Übungen zur Einführung in die Computerphysik

Klessen / Spurzem

Sommersemester 2008

Blatt 13 (Zusatzaufgabe zum Semesterende, Bearbeitung freiwillig)

Freiwillige Zusatzaufgabe

Spezielle gravitative Drei-Körper-Probleme

- Zur Integration eines gravitativen Drei-Körper-Problems können Sie Ihren RK4-Integrator oder einen neuen in der Vorlesung am 11.7. vorgestellten Hermite-Integrator verwenden. Sie können zur Vereinfachung und Skalierung $G = 1$ annehmen (Gleichungssystem durch Skalierung dimensionslos gemacht). Es genügt das ebene Problem zu betrachten, wodurch Sie insgesamt 12 Differentialgleichungen erster Ordnung bekommen in der Standardform $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ bekommen (die explizite Zeitabhängigkeit kommt hier nicht vor); 12 Anfangswerte müssen eingelesen werden.

- Integrieren Sie das spezielle Drei-Körper-Problem mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
(y_1, y_2) &= -0.97000436 \quad 0.24308753 \\
(y_3, y_4) &= -0.46620368 \quad -0.43236573 \\
(y_5, y_6) &= 0.97000436 \quad -0.24308753 \\
(y_7, y_8) &= -0.46620368 \quad -0.43236573 \\
(y_9, y_{10}) &= 0.0 \quad 0.0 \\
(y_{11}, y_{12}) &= 0.93240737 \quad 0.86473146
\end{aligned}$$

  y_{1+4i}, y_{2+4i} $(i = 0, 1, 2)$ sind die Anfangskoordinaten $(t = 0)$ und $y_{3+4i}, y_{4+4i} = \dot{y}_{1+4i}, \dot{y}_{2+4i}$ die Anfangsgeschwindigkeiten der Teilchen. Wählen Sie die Massen $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ und eine Schrittweite h zwischen 0.01 und 0.001. Die drei Teilchen sollten einander auf der gleichen Bahn folgen. Diese Lösung des Drei-Körper-Problems wurde erst vor wenigen Jahren entdeckt. (Chencimer & Montgomery 2001).

- Stören Sie die oben erhaltene Lösung, indem Sie eine oder mehrere der Anfangskoordination um 0.01 stören, oder auch eine der Massen. Was passiert mit dem Orbit? Integrieren Sie sehr lange (1000 Zeiteinheiten) um ein komplettes Bild zu erhalten. Was läßt sich über die Stabilität des ungestörten Orbits sagen? Vergrößern Sie die Störung, um eine instabile Lösung zu erhalten. Was ist der Endzustand in diesem Falle?

- Betrachten Sie Burrau's Drei-Körper-Problem, bei dem die drei Körper an den Eckpunkten eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten 3,4,5 sitzen; die Teilchen haben die Massen $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 5$. Das Teilchen der Masse 5 sitzt der Seite mit der Länge 5 anfänglich gegenüber, ebenso für 4 und 3. Dieses Problem wurde ebenfalls erst in den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts erstmals zuverlässig numerisch gelöst, und es ist eines der instabilsten Drei-Körper-Probleme. (Szebehely & Peters 1967, Astronom. Journal 72, 876). Sie können wiederum $G = 1$ und ein ebenes Problem voraussetzen.