

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Aspekte der Struktur und Herkunft der Dicken Scheibe der Milchstraße untersucht. Von speziellem Interesse war dabei die Frage, ob sich diese ausgedehnte Komponente der galaktischen Scheibe durch Aufheizung aus einer anfänglich dünnen und kinematisch kalten Schicht erklären läßt, oder ob sie alternativ dazu eine diskrete und eigenständige Struktur darstellt, die während des Kollapses der protogalaktischen Gaswolke in einer kurzen Phase erhöhter Sternentstehungsrate entstanden ist (Kap. 2.4.3). Dazu wurden die Implikationen der wichtigsten Heizungsprozesse auf die Scheibenpopulation der galaktischen Kugelsternhaufen betrachtet: Kugelsternhaufen sind relativ fragile Systeme, die sehr vehement auf Energieübertrag von außen reagieren. Entstanden sie in einer dünnen Schicht in der galaktischen Ebene, dann muß sich ihre Schwerpunktsenergie im Laufe ihres Lebens um ein Vielfaches ihrer Bindungsenergie erhöht haben, um die beobachtete Verteilung zu erreichen. Daß Kugelsternhaufen dies überlebt haben, setzt enge Grenzen an die Gültigkeit und Effizienz der tragenden Prozesse.

Die zur Beschreibung dieser Phänomene notwendigen mathematischen Hilfsmittel wurden in Kap. 3 hergeleitet. Die analytische Impulsapproximation ermöglicht es, einen großen Bereich von Wechselwirkungsparametern zu erfassen. Ihre Gültigkeit und Genauigkeit konnte durch Vergleich mit N-Körper-Simulationen nachgewiesen werden.

Kap. 4 behandelt Scheibenheizung durch massive schwarze Löcher im Dunklen Halo unserer Milchstraße. Dieser Prozeß kann zwar eine Struktur ähnlich der beobachteten Dicken Scheibe erzeugen; es zeigt sich jedoch, daß dabei die innere Energie der Kugelsternhaufen in einem Maße ansteigt, daß diese innerhalb kürzester Zeit zerstört würden. Massive schwarze Löcher können daher nicht, wie von Lacey & Ostriker (1985) vorgeschlagen, für das Entstehen der Dicken Scheibe verantwortlich sein. Die Annahme von massiven schwarzen Löchern im Dunklen Halo wird zudem von vielen anderen astrophysikalischen Beobachtungen und Rechnungen in Frage gestellt (siehe Kap. 2.4.3).

Eine Spiralgalaxie wie unsere Milchstraße steht während ihrer Entwicklung in ständiger Wechselwirkung mit ihrer Umgebung. Es ist daher sehr wahrscheinlich, daß sie im Verlauf ihrer Geschichte eine oder mehrere Satellitengalaxien akkretiert hat. Einen solchen Vorgang unter-

sucht Kap 5. Dort wurde nachgewiesen, daß etwa die Akkretion einer Zwerggalaxie der Masse $10^{10} M_{\odot}$, was der Großen Magellan'schen Wolke entspricht, ausreicht, um aus einer ursprünglich kinematisch kalten Schicht, die Dualität von Dünner und Dicker Scheibe zu erzeugen (wie vorgeschlagen von Tóth & Ostriker 1992). Dabei nimmt die innere Energie der Kugelsternhaufen kaum zu, so daß diese intern kaum reagieren und fast die gesamte Population den Akkretionsprozeß überlebt. Wichtige Parameter hierbei stellen Masse und Kompaktheit der Satellitengalaxie dar. Ist diese massearm ($M \lesssim 10^9 M_{\odot}$) oder sehr diffus, dann wird sie bereits in den Außenbereichen der Milchstraße durch die Gezeitenkräfte zerstört und kann kaum die Energie der weiter innen liegenden galaktischen Scheibe erhöhen. Je massiver und kompakter der Satellit ist, desto weiter kann er in die Galaxie eindringen und dort die Scheibenkomponente kinematisch aufheizen. Übersteigt die Masse jedoch einige $10^{10} M_{\odot}$, dann wird der Energieübertrag zu groß und die entstehende Dicke Scheibe zu dominant, verglichen mit den beobachteten Werten in unserer Milchstraße. Mehrfache Akkretionsprozesse vermögen zwar die dann schon bestehende ausge dehnte Scheibe weiter aufzuheizen, jedoch nimmt dabei die Effizienz dieses Vorganges rapide ab. Somit lassen die Beobachtungsdaten der Milchstraße die Akkretion einer Zwerggalaxie der Masse der Großen Magellan'schen Wolke am wahrscheinlichsten erscheinen, bzw. den Einfang einiger weniger, nur etwas kleinerer Satelliten. Da auch das akkretierte System aus Sternen besteht und sich diese im galaktischen Feld in einer ausgedehnten Scheibe anordnen, liegen in der neu entstandenen Dicken Scheibe beide Populationen von Sternen nebeneinander vor, Mitglieder der ursprünglich Dünnen Scheibe der Milchstraße, die in größere galaktische Höhen geschleudert wurden und die Sterne der akkretierten Satellitengalaxie.

Die weiteren in der Literatur vorgeschlagenen Scheibenheizungsmechnismen sind allesamt nicht effizient genug, um die beobachtete Dicke Scheibe zu erzeugen und wurden in dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß von den bisher bekannten Prozessen alleine die Akkretion einer Satellitengalaxie in der Lage ist, die Gegebenheiten unsere Milchstraße zu reproduzieren. Zusammen mit der hohen Wahrscheinlichkeit für ein solches Ereignis, scheint dies der vielversprechendste Ansatz für die Entstehung und Entwicklung der Dicken Scheibe zu sein. Andererseits ist auch die Argumentation für die Entstehung der Dicken Scheibe in einer frühen Kollapsphase stichhaltig und einsichtig (z.B. das chemo-dynamische Modell von Burkert, Truran & Hensler 1992).

Die bisherigen Analysen der Beobachtungsdaten von Feldsternen in Dicker Scheibe und Halo konnten keines dieser Bilder vollständig bestätigen oder ganz ausschließen. Dazu ist die Zahl der gut vermessenen Sterne zu gering. Auch die in dieser Diplomarbeit verwandte Methode kann nicht zur endgültigen Unterscheidung beider Gruppen beitragen. Das Wesen der Dicken Scheibe bleibt weiterhin unbekannt.

In den nächsten Jahren wird sich allerdings, im Zuge groß angelegter Himmelsdurchmusterungen, die Zahl der mit großer Genauigkeit beobachteten Sterne in Halo und Dicker Scheibe drastisch erhöhen, so daß dann die Antwort auf diese Frage näher scheint. Bereits heute mehren sich die Hinweise, daß die Realität nicht ein „entweder oder“, sondern ein „sowohl als auch“ darstellt. So argumentiert etwa Zinn (1994), daß nur ein Teil der in der Milchstraße beobachteten Kugelsternhaufen auch dort entstanden ist und die restlichen durch Akkretionsprozesse dazugewonnen wurden. Auch Norris (1994) findet Anzeichen für eine solche Dualität des galaktischen Halos

in der Untersuchung von Sternen in großen galaktischen Höhen. Er findet zwei sich größtenteils überlappende Populationen von Halosternen, von denen er annimmt, daß die eine in der Milchstraße selbst entstanden ist und die andere von einer akkretierten Satellitengalaxie stammt. Ob dies durch die in den nächsten Jahren erwartete Fülle neuer und besserer Beobachtungsdaten bestätigt wird, bleibt abzuwarten, jedoch scheint die Möglichkeit eines umfassenden Verständnisses der Entwicklung unserer Milchstraße näher zu rücken.

Anhang A

Häufig gebrauchte physikalische Größen und Einheiten

Die in dieser Arbeit betrachteten Größenskalen sind die der Sternverteilung einer typischen Spiralgalaxie. Daher werden auch hier die in der galaktischen Astronomie eingeführten Einheiten für Länge, Zeit, Masse und Luminosität verwandt, deren Definition sich zumeist an Eigenschaften unserer Sonne orientiert. Ihre Umrechnung in *cgs*-Einheiten lautet:

Länge:	1 pc	= 3.085678×10^{18} cm	(Parsec)
Zeit:	1 a	= 3.155815×10^7 s	(Jahr)
Masse:	1 M_{\odot}	= 1.989×10^{33} g	(Sonnenmasse)
Leuchtkraft:	1 L_{\odot}	= 3.826×10^{33} erg s ⁻¹	(Sonnenleuchtkraft)

Für Geschwindigkeiten hat es sich eingebürgert, diese in km s⁻¹ anzugeben. Der Umrechnungsfaktor in die astronomischen Einheiten pc a⁻¹ lautet:

$$1 \text{ km s}^{-1} = 1.023 \times 10^{-6} \text{ pc a}^{-1}$$

Die dominante Wechselwirkung in den betrachteten Sternsystemen ist die Gravitation. Deren Proportionalitätskonstante G lautet in dem oben eingeführten galaktischen Einheitensystem:

$$\begin{aligned} \text{Gravitationskonstante } G &= 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ &= 4.497 \times 10^{-15} \text{ pc}^3 \text{ } M_{\odot}^{-1} \text{ a}^{-2} \end{aligned}$$

Will man in Systemeinheiten vorliegende Energien in das *cgs*-System konvertieren, so gilt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ } M_{\odot} \text{ pc}^2 \text{ a}^{-2} &= 1.913 \times 10^{55} \text{ erg} \\ 1 \text{ } M_{\odot} \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} &= 2.002 \times 10^{43} \text{ erg} \end{aligned}$$

Anhang B

Mathematische Herleitungen

B.1 Darstellung der Boltzmann-Gleichung in Zylinderkoordinaten

Für die Beschreibung axialsymmetrischer Systeme, wie Spiralgalaxien, ist es sinnvoll, die Boltzmann-Gleichung (2.9) in zylindrischen Koordinaten darzustellen. Die Grundgleichung lautet:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.1)$$

Die konvektive Ableitung $\frac{d}{dt}$ läßt sich nun in Zylinderkoordinaten schreiben als

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{R} \frac{\partial f}{\partial R} + \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} + \dot{v}_R \frac{\partial f}{\partial v_R} + \dot{v}_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} + \dot{v}_z \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 \quad (2.2)$$

Weiterhin gilt in diesem Koordinatensystem:

$$\mathbf{x} = R \hat{\mathbf{e}}_R + z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \dot{R} \hat{\mathbf{e}}_R + R \dot{\hat{\mathbf{e}}}_R + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \dot{R} \hat{\mathbf{e}}_R + R \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) \hat{\mathbf{e}}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.5)$$

Dabei sind $\hat{\mathbf{e}}_R$ und $\hat{\mathbf{e}}_z$ die Einheitsvektoren in radialer und vertikaler Richtung und $\hat{\mathbf{e}}_\varphi \equiv \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_R$ der Einheitsvektor in tangentialer Richtung.

Die Bewegungsgleichung $\mathbf{a} = \mathbf{F} = -\nabla \Phi$ für einen Körper der Einheitsmasse $m \equiv 1$ in einem radialsymmetrischen und konservativen Kraftfeld lautet nun

$$\mathbf{a} = -\nabla \Phi(R, z) = -\frac{d\Phi}{dR} \hat{\mathbf{e}}_R - \frac{d\Phi}{dz} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.6)$$

Vergleicht man die Koeffizienten der Einheitsvektoren und beachtet man $\dot{R} = v_R$, $\dot{\varphi} = v_R/R$ und $\dot{z} = v_z$, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\dot{v}_R &= -\frac{d\Phi}{dR} + \frac{v_\varphi^2}{R} \\ \dot{v}_\varphi &= -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{d\varphi} - \frac{v_R v_\varphi}{R} \\ \dot{v}_z &= -\frac{d\Phi}{dz}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Die kollisionsfreie Boltzmann-Gleichung in Zylinderkoordinaten stellt sich nun dar als

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} + v_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &+ \left(\frac{v_\varphi^2}{R} - \frac{d\Phi}{dR} \right) \frac{\partial f}{\partial v_R} - \frac{1}{R} \left(v_R v_\varphi + \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} - \frac{d\Phi}{dz} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

B.2 Kontinuitäts- und Jeans-Gleichung in Zylinderkoordinaten

Entsprechend B.1 lassen sich auch die Kontinuitätsgleichung (2.13) und die Jeans-Gleichung (2.19) in Zylinderkoordinaten umformen.

Die Kontinuitätsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial (R \rho \bar{v}_R)}{\partial R} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_z)}{\partial z} = 0,\tag{2.9}$$

und die Jeans-Gleichung (zerlegt in die drei Koordinaten)

$$\frac{\partial (\rho \bar{v}_R)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_R^2)}{\partial R} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_R \bar{v}_z)}{\partial z} + \rho \left(\frac{\bar{v}_R^2 - v_\varphi^2}{R} + \frac{d\Phi}{dR} \right) = 0,\tag{B.10.a}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{v}_\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_R \bar{v}_\varphi)}{\partial R} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_\varphi \bar{v}_z)}{\partial z} + \frac{2\rho}{R} \bar{v}_\varphi \bar{v}_R = 0,\tag{B.10.b}$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{v}_z)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_R \bar{v}_z)}{\partial R} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_z^2)}{\partial z} + \frac{\rho \bar{v}_R \bar{v}_z}{R} + \rho \frac{d\Phi}{dz} = 0.\tag{B.10.c}$$

B.3 Herleitung des Virialsatzes

An dieser Stelle soll das tensorielle Virialtheorem aus der Boltzmann-Gleichung (2.9) hergeleitet werden. Es liefert für Gleichgewichtszustände eine universelle Relation zwischen potentieller und kinetischer Energie des Systems, siehe Kap. 2.2.3.

Identifiziert man ρ mit der Massendichte, multipliziert Gl. (2.17) in Kap. 2.2.2 mit x_k und integriert anschließend über alle Orte, so erhält man

$$\int x_i \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3 \mathbf{x} = - \int x_i \frac{\partial(\rho \bar{v}_k \bar{v}_j)}{\partial x_k} d^3 \mathbf{x} - \int \rho x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}. \quad (\text{B.11})$$

Der letzte Term hierbei ist der Tensor der potentiellen Energie:

$$W_{ij} \equiv - \int \rho(\mathbf{x}) x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x} \quad (\text{B.12.a})$$

Mit der Definition des Gravitationspotentials als

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}'$$

und einer kurzen Umformung $x'_i \rightarrow x'_i - x_i$ ergibt sich

$$W_{ij} = -\frac{1}{2} G \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x'_i - x_i)(x'_j - x_j)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x}. \quad (\text{B.12.b})$$

Der Tensor \mathbf{W} ist also symmetrisch: $W_{ij} = W_{ji}$. Seine Spur beschreibt die totale Gravitationsenergie W des Systems:

$$W = Sp(\mathbf{W}) \equiv \sum_{i=1}^3 W_{ii} = -\frac{1}{2} G \int \rho(\mathbf{x}) \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (\text{B.13})$$

Der mittlere Ausdruck in Gl. (B.11) kann mit Hilfe des Gauß'schen Satzes und partieller Integration ($\rho(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) umgeformt werden zu

$$\int x_i \frac{\partial(\rho \bar{v}_k \bar{v}_j)}{\partial x_k} d^3 \mathbf{x} = - \int \delta_{ik} \rho \bar{v}_k \bar{v}_j d^3 \mathbf{x} = -2K_{ij}, \quad (\text{B.14})$$

wobei der Tensor der gesamten kinetischen Energie \mathbf{K} definiert ist über

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x} = T_{ij} + \frac{1}{2} \Pi_{ij}, \quad (\text{B.15})$$

mit

$$T_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \Pi_{ij} \equiv \int \rho \sigma_{ij}^2 d^3 \mathbf{x}. \quad (\text{B.16})$$

Die Tensoren \mathbf{T} und $\mathbf{\Pi}$ stellen die kinetische Energie dar, die in der gerichteten Schwerpunktsbewegung des Systems steckt, bzw. dessen innere Energie, die der Zufallsbewegung der Teilchen entspricht. Auch diese beiden Tensoren (und damit \mathbf{K}) sind symmetrisch.

Symmetrisiert man auch den ersten Term in Gl. (B.11), so lautet dieser:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho (x_i \bar{v}_j + x_j \bar{v}_i) d^3 \mathbf{x} = 2K_{ij} + W_{ij} = 2T_{ij} + \Pi_{ij} + W_{ij}. \quad (\text{B.17})$$

Die partielle Zeitableitung $\partial/\partial t$ formt man über (2.7) in eine totale Ableitung um, wobei nun der konvektive Anteil mit Hilfe des Gauß'schen Satzes eliminiert werden kann. Anschließend sieht man die Ableitung vor das Integral. Der Ausdruck läßt sich weiter in eine Bewegungsgleichung für den Trägheitstensor \mathbf{I} des Systems umformen. Dieser ist definiert als

$$I_{ij} \equiv \int \rho x_i x_j d^3 \mathbf{x}. \quad (\text{B.18})$$

Leitet man diesen Ausdruck nach der Zeit ab, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dI_{ij}}{dt} &= \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x_i x_j d^3 \mathbf{x} = - \int \frac{\partial(\rho \bar{v}_k)}{\partial x_k} x_i x_j d^3 \mathbf{x} = \\ &= \int \rho \bar{v}_k (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik}) d^3 \mathbf{x} = \int \rho (\bar{v}_i x_j + \bar{v}_j x_i) d^3 \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

wobei im zweiten Schritt die Kontinuitätsgleichung (2.13) und im nächsten partielle Integration ausgenutzt werden.

Das tensorielle Virialtheorem lautet demnach

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = 2T_{ij} + \Pi_{ij} + W_{ij}. \quad (2.20)$$

Diese Gleichung stellt einen fundamentalen Zusammenhang zwischen morphologischen (Trägheitstensor \mathbf{I} und Tensor der potentiellen Energie \mathbf{W}) und kinematischen Größen (Tensor der kinetischen Energie \mathbf{K}) her.

Betrachtet man den Gleichgewichtszustand des Systems ($\ddot{\mathbf{I}} = 0$) und ist man nur an den totalen Energien interessiert, $Sp(\mathbf{K}) = Sp(\mathbf{T}) + \frac{1}{2} Sp(\mathbf{\Pi}) \equiv K$ ist die gesamte kinetische Energie und entsprechend $Sp(\mathbf{W}) \equiv W$ die gesamte potentielle Energie, so erhält man

$$2K + W = 0. \quad (2.21)$$

Dies ist der (skalare) Virialsatz.

Anhang C

Numerische Methoden

C.1 N-Körper-Rechnungen

Die dynamische Zeitentwicklung selbstgravitierender Systeme aus N Teilchen läßt sich mit verschiedenen numerischen Methoden auf einem Rechner simulieren (eine exzellente Einführung liefern Hockney & Eastwood 1981).

Direkte Integration, d.h. die Auswertung der Gravitationswechselwirkung jedes einzelnen Teilchens des Ensembles mit jeweils allen anderen – auch PP-Methode genannt für *particle particle interaction* –, benötigt pro Zeitschritt $1/2N(N - 1)$ Kraftberechnungen. Der Rechenaufwand steigt also quadratisch mit der Teilchenzahl, was der tatsächlichen Realisierbarkeit großer Simulationsrechnungen auch bei Verwendung von Integrationsschemata höherer Ordnung (Aarseth 1971 oder Makino 1991) und multipler Zeitschrittweiten (Ahmed und Cohen 1973) selbst auf den heute verfügbaren Supercomputern enge Grenzen setzt. Typischerweise beträgt N nicht mehr als einige 10^4 Teilchen (siehe etwa Hernquist 1987).

PM-Schemata

Die Entwicklung der Fast-Fourier-Transformation (einen umfassenden Überblick zu diesem Thema bietet das Buch von E.O. Bringham 1974) ermöglichte die Umsetzung effizienter *Particle-Mesh* Methoden (PM), bei welchen die Teilchen- und damit Massendichte auf ein festes Gitter – mit M Stützstellen – übertragen wird und man die Kraft auf ein einzelnes Teilchen durch Lösung der Poissongleichung für dieses gemittelte Dichtefeld mittels Fouriertransformation und Faltung erhalten. Die Verwendung der FFT reduziert den Rechenaufwand auf $\mathcal{O}(M \log M)$, so daß Simulationen bis zu einigen 10^5 Teilchen machbar wurden. Große Nachteile dieser Methode sind zum einen die beschränkte räumliche Auflösung, gegeben durch den Abstand der Gitterpunkte – was durch den Einbau von Subgittern in Bereichen höherer benötigter Auflösung einigermaßen umgangen werden kann – und die geometrischen Restriktionen, denen das zu behandelnde Problem aufgrund der Inflexibilität eines festen Gitters unterliegt.

P³M-Schemata

Der Versuch die Vorteile der PP und der PM-Schemata zu nutzen, führt zur Entwicklung der P³M- Methode – *particle-particle particle-mesh* –, einem Hybrid, der die Wechselwirkung mit nahen Teilchen durch direkte Summation – und damit höherer Genauigkeit – beschreibt

und das PM-Verfahren für entfernte Partikel verwendet. P³M-Codes sind daher wesentlich schneller als reine PP-Programme und erlauben einen sehr großen dynamischen Bereich räumlicher Auflösung. Somit eignen sie sich gut zur Beschreibung inhomogener Systeme mit großem Dichtekontrast. Trotzdem bleibt die eingeschränkte geometrische Flexibilität durch das Vorhandensein eines festen Gitters bestehen. Die Rechenzeit skaliert bei P³M im wesentlichen mit $\mathcal{O}(N_n N)$, wobei N_n die mittlere Anzahl an Nachbarpartikeln darstellt, die für den PP-Teil herangezogen wird.

Multipolentwicklung

Die Genauigkeit von Gittermethoden zur Berechnung des Potentials läßt sich erhöhen, durch Verwendung weiterer Ordnungen der *Multipolentwicklung* der Dichteverteilung zur Lösung der Poissongleichung. Bricht man diese Entwicklung in niedriger Ordnung ab, ist diese Methode hocheffizient und der Rechenaufwand skaliert mit $\mathcal{O}(nN)$, wobei n die Anzahl der ausgewerteten Multipolmomente ist. Bricht man jedoch die Entwicklung zu früh ab, wird die globale Struktur des Potentials in zu starker Weise durch die Wahl der Basisfunktionen beeinflusst, so daß nur diejenigen Probleme lösbar sind, bei denen Gesamtsystem und Entwicklungsbasis dieselben Symmetrieeigenschaften besitzen. Somit ist es schwierig, diese Algorithmen auf sehr inhomogene Systeme anzuwenden. Eine weitere Eigenschaft solcher Mean-Field-Ansätze ist die komplette Unterdrückung individueller 2-Körper-Effekte, so daß man sie auf keinen Fall auf kollisionsdominierte Systeme – wie etwa die Zentralbereiche von Kugelsternhaufen – anwenden sollte. Zur Beschreibung kollisionsfreier Systeme mit sphärischer Symmetrie – etwa Elliptischer Galaxien – stellen sie jedoch ein hervorragendes Hilfsmittel dar. (siehe dazu auch den Übersichtsartikel von van Albada 1986 und Referenzen darin)

Hierarchischer Tree Code

Seit Ende der 80er Jahre existiert eine weitere Gruppe von Algorithmen, die die Vorteile von PP und der Mean-Field-Entwicklung vereinigt (Appel 1985, Barnes 1986, Barnes und Hut 1986, Jernigan 1986, Press 1986): Die Kräfte von nahen Teilchen gewinnt man über direkte Summation; entferntere Partikel faßt man in – mit wachsendem Abstand größer werdenden – Gruppen zusammen und nimmt eine Multipolentwicklung des Potentials jedes dieser Cluster um seinen Schwerpunkt vor. Der großskalige Anteil an der Beschleunigung wird nun als die Summe von Teilchen-Cluster-Wechselwirkungen gebildet. Dabei realisiert man die Organisation der Teilchen in Gruppen unterschiedlicher Hierarchie in einer baumartigen Struktur, weshalb man diese Art von Algorithmen als *Tree Codes* bezeichnet. Die Vorteile dieses Verfahrens liegen auf der Hand; zum einen macht die approximative Natur der Kraftberechnung für weit entfernte Systeme Tree Codes erheblich schneller als direkte N-Körper-Verfahren; die Rechenzeit pro Zeitschritt steigt mit der Teilchenzahl N wie $\mathcal{O}(N \log N)$, im Gegensatz zu $\mathcal{O}(N^2)$, so daß Simulationen mit sehr großen Teilchenzahlen (bis zu einigen 10^6) möglich werden. Zum anderen macht das Fehlen eines festen Gitters oder einer bevorzugten Geometrie das Verfahren sehr flexibel. Es gibt *a priori* keine Restriktionen an die globale Struktur des Problems und ebenso ist die räumliche Auflösung – zumindest prinzipiell – unbeschränkt (alleine eine Glättung des Potentials auf kleinen Skalen, die eingeführt werden muß, um numerische 2-Körper-Effekte zu vermeiden, setzt hier Grenzen). So ist ein solches Verfahren bestens geeignet zum Studium hoch inhomogener Systeme, wie etwa Entwicklung von Kugelsternhaufen, Stöße von Galaxien oder großskalige Fluktuationen im frühen Universum, um nur einige Beispiele zu nennen. Tree Codes haben sich heute zu einem der wichtigsten Hilfsmittel für stellardynamische Untersuchungen entwickelt.

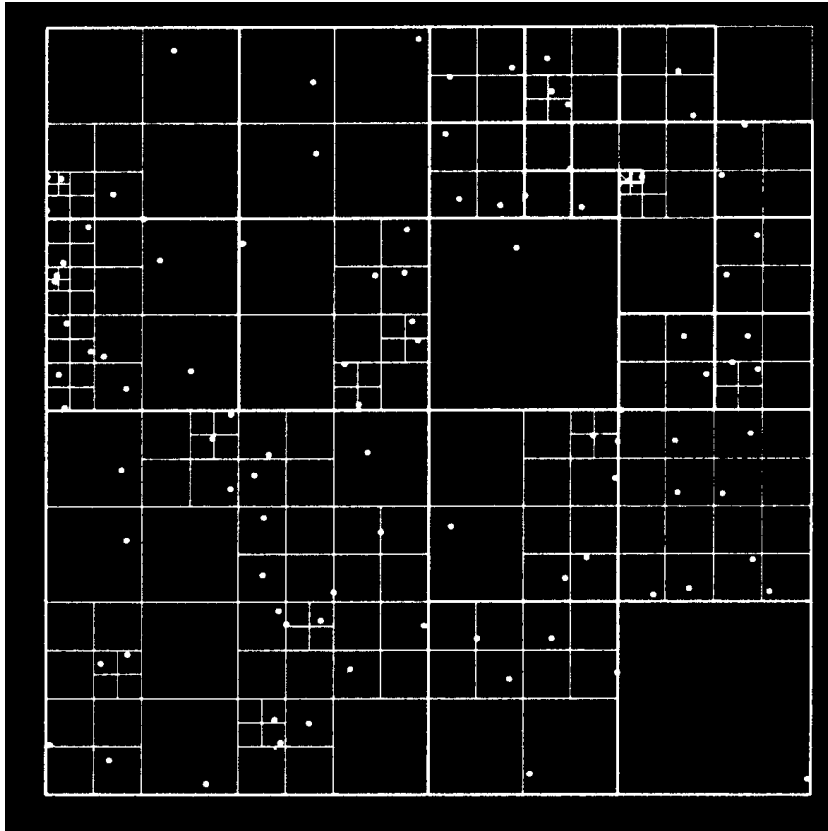


Abbildung C.1: Zweidimensionaler Baum für 100 zufällig auf ein Quadrat verteilte Partikel.

C.2 Der Tree Code

Aufgrund der oben angeführten Vorteile der Tree Codes findet diese Methode auch in den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten stellardynamischen Simulationen der Reaktion von Kugelsternhaufen auf externe Störpotentiale ihre Anwendung.

Grundsätzlich haben sich bei Astrophysikern zwei gleichwertige Methoden durchgesetzt, die Teilchen eines Systems in einer hierarchischen baumartigen Struktur zu Gruppen zusammenzufassen:

In dem Verfahren von Appel, Jernigan und Porter (AJP) (Appel 1985, Jernigan 1985, Porter 1985) werden Paare nächster Nachbarn zu einem Knoten zusammengefaßt. In einem nächsten Schritt wiederum werden jeweils zwei benachbarte Knoten in einen höherwertigen Knoten vereinigt und das ganze so lange wiederholt, bis das gesamte System in einem einzigen Knoten - Wurzel (*root*) genannt - erfaßt ist. Der so entstandene Baum hat ungefähr $\log_2 N$ Ebenen und die Zahl der zu berechnenden Wechselwirkungen pro Zeitschritt skaliert so $\propto N \log N$.

Barnes und Hut (1986, kurz BH) gehen einen anderen Weg; sie erhalten die Baumstruktur durch hierarchische Unterteilung des Raumes in kubische Zellen, was in gewissem Sinne dem euklidischen Analogon des AJP-Algorithmus entspricht.

Zunächst wählt man eine kubische Box (*root*), die das ganze System aufnehmen kann und unterteilt sie in acht Oktanten (bildlich gesprochen, die ersten acht Äste des Baumes). Für die acht Zellen errechnet man aus den darin enthaltenen Teilchen Schwerpunkt und Multipolmomente (in allgemeinen bis zum Quadrupolmoment, siehe dazu Kapitel C.2.2) des Gravitationspotentials. Nun unterteilt man jede einzelne Zelle weiter in acht Subzellen, errechnet wieder Schwerpunkt und Multipolmomente und verfährt nach diesem Schema so lange fort, bis sich in einer Zelle nurmehr genau ein Teilchen befindet. Diese Endzellen bilden die „Blätter“ des Baumes. Um den Speicherbedarf des Programms so gering wie möglich zu halten, werden nur jeweils *besetzte* Zellen in den Baum eingetragen. Eine zweidimensionale Visualisierung dieser Vorgehensweise liefert Abb. C.1, bzw. in drei Dimensionen Abb. C.2.

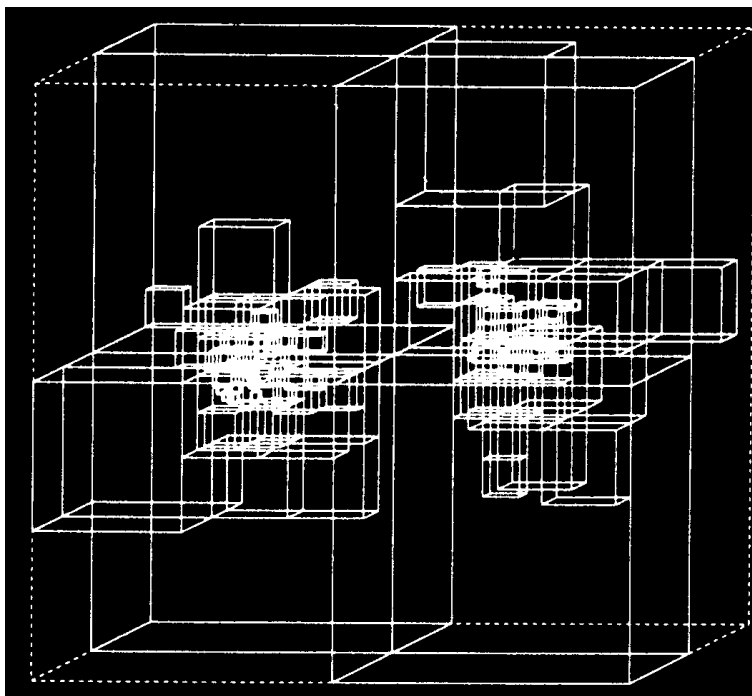


Abbildung C.2: Dreidimensionale Unterteilung des Raumes in Zellen, wie sie etwa beim Stoß zweier Galaxien kurz vor der ersten Annäherung auftritt.

Der vorliegende FORTRAN-Code stammt in seiner ursprünglichen Fassung von Lars Hernquist (University of California, Santa Cruz), wurde von mir durch Implementation variabler Zeitschritte (siehe Abschnitt C.2.3) erweitert und an die für diese Diplomarbeit relevanten Problemstellungen angepaßt. Er ist vollständig vektorisiert und läuft auf der Cray-YMP des Rechenzentrums Garching.

Im folgenden sollen einige numerische Details des Algorithmus genauer aufgeführt werden:

C.2.1 Öffnungskriterien

Damit die Verwendung eines Tree Codes gegenüber gewöhnlichen PP-Verfahren überhaupt Vorteile bringt, muß man ab einer bestimmten Distanz die direkte Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung durch die Zeit sparende Teilchen-Cluster-Wechselwirkung ersetzen. Das Öffnungskriterium entscheidet nun, wann das geschehen soll.

In der Praxis geht man folgendermaßen vor:

Berechnet man die Kraft auf ein Teilchen, so beginnt man mit der *root*-Zelle des Baums und öffnet ihre acht Unterzellen. Nun untersucht man, welche davon das Öffnungskriterium erfüllt. Ist dies der Fall, so kann man die Gravitationswechselwirkung mit der *gesamten* Zelle heranziehen. Ist das Kriterium nicht erfüllt, so muß man die jeweilige Zelle weiter auflösen und mit deren Unterzellen genauso verfahren. Wegen des großen Dichtekontrastes der meisten astrophysikalischen Probleme kann man erst in höheren Ebenen der Baumstruktur damit aufhören. Ebenso stoppt man, wenn die betrachtete Zelle nicht weiter auflösen werden kann, man also bei den „Blättern“ des Baumes, d. h. den Einzelteilchen angelangt ist. Im Mittel benötigt das etwa $\log N$ Schritte. Der Algorithmus läßt sich auf einem Vektorrechner so implementieren, daß das Abarbeiten *einer* Ebene des Baumes gleichzeitig, will heißen in einer einzelnen vektorisierten Schleife, geschehen kann. (Noch einfacher wird das Verfahren auf einem massiv parallelen Rechner, da das sukzessive Öffnen immer kleinerer Zellen gut rekursiv dargestellt werden kann.)

Das Öffnungskriterium selbst läßt sich in verschiedenen Formen angeben; siehe hierzu Salmon & Warren 1994:

In ihrer ursprünglichen Formulierung verwenden Barnes und Hut (1986) hierzu den Öffnungswinkel θ der betrachteten Zelle. Sie akzeptieren die Multipolapproximation als ausreichend genau, wenn das Verhältnis von Zellengröße (d. h. Kantenlänge s des Kubus) zum Abstand r von Teilchen und Zellenschwerpunkt *kleiner* ist als der Parameter θ . Die geometrischen Verhältnisse sind in Bild C.3 illustriert.

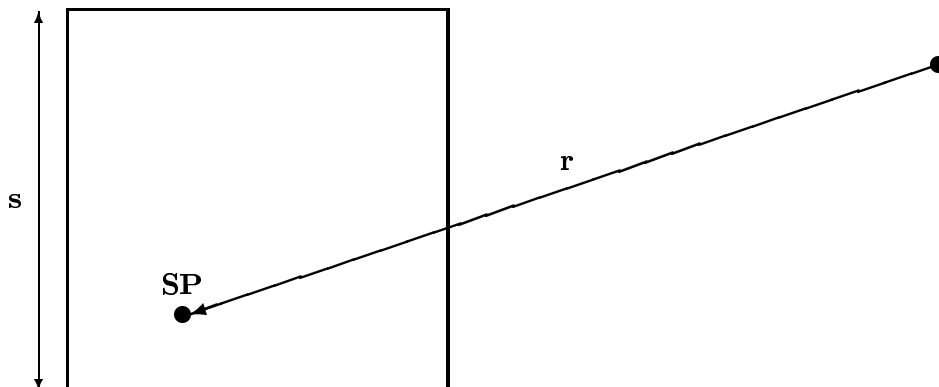


Abbildung C.3: Ursprüngliches Barnes & Hut Kriterium: Die Multipolentwicklung wird akzeptiert, wenn für die betrachtete Zelle $s/r < \theta$ ist, mit s = Kantenlänge und r = Abstand zum Schwerpunkt (SP).

Offensichtlich ist die Wahl des Parameters θ von größter Wichtigkeit für eine Simulationsrechnung, bestimmt sie doch die Genauigkeit und Schnelligkeit des Programms. Ein Öffnungswinkel von $\theta \approx 0$ entspricht direkter Summation über alle Einzelteilchen (d. h. einem reinen PP-Code), weil jeder Teilchencluster vollständig aufgelöst wird. Ein großer Wert für θ reduziert die Zahl der Wechselwirkungen pro Partikel, jedoch im Allgemeinen auf Kosten der Rechengenauigkeit. Die Rechenzeit skaliert näherungsweise $\propto \theta^{-3}$. Astrophysikalische Simulationen verwenden meist Werte $0.7 \leq \theta \leq 1.0$ und brechen die Multipolentwicklung meist nach dem Quadrupolterm ab (siehe auch Kap. C.2.2). Verwendung noch höherer Ordnungen steigert den Zeitaufwand beträchtlich, was meist in keiner Relation zum Zuwachs an Genauigkeit steht, so daß die Wahl eines kleineren θ vorzuziehen ist (Hernquist 1987).

Dieses originale BH-Kriterium führt jedoch bei bestimmter Geometrie zu großen Fehlern, was bis hin zur Selbstauflösung eines eigentlich stabilen Systems führen kann (siehe hierzu Salmon & Warren 1992). So wurde ein *Minimum Distance* Kriterium vorgeschlagen, welches anstelle des Abstands Teilchen-Zellenschwerpunkt den Abstand des Teilchens zur nächsten Zellenkante heranzieht (siehe Abb. C.4) und so völlig unabhängig von der Partikelverteilung in der Box ist. Dies ist in fast allen Fällen von Vorteil und fand auch in dieser Arbeit Anwendung.

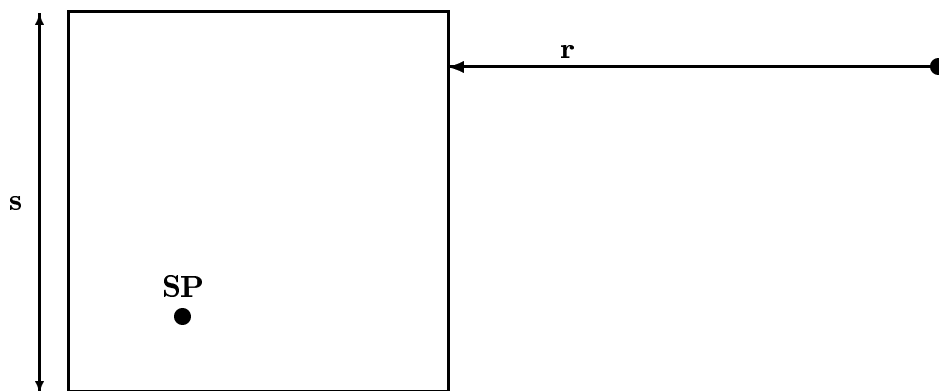


Abbildung C.4: Verbessertes Kriterium nach Salmon & Warren: Auch hier wird die Multipolentwicklung verwandt, wenn gilt $s/r < \theta$, wobei nun r die minimale Distanz zu einer Zellenwand bedeutet.

C.2.2 Kraftberechnung

In einem kollisionsfreien stardynamischen System ist die einzige Kraft der Teilchen untereinander die Gravitation. Das Potential zweier individueller Partikel wird üblicherweise durch ein geglättetes $1/r$ -Gesetz beschrieben

$$\Phi(r) = -G \frac{m_1 m_2}{(r^2 + \epsilon^2)^{1/2}}. \quad (\text{C.1})$$

Dabei sind G die Gravitationskonstante, m_1 und m_2 die Massen der beiden Körper und ϵ die *Softening*-Länge. Diese Größe führt man ein zur Reduktion rein numerischer 2-Körper-Effekte,

die stets auftreten, wenn bei der Beschreibung großer Systeme viele Teilchen zu einem einzigen Simulationspartikel zusammengefaßt werden. Man ordnet einem gewissen Volumenelement mit bestimmter mittlerer Teilchendichte, d.h. in dem viele Teilchen mehr oder minder gleichmäßig verteilt sind, ein einziges massives Simulationsteilchen zu. Dieses kann nun streuen an dem Simulationsteilchen, das das Nachbarelement repräsentiert. Ein Vorgang, der sich alleine aus der Diskretisierung der auf den Simulationsskalen mehr oder minder stetigen Dichteverteilung der realen Systemteilchen ableitet. Um diesen Effekt zu eliminieren, muß man dafür sorgen, das die Gravitationskräfte zwischen zwei solcher Superteilchen nicht auf Dimensionen kleiner als der mittlere Zellenabstand, d.h. der mittlere Abstand zweier solcher Teilchen, wirken können. Dies bestimmt die Wahl von ϵ und gleichzeitig die Grenzen der räumlichen Auflösung der Simulation. (Als Beispiel: Galaxien bestehen aus etwa 10^{11} Sternen, ihre Darstellung auf dem Rechner aus größenordnungsmäßig *nur* 10^3 bis 10^5 Testteilchen; so daß jedes einzelne eine Ansammlung von 10^6 — 10^8 Sternen repräsentiert!)

Das Potential einer Teilchengruppe (in einer Zelle) ist gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \frac{G}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}, \quad (\text{C.2})$$

was einer Entwicklung bis in 2. Ordnung entspricht. M ist die Gesamtmasse des Clusters und \mathbf{Q} ist der spurfreie Quadrupoltenor. Er ist definiert über

$$Q_{ij} = \sum_k m_k (3x_{k,i}x_{k,j} - r_k^2 \delta_{ij}), \quad (\text{C.3})$$

wobei die Summe über alle Partikel (Masse m_k) der Gruppe zu nehmen ist (Landau & Lifschitz 1976, §32).

Die Beschleunigung folgt nun aus $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = -\nabla\Phi/m$ als

$$\mathbf{a} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{G}{r^5} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} - \frac{5G}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^7}. \quad (\text{C.4})$$

Der Quadrupoltenor \mathbf{Q} für eine Zelle läßt sich nach dem Satz von Steiner sukzessive aus den Subzellen (N_S) berechnen:

$$\mathbf{Q} = \sum_{l \in N_S} \mathbf{Q}_l + \sum_{l \in N_S} M_l (3\mathbf{R}_l \mathbf{R}_l - R_l^2 \mathbf{1}). \quad (\text{C.5})$$

Der Index l numeriert hierbei die Subzellen, M_l stellt die Masse und $\mathbf{R}_l \mathbf{R}_l$ den Tensor ($R_{l,i} R_{l,j}$), mit $\mathbf{R}_l = \mathbf{X}_l^{cm} - \mathbf{X}^{cm}$, dem Vektor vom Schwerpunkt der Mutterzelle auf den Schwerpunkt der Tochterzelle l dar. Somit erhält man die Quadrupolterme für alle Zellen ohne großen numerischen Aufwand.

C.2.3 Zeitschrittsteuerung

Die Wahl des Zeitschrittes für die Propagation des Systems stellt ein schwieriges numerisches Problem dar: Wählt man die Schrittweite zu groß, läuft das Programm zwar schnell, jedoch steigen auch die Fehler, die durch die Diskretisierung des Differentialgleichungssystems eingeführt

werden. Ist Δt sehr klein, reduzieren sich zwar diese Fehler, aber das Programm arbeitet sehr langsam und ineffizient. So bedeutet jede Wahl eines Zeitschrittes einen Kompromiß zwischen Schnelligkeit und Genauigkeit. Bei stark inhomogenen Systemen steht man zusätzlich vor der Schwierigkeit, daß man die Dynamik in den Zentralbereichen hoher Dichte – wo große Geschwindigkeitsänderungen auftreten – gut auflösen muß, um innerhalb der gewählten Fehlertoleranz zu bleiben, was zur Folge hat, daß man die Zeitschrittweite für diesen Bereich sehr klein wählen muß. Für Teilchen in weniger dicht besetzten Regionen – etwa den äußeren Gebieten von Kugelsternhaufen oder Elliptischen Galaxien – bedeutet dies, daß ihre Trajektorien mit viel zu großer Genauigkeit – im Rahmen der vorgegebenen Näherungen – verfolgt werden und so CPU-Zeit verschwendet wird.

In der Astrophysik hat sich die Wahl $\Delta t \approx (\frac{1}{50} - \frac{1}{100})\tau_{ff}$ als ein geeigneter Kompromiß erwiesen, wobei die Frei-Fall-Zeit $\tau_{ff} = \sqrt{3\pi/32G\rho}$ die typische dynamische Zeitskala eines Stellarsystems darstellt (siehe auch 2.3.6).

Aufgrund obiger Überlegungen, bietet es sich an, jedem Teilchen, entsprechend der Umgebung in der es sich befindet, eine *eigene* Zeitschrittweite Δt zuzuweisen. Dies zu realisieren gibt es eine schier unüberschaubare Anzahl von Methoden. Einen Überblick bieten etwa Hockney & Eastwood 1981, siehe auch Ahmad & Cohen 1973, bzw. Hernquist & Katz 1992 und Steinmetz & Müller 1993 speziell für Tree Codes.

Für die vorliegende Diplomarbeit hat sich folgendes bewährt:

Tree Codes verwenden üblicherweise ein zentriertes *Leap Frog* Schema zur Zeitintegration. Dieses ist 2. Ordnung in Δt . Teilchenort und -geschwindigkeit werden jeweils nach einem halben Zeitschritt $\frac{1}{2}\Delta t$ wechselseitig aktualisiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^{n+1/2} &= \mathbf{r}_i^{n-1/2} + \mathbf{v}_i^n \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ \mathbf{v}_i^{n+1} &= \mathbf{v}_i^n + \mathbf{a}_i^{n+1/2} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Hierbei ist $\mathbf{a}_i^{n+1/2}$ die Beschleunigung berechnet an der Stelle $\mathbf{r}_i^{n+1/2}$, d. h. genau in der Mitte eines Zeitschrittintervalls; daher auch der Name *zentrierter Leap Frog Integrator*. Dies ist wichtig, um das Integrationsverfahren 2. Ordnung zu halten.

Will man nun variable Zeitschritte implementieren, so ist es am einfachsten die jeweils kleineren Schritte genau halb so groß und die nächst größeren genau doppelt so lange zu halten, und muß nur dafür sorgen, daß die Übergänge von einer Zeitschrittweite zur nächsten synchronisiert sind (siehe Abbildung C.5). Dann bleibt die Ordnung des Verfahren ohne weitere Korrekturen erhalten:

Jedes Teilchen i des Systems wird mit der Systemschrittweite Δt (dem kleinsten Zeitschritt) voran bewegt. Jedoch berechnet man die Kraft auf dieses Teilchen nur jeweils nach $\Delta t_i(m_i) = 2^{m_i} \Delta t$ neu, m_i ist hier der Zeiger auf die aktuellen Schrittweite des Teilchens i . Dazwischen wird die neue Beschleunigung $\mathbf{a}_i^{n+1/2}$ in Gleichung (C.6) jeweils nach Δt linear aus den vorhergehenden Werten interpoliert. So umgeht man ein aufwendiges Durchlaufen des Baumes und hält das Verfahren 2. Ordnung:

$$\mathbf{a}_i^{n+1/2} = \mathbf{a}_i^{n-1/2} + (\mathbf{a}_i^{n-1/2} - \mathbf{a}_i^{n-3/2}). \quad (\text{C.7})$$

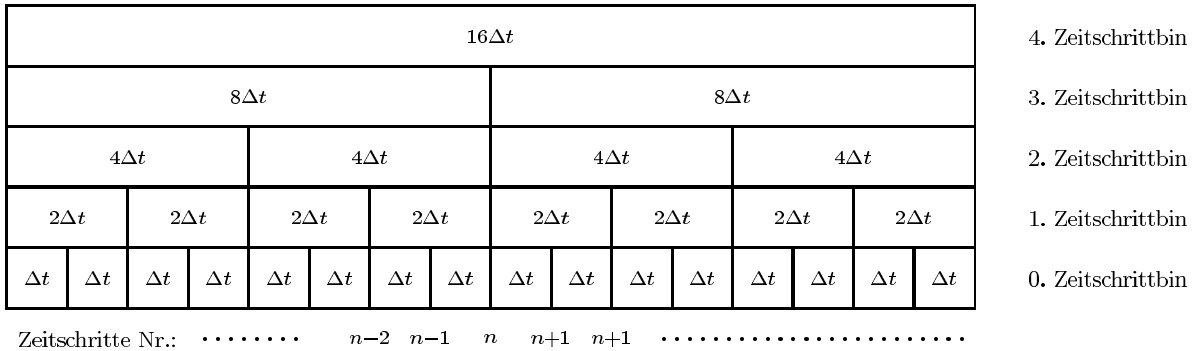


Abbildung C.5: Schichtung der multiplen Zeitschrittstruktur bei 5 Schrittweiten. Für ein Teilchen mit der kleinsten Zeitschrittweite wird nach *jedem* Systemschritt Δt die Kraft neu berechnet. Für Teilchen in der nächst höheren Ebene geschieht dies nach $\Delta t(1) = 2\Delta t$, entsprechend für Teilchen im m_i -ten Bin nach 2^{m_i} Systemschritten. Dazwischen gewinnt man für diese Teilchen die Beschleunigung durch lineare Interpolation aus den alten Werten. Ein Teilchen in der Ebene m_i ist am Ende seines Zeitschrittes jeweils mit allen darunterliegenden Teilchen synchron; mit Teilchen in der nächst höheren Ebene ist dies alle $2\Delta t(m_i)$ der Fall. Ein Wechsel der Zeitschrittweite ist nun möglich.

Ist der Zeitschritt $\Delta t_i(m_i)$ beendet, dann wird die Kraft über das Tree Code Schema berechnet. Ergibt nun der Vergleich mit der alten Kraft ($\delta_{Kraft} \equiv \max(|F_{i,j}^{neu} - F_{i,j}^{alt}|/|F_{i,j}^{alt}|), \forall j \in \{x, y, z\}$) eine zu große Änderung $\delta_{Kraft} > \delta_{Tol}$ (etwa weil das Teilchen in ein Gebiet höherer Dichte geraten ist), so wird es beim nächsten Schritt mit kleinerer Schrittweite bewegt. Bleibt die Kraftänderung innerhalb der erlaubten Toleranzen $\delta_{Tol}/2 \leq \delta_{Kraft} \leq \delta_{Tol}$ (mit δ_{Tol} typischerweise einigen Prozent), so wird die gegenwärtige Schrittweite beibehalten; ändert sie sich hingegen nur wenig (realisiert durch $\delta_{Kraft} < \delta_{Tol}/2$), wird der Zeiger m_i des Teilchens i um eins erhöht, was bedeutet, die Teilchenbahn nun doppelt so lange zu interpolieren.

Auf diese Weise bleibt der Algorithmus 2. Ordnung in Δt und man vermeidet gleichzeitig wertvolle Rechenzeit zu vergeuden durch unnötig häufiges Aufbauen des Baumes für Teilchen, die nur wenig mit anderen wechselwirken. Je größer der Dichtekontrast eines astrophysikalischen Problems, desto beträchtlicher fällt der dadurch erzielte Gewinn aus. Dies haben Testrechnungen ohne und mit individuellen Zeitschritten bei verschiedenen Dichteparametern bestätigt, beispielsweise benötigt die Entwicklung des ungestörten Standardmodells – siehe Kap. 4.1 – über vier Freie-Fall-Zeiten knapp 39 000 CPU-Sekunden, bei Verwendung individueller Zeitschritte. Bei gleicher Energieauflösung braucht das Programm ohne diese etwa doppelt so lange.

C.2.4 Energieerhaltung

Eine wichtige Bezugs- und Kontrollgröße für die Verlässlichkeit eines Programms und die Güte der Parameterwahl (etwa Öffnungswinkel θ , oder Zeitschrittweite Δt und Fehlertoleranz δ_{Tol}) stellt die Energieerhaltung während des Ablaufs der Simulation dar. Selbstgravitierende Systeme erhalten die Gesamtenergie E_{tot} (als Summe aus kinetischer und potentieller Energie) exakt. Somit liefert $E_{tot}(t) \approx const.$ ein Indiz für eine gute Auswahl der Systemparameter, bzw. für die

Richtigkeit der zugrundegelegten Modellannahmen. Große zeitliche Schwankungen hingegen lassen das Resultat einer Rechnung sehr fragwürdig erscheinen.

Bei einer typischen Simulation mit dem Tree Code Programm und den oben genannten Parameterwerten ist die Energie bis auf Abweichungen von etwa 1% erhalten (siehe z.B. Abb. 4.2).

Anhang D

Literaturverzeichnis

- Aarseth, S.J.: 1971, *Astrophys. Space Sci.*, **14**, 118
- Aguilar, L.A., White, S.D.M.: 1985, *Astrophys. J.*, **295**, 374-387
- Ahmad, A., Cohen, L.: 1973, *J. Comput. Phys.*, **12**, 389
- Appel, A.W.: 1985 *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, **6**, 85
- Alcock, C., *et al.* : 1993, *Nature*, **365**, 621
- Allen, C.W.: 1973, *Astrophysical Quantities*, University of London, The Athlone Press, London
- Ashman, K.M., Zepf, S.E.: 1993, in *The Globular Cluster - Galaxy Connection*, Ed. G.H. Smith und J.P. Brodie, S. 776, A.S.P. Conference Series, Band 48, San Francisco
- Aubourg, E., *et al.* : 1993, *Nature*, **365**, 623
- Bahcall, J.N.: 1984, *Astrophys. J.*, **276**, 156-168
- Bahcall, J.N.: 1984, *Astrophys. J.*, **276**, 169-181
- Bahcall, J.N.: 1984, *Astrophys. J.*, **287**, 926-944
- Bahcall, J.N., Soneira, R.M.: 1980 *Astrophys. J.-Suppl. Ser.*, **44**, 73-110
- Barnes, J.E.: 1986, in *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, Ed. P. Hut und S. McMillan, S. 175, Springer-Verlag, Berlin
- Barnes, J.E.: 1990, *J. Comput. Phys.*, **87**, 161-170
- Barnes, J.E.: 1992, *Astrophys. J.*, **393**, 484
- Barnes, J.E., Goodman, J., Hut, J.: 1986, *Astrophys. J.*, **300**, 112
- Barnes, J.E., Hut, P.: 1986, *Nature*, **324**, 446 [BH]
- Barnes, J.E., Hut, P.: 1989, *Astrophys. J.-Suppl. Ser.*, **70**, 389-417

- Becker, W., Fenkart, R.P.: 1976, *Photometric Catalogue of Stars in Selected Areas and Other Fields in the RGO-System*, Band 1, Astronomisches Institut der Universität Basel, Schweiz
- Binggeli, B., Cameron, L.M.: 1991, *Astr. Astrophys.*, **252**, 27-52
- Binney, J., Tremaine, S.: 1987, *Galactic Astronomy*, Princeton University Press
- Bolte, M.: 1993, in *The Globular Cluster - Galaxy Connection*, Ed. G.H. Smith und J.P. Brodie, S. 727, A.S.P. Conference Series, Band 48, San Francisco
- Brigham, E. O.: 1974, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall Inc.
- Bonstein, I.N., Semendjajew, K.A.: 1987, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. Main
- Burkert, A., Truran, J.W., Hensler, G.: 1992, *Astrophys. J.*, **391**, 651
- Carlberg, R., Hartwick, F.D.A.: 1989, *Astrophys. J.*, **345**, 196
- Carney, B.: 1993, in *The Globular Cluster - Galaxy Connection*, Ed. G.H. Smith und J.P. Brodie, S. 727, A.S.P. Conference Series, Band 48, San Francisco
- Carney, B., Storm, J., Jones, R.: 1992, *Astrophys. J.*, **386**, 663
- Chandrasekhar, S.: 1942, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York
- Chernoff, D.F., Shapiro, S.L.: 1987, *Astrophys. J.*, **322**, 113-122
- Chernoff, D.F., Weinberg, M.D.: 1990, *Astrophys. J.*, **351**, 121-156
- de Vaucouleurs, G.: 1948, *Ann. d'Astrophys.*, **11**, 247
- de Vaucouleurs, G., Pence, W.D.: 1978, *Astron. J.*, **83**, 1163
- Eggen, O.L., Lynden-Bell, D., Sandage, A.: 1962, *Astrophys. J.*, **136**, 748
- Faber, S.M., Jackson, R.E.: 1976, *Astrophys. J.*, **204**, 668
- Fall, S.M., Rees, M.J.: 1985, *Astrophys. J.*, **298**, 18-26
- Fenkart, R.P.: 1966, *Z. Astrophys.*, **66**, 390
- Fuchs, B., Wielen, R.: 1987, in *The Galaxy*, Ed. G. Gilmore und B. Carswell, S. 375, Reidel
- Gilmore, G., Reid, N.: 1983, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **202**, 1025
- Gilmore, G.: 1989, in *The Milky Way as a Galaxy*, Ed. R. Buser und I. King, Kap. 11, Geneva Observatory, Schweiz
- Gilmore, G., Wyse, R.F.G., Kuijken, K.: 1989, in *Evolutionary Phenomena in Galaxies*, Ed. J.E. Beckman und P.E.J. Pagels, S. 172, Cambridge University Press, Cambridge(UK)
- Goldstein, H.: 1985, *Klassische Mechanik*, 8. Auflage, AULA-Verlag, Wiesbaden
- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.: 1965, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York

- Hernquist, L.: 1987, *Astrophys. J.-Suppl. Ser.*, **64**, 715-734
- Hernquist, L.: 1990, *J. Comput. Phys.*, **87**, 137-147
- Hernquist, L.: 1992, *Astrophys. J.*, **400**, 460-475
- Hernquist, L., Barnes, J.E.: 1990, *Astrophys. J.*, **349**, 562-569
- Hernquist, L., Heyl, J.S., Spergel, D.N.: 1994, *Astrophys. J.*, **416**, L9-L12
- Hernquist, L., Katz, N.: 1989, *Astrophys. J.-Suppl. Ser.*, **70**, 419-446
- Hernquist, L., Quinn, P.J.: 1993, in *The Milky Way Perspective*, Ed. S. Majewski, S. 187, ASP Conference Series, Band 49, San Francisco
- Hockney, R.W., Eastwood, J.W.: 1981, *Computer Simulations Using Particles*, McGraw-Hill Inc.
- Hubble, E.P.: 1936, *The Realm of Nebulae*, Yale University Press, New Haven
- Ibata, R., Gilmore, G., Irwin, M.: 1994, *Nature*, **370**, 194
- Illingworth, G., Illingworth, W.: 1976, *Astrophys. J.-Suppl. Ser.*, **30**, 277-246
- Ipsier, T.R., Semenzato, R.: 1985, *Astr. Astrophys.*, **149**, 408
- Jernigan, J.G.: 1985, in *IAU Symposium 113, Dynamics of Star Clusters*, Ed. J. Goodman und P. Hut, S.275, Reidel
- Jernigan, J.G., Porter, D.H.: 1989, *Astrophys. J.-Suppl. Ser.*, **71**, 871
- Jetzer, P.: 1994, *Preprint ZU-TH 8/98*, Technische Hochschule Zürich
- Jones, J.T., Wyse, R.F.G.: 1983, *Astr. Astrophys.*, **120**, 165-180
- Kauffmann, G., White, S.D.M.: 1993, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **261**, 921-928
- King, I.R.: 1966, *Astron. J.*, **71**, 64
- Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1990, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag, Berlin
- Klessen, R.S.: 1991, Semesterarbeit an der University of Illinois at Urbana/Champaign
- Kormendy, J.: 1989, *Astrophys. J.*, **217**, 406
- Kuijken, K., Gilmore, G.: 1989, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **239**, 571-603
- Kuijken, K., Gilmore, G.: 1989, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **239**, 605
- Kuijken, K., Gilmore, G.: 1989, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **239**, 651-664
- Lacey, C.G.: 1991, in *Dynamics of Disk Galaxies*, Ed. B. Sundelius, S. 257, Göteborg, Schweden
- Lacey, C.G., Cole, S.: 1993, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **262**, 627
- Lacey, C.G., Cole, S.: 1994, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, in Druck
- Lacey, C.G., Ostriker, J.P.: 1985, *Astrophys. J.*, **299**, 633-652

- Laird, J.B., Carney, B.W., Latham, D.W.: 1988, *Astron. J.*, **95**, 1843
- Lance, C.M.: 1988, *Astrophys. J.*, **334**, 927
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: 1976 *Lehrbuch der Theoretischen Physik – Mechanik*, Akademie-Verlag, Berlin
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: 1979, *Lehrbuch der Theoretischen Physik – Statistische Physik I*, Akademie-Verlag, Berlin
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: 1983, *Lehrbuch der Theoretischen Physik – Physikalische Kinetik*, Akademie-Verlag, Berlin
- Lewis, J.R., Freeman, K.C.: 1989, *Astrophys. J.*, **97**, 139-162
- Lin, C.C., Shu, F.H.: 1964, *Astrophys. J.*, **140**, 646
- Lin, C.C., Shu, F.H.: 1966, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **55**, 229
- Makino, J.: 1990, *J. Comput. Phys.*, **88**, 393-408
- Makino, J., 1991 *Astrophys. J.*, **369**, 200-212
- Merritt, D., Hernquist, L.: 1991, *Astrophys. J.*, **376**, 439-457
- Mihalas, D., Binney, J.: 1981, *Galactic Astronomy*, Freeman and Company, New York
- Navarro, J.F., Frenk, S., White, S.D.M.: 1994, *Preprint*
- Norris, J.E.: 1989, in *Evolutionary Phenomena in Galaxies*, Ed. J.E. Beckman und P.E.J. Pargels, S. 159, Cambridge University Press, Cambridge(UK)
- Norris, J.E.: 1993, in *The Globular Cluster - Galaxy Connection*, Ed. G.H. Smith und J.P. Brodie, S. 727, A.S.P. Conference Series, Band 48, San Francisco
- Norris, J.E.: 1994, *Astrophys. J.*, eingereicht
- Norris, J.E., Bessell, M.S., Pickles, A.J.: 1985, *Astrophys. J.-Suppl. Ser.*, **58**, 463
- Norris, J.E., Ryan, S.G.: 1991, *Astrophys. J.*, **380**, 403-418
- Ostriker, J.P.: 1990, in *Evolution of the Universe of Galaxies*, Ed. R.G. Kron, S. 15, A.S.P. Conference Series, Band 10, San Francisco
- Plummer, H.C.: 1911, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **71**, 460
- Porter, D.: 1985, *Ph.D. Thesis*, University of California, Berkley
- Press, W.H.: 1986, in *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, Ed. P. Hut und S. McMillan, S. 184, Springer-Verlag, Berlin
- Quinn, P.J., Goodman, J.: 1986, *Astrophys. J.*, **309**, 472-495
- Quinn, P.J., Hernquist, L., Fullagar, D.P.: 1993, *Astrophys. J.*, **403**, 74-93
- Rodgers, A.W.: 1971, *Astrophys. J.*, **165**, 581

- Rubin, V.C., Burstein, D., Ford, W.K. Jr., Thonnard, N.: 1985, *Astrophys. J.*, **289**, 81
- Rubin, V.C., Ford, W.K. Jr., Thonnard, N., Burstein, D.: 1982, *Astrophys. J.*, **261**, 439
- Salmon, J.K., Warren, M.S.: 1994, *J. Comput. Phys.*, **111**, 136-155
- Sandage, A.: 1987, *Astron. J.*, **93**, 610-615
- Sandage, A., Fouts, G.: 1987, *Astron. J.*, **92**, 74
- Spergel, D.N.: 1992, in *The Center, Bulge, and Disk of the Milky Way*, Ed. L. Blitz, S. 77, Kluwer Academic, Dordrecht
- Spitzer, L.: 1969, *Astrophys. J.*, **158**, L139
- Spitzer, L.: 1987, *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, Princeton University Press
- Spitzer, L., Schwarzschild, M.: 1951, *Astrophys. J.*, **114**, 385
- Spitzer, L., Schwarzschild, M.: 1953, *Astrophys. J.*, **118**, 106
- Spurzem, R.: 1994, in *Ergodic Concepts in Stellar Dynamics*, Ed. D. Pfenniger, V.G. Gurzadyan, Springer-Verlag, Berlin
- Steinmetz, M., Müller, E.: 1993, *Astr. Astrophys.*, **268**, 391-410
- Toomre, A., Toomre, J.: 1972, *Astrophys. J.*, **178**, 623
- Tóth, G., Ostriker, J.P.: 1992, *Astrophys. J.*, **389**, 5-26
- Tully, R.B., Fisher, J.R.: 1977, *Astr. Astrophys.*, **54**, 661
- Twarog, B.A.: 1980, *Astrophys. J.*, **242**, 242
- Udalski, A., *et al.* : 1993, *Acta Astr.*, **43**, 289
- van Albada, T.S.: 1986, in *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, Ed. P. Hut und S. McMillan, S. 23, Springer-Verlag, Berlin
- VandenBerg, D.A.: 1988, in *The Harlow Shapley Symposium on Globular Cluster Systems in Galaxies*, Ed. J.E. Grindlay und A.G. Davis Philip, S. 102, Kluwer, Dordrecht
- VandenBerg, D.A., Bolte, M., Stetson, P.: 1990, *Astron. J.*, **100**, 445
- Vandervoort, P.O.: 1991, *Astrophys. J.*, **377**, 49-71
- Wambsganss, J., Paczyński, B.: 1992, *Astrophys. J.*, **397**, L1-L4
- Webbink, R.F.: 1985, in *Dynamics of Star Clusters*, Ed. J. Goodman und P. Hut, S.541-577, IAU Symposium
- Wielen, R., Fuchs, B.: 1989, in *Evolutionary Phenomena in Galaxies*, Ed. J.E. Beckman und P.E.J. Pagels, S. 244, Cambridge University Press, Cambridge(UK)
- Wyse, R.F.G., Gilmore, G.: 1993, in *The Globular Cluster - Galaxy Connection*, Ed. G.H. Smith und J.P. Brodie, S. 727, A.S.P. Conference Series, Band 48, San Francisco

- Yoshii, Y., Ishida, K., Stobie, R.S.: 1987, *Astron. J.*, **93**, 323
- Yoss, K.M., Neese, C.L.: 1989, in *The Gravitational Force Perpendicular to the Galactic Plane*, S. 123, Ed. A.G.D. Philip und P.K. Lu, L. Davis Press, Schenectady (New York)
- Yoss, K.M.: 1991, persönliche Mitteilung
- Zepf, S.E., Ashman, K.M.: 1993, in *The Globular Cluster - Galaxy Connection*, Ed. G.H. Smith und J.P. Brodie, S. 828, A.S.P. Conference Series, Band 48, San Francisco
- Zinn, R.: 1985, *Astrophys. J.*, **293**, 424-444
- Zinn, R.: 1994, in Vorbereitung

Danksagung

Ohne den Beistand und der Unterstützung vieler Menschen wäre die vorliegende Arbeit nie zustande gekommen. Ihnen allen gilt an dieser Stelle mein herzlichster Dank.

In erster Linie möchte ich Dr. Andreas Burkert danken. Er ist der geistige Urheber dieser Arbeit. Seine Art der Betreuung ließ mir viel Freiraum, eigene Konzepte und Vorstellungen zu verwirklichen, und ermöglichte mir so, selbstständiges und eigenverantwortliches Arbeiten zu erlernen. Er hat es geschafft, meine Faszination und mein Interesse an Astronomie zu stärken und zu vertiefen.

Danken möchte ich Prof. Wolfgang Hillebrandt und allen Mitarbeitern am Max-Planck-Institut für Astrophysik in Garching für die freundliche und hilfsbereite Atmosphäre, die mir meine Arbeit sehr erleichtert hat. Bei allen Fragen und Problemen fand sich stets jemand, der mit Rat und Tat Beistand leistete.

Speziell möchte ich Dr. Matthias Steinmetz und Dr. Maximilian Ruffert danken, ohne deren Erfahrungsschatz im Umgang mit dem hiesigen Rechnersystem ich im täglichen Kampf mit den Windmühlen oft gescheitert wäre.

Mein Dank gilt auch Herrn Helmut Erdl und Dr. Matthias Bartelmann für ihre intensive TeXnische Beratung.

Einen ganz besonderen Beitrag, daß die Arbeit hier auch enormen Spaß machte, leisteten meine vier Zimmergenossen, Stefan Buchner, Karl Ludwig, Rüdiger Kneissl und Jens Niemeyer. Die gemeinsamen Diskussionen, Dartspiele, Teepausen und sonstigen Unternehmungen und nicht zuletzt das stete Hintergrundgeräusch eines voll belegten Büroraumes trugen viel zu einem angenehmen Arbeitsklima bei. Mein Dank gilt ihnen auch, weil sie meine eigenen Unarten so problemlos ertragen konnten.

Obiges gilt auch für viele Nicht-Zimmergenossen.

Meine hervorragend trainierte Kaumuskulatur verdanke ich zu einem nicht geringen Teil der Mitwirkung jenen Leuten, die zusammen mit mir den allmüttäglichen Marsch in die nahegelegene Mensa antraten. An dieser Stelle sei nochmals an ihre Geduld und Ausdauer appelliert.

Bernhard Kux danke ich für seine Freundschaft und ein gemeinsam gemeistertes Physikstudium.

Viele Freunde und Bekannte halfen mir zu erkennen, daß Physik und Astronomie nur kleine Teilbereiche dieser Welt darstellen. Ihnen verdanke ich viele Blicke über den Rand des eigenen Tellers hinaus: Ulrike Beck, Stefan Brandstetter, Warwick Easdown, Hannes Fuchs, Yvonne Heinrich, Brian Isenhardt, Klaus Kiemer, Martin Köllner, Thomas Mayer, Kevin Sardiga, Christine Schmid, Robert Stieß, Eckhard Weigt, und viele mehr.

Mein größter Dank aber gilt meiner Mutter. Ohne ihre Liebe und Zuneigung und ohne ihre Hilfsbereitschaft und Unterstützung hätte ich das bisher erreichte nie vermocht. Ihre Lebensfreude und Zuversicht sind mir stets ein Vorbild. Ihr ist diese Arbeit gewidmet.