erster Ordnung) numerisch mit einem Ihrer numerischen Integrationsprogramme, z.B. `rk4`, für $E = 0.02$ und $E = 0.125$. Wählen Sie die Schrittweite h klein genug, damit der Fehler der Energie nach 50 Orbits nicht größer als 10^{-3} wird. Verwenden Sie als Startbedingungen $x = 0$ sowie zwei frei gewählte Anfangswerte (im Rahmen der vorgegebenen Gesamtenergie) für y und $\dot{y}$. Mit E, x, y, $\dot{y}$ bestimmen Sie dann den letzten noch benötigten Startwert $\dot{x}$. Betrachten Sie ein paar Orbits im Ortsraum (x, y-Kurven). Versuchen Sie verschiedene interessante Bahnformen durch Variation der Anfangswerte zu erzeugen.
- Um die vielfältigen Bahnformen besser analysieren zu können, werden Poincaré-Schnitte (auch: Phasenraumschnitt) untersucht. Diese erhalten Sie nach folgender Vorschrift: wenn x das Vorzeichen wechselt **und** $\dot{x} > 0$ ist, schreibe das Wertepaar y, $\dot{y}$ in eine Datei. Nach Abschluß der Integration (50 Orbits) plotten Sie die Werte y, $\dot{y}$. Die Punkte müssen innerhalb der Einhüllenden aus der zweiten Teilaufgabe liegen.

Anmerkung: die 50 Orbits sind nur eine Richtgröße. Sie werden feststellen, daß je nach Eigenschaften des Orbits manchmal mehr und manchmal weniger Orbits notwendig sind.

Hausaufgabe – 2 –

Hausaufgabe 20 Punkte

Bahnen im Hénon-Heiles Potential, Fortsetzung (20 Punkte)

Die folgenden Aufgabenschritte bitte für die beiden Energiewerte $E = 0.02$ und $E = 0.125$ durchführen.

- Der Zusammenhang zwischen y und $\dot{y}$, für $x = 0$ und $\dot{x} = 0$, bei konstanter Gesamtenergie E, definiert eine Kurve in der y-$\dot{y}$-Ebene, plotten Sie diese. Berechnen Sie die globalen minimalen und maximalen y-Werte als Funktion von E. (5 Punkte)

  Anmerkung 1: für die Bewegung gilt $\dot{x}^2 \geq 0$, daher muß die Bewegung bei konstanter Energie innerhalb der oben gefundenen Kurve bleiben.

  Anmerkung 2: die global maximalen bzw. minimalen y-Werte werden für $\dot{y} = 0$ angenommen, so gibt es genau zwei Werte $y_{\min}$, $y_{\max}$; alle energetisch erlaubten Bewegungen bleiben immer im Bereich $y_{\min} < y < y_{\max}$.

- Variieren Sie die Anfangsbedingungen y, $\dot{y}$ im erlaubten Bereich solange, bis die Durchstoßpunkte aller Lösungen im Poincaré-Schnitt den erlaubten Bereich gut ausfüllen. Hinweis: Beginnen Sie zum Beispiel bei $y = \dot{y} = 0$; dann gehen Sie in Schritten von 0.01 in die Koordinatenrichtungen, um neue Anfangsbedingungen zu erzeugen. Nachdem Sie bereits einige Bereiche des Poincaré-Schnittes gefüllt haben, erforschen Sie nur noch die bislang nicht erreichten Zonen mit neuen Anfangsbedingungen. (10 Punkte)

- Aus der Tatsache, daß die Poincaré-Schnitte eines einzelnen Orbits den zur Verfügung stehenden Raum nicht voll ausfüllen, wird auf die Existenz eines weiteren Integrals der Bewegung geschlossen, das nicht analytisch berechnet werden kann. Manche Orbits sind stabiler als andere, in dem Sinne, daß sie nur kleinere Bereiche im Poincaré-Schnitt ausfüllen (Grenzzyklus, stationäre Punkte, eher reguläre Orbits). Andere Orbits berdecken große Bereiche im Poincaré-Schnitt und verhalten sich eher regellos, chaotisch (wir werden den Begriff später in der Vorlesung noch genauer definieren). Plotten Sie je einen 'chaotischen' und 'regulären' Orbit komplett in der x, y-Ebene. (5 Punkte).