Übungen zur Einführung in die Computerphysik

Klessen / Spurzem

Sommersemester 2008

Blatt 7 (Abgabe bis spätestens 6. Juni 2008)

<u>Präsenzübung</u>

<u>Logistische Abbildung</u>

- Plotten Sie die Funktionen $f(x)$, mit $f(x) = 4rx(1-x)$, und deren Iterierte $f^{(2^n)}$. Machen Sie sich anhand der Plots klar, wie durch Variation von r stabile und superstabile Fixpunkte von f und seinen Iterierten (für bestimmte r) auftreten.
- Üben Sie die graphische Darstellung des Attraktors.
- Erzeugen Sie gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $[0, 1]$. (Verwendung der Numerical Recipes Routine, wird bereitgestellt, oder mit der Mathematica Funktion `Random`[]).

(*Anmerkung: Teile der Aufgabe sind auch mit Mathematica lösbar; in dem Falle können Sie ein Mathematica-Notebook abgeben. Eine Lösung durch eigenes Programmieren und Plotten ist natürlich ebenso in Ordnung.*)

<u>(Listenmanipulation in Mathematica)</u>

- Erzeugung von Listen rekursiver Funktionen (`NestList`)
- `Thread, Flatten`: Erzeugen und Entfernen von Substrukturen einer Liste
- Anwendung von Funktionen auf Listenelemente
- Erzeugung von Listen der logistischen Abbildung, Plotten der Punkte mit `ListPlot` o.ä.

Hausaufgabe 20 Punkte

Logistische Abbildung

Den Ljapunov-Exponenten λ kann man mit Hilfe der Darstellung

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |f'(x_i)| \tag{0.1}$$

berechnen, wobei f' die Ableitung der Funktion und x_n die Iterierten zu einem gegebenen Anfangswert bezeichnen. Berechnen Sie den Ljapunov-Exponenten für die (ungestörte) logistische Abbildung, $f(x) = 4rx(1-x)$, im Bereich $0.7 \leq r \leq 1$ und stellen Sie ihn graphisch dar (es genügt $n = 400$). (5 Punkte)

Gestörte logistische Abbildung

Es wird die Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$ untersucht mit

$$f(x) = 4rx(1-x)\,(1 + A\sin Bx) \ ,$$

wobei $A = -0.018$ und $B = 32.0$. Dadurch wird der bekannten logistischen Abbildung ein kleinwelliger Störungsanteil aufgeprägt, der lokal die Schwarz'sche Ableitung $\mathcal{S}[f]$, und damit das Bifurkationsverhalten beeinflußt.

- Berechnen Sie den Attraktor im Bereich $0.7 \leq r \leq 0.98$. Erzeugen Sie dazu 500 Iterierte zu einem beliebigen Anfangswert und verwerfen Sie die ersten 100 als Transiente. Welchen Einfluß hat die periodische Störung auf das System? (Vergleich mit ungestörtem System). (5 Punkte)
- Suchen Sie sich anhand des Plots des Attraktors vier interessante r-Werte heraus (z.B. vor und nach Bifurkationen, im chaotischen Bereich) Plotten Sie für diese f, $f^{(2)}$, $f^{(4)}$, bestimmen Sie für jeden r-Wert außerhalb des chaotischen Bereichs die Fixpunkte bzw. periodischen Orbits von f und deren Stabilität. (5 Punkte)

Untersuchen Sie nun die logistische Abbildung mit stochastischem Störterm,

$$f(x) = |4rx(1-x) + \epsilon\xi(x)| \ ,$$

wobei $\xi(x)$ eine im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist. (Verwendung der Numerical Recipes Routine, wird bereitgestellt, oder der Mathematica Funktion `Random[]`). $\xi(x)$ und $\xi(x')$ sollen unabhängig voneinander sein für $x \neq x'$. Dadurch wird der bekannten logistischen Abbildung ein Rauschen aufgeprägt, dessen Stärke durch $\epsilon = 0.01, 0.001, 0.0001$ variiert werden soll.

- Berechnen Sie den Attraktor im Bereich $0.7 \leq r \leq 1$ wie in der obigen Teilaufgabe und stellen Sie ihn graphisch dar. Welchen Einfluß hat das Rauschen auf das Verhalten des Systems (Vergleich mit ungestörtem System)? (5 Punkte)