Übungen zur Einführung in die Computerphysik

Klessen / Spurzem

Sommersemester 2008

Blatt 10 (Abgabe bis spätestens 27. Juni 2008)

Präsenzübung

- Schreiben Sie einen einfachen Zufallszahlengenerator, der lineare Kongruenzen

$$I_{j+1} = aI_j + c \pmod m$$

  verwendet, um gleichverteilte Zahlen $r_j = I_j/(m-1)$ zwischen 0 und 1 zu erzeugen (die I_j sind zwischen 0 und $m-1$ gleichverteilt). Wählen Sie zunächst $a = 106$, $m = 6075$, $c = 1283$, aus Num. Rec. empfohlen. Experimentieren Sie mit anderen Werten.

- Überzeugen Sie sich davon, daß Ihr Generator gleichverteilte Zahlen erzeugt, indem Sie zu zwei verschiedenen Startwerten I_0, J_0 Paare von normierten Zufallszahlen (r_i, s_i) erzeugen ($r_0 = I_0/(m-1)$, $s_0 = J_0/(m-1)$, $0 \leq r_i, s_i \leq 1$). Plotten Sie diese gegeneinander auf einem Quadrat $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$.

- Überzeugen Sie sich vom deterministischen Character eines solchen Zufallszahlengenerators indem Sie I_{j+1} gegen I_j plotten.

- Wiederholen Sie die vorigen beiden Punkte unter Verwendung der Routine `ran2` aus den Numerical Recipes.

- Erzeugen Sie nacheinander Folgen r_i von 1000, 10^4, 10^5, 10^6 Zufallszahlen (normiert auf den Bereich zwischen 0 und 1) mit Ihrem Generator und mit `ran2`. Seien $r_{\min}$ und $r_{\max}$ die minimale und maximale sich ergebende Zufallszahl der Folge. Plotten Sie logarithmisch $r_{\min}$ und $1 - r_{\max}$ als Funktion der Länge Ihrer Zufallszahlenfolge. Was läßt sich über die Qualität Ihrer Zufallszahlen sagen?

Hausaufgabe 20 Punkte

Zufallszahlen

(a) Demonstrieren Sie das Gesetz der großen Zahl ("Central Limit Theorem"), indem Sie mit Zufallszahlen die Augenzahl beim Würfeln simulieren (Augenzahl zwischen 1 und 6, ermittelt jeweils durch eine Zufallszahl (`ran2`) gleichverteilt zwischen 0 und 1). Bei 10 Würfen liegen die möglichen Werte der Summe aller Augenzahlen zwischen 10 und 60. Plotten Sie die Häufigkeit der Werte bei insgesamt 10000 Experimenten (ein Experiment gleich 10 Würfe) und vergleichen Sie mit der theoretisch erwarteten Verteilung. (6 Punkte)

(b) Erzeugen Sie 50000 Paare von Zufallszahlen (x_1, x_2) (`ran2`) und erzeugen Sie

$$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2)$$
$$y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\sin(2\pi x_2)$$

mit $x_1, x_2 \in [0, 1]$. Plotten Sie die erhaltenen Punkte in der y_1, y_2 Ebene. Zeigen Sie, daß $y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ normal verteilt ist. Anmerkung: In den Aufgaben (a) und (b) wird jeweils die gleich Menge von Zufallszahlen verwendet, um eine Normalverteilung zu erzeugen. (7 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Zahl π mit Hilfe folgender Methode: einem Quadrat der Seitenlänge 1 sei ein Kreis einbeschrieben. Erzeugen Sie Paare von Zufallszahlen, welche das Quadrat gleichmäßig anfüllen (vgl. Präsenzaufgabe). Bestimmen Sie dann die Zahl π aus dem Verhältnis der Punkte die innerhalb des Kreises liegen relativ zur Gesamtzahl der verwendeten Paare von Zufallszahlen. Plotten Sie die erreichte Stellenzahl von π als Funktion der verwendeten Anzahl von Paaren von Zufallszahlen. (7 Punkte)