

Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

**Statistische Methoden zur
Untersuchung von
Überschallturbulenz und ihre
Bedeutung für
Sternentstehungsgebiete**

Christoph Federrath

Diplomarbeit
Würzburg, Februar 2007

Themenstellung:
Prof. Dr. J. C. Niemeyer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Sternentstehungsgebiete	5
2.1	Das interstellare Medium (ISM)	5
2.1.1	Zusammensetzung	5
2.1.2	Zweiphasenmodell des ISM und thermische Instabilität	6
2.1.3	Zusammensetzung von Molekülwolkenkomplexen	8
2.1.4	Beobachtung und Eigenschaften von Molekülwolken	9
2.2	Entstehung von Molekülwolken	10
2.2.1	Bildung von molekularem Wasserstoff	10
2.2.2	Heizprozesse	11
2.2.3	Kühlprozesse	12
2.2.4	Mögliches Szenario zur Entstehung von Molekülwolken	13
3	Hydrodynamik	15
3.1	Gleichungen der Hydrodynamik	15
3.1.1	Eulersche und Lagrangesche Darstellung	15
3.1.2	Wechsel zwischen Lagrange- und Eulersystem	16
3.1.3	Verallgemeinerte Transportgleichung	16
3.1.4	Massenerhaltung	17
3.1.5	Bewegungsgleichung	18
3.1.6	Energiegleichung	19
3.1.7	Zusammenfassung der hydrodynamischen Gleichungen	19
3.2	Magnetohydrodynamik	20
4	Stabilität von Molekülwolkenkomplexen	21
4.1	Gravitationsinstabilität	21
4.2	Virial-Theorem und Stabilitätsanalyse	24
5	Turbulenz	29
5.1	Phänomenologie	29
5.2	Kolmogorov Theorie	31
5.3	Kinetisches Energiespektrum und Strukturfunktion	33
5.3.1	Energiespektrum inkompressibler Turbulenz	33

5.3.2	Energiespektrum für Überschallturbulenz und Strukturfunktion	35
5.3.3	Lagrangesche Strukturfunktion	37
6	Sternmassenverteilungsfunktion aus getriebener Überschallturbulenz	39
6.1	Parameter der Simulation und stochastisches Treiben	39
6.2	Auf dem Weg zu voll entwickelter Turbulenz	41
6.3	Strukturfunktionen kompressiv getriebener Turbulenz	46
6.3.1	Auswertung und Ergebnisse	50
6.3.2	Diskussion	53
6.4	Bezug zur IMF	60
7	Tracer Teilchen	65
7.1	Was sind Tracer Teilchen?	65
7.2	Implementierung in ENZO	66
7.2.1	Hydrodynamik-Code ENZO	66
7.2.2	Interpolation	67
7.2.3	Bewegungsgleichung	69
7.2.4	Berücksichtigung von AMR	69
7.3	Anwendung auf turbulentes Mischen in Molekülwolkenkomplexen . .	71
7.3.1	Initialisierung und Ablauf der Simulationen	72
7.3.2	Ergebnisse	74
7.3.3	Auswertung und Diskussion	77
7.3.4	Zusammenfassung	81
7.4	Test des Skalenverhaltens von Turbulenz im Lagrangeschen Bezugssystem	82
8	Zusammenfassung und Ausblick	87
A	Anhang	91
A.1	Ideale Gasgleichung	91
A.2	Eulerableitung für Vektorfelder	91
A.3	Herleitung der Energiegleichung	92
A.4	Ergänzungen zur Jeans Analyse	93
A.5	Herleitung der Kolmogorov-Skala	94
A.6	Dichtespektren der Auswertung von 6.2	94
	Literaturverzeichnis	97

1 Einleitung

Eine der wichtigsten Aufgaben der Astrophysik ist die Erklärung der Phänomene, die bei der Entstehung von Sternen eine Rolle spielen. Sterne bilden sich im interstellaren Medium in Wolken aus molekularem Wasserstoff (Abbildung 1.1). Diese Wolken haben eine komplexe Struktur, bestehend aus komprimierten Regionen und nahezu leeren Zwischenräumen. Es wurde lange Zeit angenommen, dass Gravitation die Formgebung dieser Molekülwolken bestimmt. Neuere Erkenntnisse, sowohl aus Beobachtungen, als auch aus theoretischen Überlegungen, deuten jedoch darauf hin, dass Überschallturbulenz bei der Strukturierung des Inneren von Molekülwolken der entscheidende physikalische Mechanismus ist. Geschwindigkeitsverteilungen in Molekülwolken werden über die Verbreiterung von Spektrallinien gemessen und zeichnen ein Bild ungeordneter Bewegungen mit Überschallgeschwindigkeiten. Diese Beobachtungen werden mit Überschallturbulenz assoziiert.

Ein erfolgreiches Modell der Sternentstehung muss die statistische Verteilung der Sternmassen (IMF) erklären können. Diese wurde schon von Salpeter (1955) gemessen. Die Eigenschaften der Überschallturbulenz bieten eine plausible Erklärung, sowohl zur Strukturgebung interstellarer Wolken, als auch zur statistischen Verteilung dichter Gasmassen in Molekülwolken und ermöglichen damit eine theoretische Herleitung der IMF. Das Modell von Padoan & Nordlund (2002) bildet hierbei die Brücke von Überschallturbulenz zur IMF und prägt den Begriff der *turbulenten Fragmentation*.

Die dominante Quelle interstellarer Turbulenz ist nach wie vor Gegenstand aktueller Forschung. Sicher ist jedoch, dass Turbulenz durch verschiedene physikalische Mechanismen entstehen kann. Wichtig dabei ist vermutlich zum einen thermische Instabilität, die zu gegeneinander laufenden Dichtewellen im interstellaren Medium führen kann. In Folge dessen können hydrodynamische Instabilitäten entstehen, welche die Turbulenz treiben. Eine weitere wichtige Möglichkeit ist das Treiben interstellarer Turbulenz durch Supernova-Explosionen und protostellare Aktivität. Die dabei freigesetzte kinetische Energie kann ausreichen, um überschallturbulente Strömungen anzutreiben (Mac Low & Klessen 2004). In beiden Fällen muss davon ausgegangen werden, dass auf großen Skalen hauptsächlich *kompressive Moden* im Gas angeregt werden.

Auf Grund der Komplexität der hydrodynamischen Gleichung, die letztlich auch zur Turbulenz führt, benutzt man numerische Verfahren, um das Verständnis für die Vorgänge in Sternentstehungsgebieten zu erweitern. In vielen numerischen Simulationen wird Turbulenz jedoch ausschließlich solenoidal getrieben, d. h. es werden gerade

keine kompressiven Moden im Gas angeregt. Ziel des ersten Teils dieser Arbeit ist es deshalb, die statistischen Eigenschaften der Überschallturbulenz zu erschließen, die sich aus Simulationen ergeben, bei denen hauptsächlich kompressive Moden im Gas angeregt werden. Die Ergebnisse der statistischen Auswertung sollen schließlich auf das Modell von Padoan & Nordlund (2002) angewendet werden, um die Form der IMF abzuleiten. Dabei soll besonders der Einfluss des Treibens, aber auch anderer Parameter kritisch untersucht werden.

Turbulenz ist jedoch nicht nur entscheidend für die Strukturierung der Massenverteilung in interstellaren Wolken. Sie beeinflusst auch die Chemie in Sternentstehungsgebieten. Turbulenter Transport führt zu einer Vermischung chemischer Verbindungen im interstellaren Medium. Dies wiederum beeinflusst die Wirkung von Kühlprozessen in Molekülwolken, hat aber auch wichtige Konsequenzen für die Interpretation beobachteter Konzentrationen bestimmter chemischer Spezies. Deshalb beschäftigt sich der zweite Teil dieser Arbeit mit Lagrangeschen Techniken, die es in numerischen Simulationen ermöglichen, die Trajektorien markierter Flüssigkeitselemente (Tracer Teilchen) zu verfolgen und Aussagen über Mischungsvorgänge in Sternentstehungsgebieten zu machen.

Zunächst wird deshalb in Kapitel 2 auf die Eigenschaften des interstellaren Mediums eingegangen. Darin werden die wesentlichen physikalischen und chemischen Vorgänge behandelt, die in Sternentstehungsgebieten wichtig sind. In Kapitel 3 werden die theoretischen Grundlagen der Hydrodynamik wiederholt, weil diese notwendig sind, um die Dynamik von Sternentstehungsgebieten zu modellieren. Außerdem werden die Gleichungen der Hydrodynamik gebraucht, um Aussagen über die Stabilität von Molekülwolkenkomplexen zu machen (Kapitel 4). In Kapitel 5 wird eine ausführliche Behandlung der Grundlagen von Unter- und Überschallturbulenz präsentiert. Die darin vorgestellten Modelle zur Beschreibung von Überschallturbulenz werden in Kapitel 6 angewendet, um Aussagen über die turbulente Struktur von Sternentstehungsgebieten zu machen. Dazu wird eine hochaufgelöste numerische Simulation kompressiv getriebener Überschallturbulenz ausgewertet und diskutiert. Die Ergebnisse dieser Auswertung werden schließlich benutzt, um einen Ausdruck für die Form der IMF zu erhalten. Kapitel 7 beschreibt zunächst die Technik und Implementierung von Tracer Teilchen in numerischen Simulationen. Anschließend wird die Implementierung benutzt, um das Mischungsverhalten von molekularem Wasserstoff in Sternentstehungsgebieten zu untersuchen. In Kapitel 8 werden die Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf zukünftige Anwendungen der hier entwickelten Überlegungen gegeben.

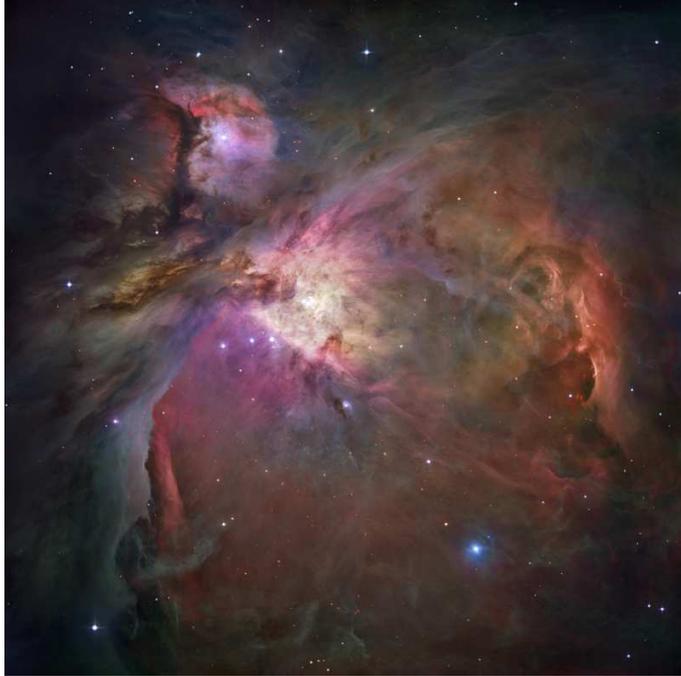


Abbildung 1.1. Der Orion Nebel M42 ist das uns am nächsten gelegene Sternentstehungsgebiet. Kürzlich (vor $< 10^7$ Jahren) entstandene junge O- und B-Sterne regen durch ihre intensive UV-Strahlung das Gas und den Staub im Nebel zum Leuchten an. Sterne solch großer Masse ($\approx 10M_{\odot}$) wurden in nahegelegenen Regionen aus Gas des Orion-Molekülwolkenkomplexes erzeugt. Die Lebensdauer solcher Sterne ist um 2-3 Größenordnungen kürzer als die Lebenszeit der Sonne und des gesamten Universums. Am Ende ihrer Existenz werden sie zu Supernovae, die möglicherweise als wichtige Quelle interstellarer Überschallturbulenz angesehen werden können. Dabei reichern sie den interstellaren Raum mit schweren Elementen an, die sie in ihrem Inneren fusioniert haben. Aus diesem Gas können wiederum neue Sterne gebildet werden. Die Materie, aus der Sterne und Planeten bestehen, kann folglich mehrere Sternentstehungszyklen durchlaufen haben. Dabei wird der relative Anteil schwerer Elemente mit zunehmender Anzahl der Zyklen erhöht und der Aufbau komplexer chemischer Verbindungen ermöglicht. Diese Tatsache bildet letztlich auch die Grundlage für die Entstehung von Leben. (Aufnahme HST, 2004-2006)

2 Sternentstehungsgebiete

2.1 Das interstellare Medium (ISM)

Das ISM ist das Gas im Raum zwischen den Sternen und damit der Ort an dem neue Sterne entstehen. Das ISM umfasst eine Vielzahl an verschiedenen chemischen Verbindungen und Elementen. Die Gasdichten sind bis auf das Innere von Molekülwolken allerdings sehr gering und liegen im Durchschnitt bei nur etwa einem Teilchen pro Kubikzentimeter ($n \approx 1 \text{ cm}^{-3}$).

2.1.1 Zusammensetzung

Das interstellare Medium besteht im Wesentlichen aus drei Phasen:

- Kaltes ISM ($T \lesssim 10^2 \text{ K}$)
- Warmes ISM ($T \approx 10^4 \text{ K}$)
- Heißes ISM ($T \gtrsim 10^6 \text{ K}$)

Hauptbestandteil des Kalten ISM sind HI-Wolken mit Anzahldichten $n \approx 10 - 100 \text{ cm}^{-3}$ und Durchmessern von $\approx 1 - 100 \text{ pc}$. Weil das Medium kaum elektrisch geladene Teilchen enthält, spricht man auch vom Kalten Neutralen Medium (Cold Neutral Medium, CNM). HI-Wolken enthalten $\approx 90\%$ atomaren Wasserstoff und $\approx 10\%$ Helium (relative Anzahl an Teilchen). Dieses Gas macht $\approx 99\%$ der Masse einer HI-Region aus. Das übrige 1% an Masse entfällt auf interstellaren Staub, bestehend aus Spuren schwerer Elemente und Aggregaten größerer Moleküle. HI-Wolken werden durch die 21 cm H-Linie beobachtbar.

Das Warme ISM unterteilt sich in das Warme Neutrale Medium (Warm Neutral Medium, WNM) und in das Warme Ionisierte Medium (Warm Ionized Medium, WIM). Das WIM entsteht durch die Aufheizung und Ionisierung von atomarem Wasserstoff (HI) zu ionisiertem Wasserstoff (HII). Die Beobachtung von HII-Regionen deutet auf nahegelegene O- und B-Sterne hin, die das Gas in ihrer Umgebung aufheizen und ionisieren. Rekombination, sowie unterschiedlich starke Anregung elektronischer Zustände im Wasserstoffatom führen zu einer Vielzahl von Linien, die unter anderem auch die optisch sichtbare Balmer-Serie enthalten (vgl. Abb. 1.1).

Beim Heißen ISM handelt es sich um ionisiertes Gas, das in Supernova-Überresten zu finden ist (Hot Ionized Medium, HIM). Es wird durch die Energie eines explodierten Sterns stark aufgeheizt und hat typische Teilchenanzahldichten von $n \lesssim 0.01 \text{ cm}^{-3}$ (McKee & Ostriker 1977).

Die ersten beiden Phasen (Kaltes und Warmes ISM) werden durch das sogenannte Zweiphasenmodell beschrieben. Das Zweiphasenmodell wird von Field et al. (1969) und Goldsmith et al. (1969) durch ein Druckgleichgewicht zwischen den beiden Phasen erklärt. Die Grundlage dafür stellt thermische Instabilität dar, die in Abschnitt 2.1.2 genauer betrachtet wird. Später wurde das Zweiphasenmodell um das Heiße ISM erweitert (McKee & Ostriker 1977), das schließlich die Koexistenz der drei oben genannten Phasen erklärt (Dreiphasenmodell).

Sternentstehung aber findet in Molekülwolken statt, die sich aus dem CNM, beziehungsweise innerhalb des CNM bilden, wobei HI-Regionen das Reservoir an atomarem Wasserstoff darstellen, das bei ausreichend hohen Dichten ($n \approx 10^3 \text{ cm}^{-3}$) zu H_2 reagieren kann (siehe Abschnitt 2.2). Die Zusammensetzung von Molekülwolkenkomplexen wird in 2.1.3 genauer besprochen. Der genaue Prozess, der zur Bildung von Molekülwolken führt, ist Gegenstand aktueller Forschung. Ein mögliches Szenario zur Molekülwolkenentstehung wird in Abschnitt 2.2.4 vorgestellt. Vorher soll aber noch etwas genauer auf das Zweiphasenmodell und auf thermische Instabilität eingegangen werden.

2.1.2 Zweiphasenmodell des ISM und thermische Instabilität

Atomarer Wasserstoff macht den größten Teil des ISM aus. Er liegt in zwei Phasen vor, die sich im Druckgleichgewicht befinden. Das CNM hat Temperaturen von $\approx 80 \text{ K}$ und Anzahldichten $n \approx 30 \text{ cm}^{-3}$. Daneben existiert das Warme Neutrale Medium mit $T \approx 8 \times 10^3 \text{ K}$ und $n \approx 0.5 \text{ cm}^{-3}$. Bildet man das Produkt nT , so ergibt sich für beide Phasen etwa der gleiche Wert. Dies entspricht nach der idealen Gasgleichung einem Druckgleichgewicht, so dass beide Phasen stabil nebeneinander existieren können. Die zu Grunde liegenden physikalischen Mechanismen, die zur Ausbildung dieses Zweiphasenmediums (Field et al. 1969; Wolfire et al. 1995) führen, sind Heiz- und Kühlprozesse (siehe auch 2.2.2 und 2.2.3).

Abbildung 2.1(links) zeigt den Verlauf der Temperatur in Abhängigkeit von der Dichte, der durch die Berechnung von Heiz- und Kühlraten der wichtigsten Heiz- und Kühlprozesse im ISM zustandekommt. Die Kurve repräsentiert den Zustand, in dem diese Prozesse gerade im Gleichgewicht sind. Die Heizung erfolgt für den gezeigten Bereich hauptsächlich durch Strahlung nahegelegener Sterne (siehe 2.2.2). Im niedrigen Dichtebereich ($\log n \approx -0.5$) kühlt das Gas vorwiegend durch Abstrahlung der angeregten Lyman- α -Linie des atomaren Wasserstoffs, wohingegen bei höheren Dichten das HI durch Abschirmung im Grundzustand ist und ionisierter Kohlenstoff CII am effektivsten durch Strahlung kühlt, weil dieser auch bei höheren Dichten noch ionisiert bleibt. Die durchgezogene Linie in Abbildung 2.1(rechts) zeigt den

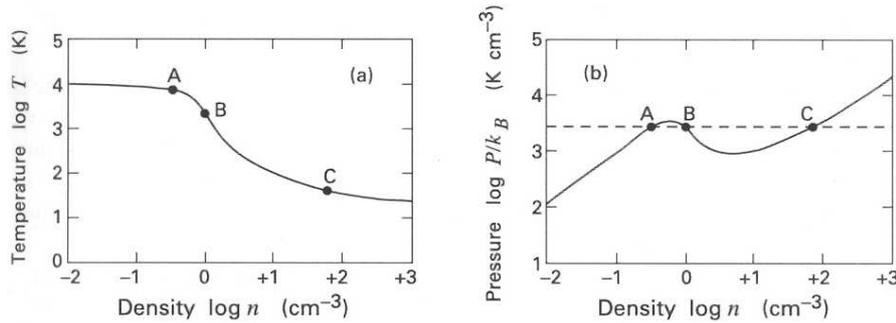


Abbildung 2.1. Durch Vergleich von Heiz- und Kühlprozessen im ISM berechnete Abhängigkeit der Temperatur T von der Gasdichte n (links) und der entsprechende Verlauf für den Druck P/k_B (rechts). Die gestrichelte Linie repräsentiert den empirischen Wert des Drucks im Kalten und Warmen ISM. (aus Stahler & Palla (2004))

entsprechenden Verlauf der Druckgleichgewichtskurve. Liegt ein Teil des betrachteten Gases im ISM oberhalb dieser Kurve, so überwiegt die Kühlung, im anderen Fall ist die Heizung effektiver. Die gestrichelte Linie ist die ideale Gasgleichung $\log T = -\log n + \log(P/k_B)$, wobei $\log(P/k_B) \approx 3 \times 10^3 \text{ K cm}^{-3}$ der empirische Wert des Drucks der beiden oben genannten Phasen ist. Diese Linie schneidet die berechnete Gleichgewichtskurve in drei Punkten. Wenn man sich vorstellt, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Teil des Gases bei Punkt B vorliegt und anschließend leicht komprimiert wird, so befindet es sich oberhalb der Gleichgewichtskurve. Deshalb kühlt dieses Volumenelement schneller, als es aufgeheizt wird. In Folge dessen muss es solange seine Dichte erhöhen und Temperatur verringern, bis es wieder die Gleichgewichtskurve in Punkt C erreicht. Wenn das Volumenelement andererseits ursprünglich bei Punkt B leicht expandiert, heizt es sich solange auf, bis es bei Punkt A wieder im Druckgleichgewicht ist. Der Punkt B repräsentiert folglich einen Zustand *thermischer Instabilität*. Diese thermische Instabilität führt zum oben genannten Zweiphasenmedium, weil kleine Störungen des Gleichgewichts bei B schließlich immer entweder zu Punkt A oder Punkt C führen. Tatsächlich können die Werte bei A und C mit denen des Warmen und Kalten ISM assoziiert werden. Die Bildung eines Multiphasenmediums bedeutet aber nicht, dass es sich hierbei zwangsläufig um eine statische Konfiguration im thermischen Gleichgewicht handelt. Vielmehr ist das ISM geprägt von turbulenten Strömungen, die wiederum als Auslöser für thermische Instabilität gesehen werden können (Elmegreen 1997; Vázquez-Semadeni et al. 2000).

In Molekülwolkenkomplexen wird thermische Instabilität als Erklärung für die beobachtete Fragmentation angeführt. Fragmentation geschieht, wenn die Kühlzeitskala kleiner wird als die dynamische Zeitskala (Burkert & Lin 2000). Die Bildung dichter Gasmassen in Folge von thermischer Instabilität kann weiterhin folgendermaßen verstanden werden. Man betrachtet eine anfänglich homogene Dichteverteilung

im Gleichgewicht, gegeben durch

$$\frac{P}{\rho} \sim T \quad . \quad (2.1)$$

Führt man eine kleine Dichtestörung $\delta\rho$ ein, die auf einer bestimmten Skala eine erhöhte Dichte und eine effektivere Kühlung zur Folge hat, so ändert sich die Temperatur in diesem Bereich $T \rightarrow T^* < T$ und damit verringert sich auch der Druck innerhalb dieser Region:

$$\frac{P^*}{\rho + \delta\rho} \sim \frac{P^*}{\rho} \sim T^* \quad \implies \quad P^* < P \quad . \quad (2.2)$$

Dies führt offensichtlich zu einem Materiefluss aus der Umgebung in die bereits dichtere Region, die dadurch ihre Dichte weiter vergrößern kann. Es entsteht also auf ganz natürliche Weise ein Medium mit dichten Gasansammlungen und weniger dichten Zwischenräumen. Die sich bildenden Bereiche stehen dann aber nicht im thermischen Gleichgewicht. Wärmeleitung kann deshalb zumindest auf ausreichend kleinen Skalen thermische Instabilität unterdrücken.

Eine Kombination von thermischer Instabilität und dynamischen Instabilitäten (z. B. Kelvin-Helmholtz-Instabilität, Vishniac-Instabilität) kann als Ursache der beobachteten Turbulenz im interstellaren Medium, sowie in Molekülwolken angesehen werden. Koyama & Inutsuka (2000, 2002) zeigen dies in 2-dimensionalen numerischen Simulationen.

2.1.3 Zusammensetzung von Molekülwolkenkomplexen

Weite Bereiche eines Molekülwolkenkomplexes bestehen aus Unterbereichen mit Anzahldichten von $\gtrsim 10^2 \text{ cm}^{-3}$. Diese Molekülwolken bestehen vorwiegend aus molekularem Wasserstoff (H_2). Weiterhin befinden sich aber auch noch komplexere Moleküle darin, wie zum Beispiel Kohlenstoffmonoxid (CO), das zweithäufigste Molekül, Ammoniak (NH_3) und langkettigere Kohlenwasserstoffverbindungen, die teilweise auch zyklisch sein können (polyzyklische Aromaten, PAHs¹). Es wurden bisher mehr als 200 verschiedene chemische Verbindungen anhand ihrer Spektralsignatur erkannt (van Dishoeck & Blake 1998), die besonders in dichten Regionen von Molekülwolken entstehen (Garrod et al. 2005, 2006a). Daneben gibt es Staub, eine Bezeichnung für größere Moleküle mit mehreren hundert Kohlenstoffatomen und Aggregaten von Molekülen, die sich zu größeren Staubkörnern geklumpt haben. PAHs können als die kleinsten Staubkörner angesehen werden.

Einige Gebiete innerhalb größerer Molekülwolkenkomplexe haben Sterne gebildet oder befinden sich gerade in einer Sternentstehungsphase. Diese Gebiete enthalten dann neben molekularem Gas auch Ansammlungen von Sternen (Sternhaufen). Im

¹Polycyclic Aromatic Hydrocarbons

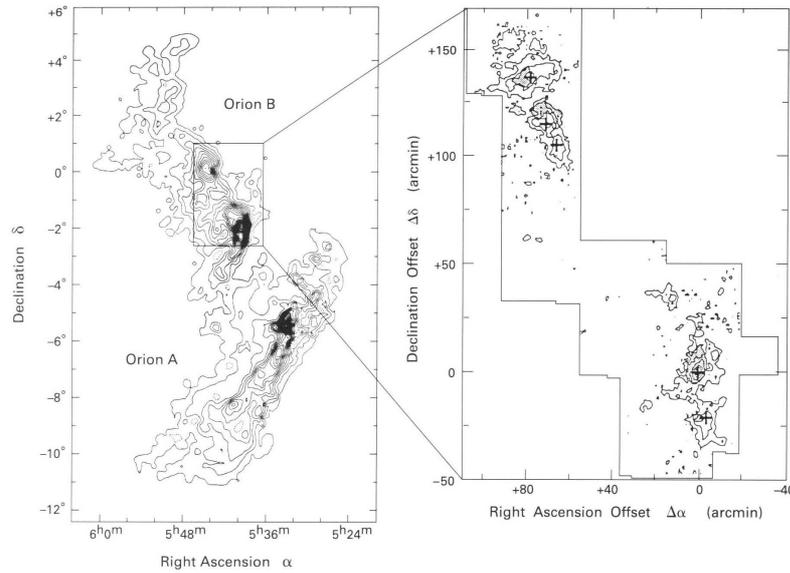


Abbildung 2.2. Karte des gesamten Orion Molekülwolkenkomplexes, aufgenommen mit Hilfe der 2.6 mm CO-Emissionslinie. Der vergrößerte Ausschnitt wurde mit Hilfe der 3.1 mm Linie von CS aufgenommen, die bei höheren Gasdichten besser angeregt wird. (aus Stahler & Palla (2004))

Orion Nebel beobachtet man zum Beispiel ≈ 1000 Sterne in unterschiedlichen Entwicklungsstadien.

2.1.4 Beobachtung und Eigenschaften von Molekülwolken

Zur Beobachtung der inneren Struktur von Molekülwolken verwendet man Radioteleskope, da Molekülwolken verhältnismäßig dicht sind und Licht im optischen Spektralbereich das Gas kaum durchdringen kann. Elektromagnetische Strahlung im Infrarot und Radio kann jedoch auch dichte Regionen durchdringen und detektiert werden. Diese Beobachtungen liefern Karten wie in Abbildung 2.2, die ein hochaufgelöstes Infrarotkonturbild der gesamten Orion Molekülwolke zeigt. Hier sieht man Konturlinien des 2.6 mm Rotationsübergangs von CO, der bei Gasdichten von $\approx 10^3 \text{ cm}^{-3}$ gut angeregt wird. Um kleinere Skalen aufzulösen, wird ein anderer Rotationsübergang benutzt. Der vergrößerte Ausschnitt zeigt Konturlinien des 3.1 mm Übergangs von CS, der bevorzugt bei $n \approx 10^4 \text{ cm}^{-3}$ gut beobachtbar ist. Dies zeigt, dass die Rotationsübergänge verschiedener Moleküle dazu genutzt werden können, um zwischen Bereichen geringerer und größerer Dichte zu unterscheiden. Im gezeigten Beispiel sind offenbar die kleineren Strukturen circa um eine Größenordnung dichter, als die größeren Strukturen. Besonders auffällig ist die selbstähnliche Struktur. Dies ist ein Hinweis auf die Fragmentierung großer Strukturen in kleinere Strukturen mit höheren Dichten, ein wesentlicher physikalischer Prozess in Molekülwolken,

der vermutlich hauptsächlich mit der Wirkung der Turbulenz in Molekülwolken in Verbindung gebracht werden kann (Padoan & Nordlund 2002). Auf der Skala der Molekülwolke selbst fällt ihre langgezogene Struktur auf. Auch bei anderen Molekülwolken beobachtet man diese Abweichung von einer sphärischen Geometrie. Dies ist möglicherweise ein wichtiger Hinweis auf die Entstehung von Molekülwolken im interstellaren Medium auf galaktischen Skalen. Eine langgezogene blattartige Struktur entsteht beispielsweise an den Stellen, wo zwei Dichtewellen aufeinandertreffen. Desweiteren können Magnetfelder zu einer Vorzugsrichtung und damit verbundenen Verformung führen.

2.2 Entstehung von Molekülwolken

Die genauen physikalischen Abläufe, die zur Entstehung von Molekülwolkenkomplexen führen, sind noch nicht vollständig verstanden und Gegenstand aktueller Forschung. Ein mögliches Szenario wird in Abschnitt 2.2.4 umrissen. Vorher werden aber die wichtigsten chemischen und physikalischen Prozesse erläutert, die mit Sicherheit bei der Bildung von Molekülwolken eine Rolle spielen.

2.2.1 Bildung von molekularem Wasserstoff

Wie in Abschnitt 2.1 gesehen, besteht das interstellare Medium in Galaxien zum größten Teil aus atomarem Gas, mit einer Zusammensetzung von $\approx 90\%$ atomarem Wasserstoff und $\approx 10\%$ Helium, sowie Spuren von schwereren Elementen. Die mittleren Dichten betragen nur $n \approx 1 \text{ cm}^{-3}$. Bedingt durch diese geringen Dichten kommt es nur sehr selten zu Kollisionen zwischen Atomen und die Wahrscheinlichkeit zur Bildung von Molekülen ist sehr gering. Wird dennoch zufällig einmal ein Molekül gebildet, so wird es sehr schnell wieder durch kosmische Strahlung oder durch UV-Strahlung nahegelegener Sterne dissoziiert. Molekularer Wasserstoff kann deshalb nur bei ausreichend hohen Dichten gebildet werden. Die Bildung von H_2 bei hohen Gasdichten wird zum einen dadurch begünstigt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Aufeinandertreffen zweier H Atome wesentlich steigt und zum anderen die höhere Gasdichte eine höhere optische Dicke zur Folge hat, die das UV-Strahlungsfeld abschwächt. Besonders wichtig für die Abschwächung von UV-Strahlung sind Staub-Aggregate, die absorbierte Energie in Form von Infrarotstrahlung reemittieren. So kann, umhüllt von einem Bereich atomaren Wasserstoffs, im Inneren einer Gaswolke H_2 gebildet werden (self-shielding). Staub-Aggregate spielen aber nicht nur indirekt durch das Abschirmen von UV-Strahlung eine Rolle bei der Entstehung von H_2 , sondern dienen auch direkt als chemischer Katalysator.

Die Bildung von molekularem Wasserstoff (H_2) kann sowohl in der Gasphase, als auch katalysiert durch die Anwesenheit von Staub-Aggregaten erfolgen. Im letzteren Fall trifft ein Wasserstoffatom auf ein solches Staub-Aggregat und bleibt mit

einer gewissen Wahrscheinlichkeit, bedingt durch Van-der-Waals-Wechselwirkung, hängen. Ein zweites Wasserstoffatom hat dann mehr Zeit, ebenfalls an dieses Staub-Aggregat zu koppeln und auf der Oberfläche zusammen mit dem anderen H-Atom ein H₂-Molekül zu bilden. Dieses verlässt das Staub-Aggregat wieder, da es dann kein freies Elektron mehr zur Verfügung hat, das vorher zur Bindung am Staub beitrug. Die Zeitskala τ_{form} zur Bildung von H₂ an Staub-Aggregaten ist

$$\tau_{\text{form}} = \frac{10^9 \text{ Jahre}}{n}, \quad (2.3)$$

wobei n die Anzahldichte atomaren Wasserstoffs bedeutet (Hollenbach et al. 1971; Hollenbach & Tielens 1999; Glover & Mac Low 2006a,b).

H₂-Bildung in der Gasphase erfolgt hauptsächlich durch die Reaktionen



Diese Reaktionen waren vermutlich entscheidend für die Bildung von H₂ im frühen Universum, als noch kaum Staub vorhanden war und damit wichtig für primordiale Sternentstehung. Für die Sternentstehung im späten Universum und bis heute ist die Bildung von H₂ an Staubkörnern wichtiger (Glover 2003).

2.2.2 Heizprozesse

Äußere Strahlungsquellen sind die wichtigste Ursache, durch welche die thermische Energie und damit die Temperatur von Molekülwolken erhöht wird. Diese Heizprozesse sind dann durch Ionisierung von Atomen und Molekülen charakterisiert. Die dabei freigesetzten Elektronen dissipieren ihre kinetische Energie hauptsächlich durch ineleastische Stöße mit Molekülen. Dies führt zu einer Erhöhung der Gastemperatur. Die Ionisation, verursacht durch kosmische Strahlung und stellare Strahlungsquellen im Umfeld der Molekülwolke, bildet auch die Voraussetzung für die darauf folgende Bildung von komplexen Molekülen. Heizprozesse stellen gewissermaßen Gleichgewichtsreaktionen dar, die Molekülbildung durch Ionisation von Atomen erst ermöglichen, aber die entstandenen Moleküle auch wieder dissoziieren können. Die Gleichungen



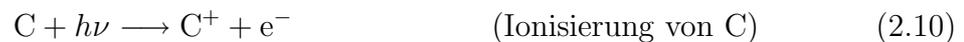
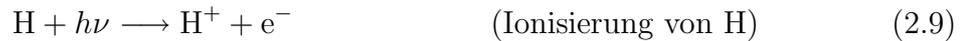
geben die Reaktionen zur Ionisierung von atomarem und molekularem Wasserstoff durch kosmische Strahlung an. Kosmische Strahlen bestehen hauptsächlich aus hochenergetischen Protonen, deren Ursprung vermutlich in Supernova-Überresten zu finden ist. Die Hauptwirkung der kosmischen Strahlen ist die Ionisierung von H und

H₂, die zur Freisetzung eines Elektrons führen. Dieses Elektron kann im Folgenden durch die Reaktion



seine kinetische Energie an das Gas abgeben. Das ist der wichtigste Prozess, der zur Aufheizung des Gases durch kosmische Strahlung führt (Stahler & Palla 2004).

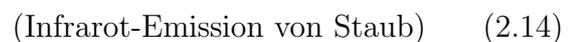
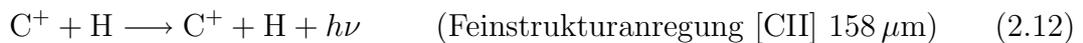
Die effektive Aufheizung durch nahegelegene stellare Strahlungsquellen in Form von UV- bzw. Röntgenphotonen beschreiben die Reaktionen



Die Röntgen- bzw. UV-Photonen $h\nu$ sind thermische Bremsstrahlung von Elektronen, die im Sternplasma beschleunigt und abgebremst werden.

2.2.3 Kühlprozesse

Um Gas zu kühlen, muss dem System in der Bilanz thermische Energie entzogen werden. Die Grundlage aller Kühlprozesse in Molekülwolken besteht daher in einer thermischen Anregung von elektronischen Zuständen in Atomen, beziehungsweise in Anregung von Vibrations- und Rotationszuständen von Molekülen durch Stöße. Diese angeregten Zustände können im Folgenden durch die Emission von Photonen wieder in niedrigere Anregungszustände oder in den Grundzustand relaxieren. Verlassen die emittierten Photonen das Gas, bevor sie reabsorbiert werden, was stark von der Dichte und Zusammensetzung des Gases abhängt, so wurde der Molekülwolke effektiv thermische Energie entzogen und diese damit gekühlt. Bei Kühlprozessen unterscheidet man Kühlung durch Atome, Ionen, Moleküle und Staub. Die folgenden Gleichungen geben die wichtigsten Prozesse wieder:



Die Anregung von atomarem Sauerstoff (OI) und ionisiertem Kohlenstoff (CII) erfolgt bevorzugt bei Dichten von $\approx 10^3 \text{ cm}^{-3}$ (Stahler & Palla 2004). Besonders wichtig für die Kühlung von Molekülwolken sind die sich darin befindenden Moleküle. Das am häufigsten vorkommende Molekül H₂ trägt allerdings kaum zur Kühlung bei. Der Grund dafür liegt in der geometrischen Struktur von molekularem Wasserstoff. Es ist symmetrisch gebaut und besitzt kein permanentes Dipolmoment, ähnlich wie Methan (CH₄) durch seine tetraedrische Struktur. H₂ kann zwar durch Kollisionen

angeregt werden, verliert aber die aus dem Gas entnommene Wärme kaum durch Emission von Strahlung, sondern zum größten Teil wieder durch eigene Stoßanregungen mit Teilchen in der Umgebung. H_2 kann aber zum Beispiel CO wie in Gleichung (2.13) durch Kollision in einen angeregten Rotationszustand bringen. CO ist asymmetrisch mit einer höheren Elektronenkonzentration beim Sauerstoffatom. Es besitzt daher ein Dipolmoment und kann deshalb die thermische Anregungsenergie letztlich abstrahlen.

Schließlich trägt noch die Infrarot-Emission von Staubkörnern, die durch Stöße zu Gitterschwingungen angeregt werden, zur Kühlung bei.

2.2.4 Mögliches Szenario zur Entstehung von Molekülwolken

Eine Reihe aktueller Publikationen beschäftigt sich mit der Entstehung von Molekülwolken im interstellaren Medium (Vazquez-Semadeni 2006; Vazquez-Semadeni et al. 2006; Heitsch et al. 2006; Clark & Bonnell 2006). Die Grundlage zur Bildung von molekularem Wasserstoff ist eine ausreichend starke Verdichtung von interstellarem atomarem Wasserstoffgas. Die Autoren beschäftigen sich daher mit einem Szenario, in dem gegeneinander laufende Strömungen im ISM solche Verdichtungen erzeugen. Als Ursprung der Strömungen wird thermische Instabilität in Kombination mit dynamischen Instabilitäten angeführt. Dabei sind die typischen Geschwindigkeiten der Strömungen im Bereich der Schallgeschwindigkeit oder leicht im Überschallbereich (Vázquez-Semadeni 2006). Die entsprechenden Mach-Zahlen sind deshalb $\gtrsim 1$, was mit den beobachteten Geschwindigkeitsdispersionen im WIM vereinbar ist. Die erzeugten Kompressionen führen zu Dichten, welche eine ausreichend schnelle Bildung von H_2 erlauben (siehe Gleichung (2.3)). Desweiteren steigen die Temperaturen in der komprimierten Region an. Infolgedessen wird das Gas teilweise ionisiert, was eine Reihe chemischer Reaktionen auslösen kann, wobei unter anderem Moleküle wie CO gebildet werden. Diese tragen wiederum zur Kühlung bei und können die Temperatur trotz höherer Gasdichte verringern, so dass die entstandene Verdichtung nicht sofort wieder expandiert und im ISM verschwindet. Die Kühlungsmechanismen können sogar dafür sorgen, dass der Druck im Inneren der Verdichtung kleiner ist als außerhalb. Dadurch fließt weitere Materie von außen nach und vergrößert die Masse. Die dabei auftretenden Strömungen, die ursprünglich durch die Kühlung und damit verbundene thermische Instabilität zustande kommen, können dynamische Instabilitäten wie Vishniac-Instabilität (Vishniac 1994) und Kelvin-Helmholtz-Instabilität hervorrufen. Dies führt schließlich zu den in Molekülwolken beobachteten ungeordneten Bewegungen, die mit Turbulenz assoziiert werden (Padoan et al. 2006). Die entstandene Turbulenz kann schließlich als Ursache für die Fragmentation großer Molekülwolkenkomplexe in kleiner und kleiner werdende Strukturen verstanden werden (Padoan & Nordlund 2002). Einige dieser Fragmente sind dicht genug, um zu kol-

labieren. Damit dies geschehen kann, muss ihre Masse größer als die Jeans-Masse² sein. Für eine isotherme Gasmasse sinkt die Jeans-Masse mit $M_J \sim \rho^{-1/2}$. Besonders dichte Bereiche können deshalb schließlich einen Protostern mit protoplanetarer Scheibe bilden.

²Das Konzept des Gravitationskollaps und der Jeans-Masse wird in Kapitel 4 genauer behandelt.

3 Hydrodynamik

3.1 Gleichungen der Hydrodynamik

Die Gleichungen der Hydrodynamik lassen sich auf vielfältige astrophysikalische Fragestellungen und Situationen anwenden. Molekülwolken werden in der theoretischen Astrophysik als selbstgravitierende, ideale Fluide (Flüssigkeiten, Gase) behandelt. Ideale Flüssigkeiten sind nicht-viskos, dissipations- und diffusionsfrei. Manchmal werden auch Magnetfelder berücksichtigt (Magnetohydrodynamik, MHD). Um zwischen den Eigenschaften unterschiedlicher Materie und unterschiedlicher physikalischer Situationen (Entartung/Nicht-Entartung) zu unterscheiden, in der sich das Fluid befindet, wird eine thermodynamische Zustandsgleichung herangezogen, die das System der gekoppelten partiellen Differentialgleichungen abschließt. Da für Molekülwolken in grober Näherung eine nahezu konstante Temperatur beobachtet wird, benutzt man häufig eine "isotherme Zustandsgleichung"¹. Standardwerke zur Hydrodynamik sind z. B. Greiner & Stock (1984) und Landau & Lifschitz (1986).

3.1.1 Eulersche und Lagrangesche Darstellung

In der Eulerschen Darstellung der Hydrodynamik betrachtet man Felder $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Hier sind der Ort \mathbf{x} und die Zeit t unabhängige Variablen.

Die Lagrangesche Darstellung hingegen formuliert die Bewegung einzelner Flüssigkeitselemente, die sich auf einer Bahn $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ bewegen. Der Ort \mathbf{x} ist hier also eine Funktion von t , wobei zwischen den einzelnen Flüssigkeitselementen unterschieden wird, indem man sie mit einem konstanten \mathbf{a} kennzeichnet. Der Vektor \mathbf{a} wird meist als Ort des Teilchens zur Zeit $t = 0$ genommen, so dass $\mathbf{a} = \mathbf{x}(0)$. Diese Darstellung entspricht einer Beschreibung von Flüssigkeitselementen i und deren Bewegung $\mathbf{x}_i(t)$ mit

$$\mathbf{x}_i(t) \rightarrow \mathbf{x}(i, t) \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \quad . \quad (3.1)$$

Die Änderungen eines Flüssigkeitselements werden also im mitbewegten, oder Lagrangeschen Bezugssystem beschrieben.

¹Mit einer isothermen Zustandsgleichung ist die Zustandsgleichung des idealen Gases gemeint, wobei die Temperatur konstant gehalten wird. Dies kann formal dadurch erreicht werden, dass man den Adiabatenindex γ gegen 1 gehen lässt (siehe 3.1.7 und A.1).

3.1.2 Wechsel zwischen Lagrange- und Eulersystem

Das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ aus 3.1.1 sei der Einfachheit halber im Folgenden ein Skalarfeld $f(\mathbf{x}, t)$, das beispielsweise die Dichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ oder den Druck $P(\mathbf{x}, t)$ beschreibt. Möchte man nun wissen, wie sich ein Flüssigkeitselement mit der Bahn $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ bezüglich dieser Größe im mitbewegten Bezugssystem zeitlich ändert, so schreibt man

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) \right|_{\mathbf{a}} = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t) \right|_{\mathbf{a}} \quad (3.2a)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \left. \frac{d}{dt} \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \right|_{\mathbf{a}} \quad (3.2b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \nabla f(\mathbf{x}, t) \quad (3.2c)$$

mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ des betrachteten Flüssigkeitselements.

Zieht man aus Gleichung (3.2c) das Skalarfeld heraus, so gilt

$$\frac{d}{dt} f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f \quad (3.3)$$

und damit wird die substantielle Ableitung oder auch Euler-Ableitung

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (3.4)$$

definiert, die allgemein auch auf Vektorfelder \mathbf{f} angewendet werden kann (siehe A.2).

3.1.3 Verallgemeinerte Transportgleichung

Man betrachtet in der Hydrodynamik keine einzelnen Flüssigkeits- oder Gasteilchen, sondern immer eine große Anzahl dieser Teilchen innerhalb eines Volumenelements dV , so dass man thermodynamische Größen (Dichte ρ , Druck P , Temperatur T und Energiedichte ϵ) dieses Ensembles definieren kann. Das Fluid wird demnach als ein Kontinuum angesehen.

Man betrachtet nun eine skalare Größe A , die für ein bestimmtes Fluidelement durch

$$A = \sum_i m_i a_i(t) \longrightarrow \int_{V(t)} dV \rho a(\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

definiert ist. Ändert sich diese Größe im mitbewegten, zeitabhängigen Fluidelement nicht, so gilt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV \rho a(\mathbf{x}, t) = 0 \quad . \quad (3.6)$$

Da das Volumen $V(t)$ aber zeitabhängig ist, kann man die Zeitableitung nicht direkt unter das Integral ziehen, sondern muss berücksichtigen, dass sich das Volumen in seiner Form ändert, wenn es mit dem Fluid transportiert wird. Deshalb benutzt man die Jacobi-Determinante

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

und kann $dV = JdV_0$ schreiben. Damit wird Gleichung (3.6) zu

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV \rho a = \int_{V_0} dV_0 \frac{d}{dt} (J \rho a) = \int_{V_0} dV_0 \left[\rho a \frac{d}{dt} J + J \frac{d}{dt} (\rho a) \right] \quad (3.8)$$

Die zeitliche Änderung der Jacobideterminante ist $\frac{d}{dt} J = J \nabla \cdot \mathbf{v} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$, wie im Anhang von Maier (2005) gezeigt ist. Damit und unter Ausnutzung der Eulerableitung (3.4) für ρa kann

$$\frac{d}{dt} A = \int_{V_0} J dV_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho a) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho a + \rho a \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.9a)$$

$$= \int_{V(t)} dV \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho a) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho a) \right] \quad (3.9b)$$

$$= 0 \quad (3.9c)$$

geschrieben werden. In der zweiten Zeile wurde die Produktregel angewandt und wieder zum ursprünglich zeitabhängigen Volumen mit Hilfe der Jacobideterminante zurückgegangen. Da Gleichung (3.6) unabhängig vom betrachteten Volumen V gültig sein soll, ergibt sich eine verallgemeinerte Transportgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho a) + \operatorname{div} (\mathbf{v} \rho a) = 0 \quad (3.10)$$

für die Größe ρa .

Wird die Größe ρa allerdings nicht nur transportiert², sondern unterliegt Produktions- und Vernichtungsprozessen (z. B. chemische Reaktionen), so stehen auf der rechten Seite von (3.10) Quell- bzw. Senkterme.

3.1.4 Massenerhaltung

Setzt man in (3.10) $a = 1$, so ergibt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (3.11)$$

²Man spricht auch von "advectiert" als Verb für "Advektion"

Sie beschreibt die Massenerhaltung. Anschaulich ist klar, dass sich die Masse und damit die Dichte innerhalb eines Volumens an einem festen Ort des Fluids zeitlich nur dadurch ändert, dass Materie aus dem Volumen heraus, bzw. in das Volumen hinein fließt, was durch den Term $\text{div}(\rho\mathbf{v})$ beschrieben wird.

3.1.5 Bewegungsgleichung

Flüssigkeitselemente unterliegen Beschleunigungen, die durch Druckunterschiede, Gravitation, etc. hervorgerufen werden. Der Druck $P = |dF/dA|$ ruft eine Kraft

$$\mathbf{F}_P = - \oint_A P d\mathbf{A} = - \oint_V \nabla P dV \quad (3.12)$$

hervor, wobei im zweiten Schritt der Satz von Gauß verwendet wurde. Die Gravitation bewirkt eine Kraft

$$\mathbf{F}_G = - \int \nabla\Phi dm = - \int_V \nabla\Phi \rho dV \quad (3.13)$$

Die Beschleunigung, die ein Fluidelement erfährt, ist somit

$$\int_V \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho dV = - \int_V \nabla P dV - \int_V \nabla\Phi \rho dV \quad (3.14)$$

Verwendung der Eulerableitung (3.4) und Übergang zur differentiellen Darstellung liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla\Phi \quad (3.15)$$

Diese Bewegungsgleichung wird Eulergleichung genannt. Für das Gravitationspotential Φ benötigt man noch eine weitere Gleichung, die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (3.16)$$

Gleichung (3.15) geht auch aus der allgemeinen Transportgleichung (3.10) durch Berücksichtigung der Quell- und Senkterme q und Setzen von $a \rightarrow \mathbf{v}$ hervor, wobei man die Komponenten v_i betrachtet und die Einsteinsche Summenkonvention beachtet:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \rho v_j) = q \quad (3.17)$$

Nutzt man noch die Kontinuitätsgleichung (3.11) ergibt sich wieder (3.15).

3.1.6 Energiegleichung

Die Gesamtenergie E ist als Summe aus kinetischer $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ und innerer Energie U definiert. Teilt man durch die Masse m , erhält man spezifische Größen, die mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden:

$$e = u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \quad (3.18)$$

Ausgehend vom 1. Hauptsatz der Thermodynamik kann man die Änderung der spezifischen inneren Energie schreiben als

$$du = T ds - P \frac{dV}{m} = T ds - P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T ds + \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad . \quad (3.19)$$

Die zeitliche Änderung der spezifischen inneren Energie ist dann

$$\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (3.20a)$$

$$= -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (3.20b)$$

wobei $ds/dt = 0$ für ein ideales Fluid und die Kontinuitätsgleichung (3.11) im zweiten Schritt verwendet wurden.

Möchte man nun die Änderung der spezifischen Gesamtenergie berechnen, so muss man

$$\frac{de}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \frac{d}{dt} \mathbf{v} \quad (3.21)$$

schreiben.

Nutzt man sowohl die Kontinuitätsgleichung (3.11), die Eulergleichung (3.15), als auch die Eulerableitung (3.4) und formt um (siehe Anhang A.3), so ergibt sich die Energiegleichung für die Energiedichte ρe

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\rho e + P)] = -\rho \mathbf{v} \nabla \Phi \quad . \quad (3.22)$$

3.1.7 Zusammenfassung der hydrodynamischen Gleichungen

Betrachtet man ideale, selbstgravitierende Fluide, so hat man ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen für die Größen Dichte ρ , Geschwindigkeit \mathbf{v} und Energiedichte ρe zu lösen. Wenn außerdem noch ein äußeres Beschleunigungsfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ wirkt, dass z. B. durch ein stochastisches Kraftfeld erzeugt wird, muss man dieses einfach als Quellterm in der Eulergleichung (3.15) und in der Energiegleichung (3.22) hinzufügen. Bei Berücksichtigung von Eigengravitation muss desweiteren die

Poisson-Gleichung hinzugenommen werden. Druck und Dichte (im Allgemeinen auch die Temperatur) sind über eine Zustandsgleichung verbunden. Hierfür wird häufig die ideale Gasgleichung (A.1) herangezogen.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \mathbf{f} \quad (3.23b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\rho e + P)] = -\rho \mathbf{v} \nabla \Phi + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \quad (3.23c)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (3.23d)$$

$$P = \rho(\gamma - 1)u \quad \text{mit} \quad u = e - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \quad (3.23e)$$

Für $\gamma = 1$ erhält man eine "isotherme Zustandsgleichung". Dies entspricht einem Gas mit unendlich vielen Freiheitsgraden f , so dass die innere Energie divergiert. In numerischen Simulationen von Molekülwolken wird häufig ein Wert von γ möglichst nahe an 1 gewählt, um isotherme Gase zu simulieren. Man versucht auf diesem Wege den Effekt des radiativen Kühlens (siehe Abschnitt 2.2.3) zu approximieren, der trotz Kompression des Gases dafür sorgt, dass es eine nahezu konstante Temperatur hält.

3.2 Magnetohydrodynamik

In der Magnetohydrodynamik (MHD) berücksichtigt man die Wirkung magnetischer Felder \mathbf{B} , indem man die Eulergleichung (3.15) um einen Term entsprechend der Lorentz-Kraft $\mathbf{F}_L = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{n_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ erweitert:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.24)$$

Unter Benutzung des Ampèreschen Gesetzes

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.25)$$

wobei Maxwell's Verschiebungsstrom $\sim \partial E / \partial t$ für die hier zu betrachtenden niedrigen Frequenzen vernachlässigt wird, ergibt (3.24)

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla |\mathbf{B}^2| \quad (3.26)$$

Der letzte Term in dieser Gleichung entspricht einem magnetischen Druckgradienten. Dieser Term wird in Abschnitt 4.2 wieder aufgegriffen, wo das Verhältnis der einzelnen Komponenten (thermischer Druck, magnetischer Druck und kinetische Energiedichte) zur potentiellen Energiedichte genauer untersucht wird. Es sei noch erwähnt, dass zur Vollständigkeit des MHD-Gleichungssystems eine weitere Gleichung benötigt wird, welche die Entwicklung des Magnetfelds beschreibt, die aber für die Argumentation in 4.2 nicht gebraucht wird.

4 Stabilität von Molekülwolkenkomplexen

Die in der Milchstraße beobachtete Sternentstehungsrate beträgt $\text{SFR} \approx 3M_{\odot}/\text{Jahr}$. Aus theoretischen Abschätzungen ergibt sich bei Berücksichtigung typischer Massen und Temperaturen von Molekülwolkenkomplexen eine Sternentstehungsrate, die circa 2 Größenordnungen höher sein sollte (Krumholz & McKee 2005). Molekülwolken sollten unter ihrem Eigengewicht schnell kollabieren und besonders effektiv mit einer Sternentstehungseffizienz von $\text{SFE} \sim \frac{M_{\star}}{M_{\star} + M_{\text{gas}}} \gtrsim 50\%$ Sterne bilden. Beobachtet wird aber wiederum nur eine Effizienz von $\approx 5\%$. Es ist deshalb zu erwarten, dass thermische Druckgradienten nicht ausreichend sind, um Molekülwolkenkomplexe zu stabilisieren. In diesem Kapitel sollen weitere Möglichkeiten zur Stabilisierung von Molekülwolken und deren relative Bedeutung angesprochen werden.

4.1 Gravitationsinstabilität

Um abzuschätzen, wann eine Gaswolke unter ihrem Eigengewicht kollabiert, kann man eine einfache Energiebilanz aufstellen, die kinetische und potentielle Energie vergleicht. Im Falle eines virialen Gleichgewichts ist der Betrag der gesamten potentiellen Energie genau doppelt so groß wie die gesamte kinetische Energie und die Gaswolke ist stabil. Gilt $E_{\text{pot}} + 2E_{\text{kin}} > 0$, expandiert das System, für $E_{\text{pot}} + 2E_{\text{kin}} < 0$ kollabiert es.

Eine genauere Untersuchung dieses einfachen Zusammenhangs erfordert eine lineare Stabilitätsanalyse, bei der man dynamische Größen auf einem homogenen Hintergrund zulässt. Deshalb muss man die dynamischen Gleichungen der Hydrodynamik betrachten. Entscheidend für die Stabilität einer Gasansammlung ist das Wechselspiel von Gravitation und Druckgradienten. Für den Fall, dass nur thermische Druckgradienten eine Rolle spielen und man die Gaswolke als unendlich ausgedehntes Medium, sowie als ideales und damit nicht-viskoses Fluid auffasst, hat Jeans (1902) eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt, die im Folgenden genauer beschrieben wird.

Um die Gleichungen selbstgravitierender, idealer Flüssigkeiten (3.23) zu linearisieren, werden die dynamischen Größen ρ , \mathbf{v} , P , sowie das Gravitationspotential Φ in einen konstanten Hintergrundanteil und eine zeit- und ortsabhängige Störung

aufgeteilt:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ P &= P_0 + \delta P(\mathbf{x}, t) \\ \Phi &= \Phi_0 + \delta\Phi(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

Einsetzen der gestörten Größen in (3.23a), (3.23b) und (3.23d) ergibt

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\nabla\delta\mathbf{v} = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_0}\nabla\delta\rho - \nabla\delta\Phi \quad (4.1b)$$

$$\Delta\delta\Phi = 4\pi G\delta\rho. \quad (4.1c)$$

In Gleichung (4.1b) wurde die Schallgeschwindigkeit c_s , gegeben durch $c_s^2 = \gamma P/\rho$ mit $\gamma = 1$ benutzt. Eine genaue Herleitung der Gleichungen (4.1) befindet sich in A.4.

Kombiniert man die Gleichungen $\frac{\partial}{\partial t}(4.1a)$ und $\nabla(4.1b)$, sowie die Poisson-Gleichung (4.1c), so ergibt sich eine Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho - c_s^2\Delta\delta\rho - 4\pi G\rho_0\delta\rho = 0 \quad (4.2)$$

für $\delta\rho$. Der Ansatz ebener Wellen

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) \sim e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad (4.3)$$

führt durch Einsetzen in (4.2) mit $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$ und $\Delta \rightarrow -k^2$ auf die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0. \quad (4.4)$$

Wenn $\omega^2 > 0$, so beschreibt Gleichung (4.2) tatsächlich Wellen, nämlich Schallwellen, die das Medium durchlaufen. Ist aber $\omega^2 < 0$, existieren zeitlich exponentiell anwachsende und abfallende Lösungen der Wellengleichung. Die Grenze zwischen oszillierenden und exponentiellen Lösungen ist durch die Jeans-Wellenzahl k_J gegeben und die Bedingung für anwachsende Lösungen lautet

$$k^2 < k_J^2 \equiv \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}. \quad (4.5)$$

Entsprechend k_J kann die Jeans-Länge

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} \quad (4.6)$$

definiert werden. Störungen auf Längenskalen, die größer als λ_J sind, können exponentiell auf der dynamischen Zeitskala

$$\tau_{\text{dyn}} = \left(\frac{\pi}{G\rho_0} \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

anwachsen, die im Wesentlichen der Freifallzeitskala

$$\tau_{\text{ff}} \equiv \left(\frac{3\pi}{32 G\rho_0} \right)^{1/2}, \quad (4.8)$$

entspricht. Die Definition der Freifallzeitskala in Form von (4.8) ist Konvention (Stahler & Palla 2004).

Gleichung (4.5) gibt die Bedingung für Gravitationsinstabilität, auch Jeans-Instabilität genannt an. Definiert man sich noch einen Jeans-Radius $R_J \equiv \lambda_J/2$, kann man die maximale Masse einer Gasansammlung bestimmen, die gerade noch stabil ist. Dies ist die Masse

$$\begin{aligned} M_J &= \frac{4}{3}\pi R_J^3 \rho_0 \\ &= \frac{1}{6}\pi^{5/2} G^{-3/2} c_s^3 \rho_0^{-1/2} \\ &= \frac{1}{6}\pi^{5/2} \left(\frac{k_B}{Gm_H\mu} \right)^{3/2} T^{3/2} \rho_0^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

innerhalb einer Kugel mit Jeans-Radius und homogener Dichte ρ_0 . Im letzten Schritt wurde $c_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho_0}$ mit $\gamma = 1$ und die Zustandsgleichung des idealen Gases (A.1) verwendet. k_B , m_H und μ sind die Boltzmannkonstante, die Masse eines Wasserstoffatoms und das mittlere Teilchengewicht. Setzt man typische Werte für Molekülwolkenkomplexe ein, so ergibt sich eine Jeans-Masse von

$$M_J = 13 M_\odot \left(\frac{T}{10\text{K}} \right)^{3/2} \left(\frac{n}{10^3\text{cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\mu}{2.4} \right)^{-3/2}. \quad (4.10)$$

Diese Masse ist viel kleiner als die Masse von Molekülwolkenkomplexen, die bis zu $M \approx 10^6 M_\odot$ haben können. Das bedeutet, dass diese Molekülwolken gravitativ instabil sind und kollabieren sollten. Dies wird allerdings nicht beobachtet. Molekülwolken können über $\approx 10^6$ Jahre existieren ohne zu kollabieren. Sie werden deshalb vermutlich noch durch turbulenten oder magnetischen Druck, oder einer Kombination aus beidem stabilisiert (vgl. Abschnitt 4.2). Thermische Druckgradienten, die bei der Jeans-Analyse berücksichtigt werden, sind alleine jedenfalls nicht ausreichend.

Ideen zur Hinzunahme turbulenter Geschwindigkeitsfluktuationen hatte bereits Chandrasekhar (Chandrasekhar 1951). Im sogenannten Regime der Mikroturbulenz

trägt turbulenter Druck zum Gesamtdruck bei. Hierbei werden turbulente Strömungen auf Längenskalen sehr viel kleiner als die Skala des Systems angenommen. Die Turbulenz kann dann als isotrop und inkompressibel ($Ma < 1$) angesehen werden (vgl. Abschnitt 5.3.2). Wie man an Gleichung (4.9) sehen kann, erhöht sich die Jeans-Masse durch eine Erhöhung der Temperatur, oder entsprechend einer Erhöhung der Schallgeschwindigkeit c_s . Chandrasekhar führte deshalb eine effektive Schallgeschwindigkeit

$$c_{s,\text{eff}}^2 = c_s^2 + \frac{1}{3} \langle \mathbf{v}^2 \rangle \quad (4.11)$$

ein, wobei $1/3 \langle \mathbf{v}^2 \rangle$ die gemittelte turbulente Energie auf allen Skalen repräsentiert. Berücksichtigt man aber, dass Molekülwolken auch auf großen Längenskalen, die mit der Ausdehnung der Molekülwolke vergleichbar sind, turbulente Fluktuationen aufweisen, ist die Mikroturbulenz-Annahme nicht mehr gültig. Man muss also eigentlich berücksichtigen, wie viel turbulente Energie auf welcher Skala vorhanden ist. Bonazzola et al. (1987) schlugen deshalb eine wellenzahlabhängige effektive Schallgeschwindigkeit

$$c_{s,\text{eff}}^2(k) = c_s^2 + \frac{1}{3} \mathbf{v}^2(k) \quad (4.12)$$

vor. Die turbulente kinetische Energie $\mathbf{v}^2(k)$ geht zum Beispiel aus der Kolmogorov-Theorie (5.2) hervor. Diese liefert allerdings einen Ausdruck für $\mathbf{v}^2(k)$, der nur für inkompressible Flüssigkeiten theoretisch hergeleitet wird. Die Ergebnisse aus Kapitel 6 zeigen Energiespektren kompressibler Turbulenz mit Mach-Zahlen ($Ma \approx 5$), die vergleichbar mit gemessenen Machzahlen in Molekülwolken sind (z. B. Crutcher (1999)). Die Simulationen vernachlässigen physikalisch relevante Prozesse wie z. B. Eigengravitation und Kühlprozesse. Padoan et al. (1997) und Padoan & Nordlund (2002) argumentieren wiederum, dass Eigengravitation zunächst keinen wesentlichen Einfluss auf die Erzeugung der Massenverteilung in Molekülwolken hat. Die Verteilung ist vielmehr eine Folge des Skalenverhaltens von Überschallturbulenz und dem daraus resultierenden komplexen Netzwerk isothermer, wechselwirkender Stoßfronten. Die Autoren bezeichnen diesen Vorgang als *turbulente Fragmentation*. Eigengravitation wird erst für die dichtesten Regionen wichtig, die in diesem Netzwerk entstehen, weil die Jeans-Masse mit der Dichte nach Gleichung (4.9) abnimmt.

4.2 Virial-Theorem und Stabilitätsanalyse

Um eine quantitative Abschätzung der Stabilität von Molekülwolken-Komplexen zu erhalten, kann das Virialtheorem benutzt werden. Gleichung (3.26) beschreibt das lokale Verhalten eines Fluids unter dem Einfluss von thermischem Druck, Eigengravitation und Magnetfeldern. Möchte man Aussagen über die globale Stabilität einer

Gaswolke machen, so muss man Gleichung (3.26) skalar mit dem Ortsvektor multiplizieren und über das gesamte Volumen der Wolke integrieren (Stahler & Palla 2004). Damit erhält man das Virial-Theorem

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{I} = 2\mathcal{T} + 2\mathcal{U} + \mathcal{W} + \mathcal{M}, \quad (4.13)$$

mit dem Trägheitsmoment

$$\mathcal{I} = \int \rho |\mathbf{x}|^2 dV, \quad (4.14)$$

der kinetischen Energie

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{v}|^2 dV, \quad (4.15)$$

der thermischen Energie

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} \int n k_B T dV = \frac{3}{2} \int P dV, \quad (4.16)$$

der potentiellen Energie, bedingt durch die Eigengravitation der Gaswolke

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV \approx -\frac{G M^2}{R} \quad (4.17)$$

und der magnetischen Energie

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 dV \quad . \quad (4.18)$$

Für einen Molekülwolkenkomplex in virialem Gleichgewicht ist $\partial^2 \mathcal{I} / \partial t^2 = 0$ und man erhält

$$2\mathcal{T} + 2\mathcal{U} + \mathcal{M} + \mathcal{W} = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Weil das Gravitationspotential Φ negativ ist, ist \mathcal{W} der einzige negative Term. Die Frage ist nun, welcher der anderen Terme $2\mathcal{T}$, $2\mathcal{U}$ oder \mathcal{M} die potentielle Energie ausgleichen kann, um globale Stabilität eines Molekülwolkenkomplexes zu gewährleisten. Deshalb betrachtet man Verhältnisse zwischen den einzelnen positiven Energiebeiträgen und \mathcal{W} .

Der Beitrag der thermischen Energie ist

$$\begin{aligned} \frac{2\mathcal{U}}{|\mathcal{W}|} &\approx \left(\frac{G M^2}{R} \right)^{-1} \frac{M k_B T}{m_H \mu} \\ &= 4 \times 10^{-3} \left(\frac{M}{10^5 M_\odot} \right)^{-1} \left(\frac{R}{20 \text{pc}} \right) \left(\frac{T}{10 \text{K}} \right) \left(\frac{\mu}{2.4} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

woran man sofort sieht, dass thermische Druckgradienten viel zu klein sind, um globalen Kollaps der Molekülwolke zu verhindern (vgl. (4.10)).

Der magnetische Beitrag

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}}{|\mathcal{W}|} &\approx \left(\frac{G M^2}{R}\right)^{-1} \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \frac{4\pi}{3} R^3 \\ &= 0.09 \left(\frac{B}{10\mu\text{G}}\right)^2 \left(\frac{R}{20\text{pc}}\right)^4 \left(\frac{M}{10^5 M_\odot}\right)^{-2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

für typische Magnetfeldstärken¹ kann offenbar von signifikanter Bedeutung sein. Die Magnetfelder, die durch Zeeman-Aufspaltung der 21cm H-Linie bzw. durch Linien des OH gemessen werden, sind allerdings nur ungenau bekannt (Crutcher et al. 1993; Troland et al. 1996). Turner & Heiles (2006) liefern ein oberes Limit für Magnetfelder von $|\mathbf{B}| \approx 15\mu\text{G}$ in der Taurus-Auriga Molekülwolke (TMC-1) mit Hilfe der Zeeman-Aufspaltung von C₄H. Damit Magnetfelder tatsächlich einen Beitrag in Form eines magnetischen Drucks liefern können, muss das Magnetfeld eine fluktuierende Komponente besitzen, um einen isotropen Beitrag zum Gesamtdruck leisten zu können. Solche Fluktuationen entstehen durch magnetohydrodynamische Wellen, die Lösungen der MHD-Gleichungen sind (Crutcher 1999).

Schließlich ist das Verhältnis von kinetischer Energie zu potentieller Energie

$$\begin{aligned} \frac{2\mathcal{T}}{|\mathcal{W}|} &\approx \left(\frac{G M^2}{R}\right)^{-1} \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle \\ &= 0.74 \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{(4\text{ km s}^{-1})^2}\right) \left(\frac{R}{20\text{pc}}\right) \left(\frac{M}{10^5 M_\odot}\right)^{-1} . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Geschwindigkeitsdispersion $\langle v^2 \rangle$ wird durch Linienverbreiterung gemessen (Price et al. (2001) im Orion-Molekülwolkenkomplex) und spiegelt die Breite der Geschwindigkeitsverteilung in einem Molekülwolkenkomplex wider. Die kinetische Energie, die mit diesen turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen verbunden ist, ist also von der Größenordnung der potentiellen Energie und scheint ausreichend zu sein, um einen Komplex gegen Gravitationskollaps zu stabilisieren. Was aber ist der Ursprung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in solchen Molekülwolkenkomplexen? Eine mögliche Erklärung ist die Entstehung von Molekülwolken in Dichtewellen, die z. B. von Supernova-Explosionen ausgehen können und damit verbundener Erzeugung hydrodynamischer Instabilitäten (siehe 2.2.4). Klessen (2004) vergleicht verschiedene Mechanismen zur Erzeugung von Turbulenz im ISM und kommt zu dem Ergebnis, dass Supernovae die dominanten Treiber von Turbulenz sind. Desweiteren spielt vermutlich thermische Instabilität eine wichtige Rolle (2.1.2). Diese führt ebenfalls zu Strömungen im interstellaren Medium, die auf Grund der hohen

¹ $10\mu\text{G} = 10^{-9}\text{T}$

Reynolds-Zahlen im ISM zu Turbulenz führen können. Vermutlich ist die Entstehung turbulenter Strömungen im ISM, sowie in Molekülwolkenkomplexen die Folge einer Kombination dieser Einflüsse und eine Folge der Nichtlinearität der zugrunde liegenden physikalischen Prozesse.

5 Turbulenz

Bei Betrachtung der Eulergleichung (3.15) fällt der nichtlineare Term $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ auf, der auch als Advektionsterm bezeichnet wird. Dieser Term ist Ursprung der Komplexität der hydrodynamischen Gleichungen und führt zu chaotischem Verhalten und zur Turbulenz.

Die Eulergleichung wird in 3.1.5 für ideale Flüssigkeiten hergeleitet. Reale Flüssigkeiten aber besitzen eine Zähigkeit oder Viskosität, die zur Dissipation kinetischer Energie in innere Energie führt. Um diese Effekte zu berücksichtigen, erweitert man die Bewegungsgleichung (3.17) idealer Flüssigkeiten um den viskosen Spannungstensor σ_{ik} und erhält

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \rho v_j) = -\frac{\partial}{\partial x_i} P - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi + \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik} \quad (5.1)$$

mit

$$\sigma_{ik} = \rho\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right) . \quad (5.2)$$

Die dynamische Viskosität ist $\eta = \rho\nu$, die Volumenviskosität ζ wurde vernachlässigt. Bei einatomigen idealen Gasen ist $\zeta = 0$ (Landau & Lifschitz 1986)¹.

Dominiert der Advektionsterm gegenüber dem Viskositätsterm, führt dies zu turbulenter Strömung in realen Fluiden, wie im folgenden Abschnitt phänomenologisch gezeigt wird.

5.1 Phänomenologie

Die dynamischen Eigenschaften einer Flüssigkeit oder eines Gases hängen im Wesentlichen von drei Parametern (Geschwindigkeit V , Längenskala L , Viskosität ν) ab. Experimentell kann man beispielsweise einen Zylinder mit Durchmesser L betrachten, der von einer Strömung mit der charakteristischen Geschwindigkeit V umströmt wird. Aus den drei Größen lässt sich eine dimensionslose Zahl

$$\text{Re} = \frac{LV}{\nu} \sim \frac{\text{„Advektion“}}{\text{„viskose Dissipation“}}, \quad (5.3)$$

¹Für inkompressible Flüssigkeiten ist $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, mit der Kontinuitätsgleichung folgt, dass $\text{div } \mathbf{v} = 0$ und man erhält die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten

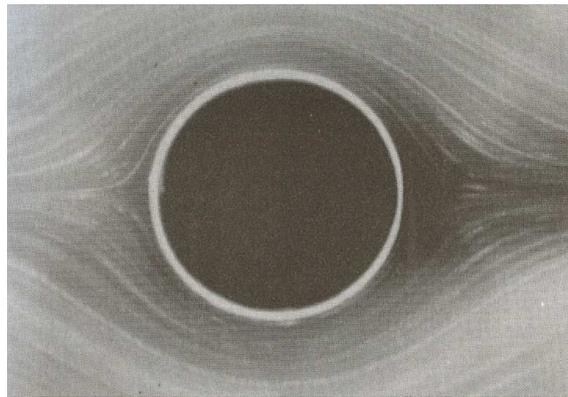


Abbildung 5.1. Ein Zylinder wird von einer laminaren Strömung mit $Re = 0.16$ umflossen. Besonders zu beachten ist die Symmetrie der Stromlinien. (aus Frisch (1995))

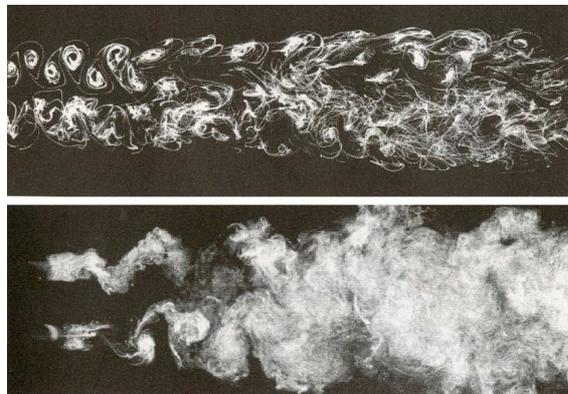


Abbildung 5.2. Zwei gleichartige Zylinder befinden sich in einer Strömung mit $Re = 240$ (oben) und $Re = 1800$ (unten). Im Bereich von $Re \approx 1000$ findet der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung statt. (aus Frisch (1995))

die sogenannte Reynolds-Zahl bilden. Ist Re klein, entsprechend einer hohen Viskosität oder einer geringen Strömungsgeschwindigkeit, spricht man von einer laminaren Strömung (Abbildung 5.1). In der Abbildung ist zu erkennen, dass die Strömung nahezu vollständig symmetrisch bezüglich einer horizontalen und einer vertikalen Achse durch die Bildmitte ist. Mit steigender Reynolds-Zahl wird zunächst die Links-Rechts-Symmetrie und anschließend auch die Oben-Unten-Symmetrie gebrochen. Abbildung 5.2 zeigt eine Strömung hinter zwei gleichartigen Zylindern bei Reynolds-Zahlen von 240 und 1800. Zunächst entsteht eine sogenannte Karmansche Wirbelstraße, die noch eine gewisse Symmetrie in sich abwechselnden links-rechts-drehenden Wirbeln aufweist. Bei Reynolds-Zahlen von $\gtrsim 1000$ wird die Strömung aber vollständig chaotisch und alle Symmetrien scheinen gebrochen zu sein. Betrachtet man aber die Strömung in einer gewissen Entfernung von den Zylindern und von den Rändern des Systems, sowie auf ausreichend kleinen Skalen, so sind alle Sym-

metrien im statistischen Sinne wieder vorhanden. Im diesem Fall spricht man von voll entwickelter Turbulenz.

Genaugenommen ist die Reynolds-Zahl skalenabhängig

$$\text{Re}(l) = \frac{v(l) l}{\nu} \quad . \quad (5.4)$$

Betrachtet man das typische Skalenverhalten (5.7) aus der Kolmogorov-Theorie, so ist klar, dass die Reynolds-Zahl für kleiner werdende Skalen abnimmt. Ab einer bestimmten Längenskala $l \ll L$, wird die Strömung folglich laminar. Dies ist der Bereich, in dem die Viskosität der Flüssigkeit wirkt und die auf dieser Skala vorhandene kinetische Energie in thermische Energie umgewandelt wird².

5.2 Kolmogorov Theorie

Eine detaillierte Diskussion der Hypothesen von Kolmogorov und weiterführende Erklärungen findet man in Frisch (1995) und Pope (2000). Im Folgenden sind die Kernaussagen von Kolmogorov (1941) und deren spätere Verfeinerungen (Kolmogorov 1962) zusammengefasst.

1. **Isotropiehypothese:** Bei ausreichend hohen Reynolds-Zahlen ist das Fluid auf kleinen Skalen $l \ll L$ im statistischen Sinne zunehmend isotrop.
2. **erste Selbstähnlichkeitshypothese:** Unter den Voraussetzungen von 1. sind statistische Größen der turbulenten Strömung alleine durch die integrale Längenskala L und die integrale Geschwindigkeitsskala V gegeben, so dass sich mit Hilfe dieser Größen eine konstante mittlere Dissipationsrate $\langle \epsilon \rangle$ gemäß Gleichung (5.5) bilden lässt.
3. **zweite Selbstähnlichkeitshypothese:** Unter den Voraussetzungen von 1. ist die turbulente Strömung selbstähnlich und verhält sich skaleninvariant mit einem eindeutigen Skalierungsverhalten (Skalenexponenten).

Die erste Hypothese sagt aus, dass sich die turbulente Strömung auf kleinen Skalen statistisch isotrop verhält. Das bedeutet, dass Randeffekte, die besonders auf den großen Skalen $l \sim L$ spürbar sind, immer weniger Einfluss auf die Dynamik des Fluids haben. Anders ausgedrückt kann man auch sagen, dass die Symmetrien in den Bewegungsgleichungen nicht mehr durch Randeffekte oder Effekte auf großen Skalen, wie beispielsweise Kraftfeldern gebrochen werden.

Die skalenunabhängige mittlere Dissipationsrate der spezifischen kinetischen Energie ist nach der zweiten Hypothese gegeben durch

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{d}{dt} e_{\text{kin}}(l) \sim \frac{v^2(l)}{l/v(l)} = \frac{V^3}{L} = \text{const} \quad \text{für} \quad \eta_K \ll l \ll L \quad (5.5)$$

²Man spricht von Dissipation in thermische Energie.

mit der Kolmogorov-Längenskala η_K , auf der die Viskosität ν des Fluids beginnt zu wirken und kinetische Energie in innere Energie umgewandelt wird. Die konstante Energiedissipationsrate entspricht einem konstanten Energiefluss $v^2(l)/(l/v(l))$ mit der Wirbelzeitskala³ $l/v(l)$. Die Kolmogorov-Skala in (5.5) kann über die Universalität von $\langle \epsilon \rangle$ abgeschätzt werden, denn dann ist

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\langle \epsilon \rangle} \right)^{1/4} . \quad (5.6)$$

Eine Herleitung findet sich in A.5.

Die Dissipation, die durch Gleichung (5.5) beschrieben wird, bedeutet aber nicht, dass kinetische Energie in innere Energie umgewandelt wird, denn sie ist unabhängig von der Viskosität ν . Sie beschreibt vielmehr, wie die Energie von größeren Skalen zu kleineren Skalen transferiert wird, ohne dass Viskosität wirkt. Dies ist eine wesentliche Eigenschaft turbulenter Strömung. Sie ist direkt mit der 3. Hypothese verbunden, die eine turbulente Energiekaskade, die sogenannte Richardson-Kaskade mit einem bestimmten Skalenverhalten zur Folge hat. Im sogenannten Inertialbereich, der durch $\eta_K \ll l \ll L$ gegeben ist, skaliert die charakteristische Geschwindigkeit der Strömung $v(l)$ auf der Skala l nach Gleichung (5.5) wie

$$v(l) \sim l^{1/3} . \quad (5.7)$$

Der Skalenexponent für die Geschwindigkeit ist also 1/3. Weiterhin sieht man, dass die charakteristische Wirbelzeitskala durch

$$\tau_{\text{turb}}(l) = \frac{l}{v(l)} = \frac{L^{1/3}}{V} l^{2/3} = \tau_{\text{turb}}(L) \left(\frac{l}{L} \right)^{2/3} \quad (5.8)$$

beschrieben wird, was bedeutet, dass die dynamische Zeitskala für Strukturen (Wirbel) auf kleiner werdenden Skalen l abnimmt. Randeffekte, die von großen Skalen der Größenordnung des Systems L herrühren, werden deshalb auf kleineren Skalen immer weniger spürbar, denn auf kleineren Skalen haben sich die Strukturen schon viele dynamische Zeitskalen entwickelt und durchmischt (\rightarrow Isotropie, 1. Hypothese).

Neben der Wirbelzeitskala ist noch eine weitere Größe interessant, die Vortizität ω , die durch die Rotation des Geschwindigkeitsfelds

$$\boldsymbol{\omega}(l) \equiv \nabla \times \boldsymbol{v}(l) \quad (5.9)$$

definiert ist. Die Abschätzung

$$\omega(l) \sim \frac{v(l)}{l} \sim \frac{l^{1/3}}{l} \sim l^{-2/3} \quad (5.10)$$

³”eddy turnover time”

zeigt, dass die Vortizität für kleinere Strukturen anwächst.

Man kann auch ein Skalenverhalten für die spezifische kinetische Energie herleiten, indem man $e_{\text{kin}} \sim v^2$ nutzt. Geht man zusätzlich noch vom Ortsraum in den Fourier-Raum, so sind Längen l mit Wellenzahlen k über $l \sim 1/k$ verbunden und man erhält aus Gleichung (5.7)

$$e_{\text{kin}} \sim v^2(l) \sim l^{2/3} \sim k^{-2/3} \quad . \quad (5.11)$$

Oftmals wird das kinetische Energiespektrum $E(k)$ benutzt, das die spezifische kinetische Energie im Wellenzahlintervall zwischen k und $k + dk$ bezeichnet. Mit Gleichung (5.11) erhält man

$$E(k) \sim \frac{de_{\text{kin}}}{dk} \sim k^{-5/3} \quad . \quad (5.12)$$

Aufgrund einer einfachen Einheitenbetrachtung muss $E(k)$ schließlich

$$E(k) = C \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \quad (5.13)$$

sein, wobei C die dimensionslose Kolmogorov-Konstante ist. Aus experimentellen Strömungsuntersuchungen, aber auch aus numerischen Simulationen getriebener Turbulenz ergeben sich Werte $C \approx 1.6$ (z. B. Schmidt (2004); Schmidt et al. (2004), siehe auch Referenzen in Schmidt et al. (2006)).

5.3 Kinetisches Energiespektrum und Strukturfunktion

5.3.1 Energiespektrum inkompressibler Turbulenz

Das kinetische Energiespektrum $E(k)$ beschreibt die Verteilung der kinetischen Energie im Wellenzahlraum, wie in Abschnitt 5.2 angerissen wurde und ist über die spektrale Energiedichte $\Phi(k)$ definiert, die der kinetischen Energie $\sim v^2$ pro infinitesimalem Volumen im k -Raum entspricht. Das kinetische Energiespektrum $E(k)$ ist demnach über

$$E(k)dk = \int \Phi(k)d^3k = 4\pi \int \Phi(k)k^2 dk \quad (5.14)$$

definiert und hat die Einheit einer kinetischen Energie pro Wellenzahl. Im zweiten Schritt von (5.14) wurde eine isotrope Verteilung der kinetischen Energie im Wellenzahlraum vorausgesetzt.

Das Energiespektrum für inkompressible Turbulenz hat nach (5.12) die in Abbildung 5.3 gezeigte Form. Kleine Wellenzahlen $\sim L^{-1}$ entsprechen den größten Längenskalen, beispielsweise dem Radius eines Molekülwolkenkomplexes. Der Wellenzahlbereich lässt sich in drei Abschnitte unterteilen:

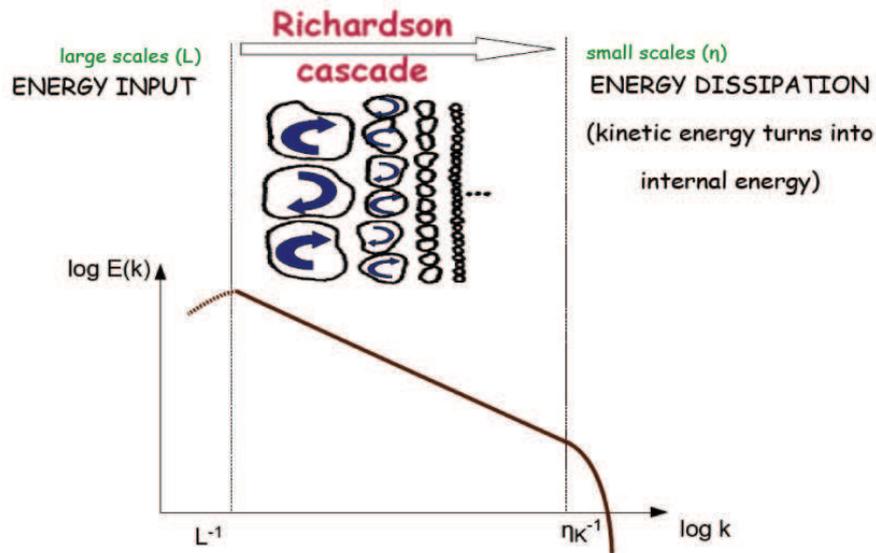


Abbildung 5.3. Das Energiespektrum $E(k)$ zeigt die Verteilung der kinetischen Energie im Wellenzahlraum k . Die kinetische Energie auf großen Skalen L "kaskadiert" zur Dissipationsskala η_K (Richardson-Kaskade). Der übertriebene, sogenannte Inertialbereich wird für inkompressible Turbulenz durch ein Potenzgesetz mit $E(k) \sim k^{-5/3}$ (Kolmogorov) beschrieben.

- Injektionsbereich $k \approx L^{-1}$
- Inertialbereich $L^{-1} \ll k \ll \eta_K^{-1}$
- Dissipationsbereich $k \approx \eta_K^{-1}$

Im Injektionsbereich befindet sich eine bestimmte kinetische Energie, die in der Bewegung der größten Wirbel steckt. Nach den Vorstellungen der Kolmogorov-Theorie erzeugen die größten Wirbel kleinere Wirbel, die wiederum in kleiner und kleiner werdende Strukturen zerfallen. Dabei wird die kinetische Energie von den großen Strukturen (Skalen) zu immer kleiner werdenden Skalen transferiert. Dieser Kaskadenprozess endet bei der Kolmogorov-Skala η_K , dem Dissipationsbereich, in dem die Viskosität des Fluids schließlich dazu führt, dass die kinetische Energie in thermische Energie umgewandelt wird. Um die Kaskade zu erhalten und einen stationären Zustand zu erreichen, muss folglich ständig kinetische Energie im Injektionsbereich hinzugefügt werden, um die größten Wirbel am Leben zu erhalten. Dies geschieht in den numerischen Simulationen getriebener Turbulenz, die in den Kapiteln 7 und 6 vorgestellt werden, durch die Hinzunahme eines stochastischen Kraftfelds, wodurch dem System permanent kinetische Energie nachgeliefert wird, die es durch den Kaskadenprozess dissipiert.

5.3.2 Energiespektrum für Überschallturbulenz und Strukturfunktion

Die Kolmogorov-Theorie und die damit verbundene Herleitung des Skalenverhaltens (5.7) und des Energiespektrums (5.12) im Inertialbereich gilt streng genommen nur für inkompressible Flüssigkeiten. Betrachtet man Unterschallströmungen, so entstehen auch in einem kompressiblen Fluid kaum Dichteschwankungen und die Ergebnisse der Kolmogorov-Theorie bleiben gültig. In Überschallströmungen hingegen bilden sich Stoßwellen, die unter anderem durch Unstetigkeiten in Dichte und Geschwindigkeit charakterisiert sind. Die Dichte des Fluids weist daher lokale Sprungstellen auf und die Annahme der Inkompressibilität ist nicht mehr erfüllt. Das Energiespektrum besitzt dann eine etwas andere k -Abhängigkeit. Um einen Ausdruck für diese k -Abhängigkeit zu erhalten, ist es sinnvoll, die sogenannte Strukturfunktion

$$S_p(l) \equiv \langle |\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})|^p \rangle_{\mathbf{x}} \sim l^{\zeta(p)}, \quad (5.15)$$

zu definieren.

Boldyrev (2002) und Boldyrev et al. (2002b,a) nutzen diese Strukturfunktion des Geschwindigkeitsfeldes, um auf das Skalenverhalten des Energiespektrums

$$E(k) \sim k^{-1-\zeta(2)} \quad (5.16)$$

für Überschallturbulenz, also für kompressible Turbulenz zu schließen. Nach (5.16) ist das Energiespektrum durch den Skalenexponenten der Strukturfunktion 2. Ordnung ($p = 2$) gegeben. Das Modell von She & Leveque (1994) liefert einen Ausdruck für diesen Skalenexponenten

$$\zeta(p) = \Theta(1 - \Delta)p + C \left(1 - \left[1 - \frac{\Delta}{C} \right]^{\Theta p} \right). \quad (5.17)$$

$\Theta = 1/3$ und $\Delta = 2/3$ geben das Kolmogorov-Skalenverhalten von Geschwindigkeit und Wirbelzeitskala nach (5.7) und (5.8) wieder. Besonderes Interesse gilt der Kodimension $C = 3 - D$, wobei D die Dimension der dissipativen Strukturen bezeichnet⁴. Für den Fall inkompressibler Turbulenz wird die kinetische Energie in kleinen Vortices dissipiert, die eine filamentartige Struktur ausfüllen. Filamente sind 1-dimensionale Objekte, deshalb ist $C = 2$ und man erhält mit (5.17) $E(k) \sim k^{-1.70}$, was annähernd dem Kolmogorov-Energiespektrum nach (5.12) für inkompressible Turbulenz entspricht. Bei Überschallturbulenz jedoch bilden sich Stoßwellen und kinetische Energie wird vorwiegend in blattartigen 2-dimensionalen Strukturen dissipiert ($C = 1$). Damit erhält man $E(k) \sim k^{-1.74}$. In Molekülwolken beobachtet man eine fraktale Struktur der Dichteverteilung mit $D \approx 2.3$ (Larson 1992; Elmegreen

⁴Die Dimension der dissipativen Strukturen D wird auch als Hausdorff-Dimension bezeichnet.

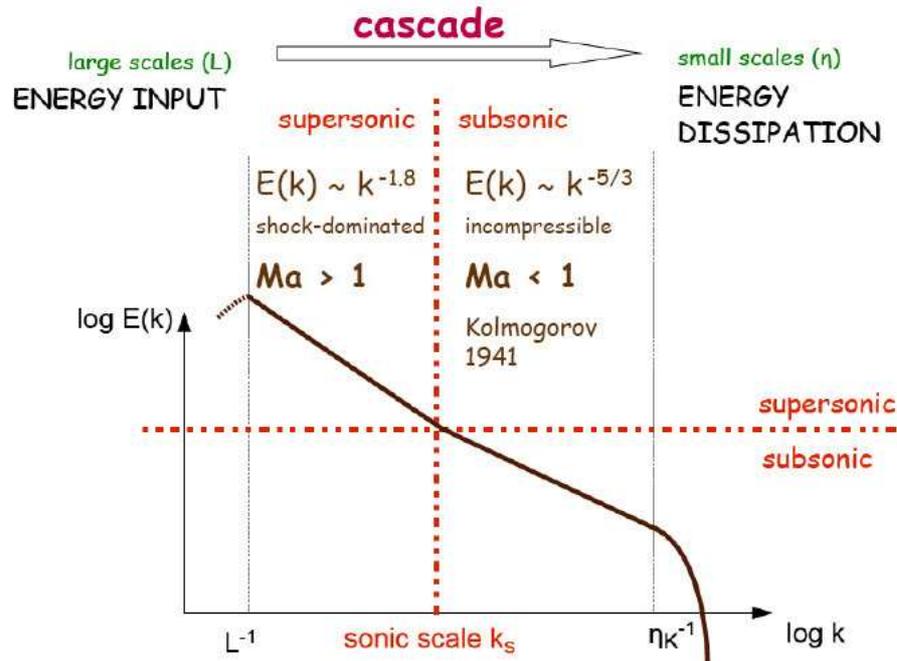


Abbildung 5.4. Gezeigt ist eine Skizze des Energiespektrums, das zur Berücksichtigung des Skalenverhaltens von Überschallturbulenz $E(k) \sim k^{-1.8}$ modifiziert wurde. Die Schallwellenzahl k_s trennt Skalen mit Überschallturbulenz ($Ma > 1$) von Skalen mit Unterschallturbulenz ($Ma < 1$). Im Unterschallbereich kann das Fluid als inkompressibel angenommen werden und es gilt das Kolmogorov-Skalenverhalten (5.12).

& Elmegreen 2001; Chappell & Scalo 2001), die vermutlich durch die Wechselwirkung einzelner Stoßfronten und als Folge der Überschallturbulenz entsteht. Geht man davon aus, dass in diesen Dichtestrukturen zugleich auch die Dissipation dominierend ist, so erhält man $C = 0.7$ und $E(k) \sim k^{-1.83}$, also deutlich steiler als das Kolmogorov-Spektrum. Messungen des Energiespektrums $E(k) \sim k^{-\beta}$ in Molekülwolken ergeben tatsächlich Werte von $\beta \approx 1.8$ (Padoan et al. 2004, 2006).

Die hier angerissenen Zusammenhänge zwischen dem Modell zur Skalierung der Strukturfunktionen nach Gleichung (5.17) und der fraktalen Dimension werden in Kapitel 6 wieder aufgegriffen und mit Ergebnissen numerischer Turbulenzsimulationen verglichen und eingehend diskutiert.

Zusammenfassend lässt sich ein Bild des Energiespektrums konstruieren, das sowohl den Bereich der Überschallturbulenz, als auch den Bereich der Unterschallturbulenz abdeckt. Abbildung 5.4 skizziert dieses modifizierte Energiespektrum. Geht man davon aus, dass sich die Schallgeschwindigkeit c_s in dem gezeigten Längenskalenbereich nicht ändert, so wird der Skalenbereich mit Überschallturbulenz ($Ma > 1$) durch die sogenannte Schallskala (sonic scale) λ_s vom Unterschallbereich auf kleineren Skalen getrennt. Die entsprechende Schallwellenzahl ist $k_s \sim 1/\lambda_s$.

Die potentielle Energie großer Molekülwolkenkomplexe kann, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wird, durch turbulente kinetische Energie ausgeglichen werden. Dies wird als Erklärung für die Stabilität großer Komplexe angeführt. Turbulente Fragmentation führt auf natürliche Weise zur fraktalen Struktur großer Komplexe (Padoan & Nordlund 2002). Das hier skizzierte Bild des Energiespektrums besagt, dass die kinetische Energie auf kleiner werdenden Skalen abnimmt, so dass möglicherweise für kleinere Skalen die kinetische Energie nicht mehr ausreicht, um Gravitationskollaps zu verhindern. In Folge dessen können sich Protosterne bilden. Die Turbulenz und das damit verbundene Energiespektrum können also als Erklärung für die beobachtete Struktur und Stabilität von Molekülwolkenkomplexen herangezogen werden.

5.3.3 Lagrangesche Strukturfunktion

Die Strukturfunktion (5.15) ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung des Skalenverhaltens von Geschwindigkeitsfluktuationen. Sie ist durch die Mittelung über Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen festen Raumpunkten definiert. Dies entspricht einer Charakterisierung von Turbulenz im Eulerschen Bezugssystem. Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung von Turbulenz besteht darin, Geschwindigkeitsfluktuationen mitbewegter Flüssigkeitselemente zu messen. Man geht also von der Eulerschen Beschreibung der Hydrodynamik zur Lagrangeschen Beschreibung im mitbewegten Bezugssystem (3.1.1) über und kann eine Lagrangesche Strukturfunktion

$$D_p(\tau) \equiv \langle |\tilde{\mathbf{v}}(t + \tau) - \tilde{\mathbf{v}}(t)|^p \rangle \sim \tau^{\xi(p)} \quad (5.18)$$

definieren. Dabei wird über mitbewegte Fluidelemente mit ihrer jeweiligen Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$ gemittelt⁵. Zu beachten ist, dass bei der Lagrangeschen Strukturfunktion, anders als bei Gleichung (5.15), nicht zu einem festen Zeitpunkt über verschiedene Positionen, sondern über die zeitliche Entwicklung der Fluidelemente gemittelt wird. Gleichung (5.18) beschreibt daher die zeitliche Korrelation der Geschwindigkeit mitbewegter Fluidelemente zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$, wohingegen Gleichung (5.15) die räumliche Korrelation des Geschwindigkeitsfelds zu einem festen Zeitpunkt beschreibt.

Pope (1994), Sawford (2001) und Yeung (2002) geben folgendes Skalenverhalten der Lagrangeschen Strukturfunktion 2. Ordnung

$$D_2(\tau) \sim \tau \quad (\tau_\eta \ll \tau \ll T_L), \quad (5.19)$$

mit der Kolmogorov-Zeitskala $\tau_\eta = \tau_{\text{turb}}(\eta_K)$ und der Lagrangeschen integralen Zeitskala T_L an, die von der Größenordnung der Eulerschen integralen Zeitskala $T = L/v(L)$ ist (Yeung 2002).

⁵Die mitbewegten Fluidelemente können durch Tracer Teilchen (Kapitel 7) beschrieben werden. $\tilde{\mathbf{v}}$ ist dann durch Gleichung (7.7) gegeben.

Die Skalenabhängigkeit der Lagrangeschen Strukturfunktion 2. Ordnung kann über das Lagrangesche Energiespektrum $\chi(\omega)$ verstanden werden. Man geht zunächst vom Kolmogorov-Energiespektrum (5.13) aus. Daraus folgt, dass die kinetische Energie im Wellenzahlraum k mit

$$e_{\text{kin}}(k) \sim k^{-2/3} \quad (5.20)$$

skaliert. Aus Gleichung (5.8) folgt das Kolmogorov-Skalenverhalten der Wirbelzeitskala im Fourier-Raum zu

$$\tau_{\text{turb}} \sim l^{2/3} \sim k^{-2/3} \quad (5.21)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Lagrangesche Frequenzskala

$$\omega(k) \sim \tau_{\text{turb}}^{-1}(k) \sim k^{2/3} \quad (5.22)$$

als zeitliche Fourier-Transformierte der Wirbelzeitskala. Kombiniert man (5.20) und (5.22) auf der jeweiligen Skala k , so erhält man die kinetische Energie

$$e_{\text{kin}}(\omega) \sim \omega^{-1} \quad (5.23)$$

in Abhängigkeit von der Lagrangeschen Frequenzskala. Analog zum Eulerschen Energiespektrum (5.13), ist das Lagrangesche Energiespektrum als kinetische Energie pro Frequenzintervall definiert und man erhält durch Dimensionsanalyse und bei Berücksichtigung der genauen Definitionen der oben benutzten Gleichungen

$$\chi(\omega) = C_L \langle \epsilon \rangle \omega^{-2} \quad (5.24)$$

mit der Lagrangeschen Kolmogorov-Konstante C_L , die mit C aus Gleichung (5.13) über $C_L = C^{3/2}$ zusammenhängt (Tennekes & Lumley 1972). Aus Gleichung (5.23) folgt das Skalenverhalten der Geschwindigkeit $v(\omega) \sim \omega^{-1/2}$ und damit schließlich das Kolmogorov-Skalenverhalten der Lagrangeschen Strukturfunktionen

$$D_p(\tau) \sim \tau^{p/2} \quad (5.25)$$

in Abhängigkeit von der Ordnung p .

6 Sternmassenverteilungsfunktion aus getriebener Überschallturbulenz

Im Rahmen des "FEARLESS¹ Cosmic Turbulence Project" (Niemeyer et al. 2005) wird Turbulenz in numerischen Simulationen untersucht. Das Projekt vereint die Vorteile von adaptiver Verfeinerung (AMR) und Large Eddy Simulations (LES). Ein wichtiges Ziel des Projekts ist es, geeignete Verfeinerungskriterien für Turbulenz-Simulationen zu erarbeiten und ein Subgrid-Modell zu implementieren, um die Wirkung der Turbulenz auf Skalen, die numerisch nicht aufgelöst werden zu berücksichtigen. Schließlich sollen die Ergebnisse dieser Grundlagenforschung auf astrophysikalisch relevante Probleme angewendet werden.

Um dies zu erreichen, wurde im Rahmen des Projekts eine hochaufgelöste Simulation getriebener Turbulenz durchgeführt, deren Auswertung hinsichtlich Energiespektren und Strukturfunktionen im Folgenden vorgestellt wird. Mit Hilfe von Strukturfunktionen kann Turbulenz genauer untersucht werden. Turbulenz wiederum ist maßgeblich an der Formgebung und Struktur in Sternentstehungsgebieten beteiligt. Padoan & Nordlund (2002) geben eine Beziehung zwischen den Skalierungseigenschaften von Strukturfunktionen und der Verteilungsfunktion von Sternmassen (stellar initial mass function, IMF) in Sternentstehungsgebieten an. Ein gutes Modell für Sternentstehung und Struktur von Molekülwolken muss die Form der IMF erklären und reproduzieren können. In diesem Kapitel soll letztlich gezeigt werden, dass aus den Skaleneigenschaften von Überschallturbulenz die IMF zumindest teilweise erklärt werden kann.

6.1 Parameter der Simulation und stochastisches Treiben

Die hier ausgewertete Simulation wurde mit ENZO (vgl. 7.2.1) durchgeführt und hat eine Auflösung von 768^3 Gitterpunkten. Die Simulation nutzt kein AMR und kein Subgrid-Modell. Sie dient als Referenz-Simulation zum direkten Vergleich mit weiteren Simulationen im Rahmen des FEARLESS-Projekts, die schließlich AMR

¹Fluid mEchanics with Apaptively Refined Large Eddy SimulationS

und Subgrid-Modell beinhalten sollen. Es werden die Gleichungen (3.23) ohne Eigengravitation ($\Phi = 0$) gelöst. Gestartet wird mit einer homogenen Dichteverteilung $\rho_0 = 1$ in Code-Einheiten. Das simulierte Fluid befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe. Um turbulente Strömungen zu erzeugen, wird deshalb ein äußeres Kraftfeld \mathbf{f} an das Fluid angelegt. Dieses Kraftfeld wird durch eine stochastische Differentialgleichung, einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess entwickelt, so dass das Fluid einer zufällig in Raum und Zeit fluktuierenden Kraft ausgesetzt ist. Diese Kraft wird im Fourier-Raum gebildet, weil es damit auf einfache Weise möglich ist, solenoidale bzw. kompressive Moden zu erzeugen und deren relativen Anteil $\zeta = \langle \mathbf{f}_s \rangle / \langle \mathbf{f}_c \rangle$ einzustellen (Helmholtz-Zerlegung, siehe Schmidt (2004)). Hier wurde $\zeta = 0.1$ gewählt. Das bedeutet, dass das Kraftfeld zum größten Teil kompressive Moden im Fluid anregt und eine im Vergleich zu $\zeta = 1.0$ hohe Divergenz im Geschwindigkeitsfeld erzeugt. Diese Wahl des spektralen Gewichts von $\zeta = 0.1$ ist dadurch motiviert, dass ausgehend von der Möglichkeit, dass Supernova-Explosionen die dominanten Treiber der interstellaren Turbulenz sind, die Art des Treibens hauptsächlich kompressive Moden anregt. Das Kraftfeld ist so eingestellt, dass es das Fluid nur auf großen Skalen mit $1 \leq kL/\pi \leq 2$ antreibt². Die mittlere Amplitude der stochastischen Kraft ist so gewählt, dass das Fluid eine Mach-Zahl von ≈ 5 erreicht. Dieser Zustand wird ungefähr nach einer Autokorrelationszeit T des Kraftfeldes erreicht und entspricht dann einem Zustand voll entwickelter Turbulenz. Die Simulation nutzt periodische Randbedingungen, um Randeffekte auszuschließen. Bezogen auf das interstellare Medium bedeutet die Annahme periodischer Randbedingungen, dass nur ein Ausschnitt eines großen Molekülwolkenkomplexes weit ab vom Rand der Molekülwolke simuliert wird. Die Simulation soll jedoch nicht *genau* die Dynamik im Inneren einer Molekülwolke beschreiben. Dafür müssten viele weitere physikalisch relevante Mechanismen wie Eigengravitation, Heiz- und Kühlprozesse, eine realistische Zustandsgleichung und Magnetfelder hinzugenommen werden. Die Simulation dient vielmehr der Grundlagenforschung im Bereich kompressibler Überschallturbulenz, ein Bereich, der aber zweifellos große Bedeutung in Hinsicht auf die Dynamik von Sternentstehungsgebieten hat. Die Simulation wurde mit der Zustandsgleichung des idealen Gases (3.23e) durchgeführt, wobei $\gamma = 1.01$ gesetzt wurde, um die Temperatur des simulierten Gases nahezu konstant zu halten³. Tabelle 6.1 fasst alle relevanten Parameter der hier behandelten Turbulenzsimulation zusammen.

²Die integrale Längenskala L ist hierbei durch die Hälfte der Länge der Simulationsdomäne festgelegt.

³Wie in 3.1.7 angesprochen, lässt sich aus numerischen Gründen $\gamma = 1$ nicht realisieren. Das Setzen von $\gamma \approx 1$ ist jedoch eine übliche Approximation, um die Temperatur des Fluids in Simulationen nahezu konstant zu halten. Eine weitere Simulation im Rahmen des FEARLESS-Projekts wurde mit $\gamma = 1.4$ durchgeführt. Diese ist für die Dynamik auf großen Skalen von Sternentstehungsgebieten weniger interessant, weil Molekülwolken über einen weiten dynamischen Bereich in der Dichte eine nahezu konstante Temperatur haben. Erst bei sehr hohen Gasdichten ($n \approx 2.5 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$) ändert sich vermutlich die Zustandsgleichung, weil das Gas optisch dick wird (z. B. Jappsen et al. (2005)).

Auflösung	$N^3 = 768^3$
Mach-Zahl	$Ma \approx 5$
spektrales Gewicht	$\zeta = 0.1$
getriebene Skalen	$1 \leq kL/\pi \leq 2$
Adiabatindex	$\gamma = 1.01$

Tabelle 6.1. Die wichtigsten Parameter der Simulation.

6.2 Auf dem Weg zu voll entwickelter Turbulenz

In den ersten Zeitschritten der Simulation wird das Fluid aus seiner Ruhelage heraus durch das stochastische Kraftfeld beschleunigt. Dabei wird nur auf den größten Skalen kinetische Energie in das System gepumpt. Das heißt, dass zu Beginn auf den kleinsten Skalen kaum Geschwindigkeitsfluktuationen vorhanden sind. Entsprechend der Vorstellung aus Abschnitt 5.3 zerfallen die zur Bewegung angeregten Strukturen auf großen Skalen zu kleiner und kleiner werden Strukturen und bilden eine Kaskade, durch die hindurch sich die kinetische Energie zur Dissipationsskala fortpflanzt. In der Realität erfolgt die Dissipation durch die Viskosität des Fluids. Bei numerischen Simulationen ist es die endliche Auflösung des Gitters, die zu einer numerischen Viskosität führt. Es ist folglich die numerische Dissipation, die dafür sorgt, dass das System in einen stationären Zustand gelangt, ansonsten würde die kinetische Energie des Systems stetig ansteigen. Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen, wie sich das kinetische Energiespektrum $E(k) = d(v^2(k))/dk$ zeitlich entwickelt.

Ergebnisse Das Energiespektrum bei $t = 0.15 T$ enthält fast nur kinetische Energie auf den größten Skalen und spiegelt somit die Wirkung des Kraftfeldes wider. In den darauf folgenden Zeitschritten finden sehr komplexe Vorgänge im Fluid statt. Es bilden sich Strukturen auf allen Skalen, wobei die kleinsten Skalen tendenziell später an Bedeutung gewinnen, was mit der Vorstellung der Ausbildung einer turbulenten Kaskade vereinbar ist. Interessant ist dabei das Spektrum bei $t = 0.44 T$, das scheinbar eine wellenförmige Verteilung der kinetischen Energie im Wellenzahlraum aufweist. Bei $t \approx 1 T$ beschreibt das Spektrum ein Potenzgesetz mit $E(k) \sim k^{-1.97 \pm 0.02}$, ist also deutlich steiler als der Kolmogorov-Potenzgesetz (5.12). Dies ist nach 5.3.2 ein Hinweis auf Überschallturbulenz. Zum Vergleich wurde das Skalenverhalten des Kolmogorov-Energiespektrums durch eine Gerade mit der Steigung $-5/3$ in die Abbildungen eingezeichnet. Geht man zu den darauffolgenden Zeitschritten bei $t \approx 2, 3, 4, 5, 6 T$ (Abbildung 6.2), wird die Steigung offensichtlich wieder kleiner. Ein Least-Squares-Fit im Wellenzahlbereich $3 \leq kL/2\pi \leq 20$ und über die Zeiten $t \approx 2, 3, 4, 5, 6 T$ gemittelt ergibt eine Steigung von -1.77 ± 0.04 . Das sind Werte, die ebenfalls ein steileres Skalenverhalten als das von Kolmogorov mit $E(k) \approx k^{-1.66}$ zeigen. Die Steigungen bei den einzelnen Zeitschritten $t \approx 1, 2, 3, 4, 5, 6 T$ sind in Tabelle

6 Sternmassenverteilungsfunktion aus getriebener Überschallturbulenz

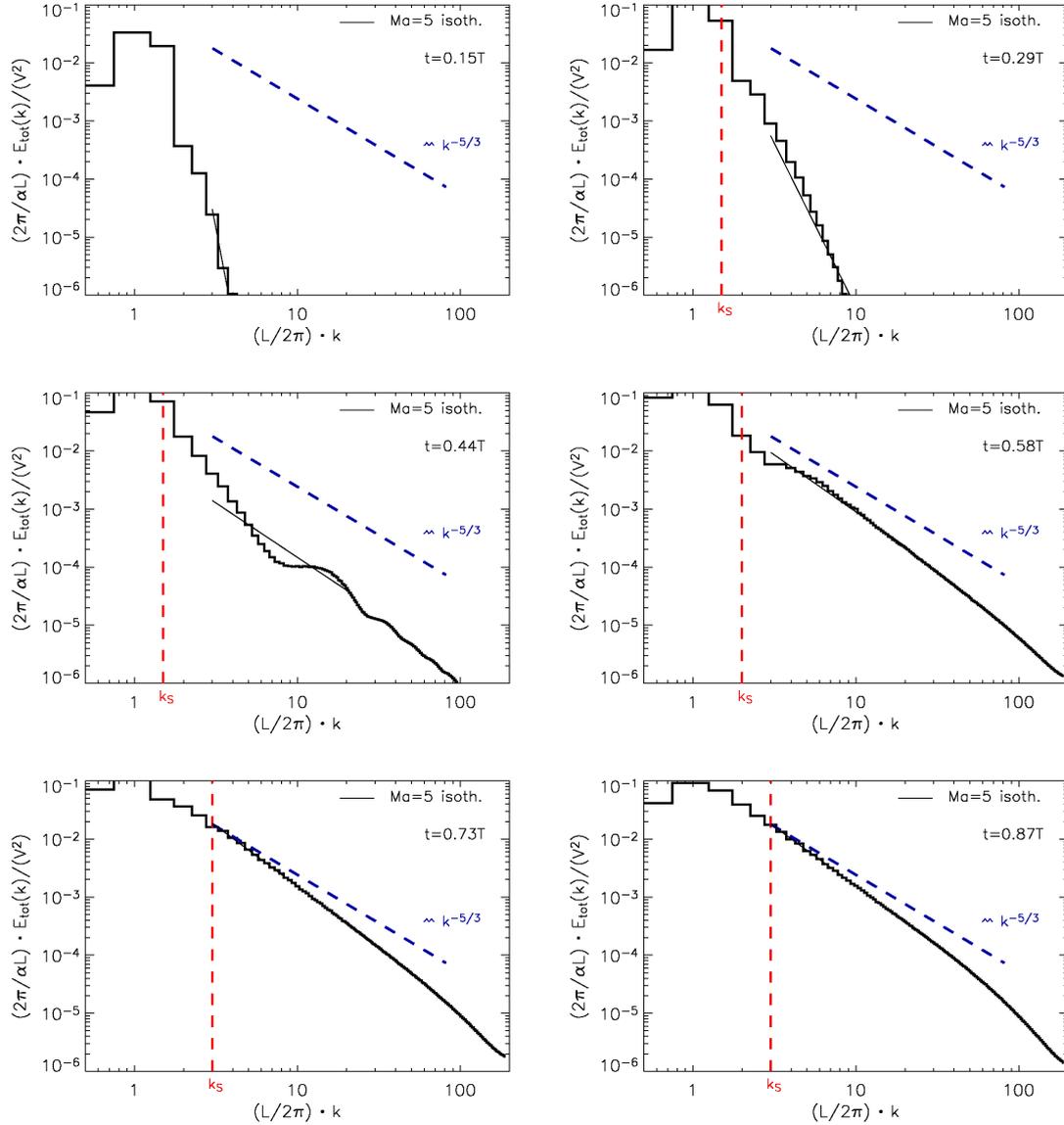


Abbildung 6.1. Zeitliche Entwicklung der Energiespektren für die Zeiten $t = 0.15, 0.29, 0.44, 0.58, 0.73, 0.87T$. Die Schallwellenzahl k_s ist als vertikale Linie zusammen mit einer weiteren gestrichelten Linie eingezeichnet, die das Kolmogorov-Skalenverhalten angibt. Die dünne Linie im Bereich von $3 \leq kL/2\pi \leq 20$ ist ein Fit an das Energiespektrum. Für alle weiteren Abbildungen der Energiespektrumsfunktionen ist $\alpha = 2$ (siehe vertikale Achse), weil das Fluid hauptsächlich auf der Hälfte der Länge der Simulationsdomäne getrieben wird.

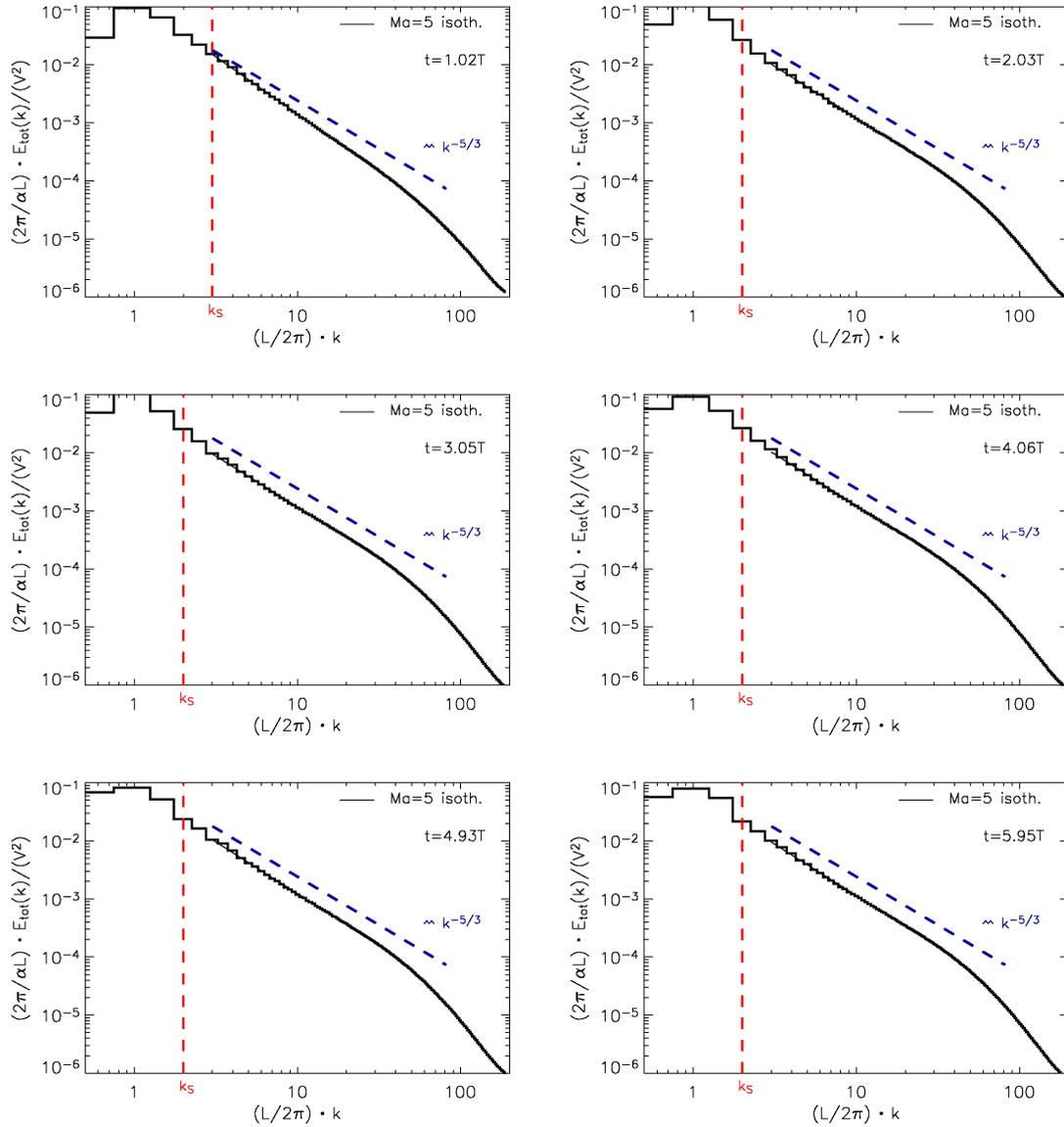


Abbildung 6.2. Zeitliche Entwicklung der Energiespektren für die Zeiten $t = 1.02, 2.03, 3.05, 4.06, 4.93, 5.95 T$. Die Schallwellenzahl k_s ist als vertikale Linie zusammen mit einer weiteren gestrichelten Linie eingezeichnet, die das Kolmogorov-Skalenverhalten angibt. Die dünne Linie im Bereich von $3 \leq kL/2\pi \leq 20$ ist ein Fit an das Energiespektrum.

6.2 aufgelistet. In einem sehr kleinen Bereich der Wellenzahlen um $10 \lesssim kL/2\pi \lesssim 20$ scheinen die Spektren wiederum etwas flacher zu sein. Der Beginn des Dissipationsbereichs zeichnet sich deutlich bei $kL/2\pi \approx 30$ durch ein Abknicken der Spektren ab.

In Abschnitt 5.3.2 wurde behandelt, dass sich das Fluid auf zunehmend kleiner werdenden Skalen wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält. Die Schallwellenzahl k_s trennt den Überschallbereich auf großen Skalen vom Unterschallbereich auf kleinen Skalen, wo das Fluid als inkompressibel angesehen werden kann. Um Aussagen darüber machen zu können, auf welchen Skalen sich das Fluid kompressibel bzw. inkompressibel verhält, wurde die Schallskala berechnet. Dies erfolgt mit

$$-\int_{\infty}^{k_s} E(k)dk = \frac{1}{2} \langle c_s^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \sum_{k_{\text{cut}}}^{k_s} E(k)\Delta k = \frac{1}{2} \langle c_s^2 \rangle \quad (6.1)$$

durch Umstellen nach k_s , wobei $k_{\text{cut}} = \pi/\Delta x$ die Abschneideskala des numerischen Gitters mit der Länge einer Gitterzelle Δx bezeichnet. $\langle c_s^2 \rangle$ ist das mittlere Quadrat der Schallgeschwindigkeit und entspricht einer mittleren Schallenergiedichte. Die berechneten Werte der Schallwellenzahl sind jeweils als vertikale Linien in den Abbildungen eingezeichnet.

Diskussion Innerhalb der ersten integralen Zeitskala T , also innerhalb einer Autokorrelationszeit des Kraftfeldes entwickelt sich eine turbulente Energiekaskade. Dies ist mit einem komplexen "Einschwingvorgang" verbunden, bei dem die Energie nicht gleichmäßig den Bereich größerer Wellenzahlen erschließt, was im Spektrum bei $t = 0.44T$ deutlich sichtbar wird. Außerdem wird offensichtlich zunächst ein Überschuss an kinetischer Energie auf kleine Skalen transferiert, denn die Schallskala steigt zwischen $t = 0.15T$ und $t = 1.02T$ stetig an, fällt dann aber bei $t = 2.03T$ wieder etwas zurück. Erst ab $t = 2.03T$ ist folglich ein stationärer Zustand erreicht. Die Spektren ändern sich kaum noch und auch k_s ist konstant bei $kL/2\pi = 2$. Weil das Energiespektrum bei $t \approx 1T$ ein deutliches Skalenverhalten aufweist, kann ab diesem Zeitpunkt von voll entwickelter Turbulenz gesprochen werden. Trotzdem ist ein wirklich stationärer Zustand erst ab $t \approx 2T$ erreicht.

Wie oben angedeutet, ist das Skalenverhalten im Bereich der Schallskala steiler als das Kolmogorov-Verhalten. Dies ist auch zu erwarten, denn bei k_s ist die Mach-Zahl des Fluids $\text{Ma} \approx 1$ und es kann nicht als vollständig inkompressibel angesehen werden. Erst bei Wellenzahlen viel größer als die Schallwellenzahl, ist die Annahme einer inkompressiblen Flüssigkeit gültig. Tatsächlich ist im Bereich $10 \lesssim kL/2\pi \lesssim 20$ das Skalenverhalten nahe am Kolmogorov-Skalenverhalten. Dies kann zwei Gründe haben. 1. Es handelt sich tatsächlich um das Kolmogorov-Skalenverhalten für inkompressible Turbulenz, weil für Wellenzahlen wesentlich größer als die Schallwellenzahl k_s das Fluid effektiv als inkompressibel angesehen werden kann. 2. Das Spektrum

wird durch den sogenannten Bottleneck-Effekt (Flaschenhals) im Bereich der Dissipationsskala leicht angehoben und als Folge resultiert ein flacheres Spektrum. In Anbetracht der Tatsache, dass der angesprochene Bereich sehr klein ist und nahe an der Dissipationsskala liegt, kann nicht genau gesagt werden, ob es sich tatsächlich um das Kolmogorov-Verhalten handelt. Der Bottleneck-Effekt wurde hingegen auch in anderen numerischen Simulationen festgestellt (z. B. Schmidt et al. (2006)) Die genaue Ursache des Bottleneck-Effekts ist umstritten (Dobler et al. 2003; Verma & Donzis 2005). Da er jedoch nicht nur in numerischen Simulationen, sondern auch in Strömungsexperimenten beobachtet wird, kann ein rein numerischer Ursprung ausgeschlossen werden. Es ist folglich sehr wahrscheinlich, dass der angesprochenen Bereich nahe der Dissipationsskala durch den Bottleneck-Effekt beeinflusst wird.

Die Ergebnisse auf großen Skalen im Bereich der Schallwellenzahl stimmen jedoch mit den Erwartungen aus dem Modell nach Boldyrev (2002) gut überein. Das Modell sagt ein Skalenverhalten von $E(k) \sim k^{-1.74}$ für Überschallturbulenz voraus (vgl. 5.3.2). Die im Bereich der Schallskala gemessenen Werte sind mit $E(k) \sim k^{-1.77 \pm 0.04}$ recht ähnlich, wenn auch bezüglich des Bestwertes etwas steiler (Mittelung und Fehlerbestimmung aus den Werten von Tabelle 6.2 über die Zeiten $t \approx 2, 3, 4, 5, 6 T$).

Die Berechnungen der Schallskala zeigen, dass sich das hier betrachtete Fluid nur auf den größten Skalen, die sich im Bereich der Injektionsskala des Kraftfelds befinden, tatsächlich wie eine Überschallströmung verhält. Um ein Abknicken des Spektrums und dessen Skalenverhalten auf Überschallskalen wie in der Skizze 5.4 zu messen, ist folglich ein weitaus stärkerer Antrieb, der höhere Mach-Zahlen erzeugt erforderlich. Eine einfache Abschätzung führt auf $k_s \sim V^2 \sim \text{Ma}^2$. Außerdem muss sich ein Inertialbereich abzeichnen, aus dessen Steigung man den Skalenexponenten bestimmen kann. Dies ist jedoch vermutlich nur bei weit höheren numerischen Auflösungen gut möglich.

Massengewichtete Energiespektren Bei den Energiespektren der Abbildungen 6.1 und 6.2 handelt es sich um traditionelle Energiespektren, also um $E(k) = d(v^2(k))/dk$. Es wird also eine Größe mit der Einheit von v^2 als kinetische Energie bezeichnet. Für inkompressible Turbulenz unterscheidet sich diese Größe natürlich nur um einen Faktor $\rho = \text{const}$ von der eigentlichen Energiedichte ρv^2 und das Skalenverhalten bleibt unbeeinflusst von ρ . Beschreibt man jedoch ein kompressibles Fluid, das durch Überschallströmungen charakterisiert ist, so ist die Dichte ρ nicht konstant und hat eine eigene Verteilung im Wellenzahlraum. Das trifft im vorliegenden Fall zu, sowie in Simulationen des turbulenten interstellaren Mediums generell. Es ist daher interessant zu untersuchen, wie sich die Energiespektren bei Berücksichtigung einer variablen Dichte verhalten. Deshalb wurden neben den üblichen Energiespektren ohne Berücksichtigung der Dichteskalierung auch solche unter Berücksichtigung von $\rho(k)$ erstellt. Die Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen diese mas-

sengewichteten Energiespektren, sind ansonsten aber äquivalent zu den Abbildungen 6.1 und 6.2, wobei die Schallwellenzahl jedoch auch entsprechend unter Berücksichtigung der Dichte berechnet wurde, also durch Ersetzen von $\langle c_s^2 \rangle$ mit $\langle \rho c_s^2 \rangle$ in Gleichung (6.1). Die zeitliche Entwicklung dieser Spektren verläuft im Wesentlichen identisch zu den nicht massengewichteten Spektren. Auch hier wird schließlich ein stationärer Zustand ab $t \approx 2T$ erreicht. Die berechneten Steigungen sind hier jedoch erheblich geringer. Tabelle 6.2 zeigt einen Vergleich der Steigungen der "normalen" Spektren mit den massengewichteten Spektren. Desweiteren ist der Bottleneck-Effekt scheinbar viel stärker ausgeprägt und kann im Bereich um $kL/2\pi \approx 30$ gut als kleine Erhöhung erkannt werden. Die Linie des Kolmogorov-Skalenverhaltens dient wieder als Orientierungshilfe.

Offensichtlich hat die entstehende Dichtestruktur, die sich im gesamten Skalenbereich ausbildet einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Form und Skalierung der Energiespektren. Die Verteilung der Dichte im Wellenzahlraum ist in den Abbildungen A.1 und A.2 im Anhang A.6 für die entsprechenden Zeitpunkte gezeigt. Die Struktur dieser Spektren gibt Hinweise auf das Verhalten der massengewichteten Energiespektren. Zu den Zeitpunkten $t \approx 2, 3, 4, 5, 6T$ kann die Verstärkung des Bottleneck-Effekts in den massengewichteten Energiespektren als Folge der relativen Erhöhung von $\rho(k)$ im Bereich der Dissipationsskala gegenüber $\rho(k)$ bei niedrigeren Wellenzahlen gesehen werden. In gleicher Weise wirkt sich das Verhalten von $\rho(k)$ auf die in Tabelle 6.2 verglichenen Steigungen der Energiespektren aus. Die Unterschiede zwischen den gewöhnlichen und den massengewichteten Energiespektren ist also eine Folge der Mischung aus den Skalierungseigenschaften von $v^2(k)$ und $\rho(k)$.

Zum besseren Vergleich mit der Theorie von Kolmogorov und den im Folgenden behandelten Modellen von Überschallturbulenz, sowie zahlreichen Veröffentlichungen vorhandener Energiespektren, ist die Betrachtung *nicht*-massengewichteter Spektren sinnvoller. Weil aber offensichtlich die Kompressibilität des Fluids eine wichtige Rolle in Sternentstehungsgebieten spielt, ist die Untersuchung massengewichteter Größen naheliegend und ebenfalls sinnvoll. Zur Berücksichtigung der Skalenabhängigkeit des Dichtefeldes in Energiespektren ist jedoch bisher leider kein Modell vorhanden.

6.3 Strukturfunktionen kompressiv getriebener Turbulenz

Der vorhergehende Abschnitt hat gezeigt, dass sich Turbulenz mit Hilfe der Energiespektrumsfunktion und deren Skalierungsverhalten untersuchen und teilweise charakterisieren lässt. Die theoretischen Vorhersagen von Kolmogorov treffen bei der Untersuchung der hier vorgestellten Turbulenzsimulation nicht mehr uneingeschränkt zu, weil die Annahme eines inkompressiblen Fluids bei einer charakteristischen Mach-

6.3 Strukturfunktionen kompressiv getriebener Turbulenz

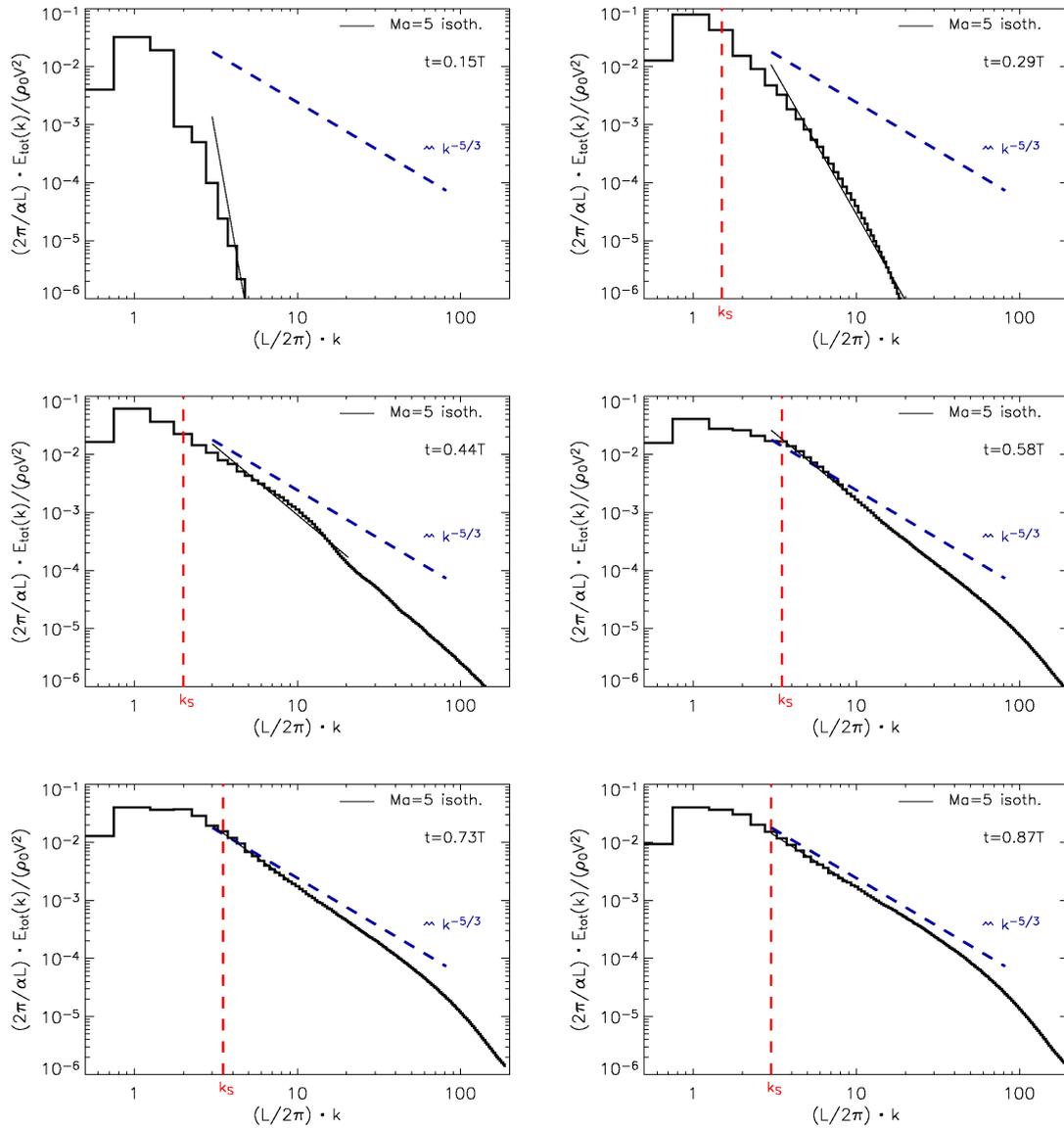


Abbildung 6.3. Zeitliche Entwicklung der massengewichteten Energiespektren für die Zeiten $t = 0.15, 0.29, 0.44, 0.58, 0.73, 0.87T$ analog zu 6.1.

6 Sternmassenverteilungsfunktion aus getriebener Überschallturbulenz

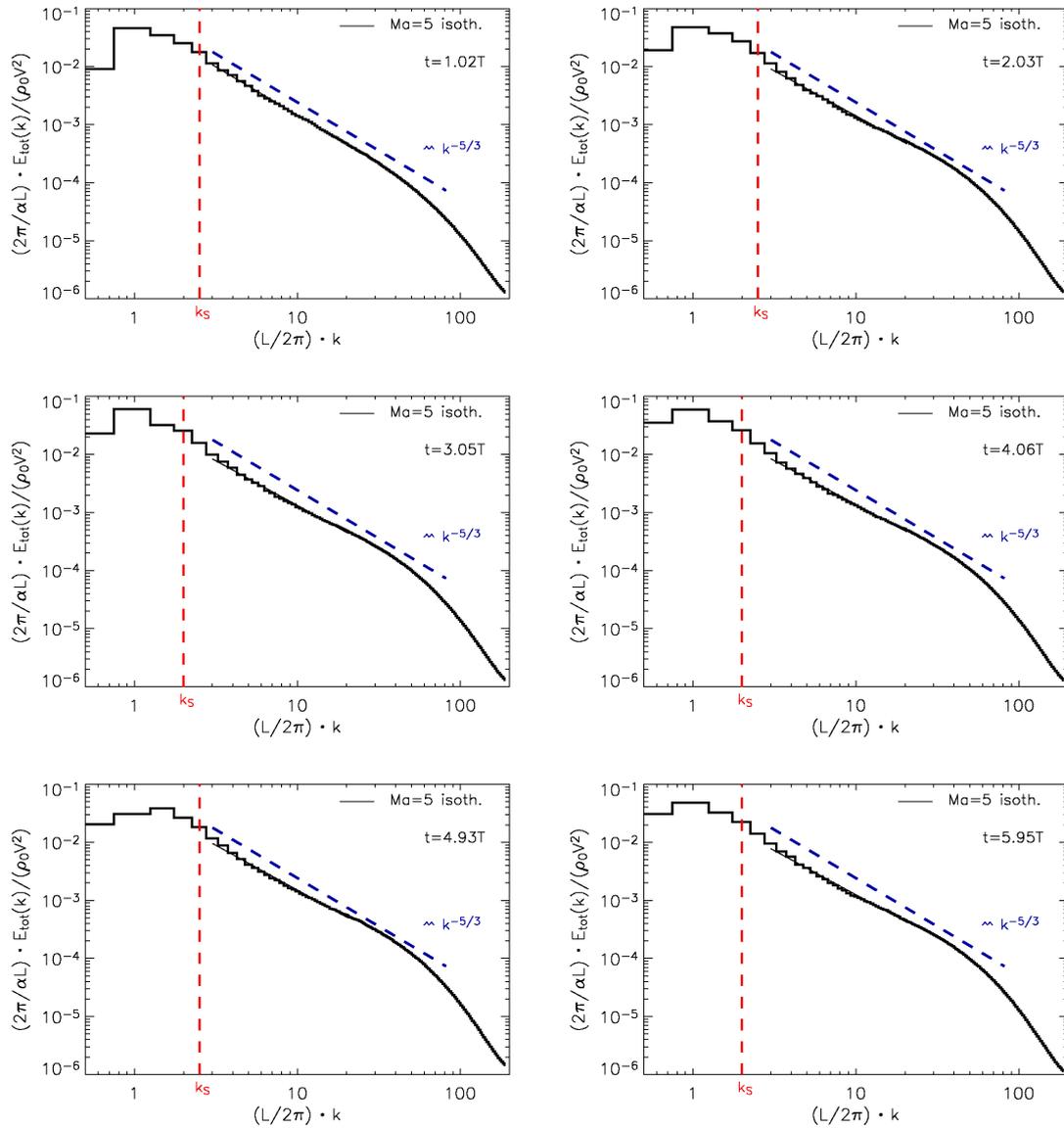


Abbildung 6.4. Zeitliche Entwicklung der massengewichteten Energiespektren für die Zeiten $t = 1.02, 2.03, 3.05, 4.06, 4.93, 5.95 T$ analog zu 6.2.

t/T	β	β_{mw}
1.02	1.97 ± 0.02	1.66 ± 0.03
2.03	1.78 ± 0.03	1.55 ± 0.07
3.05	1.75 ± 0.03	1.54 ± 0.07
4.06	1.78 ± 0.03	1.51 ± 0.06
4.93	1.78 ± 0.03	1.54 ± 0.07
5.95	1.77 ± 0.03	1.52 ± 0.07

Tabelle 6.2. Werte des Skalenverhaltens der normalen Energiespektrumsfunktion $E(k) \sim k^{-\beta}$ und des massengewichteten Energiespektrums $E(k) \sim k^{-\beta_{\text{mw}}}$ zu verschiedenen Zeitpunkten gemäß den Abbildungen 6.2 und 6.4. Die Werte wurden durch einen Least-Squares-Fit im Wellenzahlbereich $3 \leq kL/2\pi \leq 20$ bestimmt. Die Fehler entsprechen den Standardabweichungen des jeweiligen Fits.

Zahl von 5 nicht mehr erfüllt ist. Um die Effekte der Kompressibilität, die gerade bei Überschallströmungen auftreten, theoretisch zu berücksichtigen, hat Boldyrev (2002) eine theoretische Beschreibung des Skalierungsverhaltens für inkompressible Turbulenz von She & Leveque (1994) aufgeriffen und erweitert. Die Energiespektrumsfunktionen des vorhergehenden Abschnitts entsprechen einer Untersuchung der Turbulenz auf der Grundlage des 2. Moments des Geschwindigkeitsfeldes, es wird also die Struktur von v^2 untersucht. Möchte man jedoch eine umfassendere Charakterisierung und Statistik der turbulenten Strömung, so muss man auch Momente höherer Ordnung betrachten. Diese werden dann üblicherweise durch die Strukturfunktionen von Gleichung 5.15 beschrieben. Wie in Abschnitt 5.3.2 angesprochen, nutzt man einen Satz von Strukturfunktionen

$$S_p(l) \equiv \langle |\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})|^p \rangle_{\mathbf{x}} \sim l^{\zeta(p)} \quad . \quad (6.2)$$

Diese beschreiben die Korrelationen im Geschwindigkeitsfeld, gemittelt über viele verschiedene Positionen \mathbf{x} im Fluid in Abhängigkeit von der Distanz l zwischen den Punkten \mathbf{x} und $\mathbf{x} + \mathbf{l}$. Man betrachtet verschiedene Ordnungen p der Strukturfunktion. Unter Hinzunahme immer höherer Ordnungen, erhält man eine immer detailliertere Auskunft über die Struktur der Strömung. Hätte man also den vollständigen Satz an Strukturfunktionen, so wäre die turbulente Struktur vollständig beschrieben. In der Praxis kann nur bis zu einer endlichen Ordnung gegangen werden, die von der Genauigkeit der verwendeten Verfahren abhängt. Für Beobachtungen in Molekülwolken ist die Bestimmung der Strukturfunktionen aus Gründen der optischen Auflösung schwierig. Eine viel schwerwiegendere Einschränkung besteht dabei jedoch darin, dass nur die Projektion der Molekülwolke untersucht werden kann. Die volle 3-dimensionale Information bleibt dem Beobachter deshalb verschlossen. Außerdem können nur die transversalen Strukturfunktionen $S_{p,\text{trans}}(l)$ gemessen werden, weil Informationen über die Geschwindigkeit eines einzelnen Ausschnitts einer

Molekülwolke mit Hilfe des Doppler-Effekts nur in Sichtrichtung verfügbar sind. Gemessen werden können deshalb immer nur Projektionen von \mathbf{v} in Sichtrichtung, wobei \mathbf{l} stets senkrecht auf der Projektion von \mathbf{v} steht. Im Folgenden werden auch für die hier vorgestellte numerische Simulation nur die transversalen Strukturfunktionen behandelt, wobei hier aber die volle 3-dimensionale Information ausgenutzt wird. Ein direkter Vergleich der Strukturfunktionen mit Beobachtungen soll jedoch nicht vorgenommen werden. Stattdessen werden die hier gewonnenen Ergebnisse mit dem oben genannten Modell von She & Leveque (1994) und den Erweiterungen, sowie den Verallgemeinerungen dieses Modells durch Boldyrev (2002) verglichen. Diese Modelle sagen das Skalenverhalten der Strukturfunktionen voraus, indem neben den Überlegungen von Kolmogorov zur Skalierung des Geschwindigkeitsfelds (5.7) und der Wirbelzeitskala (5.8) die Form der dissipativen Strukturen berücksichtigt wird. Die Dimension D dieser dissipativen Strukturen, in denen die meiste kinetische Energie in innere Energie umgewandelt wird, hängt von der betrachteten Strömung ab. Ist die turbulente Strömung eine Unterschallströmung, so wird die Energie vorwiegend in schlauchartigen ($D = 1$) Vortexstrukturen dissipiert, die sich zu Filamenten zusammenfügen. Für Überschallturbulenz vermutet man blattartige ($D = 2$) Strukturen, weil sich in Überschallströmungen Stoßwellen ausbilden. Man definiert sich eine sogenannte Kodimension $C = 3 - D$. Diese wird in den besagten Modellen benutzt und bestimmt als Parameter einen Ausdruck für den Skalenexponenten $\zeta(p)$ der Strukturfunktion von Gleichung (6.2). Das Ergebnis ist Gleichung (5.17) aus Abschnitt 5.3.2

$$\zeta(p) = \frac{p}{9} + C \left(1 - \left[1 - \frac{2}{3C} \right]^{p/3} \right), \quad (6.3)$$

wobei hier $\Theta = 1/3$ und $\Delta = 2/3$ gesetzt wurde. Θ und Δ werden also bei den Kolmogorov-Werten belassen. Dabei geht man davon aus, dass das Kolmogorov-Skalenverhalten der Geschwindigkeit (5.7) und der Wirbelzeitskala (5.8) im Inertialbereich erhalten bleibt (Boldyrev et al. 2002b). Tabelle 6.4 zeigt einen Vergleich der Werte $\zeta(p)$ nach Kolmogorov (1941), She & Leveque (1994) und She & Waymire (1995) ($D = 1$, $C = 2$), Boldyrev (2002) ($D = 2$, $C = 1$) und Boldyrev (2002) ($D = 2.3$, $C = 0.7$) nach Gleichung (6.3), zusammen mit Ergebnissen numerischer Simulationen von Boldyrev et al. (2002a) und der hier ausgewerteten Simulation. $C = 0.7$ entspricht einer fraktalen Dimension der dissipativen Strukturen von $D = 2.3$ (siehe Diskussion weiter unten).

6.3.1 Auswertung und Ergebnisse

Die Berechnung von Strukturfunktionen ist nach Gleichung (6.2) im Prinzip nicht sehr schwierig. Es hat sich jedoch gezeigt, dass man gerade zur Berechnung der Strukturfunktionen höherer Ordnung über eine sehr große Anzahl an verschiedenen

t/T	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
2.03	0.562 ± 0.004	0.888 ± 0.003	1.066 ± 0.008	1.167 ± 0.013	1.228 ± 0.016
3.05	0.583 ± 0.005	0.884 ± 0.003	1.097 ± 0.006	1.239 ± 0.013	1.344 ± 0.019
4.06	0.531 ± 0.003	0.858 ± 0.004	1.035 ± 0.013	1.123 ± 0.023	1.163 ± 0.031
4.93	0.530 ± 0.002	0.848 ± 0.006	1.018 ± 0.016	1.100 ± 0.026	1.135 ± 0.034
5.95	0.523 ± 0.003	0.852 ± 0.004	1.044 ± 0.012	1.157 ± 0.021	1.224 ± 0.027
6.96	0.546 ± 0.004	0.875 ± 0.004	1.053 ± 0.010	1.150 ± 0.017	1.208 ± 0.021

Tabelle 6.3. Gefittete Skalenexponenten $\zeta(p)$ für $p = 1, 2, 3, 4, 5$ und Zeitpunkte, die einem stationären Zustand voll entwickelter Turbulenz entsprechen. Die Fits wurden im Bereich $8 \leq l \leq 70$ durchgeführt.

Punkten \mathbf{x} mitteln muss, um eine konvergierte Statistik zu erhalten. Im vorliegenden Fall wurde zur Berechnung jeder einzelnen Strukturfunktion jeweils eine Gesamtanzahl von ungefähr 2.4×10^{10} Wertepaaren benutzt. Die Berechnungen wurden mit einem parallelisierten C++-Programm durchgeführt, das ebenfalls im Rahmen dieser Diplomarbeit entworfen wurde. Es wurden Strukturfunktionen bis zur 5. Ordnung für die Zeitpunkte $t = 2.03, 3.05, 4.06, 4.93, 5.95$ und $6.96 T$ berechnet. Für die Strukturfunktionen kann, wie auch schon bei den Energiespektren im Inertialbereich ein Potenzgesetz angefitet werden, welches das Skalenverhalten der Strukturfunktion $S_{p,\text{trans}}(l)$ mit dem Skalenexponenten $\zeta(p)$ angibt⁴. Die Fits wurden für $8 \leq l \leq 70$, also über knapp eine Dekade in l durchgeführt. Tabelle 6.3 zeigt die ermittelten Skalenexponenten $\zeta(p)$ für die entsprechenden Zeitschritte und Ordnungen p der Strukturfunktionen. Die Abstände l sind dabei in Einheiten des Zellenindex angegeben. Weil die numerische Simulation eine Auflösung von $N = 768$ Zellen in jeder Raumrichtung besitzt und periodische Randbedingungen benutzt werden, ist der maximale Abstand zwischen zwei Punkten durch die Hälfte der Raumdiagonale festgelegt ($l_{\text{max}} = \sqrt{3}N/2$). Eine isotrope Verteilung der Abstände l ist jedoch nur bis $N/2$ gegeben ($l_{\text{max}} = 384$). Die Strukturfunktionen ändern sich für die angegebenen Zeiten entsprechend den Energiespektren vom vorhergehenden Abschnitt nur noch unmerklich. Die Form der Strukturfunktionen spiegelt daher das Erreichen eines stationären Zustands ab $t \approx 2T$ analog zu den Spektren wider. Diese Feststellung geht auch aus den einzeln berechneten Steigungen von Tabelle 6.3 hervor. Es kann daher als gerechtfertigt angesehen werden, über die Strukturfunktionen der angegebenen Zeiten zu mitteln, auch wenn eine Mittelung aus besagten Gründen nicht unbedingt

⁴Tatsächlich ist die Information, die in Form des Energiespektrums $E(k)$ über das Quadrat des Geschwindigkeitsfelds verfügbar ist, äquivalent zur Information, die aus $S_2(l)$ gewonnen werden kann. $E(k)$ gibt dabei die Verteilung von $v^2(k)$ im Fourierraum an, wohingegen $S_2(l)$ die Geschwindigkeitsstruktur $v^2(l)$ im Ortsraum beschreibt. Der Zusammenhang zwischen beiden Beschreibungen ist durch die Fouriertransformation gegeben: $S_2(l) \sim \int_0^\infty (1 - \frac{\sin kl}{kl}) E(k) dk$ (z. B. Dobler et al. (2003)).

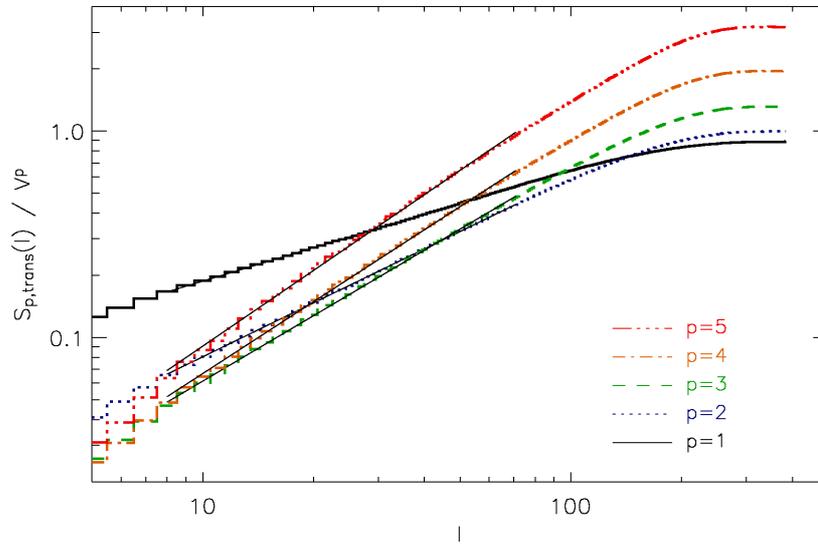


Abbildung 6.5. Transversale Strukturfunktionen $S_{p,\text{trans}}(l)$ normiert auf die entsprechenden Potenzen der charakteristischen Geschwindigkeitsskala V . Die dünnen schwarzen Linien zeigen den Bereich der Fits.

notwendig gewesen wäre. Das Ergebnis zeigt Abbildung 6.5 für $p = 1, 2, 3, 4, 5$. Um eine bessere Aussage über den Fehler und die Variation der Skalenexponenten ab dem Erreichen des stationären Zustands machen zu können, wurden jedoch nicht die Ergebnisse des Fits an die gemittelten Strukturfunktionen von Abbildung 6.5 ausgewertet. Es wurde vielmehr über die Einzelmessungen der Werte von Tabelle 6.3 unter Berücksichtigung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes gemittelt. Die daraus erzeugten Angaben für die Fehler der Auswertung enthalten somit sowohl die Fehlerintervalle der Fits, als auch die Variation der Skalenexponenten mit der Zeit. Um die so erhaltenen Werte mit dem Modell und der Simulation von Boldyrev et al. (2002a) vergleichen zu können, wurden die berechneten Skalenexponenten auf den Skalenexponent $\zeta(3)$ normiert, so dass letztendlich $\zeta(p)/\zeta(3)$ angegeben wird. Es handelt sich hierbei um eine übliche Vorgehensweise, die dadurch motiviert ist, dass die eigentlichen Strukturfunktionen in vielen numerischen Simulationen keine guten Skalierungseigenschaften zeigen. Wenn man jedoch $S_p(l)$ gegen $S_3(l)$ aufträgt, so ergibt sich eine deutlichere Skalierung über einen weiten Bereich in l . Man spricht von erweiterter Selbstähnlichkeit⁵ nach der Hypothese von Benzi et al. (1993). Auf Grund des deutlichen Skalenverhaltens in den hier gezeigten Strukturfunktionen war die Nutzung der Selbstähnlichkeitshypothese nicht nötig, eine Normierung auf $\zeta(3)$ aber zum besseren Vergleich sinnvoll. Die Resultate sind zusammen mit den Vorhersagen der oben genannten Modelle und der Simulation von Boldyrev et al. (2002a)

⁵extended self similarity (ESS)

p	K41	SL94 ($C = 2$)	B02 ($C = 1$)	BNP02	B02 ($C = 0.7$)	Eigene
1	0.33	0.36	0.42	0.42	0.56	0.51 ± 0.02
2	0.67	0.70	0.74	0.74	0.83	0.83 ± 0.02
3	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
4	1.33	1.28	1.21	1.20	1.13	1.10 ± 0.05
5	1.67	1.54	1.40	1.38	1.25	1.16 ± 0.07

Tabelle 6.4. Vergleich der Skalenexponenten $\zeta(p)$ der Strukturfunktionen für $p = 1, 2, 3, 4, 5$. Spalte 2: Kolmogorov-Theorie $\zeta(p) = p/3$ in Folge von Gleichung (5.7) (K41). Spalte 3: She-Leveque-Modell (SL94) für inkompressible Turbulenz ($C = 2$). Spalte 4: Erweiterung des She-Leveque-Modells durch Boldyrev (2002) (B02) für kompressible Turbulenz ($C = 1$). Spalte 5: Ergebnisse der numerischen Simulation von Boldyrev et al. (2002a) (BNP02). Spalte 6: Verallgemeinerung in Boldyrev (2002) auf fraktale Dissipationsstrukturen ($C = 0.7$). Spalte 7: Auswertung der hier vorgestellten Turbulenzsimulation.

in Tabelle 6.4 angegeben.

6.3.2 Diskussion

Statistik der Strukturfunktionen Es wurde bereits auf die Schwierigkeiten bei der Berechnung von Strukturfunktionen hingewiesen. Um zu überprüfen, ob die zur Erzeugung der Strukturfunktionen benutzte Anzahl an Mittelungen ausreichend war, wurde für $t = 6.96T$ die Berechnung der Strukturfunktionen wiederholt, wobei jedoch über die 5-fache Anzahl an Punkten gemittelt wurde⁶. Abbildung 6.6 zeigt einen Vergleich der ursprünglich berechneten Strukturfunktion bei $t = 6.96T$ (Gesamtanzahl 2.4×10^{10} Punkte) zusammen mit der Berechnung unter Nutzung von 4.8×10^{11} Mittelungspunkten für $p = 1$ und $p = 5$. Die für die Statistik kritischen Strukturfunktionen hoher Ordnung $p = 5$ sind für die unterschiedlich starke Mittelung nahezu identisch. Daraus folgt, dass den Berechnungen der hier ausgewerteten Strukturfunktionen eine ausreichend gute Statistik zu Grunde liegt.

Vergleich mit Modell und numerischer Simulation von Boldyrev et al. (2002a)

Geht man von der Tatsache aus, dass es sich bei der hier ausgewerteten Simulation getriebener Turbulenz um die Beschreibung eines kompressiblen Fluids bei Mach-Zahlen von $Ma \approx 5$ handelt, so erwartet man theoretisch ein Skalierungsverhalten der Strukturfunktion, das mit Überschallturbulenz vereinbar ist. Dies entspricht nach Boldyrev (2002) einer Situation, in der die am stärksten dissipativ wirkenden Strukturen eine Dimension von $D = 2$ haben (Stoßfronten). Das Skalenverhalten ist

⁶Die Erzeugung dieser Strukturfunktionen wurde parallelisiert auf 10 Prozessoren bei einer Laufzeit von circa 11 Stunden durchgeführt.

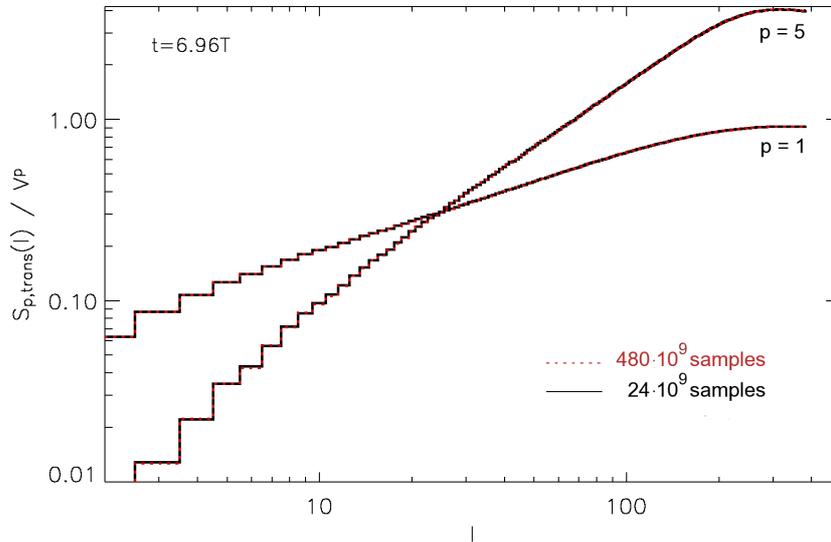


Abbildung 6.6. Vergleich der Statistik bei der Berechnung der Strukturfunktionen. Eine Anzahl von 2.4×10^{10} Punkten zur Mittelung ist offensichtlich ausreichend.

dann gemäß Gleichung (6.3) durch Setzen von $C = 1$ gegeben. Tatsächlich finden Boldyrev et al. (2002a) in einer numerischen Simulation getriebener MHD-Turbulenz Werte der Skalensexponenten sehr nahe an den theoretischen Vorhersagen für $C = 1$ (Spalten 4 und 5 in Tabelle 6.4).

Die hier gemessenen Werte weichen davon sowohl in der Abhängigkeit von p als auch in ihrem absoluten Betrag ab. Das kann mehrere Gründe haben. Die Gründe sind sehr wahrscheinlich in den Unterschieden zwischen der hier ausgewerteten numerischen Simulation und der von Boldyrev et al. (2002a) (im Folgenden BNP02) zu finden. Die wesentlichsten Unterschiede beider Simulationen sind in Tabelle 6.5 gegenübergestellt.

Die Tatsache, dass BNP02 Magnetfelder in ihre Simulation integrieren, hat vermutlich keine großen Auswirkungen auf die Ergebnisse, weil in deren Simulation das Verhältnis aus magnetischer und kinetischer Energiedichte klein ist ($p_m/p_{dyn} \approx 0.1$, Padoan et al. (2004)). Außerdem erwähnen BNP02, dass bei einem Test mit sehr schwachen Magnetfeldern keine Änderungen in den errechneten Skalerverhalten beobachtet wurden. Die unterschiedlichen charakteristischen Mach-Zahlen beider Simulationen haben wahrscheinlich auch keinen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse, weil in beiden Fällen von starker Überschallturbulenz ausgegangen werden kann. Trotzdem untersuchen Padoan et al. (2004) den Einfluss der Mach-Zahl auf das Skalierungsverhalten und finden eine Abhängigkeit der Dimension der dissipativen Strukturen D von der Machzahl. Bei $Ma \approx 10$ ergibt sich demnach $D \approx 2$ in Übereinstimmung mit dem Modell. Bei $Ma \approx 5$ errechnen die Autoren $D \approx 1.9$.

	Simulation nach Boldyrev et al. (2002a) (BNP02)	Eigene Simulation
Auflösung	250 ³	768 ³
stochastischer Antrieb	rein solenoidal getrieben ($\zeta = 1.0$)	hauptsächlich kompressiv getrieben ($\zeta = 0.1$)
Mach-Zahl	10	5
	Magnetfelder (MHD)	keine Magnetfelder (HD)

Tabelle 6.5. Vergleich der wesentlichen Unterschiede in den Parametern und Methoden der Turbulenzsimulation von Boldyrev et al. (2002a) und der hier durchgeführten Turbulenzsimulation. Die unterschiedliche Art des stochastischen Treibens der Turbulenz hat vermutlich entscheidende Konsequenzen für die Ergebnisse der Simulationen (siehe Text).

Die Abhängigkeit des Skalierungsverhaltens von der Mach-Zahl ist also im vorliegenden Fall vernachlässigbar. In einer Parameterstudie getriebener Überschallturbulenz soll unter anderem dieser Zusammenhang überprüft werden (Schmidt & Federrath 2007)⁷.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Simulationen besteht jedoch in der Weise, in der das Fluid stochastisch getrieben wird. BNP02 erzeugen ein Kraftfeld \mathbf{f} , das nur solenoidale Moden ($\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$) im Fluid anregt. Bei der hier vorgestellten Simulation wird das Kraftfeld hingegen so gebildet, dass 90% kompressive Moden ($\nabla \times \mathbf{f} = 0$) und nur 10% solenoidale Moden angeregt werden. Das Kraftfeld ist also hauptsächlich durch kompressive Moden charakterisiert ($\nabla \times \mathbf{f} \ll \nabla \cdot \mathbf{f}$). Ansonsten sind die Eigenschaften beider Kraftfelder vergleichbar (Treiben auf größten Skalen, entsprechend der Größe der Simulationsdomäne). BNP02 berechnen das Verhältnis aus der kinetischen Energie in kompressiblen Moden $E_c(k)$ mit $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$ zur kinetischen Energie in solenoidalen Moden $E_s(k)$ mit $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$ und kommen zu dem Ergebnis, dass $E_c(k)/E_s(k) \approx 0.1 - 0.2$ im Inertialbereich ist. Sie schlussfolgern daher, dass kompressive Moden kaum Einfluss auf das Skalierungsverhalten haben und rechtfertigen damit den Einsatz eines rein solenoidalen Treibens. Desweiteren erwähnen die Autoren, dass sie den Fall einer Mischung aus solenoidalem und kompressivem Treiben ebenfalls getestet haben, sich daraus aber keine wesentlichen Veränderungen ergeben. Genaue Angaben zu dem entsprechenden Test werden jedoch nicht gemacht (z. B. genaues Verhältnis solenoidal/kompressiv). Es muss daher überprüft werden, wie das Verhältnis $E_c(k)/E_s(k)$ im Inertialbereich beim hier verwendeten stochastischen Treiben aussieht. Die Abbildungen 6.7 zeigen die Verteilung der kinetischen

⁷Erste Ergebnisse dieser Parameterstudie sind in Klingenberg et al. (2006) bezüglich der Verwendung unterschiedlicher Riemann-Löser zu finden.

Energie in solenoidalen und kompressiven Moden für die Zeiten $t \approx 1, 2, 3, 4, 5, 6 T$. Auch diese Abbildungen zeigen, dass ab $t \approx 2 T$ ein stationärer Zustand erreicht ist. Lediglich auf den größten Skalen ist der Einfluss des zeitlich veränderlichen stochastischen Kraftfelds direkt zu erkennen. Offensichtlich hat aber die Komposition des Kraftfelds in Form hauptsächlich kompressiver Moden durchaus Auswirkungen auf die Skalen des Inertialbereichs und darüber hinaus. Abbildung 6.8 zeigt das Verhältnis $E_c(k)/E_s(k)$ für einen repräsentativen Zeitpunkt $t = 5.95 T$. Ganz im Gegensatz zu BNP02 ist dieses Verhältnis für den gesamten Wellenzahlbereich größer 0.6. Es muss also davon ausgegangen werden, dass die Art und Weise des stochastischen Antriebs nicht nur Einfluss auf die größten Skalen des Systems nimmt, sondern auch im Inertialbereich spürbar wird. Ein Zusammenhang zwischen dem stochastischen Treiben und den Ergebnissen aus den Strukturfunktionen kann folglich nicht ausgeschlossen werden. Dieser Zusammenhang wird ebenfalls in Schmidt & Federrath (2007) untersucht werden.

Es sei noch auf den Anstieg von E_c/E_s im Dissipationsbereich hingewiesen. Offenbar ist das Verhältnis kompressibler Moden zu solenoidalen Moden des Geschwindigkeitsfelds im Dissipationsbereich groß. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass die Dissipation vorwiegend in Vortices stattfindet, also in Strukturen die durch eine hohe Vortizität im Geschwindigkeitsfeld ausgezeichnet sind. Deshalb erwartet man $E_s < E_c$ im Dissipationsbereich. Der kontinuierliche Abfall von E_c/E_s im Inertialbereich ($3 \lesssim kL/2\pi \lesssim 20$) kann ebenfalls mit Hilfe von Gleichung (5.10) verstanden werden. Diese besagt, dass auf kleiner werdenden Skalen die Vortizität ansteigt und damit erwartet man ein Absinken von E_c/E_s im Inertialbereich.

Fraktale Dimension der dissipativen Strukturen BNP02 gehen davon aus, dass die Dimensionalität der am stärksten dissipativ wirkenden Strukturen $D = 2$ ist, weil Stoßfronten, die in Überschallturbulenz entstehen, eine blattartige 2-dimensionale Struktur haben. Wie auch schon in Abschnitt 5.3.2 erwähnt, spricht jedoch nichts dagegen, dass die Dimensionalität der dissipativen Strukturen auch einen höheren Wert (z. B. $D = 2.3$) annimmt. Dies entspricht einer fraktalen Dimension. Tatsächlich wird in Molekülwolken eine fraktale Dimension von $D \approx 2.3$ für die Dichteverteilung gemessen (Larson 1992; Elmegreen & Elmegreen 2001; Chappell & Scalo 2001). Sollten die dissipativen Strukturen mit Regionen hoher Dichte korreliert sein, so könnte man für diese dissipativen Strukturen tatsächlich eine fraktale Dimension erwarten. Die Korrelation zwischen Dichte und dissipativen Strukturen erscheint wahrscheinlich, weil die meiste kinetische Energie in Stoßwellen dissipiert wird, die durch ihre Wechselwirkung untereinander verdichtetes Gas bilden (Larson 1992; Ostriker et al. 2001). Durch die Interaktion vieler Stoßfronten auf unterschiedlichen Skalen kann die Entstehung einer komplexen Struktur mit fraktaler Dimension nicht ausgeschlossen werden. In Abbildung 6.9 ist die Struktur der Dichte bei $t = 4.79 T$, sowie der Betrag der Vortizität $|\nabla \times \mathbf{v}|$ durch Isoflächen dargestellt. Man kann erkennen, welch

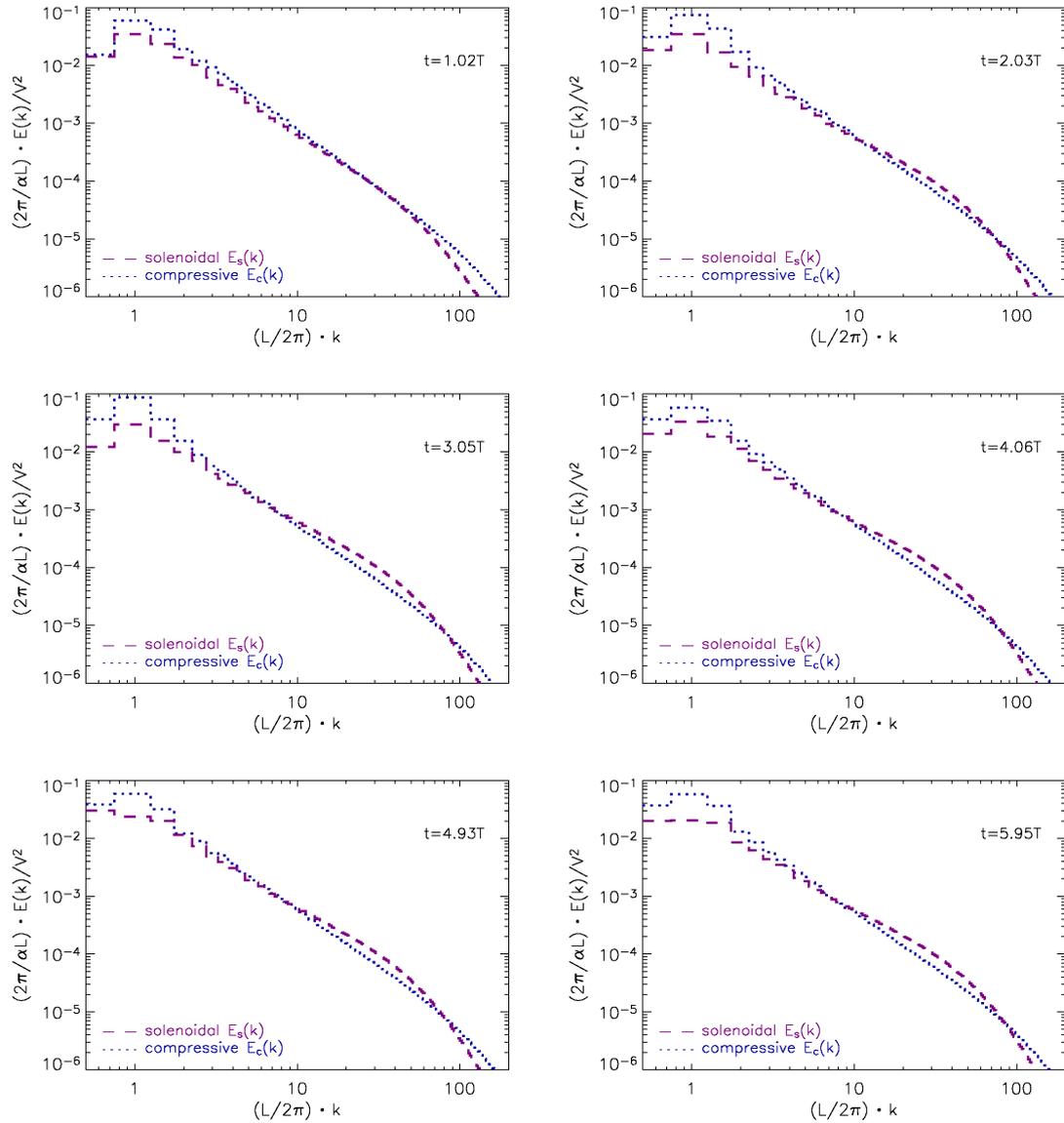


Abbildung 6.7. Zeitliche Entwicklung der solenoidalen und kompressiven Energiespektren $E_s(k)$ und $E_c(k)$ für die Zeiten $t = 1.02, 2.03, 3.05, 4.06, 4.93, 5.95T$. E_c ist über einen weiten Wellenzahlbereich größer als E_s (vgl. Abb. 6.8).

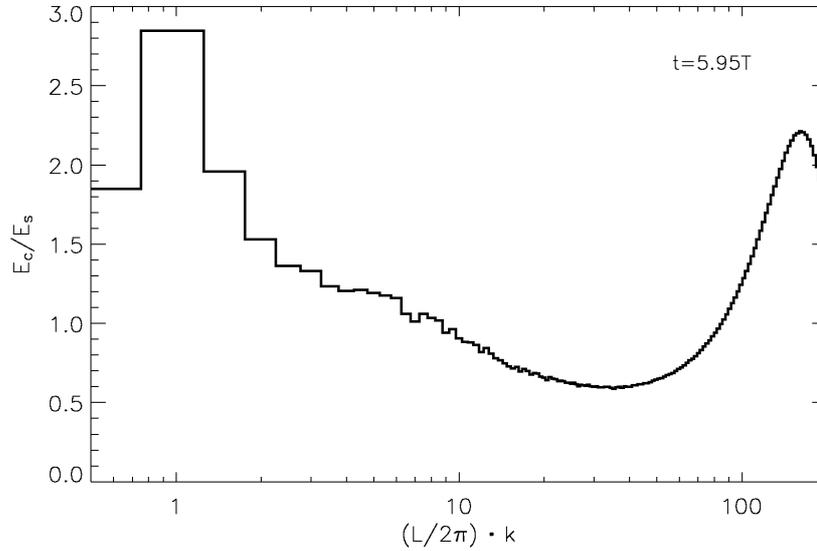


Abbildung 6.8. Verhältnis der kinetischen Energie in kompressiven und in solenoidalen Moden in Abhängigkeit der Wellenzahl. E_c/E_s ist nicht nur auf den großen Skalen von der Größenordnung 1, sondern auch im Inertialbereich. Kompressive Moden spielen im gesamten Wellenzahlbereich eine Rolle, weil E_c/E_s für alle k größer als ≈ 0.6 ist.

komplexe Struktur durch die Wirkung der kompressiblen Turbulenz auf allen Skalen erzeugt wird. Die fraktale Dimension dieser Struktur konnte jedoch im Rahmen der Diplomarbeit nicht mehr direkt aus dem Dichtefeld bestimmt werden⁸. Es wäre dennoch interessant herauszufinden, zu welchen Ergebnissen eine solche Vorgehensweise führen würde. Nimmt man hingegen die hier berechneten Werte für die Skalierung der Strukturfunktionen, so ist eine Rekonstruktion der fraktalen Dimension dissipativer Strukturen gemäß Gleichung (6.3) im Rahmen des Modells von Boldyrev (2002) möglich. Dies wurde durch einen nichtlinearen Fit der Daten aus Tabelle 6.4 an (6.3) zur Bestimmung der Kodimension $C = 3 - D$ durchgeführt. Abbildung 6.10 zeigt die Daten aus Tabelle 6.4 zusammen mit dem Ergebnis des Fits. Der Fit ergibt eine Kodimension $C = 0.70 \pm 0.07$, wobei die untere Grenze $C = 0.63$ formal aus dem Fit hervorgeht. Der minimale Wert für C ist jedoch aus (6.3) auf $C_{\min} = 2/3$ festgelegt. Es ergibt sich also eine Dimension D der dissipativen Strukturen von $2.23 \leq D \leq 2.33$ mit dem Bestwert $D = 2.30$. Dies entspricht überraschenderweise den oben genannten Messungen der fraktalen Dimension der Dichtestruktur in Molekülwolken.

⁸Dies erfordert die Festlegung auf bestimmte Isoflächen, das heißt, es muss ein Schwellenwert definiert und anschließend die Struktur mit Hilfe kleiner und kleiner werdender Quader abgerastert werden. Die fraktale Dimension ist dann durch $D = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}$ mit der Kantenlänge ϵ der Quader gegeben.

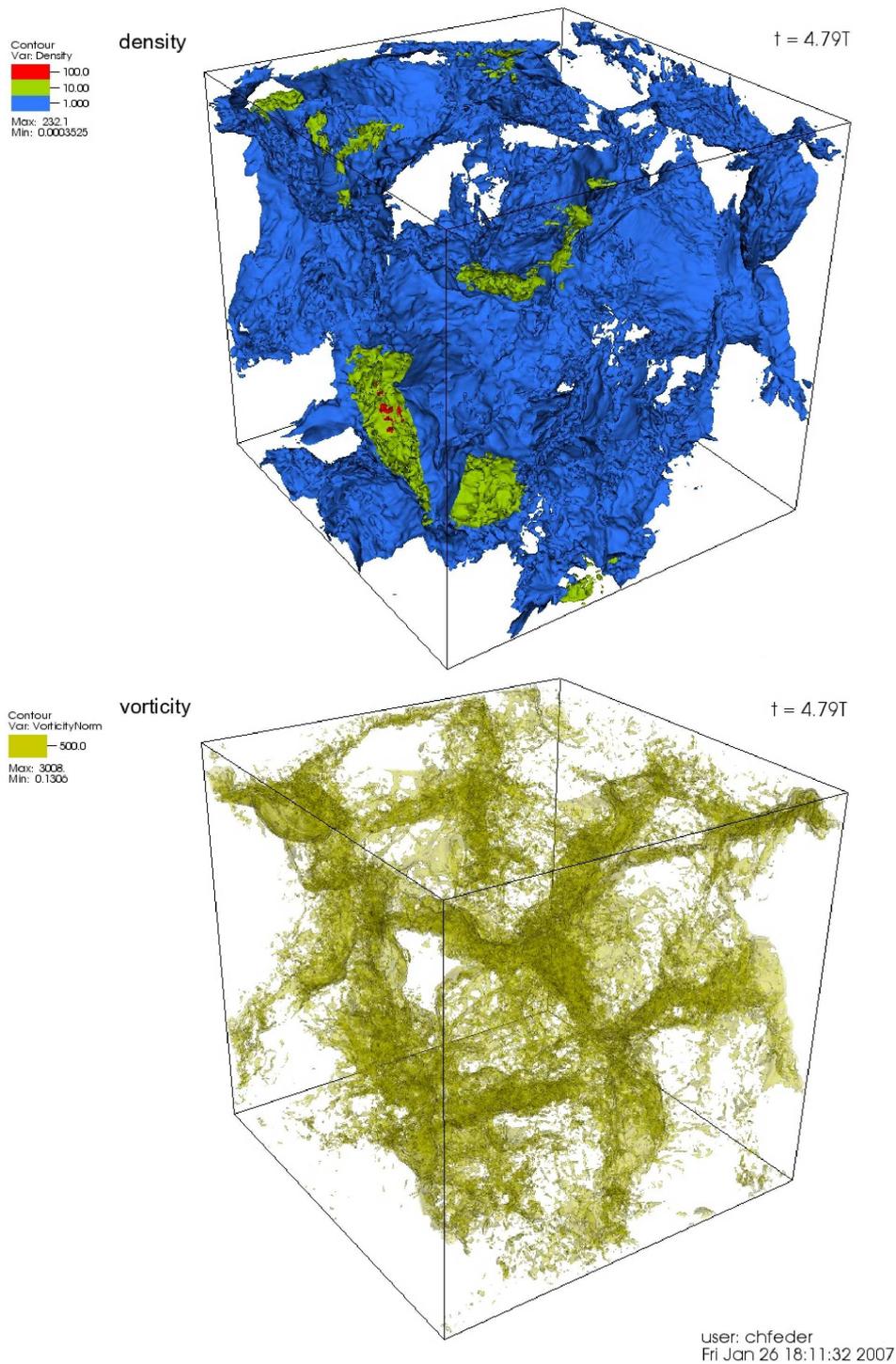


Abbildung 6.9. Turbulenz erzeugt komplexe Strukturen auf allen Skalen. Die Abbildungen zeigen die Struktur des Dichtefelds (oben) und der Vortizität (unten) für festgelegte Isoflächen bei voll entwickelter Turbulenz ($t = 4.79T$).

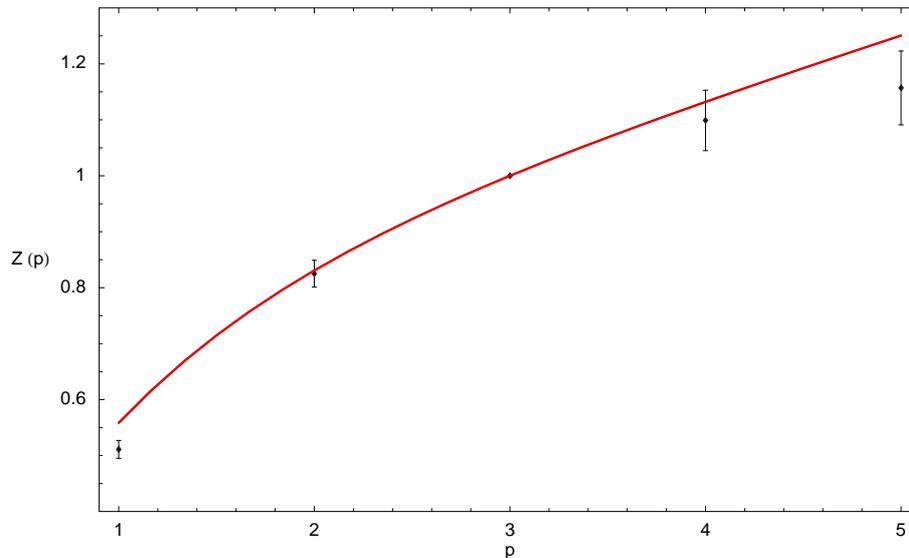


Abbildung 6.10. Fit der berechneten Skalensexponenten $Z(p) = \zeta(p)/\zeta(3)$ aus Tabelle 6.4 an Gleichung (6.3) zur Bestimmung der Kodimension C .

Bei genauer Betrachtung des Fits der Kodimension fallen jedoch Abweichungen der Messwerte bei $p = 1, 4, 5$ vom Verlauf auf, der durch Gleichung (6.3) beschrieben wird. Um die gemessenen Werte besser fiten zu können, könnte man die Parameter Θ und Δ in Gleichung (5.17), die von Boldyrev (2002) auf das Kolmogorov-Skalenverhalten $\Theta = 1/3$ aus (5.7) und $\Delta = 2/3$ aus (5.8) gesetzt wurden neben der Kodimension ebenfalls variieren. Das hätte ein abgeändertes Skalenverhalten von Geschwindigkeit und Wirbelzeitskala im Inertialbereich zur Folge. Weitere Untersuchungen in dieser Richtung konnten im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht mehr durchgeführt werden.

6.4 Bezug zur IMF

Überschallturbulenz hat mit Sicherheit einen entscheidenden Einfluss auf die Formgebung, Strukturierung und Dynamik von Molekülwolken. Padoan & Nordlund (2002) (im Folgenden PN02) bezeichnen die Vorgänge, die zu den komplexen selbstähnlichen Strukturen in Sternentstehungsgebieten führen als *turbulente Fragmentation*. PN02 stellen einen Zusammenhang zwischen dem Skalenverhalten von Überschallturbulenz und der Sternmassenverteilungsfunktion IMF her. Die IMF gibt die Anzahlverteilung $N(m)$ der Sterne in Abhängigkeit von der Sternmasse m wieder. Sie ist eine direkte Folge der Massenverteilung dichter Kerne, die ihre Jeans-Masse überschreiten und in Folge dessen zu Protosternen kollabieren. In der Herleitung von PN02 resultiert die Form dieser Massenverteilung einzig und alleine als Folge der Eigenschaften von Überschallturbulenz, die zur Anordnung der Materie in Filamenten und blattartigen

Strukturen mit möglicherweise fraktaler Dimension führen. Eigengravitation spielt in der Herleitung keine Rolle. PN02 gehen aber von zwei wesentlichen Annahmen aus: 1. Das turbulente Geschwindigkeitsfeld ist selbstähnlich und weist ein Skalenverhalten auf, das durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann. 2. Die Größe und Masse dichter Kerne ergibt sich aus den Sprungbedingungen für isotherme magnetohydrodynamische Stoßwellen. Die erste Annahme kann nach den Ausführungen des vorherigen Abschnitts auch für die hier durchgeführte numerische Simulation als erfüllt angesehen werden. Die zweite Annahme ist aber nicht direkt auf die hier behandelte Simulation anwendbar, weil keine Magnetfelder integriert wurden.

Dennoch wird die Herleitung der IMF nach PN02 hier kurz vorgestellt, wobei von den Sprungbedingungen für isotherme MHD-Stoßwellen ausgegangen wird:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \sim \text{Ma}_A \quad (6.4)$$

$$\frac{\lambda}{l} \sim \text{Ma}_A^{-1} \quad (6.5)$$

ρ_0 und l sind die Dichte und Ausdehnung einer Region, bevor der Stoß diese Region durchläuft, ρ_1 und λ sind die entsprechenden Werte nachdem die Stoßfront das Gas passiert hat. Ma_A ist die Alfvén-Machzahl, die durch $\text{Ma}_A = v\sqrt{4\pi\rho_0}/B_0$ mit dem konstanten Magnetfeld B_0 gegeben ist. PN02 nehmen im Folgenden an, dass die Skalenabhängigkeit der Geschwindigkeit durch $v(l) \sim l^\alpha = l^{\zeta(2)/2}$ gegeben ist⁹. Damit wird

$$\text{Ma}_A \sim l^\alpha \quad (6.6)$$

Möchte man nun die Masse in einer durch eine Stoßfront komprimierten Region berechnen, so muss man lediglich die Gleichungen (6.4) und (6.5) kombinieren und erhält desweiteren unter Hinzunahme von (6.6) die Skalierung der Masse eines dichten Kerns

$$m \sim \rho_1 \lambda^3 \sim \frac{l^3}{\text{Ma}_A^2} \sim l^{3-2\alpha} \quad (6.7)$$

Aus einem Gedankenexperiment folgt die Abhängigkeit der Anzahl N dichter Kerne von der Skala l :

$$N \sim l^{-3} \quad (\text{siehe Erklärung in PN02}). \quad (6.8)$$

Kombination von (6.7) und (6.8) führt schließlich auf die Massenverteilung dichter Kerne

$$N(m)dm \sim m^{-\frac{3}{3-2\alpha}} dm, \quad (6.9)$$

⁹Nimmt man das Skalenverhalten der Geschwindigkeit aus der Strukturfunktion 1. Ordnung so ist $v(l) \sim l^{\zeta(1)}$, was auch möglich wäre. Die Autoren geben keine Erklärung dafür, dass $\alpha = \zeta(2)/2$ gewählt wird. Die Ergebnisse beider Möglichkeiten unterscheiden sich nicht wesentlich, die Motivation für diese spezielle Wahl wird jedoch in PN02 nicht gegeben.

die den Verlauf der IMF für Sternmassen $\gtrsim 1M_{\odot}$ beschreibt. Für den Wert $\alpha = \zeta(2)/2 = 0.74/2$ von BNP02 (sowohl aus Modell, als auch aus Experiment, vgl. Tabelle 6.4) ergibt sich somit $N(m) \sim m^{-1.33}$, was nahe an der gemessenen Sternmassenverteilung von Salpeter (1955) mit $N(m) \sim m^{-1.35}$ liegt. Formal kann der hier berechnete Wert von $\alpha = \zeta(2)/2 = 0.83/2$ in (6.9) eingesetzt werden und es ergibt sich $N(m) \sim m^{-1.38}$, was ebenfalls nahe an der Beobachtung liegt.

Die Hinzunahme von Magnetfeldern ist offenbar für die Herleitung der IMF in dieser Form notwendig, weil explizit die Sprungbedingungen für magnetohydrodynamische Stoßwellen benutzt werden (Gleichungen (6.4) und (6.5)). Weil im vorliegenden Fall jedoch keine Magnetfelder integriert wurden, soll die Herleitung der IMF hier nochmals für rein hydrodynamische Stoßwellen erfolgen. Die Sprungbedingungen für reine hydrodynamische Stöße sind

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \sim \text{Ma}^2 \quad (6.10)$$

$$\frac{\lambda}{l} \sim \text{Ma}^{-2} \quad (6.11)$$

mit $\text{Ma} = v/c_s$. Kombiniert man diese Gleichungen und ersetzt in der gesamten Herleitung von PN02 die Alfvén-Machzahl an allen weiteren Stellen durch die hydrodynamische Mach-Zahl Ma , was ohne eine Verletzung der Argumentationskette möglich ist, so ergibt sich schließlich der Ausdruck

$$N(m)dm \sim m^{-\frac{3}{3-4\alpha}} dm \quad (6.12)$$

für die Massenverteilung dichter Kerne. Einsetzen von $\alpha = 0.83/2$ in (6.12) ergibt $N(m) \sim m^{-2.24}$, was ein deutlich steilerer Verlauf der IMF für große Sternmassen ist.

Padoan et al. (2007) bestätigen die theoretischen Vorhersagen für das Verhalten der IMF nach Gleichung (6.9) und (6.12) in einem Vergleich numerischer Simulationen mit Magnetfeldern (MHD) und ohne Magnetfelder (HD). Sie schlussfolgern, dass der MHD-Fall für Sternentstehung im heutigen Universum zu der beobachteten IMF führt, wohingegen der rein hydrodynamische Fall (hier untersucht) für primordiale Sternentstehung wichtiger gewesen sein könnte, weil die Magnetfelder schwächer und die Temperaturen in Sternentstehungsgebieten von Population III Sternen höher gewesen ist.

Offensichtlich wirkt sich sowohl die theoretische, als auch die numerische Berücksichtigung von Magnetfeldern auf die oben diskutierten Ergebnisse aus und sollte weitergehend untersucht werden. Ein tiefergehender Einstieg in die Diskussion der Rolle von Magnetfeldern in Bezug auf Sternentstehung und die Form der IMF würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass die Beschaffenheit des stochastischen Kraftfelds Einfluss auf die Form der IMF nimmt. Die genaue Struktur und Quelle der interstellaren Turbulenz in Molekülwolkenkomplexen

kann folglich als mitbestimmend für die Formgebung von Molekülwolken und die resultierende IMF angesehen werden.

7 Tracer Teilchen

7.1 Was sind Tracer Teilchen?

In numerischen Simulationen von Fluiden, wie sie in der theoretischen Astrophysik häufig durchgeführt werden, existieren im Wesentlichen zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten die Hydrodynamik zu beschreiben. Die daraus resultierenden Gleichungen können im festen Bezugssystem (Eulersche Beschreibung) oder im mitbewegten Bezugssystem (Lagrangesche Beschreibung) gelöst werden (vgl. 3.1.1). Beide Möglichkeiten haben Vor- und Nachteile. Nutzt man einen Lagrangeschen hydrodynamischen Code, so wird das Fluid oft durch Teilchen repräsentiert¹, die aber nicht als einzelne Atome oder Moleküle aufgefasst werden können, sondern als Flüssigkeitselemente. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass sie automatisch in Bereichen hoher Teilchendichte die Auflösung vergrößert, was besonders bei Rechnungen mit Gravitationskollaps von Vorteil ist. Die räumliche Auflösung wird allerdings in Regionen geringer Teilchendichte sehr viel kleiner, so dass der genannte Vorteil zugleich ein Nachteil dieser Methode ist.

Die Eulersche Beschreibung der Hydrodynamik wird sehr häufig verwendet, da dynamische Größen, die das System beschreiben, an festen Raumpunkten auf einem numerischen Gitter definiert sind. Damit sind alle relevanten Größen an diskreten, festen Raumpunkten gegeben und man kann sich ein einfaches Bild der Strömung machen. Für ein äquidistantes Gitter ist die Auflösung des numerischen Schemas an allen Raumpunkten gleich. Bei Simulationen im Eulerschen Bezugssystem sind zunächst keine Informationen über die Trajektorien einzelner Flüssigkeitselemente verfügbar. Das reine Eulersche Verfahren verrät also nichts darüber, was mit einem bestimmten Flüssigkeitselement passiert. Hier kommen Tracer Teilchen zum Einsatz. Tracer Teilchen ermöglichen nun in Simulationen, die auf einem Eulerschen Gitter durchgeführt werden, zugleich Informationen über das Verhalten des Fluids im Lagrangeschen Bezugssystem zu erhalten.

Die grundlegende Idee dabei ist, auf dem Eulerschen Gitter eine frei-wählbare Anzahl an Teilchen zu platzieren, die mit der Strömung des Fluids passiv mitbewegt werden und dabei gewünschte Daten der Strömung an ihrem jeweiligen Ort aufzeichnen. Damit wird gewährleistet, dass ein bestimmtes Tracer Teilchen zu jedem Zeitpunkt dasselbe Flüssigkeitselement repräsentiert. Das bedeutet, dass ein

¹Am bekanntesten ist Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Viele 1-dimensionale Hydrocodes basieren ebenfalls auf einer Lagrangeschen Beschreibung, nutzen jedoch keine Teilchen.

Tracer zugleich auch stets für dasselbe Ensemble aus Atomen oder Molekülen des Fluids steht. Diese Eigenschaft macht Tracer Teilchen zu einem geeigneten Hilfsmittel, um die chemische Entwicklung eines Flüssigkeitselements zu verfolgen. Man kann sich beispielsweise vorstellen, dass ein bestimmtes Flüssigkeitselement, vertreten durch ein Tracer Teilchen, in einer kompressiblen Strömung, typisch für das ISM, transportiert wird. Das Flüssigkeitselement, das durch den Tracer repräsentiert wird, unterliegt folglich Kompressionen und Temperaturschwankungen, die in einem realen Fluid zu chemischen Reaktionen führen können. Zum Beispiel sind bei der Entstehung von Molekülwolken Kompressionen und die damit verbundene Erhöhung der Dichte wichtig für die Bildung von molekularem Wasserstoff (siehe 2.2). Vorausgesetzt man hat eine ausreichend hohe zeitliche Auflösung der Dichte- und Temperaturveränderungen, die ein Tracer Teilchen in der Strömung erfährt, ist es möglich, chemische Umwandlungen des Materials, das durch den Tracer repräsentiert wird, nachzuvollziehen. Um dies zu erreichen, werden für jedes Tracer Teilchen *zu jedem Zeitschritt* die dynamisch relevanten Größen der numerischen Simulation aufgezeichnet. Je nach Anzahl der Tracer Teilchen kann deshalb eine beträchtliche Menge an Daten anfallen. Würde man jedoch die gesamte Eulersche Information zu jedem Zeitschritt aufzeichnen, wäre die Datenmenge bei üblichen numerischen Auflösungen kaum mehr zu bewältigen². Tracer Teilchen können somit als mitbewegte Sonden im Fluid aufgefasst werden, die ihre unmittelbare Umgebung³ mit der durch den Zeitschritt der Simulation festgelegten Frequenz abtasten.

7.2 Implementierung in ENZO

Ein wichtiger Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit der Implementierung von Tracer Teilchen in den hydrodynamischen Code ENZO. Im Folgenden wird ENZO kurz beschrieben und anschließend wird näher auf die genaue Implementierung eingegangen.

7.2.1 Hydrodynamik-Code ENZO

ENZO ist ein parallelisierter⁴ hydrodynamischer Code, der ursprünglich für kosmologische Simulationen entworfen wurde und das numerische Verfahren PPM⁵ verwendet (Bryan et al. 1995; Norman & Bryan 1999; O’Shea et al. 2004). PPM ist durch

²Bei einer Auflösung von 512^3 und einer Anzahl von 1000 Zeitschritten wären es circa 2.6 TeraByte für eine einzige Simulation.

³Idealerweise sind Tracer Teilchen punktförmige Objekte. Tatsächlich aber kann ihnen eine endliche Ausdehnung zugeordnet werden, die von der Auflösung des Eulerschen Gitters abhängt (siehe 7.2.2)

⁴Die Parallelisierung zur Nutzung auf Supercomputern erfolgt durch das Message Passing Interface (MPI).

⁵Piecewise Parabolic Method (Colella & Woodward 1984)

seine guten Eigenschaften bei der Behandlung von Stoßwellen ausgezeichnet. Gerade bei Überschallphänomenen wie sie in Molekülwolken vorkommen, bilden sich Stoßfronten, weshalb sich ENZO für solche Simulationen anbietet. In dieser Arbeit wurde ENZO für Simulationen getriebener Überschall-Turbulenz mit und ohne Eigengravitation, gemäß den Gleichungen (3.23) benutzt. ENZO löst die hydrodynamischen Gleichungen auf einem Eulerschen Gitter, kann aber die räumliche Auflösung der Simulation adaptiv an bestimmten Stellen erhöhen. Man nennt dieses Verfahren "Adaptive Gitterverfeinerung" (AMR)⁶. Das hydrodynamische Modul ist aus Performancegründen in FORTRAN77 geschrieben. Die Verwirklichung von AMR und der Parallelisierung erfolgt durch eine in C++ entworfene Grid-Klasse. Alle weiteren Teile des Codes sind ebenfalls in C++ geschrieben, weshalb die Implementierung der Tracer Teilchen auch in dieser Programmiersprache erfolgte.

7.2.2 Interpolation

Anders als die diskreten Positionen hydrodynamischer Größen, die nur in den Zellmitten des Eulerschen Rechengitters definiert sind, können die Positionen der Tracer Teilchen alle durch die Maschinengenauigkeit festgelegten Gleitkommazahlen innerhalb der Grenzen der Rechendomäne annehmen. Das heißt, dass sich die Tracer Teilchen nicht nur in den Zellmitten, sondern auch dazwischen aufhalten können. Weil die Tracer Teilchen aber die jeweils an ihrer Position liegenden Größen des Eulerschen Gitters "erben", ist eine Interpolationsmethode, die die genaue Position des Tracers innerhalb der Zelle berücksichtigt wünschenswert. Im vorliegenden Fall wurde eine lineare Interpolation benutzt, die Werte der Zellen berücksichtigt, die innerhalb eines Würfels mit der Kantenlänge einer Gitterzelle zentriert um den Tracer liegen. Abbildung 7.1 zeigt die Geometrie für ein zweidimensionales Gitter mit den relevanten Längen, die für die Interpolation benutzt werden. Das um das Tracer Teilchen zentrierte eingefärbte Quadrat markiert den Bereich, aus dem Informationen zur Interpolation verwendet werden.

Zunächst werden die Positionen der Zellmitten ermittelt, in der das Tracer Teilchen liegt ($\text{CellCenterAtTracerPosition}_{x,y}$), sowie die Zellmitten der am nächsten gelegenen Zellen, die innerhalb des Quadrats liegen ($\text{CellCenterNextCell}_{x,y}$). Damit lassen sich die Zellanteile

$$f_r \equiv \frac{\text{TracerPosition}_r - \text{CellCenterAtTracerPosition}_r}{\text{CellCenterNextCell}_r - \text{CellCenterAtTracerPosition}_r} \quad (7.1)$$

⁶Adaptive Mesh Refinement

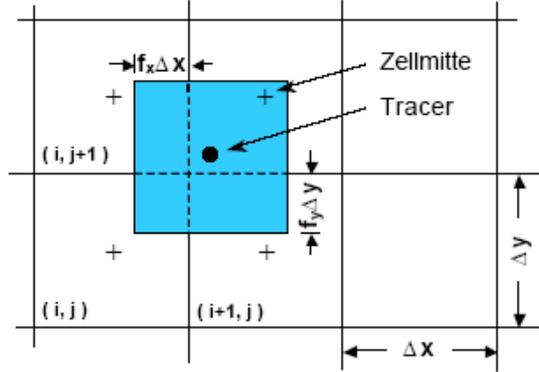


Abbildung 7.1. Das eingefärbte Quadrat, das um das Tracer Teilchen zentriert ist, markiert den Bereich, aus dem Informationen zur Interpolation der Werte auf dem Eulerschen Gitter verwendet werden

für $r = x, y$ berechnen. Daraus ergeben sich Gewichte $W_{i,j}$ mit

$$\begin{aligned}
 W_{i,j} &= (1 - f_x) \times (1 - f_y) \\
 W_{i,j+1} &= (1 - f_x) \times f_y \\
 W_{i+1,j} &= f_x \times (1 - f_y) \\
 W_{i+1,j+1} &= f_x \times f_y
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Diese Gewichte entsprechen den Flächenanteilen an der gesamten eingefärbten Fläche in Abbildung 7.1 innerhalb der entsprechenden Zelle (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i, j + 1)$ und $(i + 1, j + 1)$. Die Flächenanteile werden mit der Dichte der jeweiligen Zelle $\rho_{i,j}$ multipliziert und aufsummiert, so dass sich die interpolierte Dichte $\tilde{\rho}$ am Ort des Tracers durch Summation über die nächsten Nachbarn zu

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} &= \sum_i^{i+1} \sum_j^{j+1} W_{i,j} \rho_{i,j} \\
 &= W_{i,j} \rho_{i,j} + W_{i+1,j} \rho_{i+1,j} + W_{i,j+1} \rho_{i,j+1} + W_{i+1,j+1} \rho_{i+1,j+1}
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

ergibt. Mit anderen Größen A (z. B. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{i,j}$, Energiedichte $e_{i,j}$, usw.), die auf dem Eulerschen Gitter definiert sind, wird dann eine massengewichtete Interpolation

$$\tilde{A} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_i^{i+1} \sum_j^{j+1} W_{i,j} A_{i,j} \rho_{i,j} \tag{7.4}$$

durchgeführt.

Für eine dreidimensionale Geometrie werden die Zellanteile von (7.1) um die dritte Dimension ($r = x, y, z$) erweitert und aus der flächengewichteten Mittelung wird

eine volumengewichtete Mittelung. Die 4 Gewichte aus (7.2) müssen folglich auf 8 Gewichte entsprechend den 8 Zellen in der Umgebung des Tracers erweitert werden:

$$\begin{aligned}
 W_{i,j,k} &= (1 - f_x) \times (1 - f_y) \times (1 - f_z) \\
 W_{i,j+1,k} &= (1 - f_x) \times f_y \times (1 - f_z) \\
 W_{i+1,j,k} &= f_x \times (1 - f_y) \times (1 - f_z) \\
 W_{i+1,j+1,k} &= f_x \times f_y \times (1 - f_z) \\
 W_{i,j,k+1} &= (1 - f_x) \times (1 - f_y) \times f_z \\
 W_{i,j+1,k+1} &= (1 - f_x) \times f_y \times f_z \\
 W_{i+1,j,k+1} &= f_x \times (1 - f_y) \times f_z \\
 W_{i+1,j+1,k+1} &= f_x \times f_y \times f_z
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Folglich werden aus den Doppelsummen (7.3) und (7.4) Dreifachsummen

$$\tilde{\rho} = \sum_i^{i+1} \sum_j^{j+1} \sum_k^{k+1} W_{i,j,k} \rho_{i,j,k} \tag{7.6}$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_i^{i+1} \sum_j^{j+1} \sum_k^{k+1} W_{i,j,k} A_{i,j,k} \rho_{i,j,k} . \tag{7.7}$$

Es handelt sich also zusammenfassend um eine massengewichtete lineare Interpolation. Diese einfache Interpolation ist für Zwecke der Diplomarbeit als geeignet anzusehen. Als Erweiterung für zukünftige Anwendungen wäre abhängig vom numerischen Aufwand auch eine Interpolation höherer Ordnung möglich, wie z. B. ein trikubische Interpolation (Lekien & Marsden 2005).

7.2.3 Bewegungsgleichung

Die Tracer Teilchen werden in Form eines einfachen Euler-Schritts bewegt. Man erhält die neue Position eines Tracers \mathbf{x}^{n+1} im Zeitschritt $n + 1$ durch

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \tilde{\mathbf{v}}^n \Delta t , \tag{7.8}$$

wobei $\tilde{\mathbf{v}}^n$ die nach den Gleichungen (7.7) interpolierte Geschwindigkeit im vorherigen Zeitschritt n bezeichnet und Δt ist die Länge des hydrodynamischen Zeitschritts.

7.2.4 Berücksichtigung von AMR

Mit Hilfe von AMR kann in einem Eulerschen Hydro-Code die Auflösung des numerischen Gitters adaptiv verfeinert werden. ENZO erzeugt zu diesem Zweck eine Gitter-Hierarchie mit mehreren Verfeinerungsebenen. Ebene 0 wird als Root-Gitter

bezeichnet. Wird ein bestimmter Bereich des Root-Gitters zur Verfeinerung markiert, so erzeugt ENZO ein neues Gitter mit der doppelten Auflösung⁷. Abbildung 7.2 zeigt dies für ein zweidimensionales Root-Gitter, das in dem farbig markierten Bereich verfeinert wurde, so dass für den 2×2 -Bereich auf Verfeinerungsebene 0 (Level 0) ein 4×4 -Gitter auf Verfeinerungsebene 1 (Level 1) erzeugt wurde. Zum Test

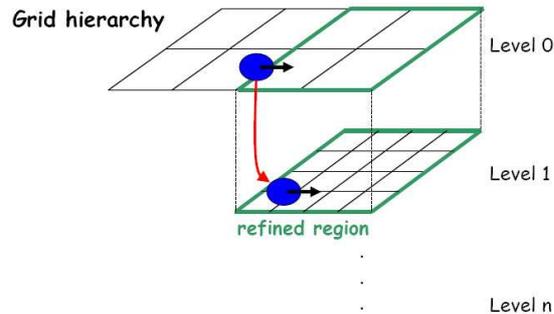


Abbildung 7.2. ENZO implementiert das Verfahren der adaptiven Verfeinerung durch die Erzeugung einer Gitter-Hierarchie. Die Implementierung der Tracer Teilchen sorgt stets dafür, dass ein Tracer, der sich in einen verfeinerten Bereich hineinbewegt, auf das am höchsten aufgelöste Gitter verschoben wird.

der Implementierung wurde eine 2-dimensionale Simulation einer Stoßfront benutzt. Abbildung 7.3 zeigt einzelne Aufnahmen der Dichteverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten nach der Initialisierung der Stoßwelle. Der Stoß bewegt sich mit Mach 2 von der linken unteren Ecke der Simulationsdomäne in einem 45° -Winkel fort. Neben der Dichteverteilung ist das numerische Gitter gezeigt. Man kann deutlich erkennen, wie die adaptive Verfeinerung die Auflösung entsprechend dem Verfeinerungskriterium für Stoßwellen in den Bereichen großer Gradienten der Dichte und Geschwindigkeit dynamisch anpasst. Im vorliegenden Fall wurde zur Veranschaulichung nur eine einzige Verfeinerungsebene benutzt, die über dem Root-Gitter dargestellt wird. Noch bevor der Stoß in die Simulationsdomäne einläuft wurden Tracer Teilchen platziert, so dass sich im Zentrum jeder Gitterzelle genau ein Tracer befindet. Die erste Abbildung zeigt den Stoß kurz nach Eintritt in die Domäne. Ein Bereich um die Stoßfront wurde verfeinert und die Tracer Teilchen wurden auf die erste Verfeinerungsebene (Level 1) in der Gitter-Hierarchie transferiert. Die Tracer auf Level 0 sind schwarz, die auf Level 1 sind weiß dargestellt. Anhand der folgenden Abbildungen kann gesehen werden, wie die Tracer Teilchen durch die Stoßwelle mitbewegt werden. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Tracer Teilchen in den Gitter-Bereichen, in denen die Verfeinerung wieder aufgehoben wurde, zurück auf die Root-Ebene (Level 0) verschoben werden.

⁷Es ist auch eine Vervierfachung der Auflösung möglich, wird aber selten benutzt.

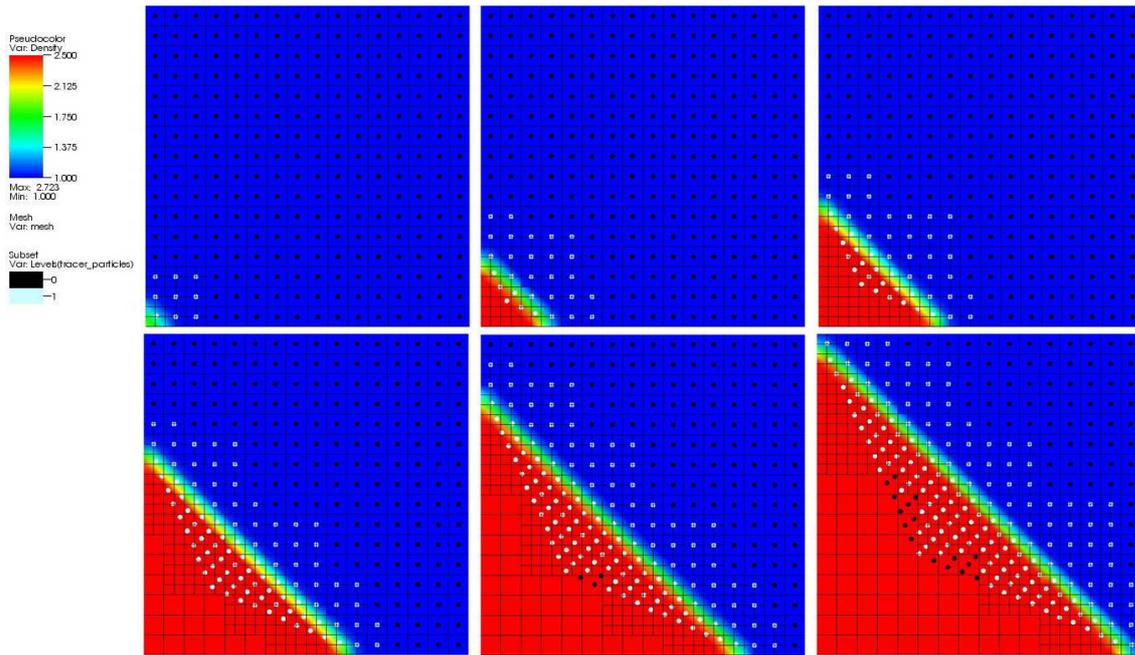


Abbildung 7.3. Die sechs Bilder entsprechen der zeitlichen Entwicklung einer Stoßfront, die in einem 45° -Winkel durch die Simulationsdmäne propagiert und dabei die durch Punkte dargestellten Tracer Teilchen mitbewegt. Zu erkennen ist, dass sich die Tracer Teilchen abhängig von ihrer jeweiligen Position stets auf der höchsten Ebene der Gitter-Hierarchie befinden, was durch ihre Farbe im Plot verdeutlicht wird.

7.3 Anwendung auf turbulentes Mischen in Molekülwolkenkomplexen

Der folgende Abschnitt bezieht sich auf eine kürzlich erschienene Veröffentlichung (Glover & Mac Low 2006a,b) (im Folgenden GML06). GML06 berechnen in 3-dimensionalen MHD-Simulationen zerfallender Turbulenz die Bildung und Dissoziation von molekularem Wasserstoff. Ein entscheidendes Ergebnis dieser Simulationen ist die schnelle ($\approx 1 - 2 \times 10^6$ Jahre) Bildung von H_2 unter dem Einfluss turbulenter Kompressionen im ISM. Es wird numerisch gezeigt, dass sich molekularer Wasserstoff besonders effektiv in Regionen hoher Gasdichte bildet, was mit den allgemeinen Überlegungen aus Abschnitt 2.2.1 zu erwarten ist. Eine genauere Untersuchung der Konzentration von molekularem Wasserstoff in Abhängigkeit von der Gasdichte (deren Abbildung 7) zeigt, dass in Regionen niedrigerer Dichte ein signifikant höherer Anteil an H_2 zu finden ist, als erwartet. Dort sollte nämlich für ein Gleichgewicht zwischen Bildung und Photodissoziation eine geringere Konzentration an molekularem Wasserstoff existieren. Die einzig plausible Erklärung für die hohe Konzentration ist, dass H_2 in Regionen hoher Gasdichte gebildet und anschließend teilweise durch die Wirkung der Turbulenz zu Bereichen niedriger Dichte transportiert wird. Dieser

Mischungsprozess wird im Folgenden als *turbulentes Mischen* bezeichnet.

Der Vorgang des turbulenten Mischens hat wichtige Konsequenzen für die H₂-Chemie in Regionen niedriger Gasdichte. Garrod et al. (2005, 2006b) untersuchen ebenfalls den Einfluss von Kompressionen in dynamischen Modellen mit einem großen chemischen Netzwerk (> 3000 Reaktionen von über 200 chemischen Verbindungen) und kommen zu dem Ergebnis, dass Dichteschwankungen auch die Chemie anderer Spezies im ISM beeinflussen und die Häufigkeit molekularer Spezies im diffusen Umfeld dichter Kerne von Molekülwolken erhöhen. Willacy et al. (2002) untersuchen die Konzentration chemischer Verbindungen in Abhängigkeit des turbulenten Diffusionskoeffizienten und folgern, dass sich gerade in dichten Kernen von Molekülwolken mehr HI befindet, als erwartet. Es mischen sich folglich die Phasen des ISM zu einem gewissen Grad durch den Einfluss der Turbulenz. Dies hat bedeutende Konsequenzen für die Schlussfolgerungen, die aus Beobachtungen chemischer Verbindungen gezogen werden, denn die gemessene Konzentration chemischer Spezies wird häufig dazu benutzt, um die Gasdichte einer Region abzuschätzen.

GML06 hatten bei den oben genannten Simulationen keine Tracer Teilchen zur Verfügung, um zu zeigen, dass der molekulare Wasserstoff tatsächlich aus Regionen komprimierten Gases zu Bereichen niedrigerer Gasdichte transportiert wird. Die Idee war nun, diesen Aspekt mit Hilfe der Tracer Teilchen zu untersuchen. Dafür wurde ein Vergleich von drei Simulationen (eine ohne Eigengravitation und zwei unter Einbeziehung von Eigengravitation) durchgeführt und untersucht welchen Einfluss die Eigengravitation auf das Mischungsverhalten komprimierter Materie in einer getriebenen, turbulenten Strömung hat.

7.3.1 Initialisierung und Ablauf der Simulationen

Die Untersuchung der Mischungseigenschaften molekularen Wasserstoffs erfolgt in 3-dimensionalen Simulationen getriebener Turbulenz und unter Einbeziehung von Eigengravitation gemäß den Gleichungen (3.23). Weil Molekülwolken weitgehend isotherm sind, wird eine Zustandsgleichung (3.23e) mit $\gamma = 1.01$ verwendet. Die Auflösung des numerischen Gitters ist wie bei GML06 $N^3 = 256^3$ Gitterpunkte. AMR wird zunächst nicht verwendet. Bei den Simulationen von GML06 handelt es sich um zerfallende Turbulenz, wobei lediglich turbulente Anfangsbedingungen benutzt werden, wie in Mac Low (1999) beschrieben. Für die hier ausgewerteten Simulationen wurde jedoch ein stochastisches Kraftfeld benutzt, welches das Fluid kontinuierlich auf den größten Skalen antreibt. Das Kraftfeld ist genauso wie bei der Simulation von Kapitel 6 beschaffen, bis auf die Tatsache, dass hier nur in Form solenoidaler Moden ($\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$) getrieben wird ($\zeta = 1.0$). Die Stärke des Kraftfelds ist so eingestellt, dass nach einer Autokorrelationszeit T des Kraftfelds eine rms (root mean square) Mach-Zahl von $\text{Ma}_{\text{rms}} = \sqrt{\langle \text{Ma}^2 \rangle} \approx 3$ erreicht wird.

Es wurden insgesamt drei Simulationen durchgeführt: 1. ohne Eigengravitation

(pure forcing), 2. mit Eigengravitation (SG4) und 3. mit Eigengravitation (SG64). Der Unterschied zwischen SG4 und SG64 liegt in der mittleren Dichte, die zu Beginn festgelegt wird⁸. Bei SG4 ist die Dichte $\rho_0 = 4$ in Code-Einheiten, bei SG64 ist $\rho_0 = 64$. Dies entspricht einer mittleren Jeans-Länge

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0}} \quad (\text{vgl. (4.5) und (4.6)}) \quad (7.9)$$

von $\lambda_J = 1/4$ für SG4 und $\lambda_J = 1/16$ für SG64 in Code-Einheiten ($G = 4\pi$). Dabei wurde jeweils eine Schallgeschwindigkeit von $c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho_0}} \approx 1$ mit $\gamma = 1.01$ eingestellt, indem sowohl für SG4, als auch für SG64 jeweils $P = \rho_0$ für $t = 0$ in Code-Einheiten gesetzt wurde. Weil die Länge der kubischen Simulationsdomäne $L_{\text{Box}} = 1$ ist, befinden sich $m = 64M_J$ Jeans-Massen (SG4), bzw. $m = 4096M_J$ Jeans-Massen (SG64) in der Simulationsdomäne⁹. Mit Hilfe der festgelegten Schallgeschwindigkeit und Mach-Zahl lässt sich die charakteristische Geschwindigkeitsskala $V \simeq \text{Ma}_{\text{rms}} c_s$ des Systems in Code-Einheiten berechnen. Nutzt man weiterhin des Verhältnis aus der integralen Längenskala $L = L_{\text{Box}}/2$ (definiert durch die Skala, auf der das Kraftfeld am stärksten treibt, wie bei der Simulation von Kapitel 6) und den entsprechenden Jeans-Längen, so lassen sich alle Code-Einheiten stets auf reale Größen umrechnen. Die Simulation ohne Eigengravitation dient als Referenzsimulation zum Vergleich mit SG4 und SG64.

Die Initialisierung aller drei Simulationen erfolgt jedoch ohne, dass Eigengravitation von Beginn an aktiviert ist. Die Aktivierung der Eigengravitation erfolgt bei SG4 und SG64 erst nachdem das Fluid einen Zustand voll entwickelter Turbulenz erreicht hat. Das heißt, es wird zunächst für die Dauer einer Autokorrelationszeit T getrieben. Dies erzeugt den erwünschten Zustand voll entwickelter Turbulenz (vgl. 6.2) mit $\text{Ma}_{\text{rms}} \approx 3$, der jeweils als Ausgangsbasis für die weitere Entwicklung der drei Simulationen dient.

Um das turbulente Mischen von H_2 zu untersuchen, werden zur Zeit $t = 1.0 T$ Tracer Teilchen platziert. Die Platzierung erfolgt in Zellen mit einem Dichtekontrast von $\rho/\rho_0 \geq 10$, wobei in das Zentrum jeder dieser Zellen genau ein Tracer gesetzt wird. Bei der verwendeten Auflösung und Mach-Zahl werden circa 24000 Tracer Teilchen platziert. Diese repräsentieren zum Zeitpunkt ihrer Platzierung komprimiertes Gas, das im Folgenden als molekularer Wasserstoff aufgefasst wird. Abbildung 7.4 zeigt die Verteilung der Tracer Teilchen zum Zeitpunkt der Platzierung $t = 1.0 T$. Man kann erkennen, wie die Tracer Teilchen komprimierte Regionen nachzeichnen. Diese entstehen durch den Einfluss der Überschallturbulenz und entsprechen Bereichen, in denen sich starke Stoßfronten mit $\rho/\rho_0 \geq 10$ ausgebildet haben.

⁸Zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde eine homogene Dichteverteilung gesetzt, so dass die mittlere Dichte zugleich die Dichte ist, die bei $t = 0$ in jeder Zelle des numerischen Gitters gesetzt wurde.

⁹Hier wurde die Definition $M_J = \lambda_J^3$ für die Jeans-Masse verwendet (vgl. auch (4.9)).

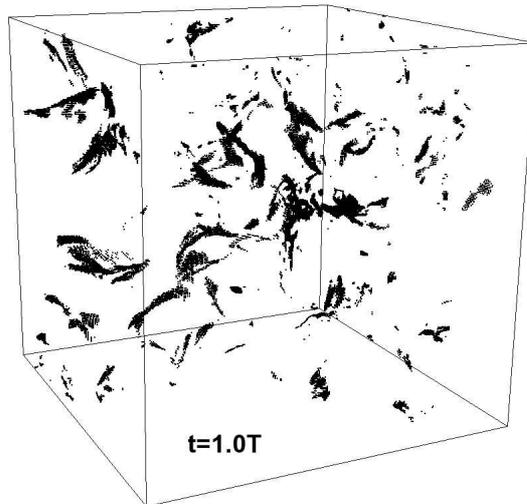


Abbildung 7.4. Räumliche Verteilung der Tracer Teilchen zum Zeitpunkt ihrer Platzierung in Regionen mit $\rho/\rho_0 \geq 10$. Die Tracer Teilchen repräsentieren Gas, das in Stoßfronten komprimiert wurde.

Die Situation bei $t = 1.0T$ dient für jede der drei durchgeführten Simulationen als Ausgangsbasis für die weitere zeitliche Entwicklung. Nachdem also die Tracer Teilchen platziert wurden, laufen die Simulationen unverändert weiter, abgesehen davon, dass für SG4 und SG64 bei $t = 1.0T$ zusätzlich zur Platzierung der Tracer, gleichzeitig noch Eigengravitation aktiviert wird.

7.3.2 Ergebnisse

Die Abbildungen 7.5 zeigen die räumliche Verteilung der Tracer Teilchen im Vergleich der Simulation ohne Eigengravitation ("pure forcing") mit SG64 ("forcing + self-gravity") zu den Zeitpunkten $t = 1.1T$ und $t = 1.2T$. Für die Simulation ohne Eigengravitation ist eine weitere Aufnahme der Verteilung der Tracer zu einem späteren Zeitpunkt ($t = 3.0T$) vorhanden¹⁰. Der direkte Vergleich zwischen der Si-

¹⁰Für SG64 ist keine Aufnahme der Tracer bei $t = 3.0T$ vorhanden, weil die Ergebnisse der Simulation SG64 ab $t = 1.2T$ nicht mehr ausreichend verlässlich sind, denn es wird das sogenannte Truelove-Kriterium (Truelove et al. 1997) verletzt. Dieses Kriterium besagt, dass die Jeans-Länge einer Region in numerischen Simulationen stets größer sein muss als $4\Delta x$ (Δx : Länge einer Zelle des numerischen Gitters), um eine unphysikalische Fragmentation dieser Region zu verhindern. Deshalb werden keine Schlussfolgerungen aus Daten der Simulation SG64 nach $t = 1.2T$ gezogen. Desweiteren versagt das numerische Schema wenig später, weil durch die Wirkung der Eigengravitation zu hohe Dichtekontraste entstehen ("runaway gravitational collapse"), die zur Instabilität der Numerik und schließlich zum Absturz des Codes führen. Dies ist ein generelles Problem bei Simulationen mit gravitativem Kollaps und kann beispielsweise durch die Benutzung sogenannter Sink Teilchen (sink particles) behoben werden. Sink Teilchen standen für die hier untersuchten Simulationen jedoch nicht zur Verfügung.

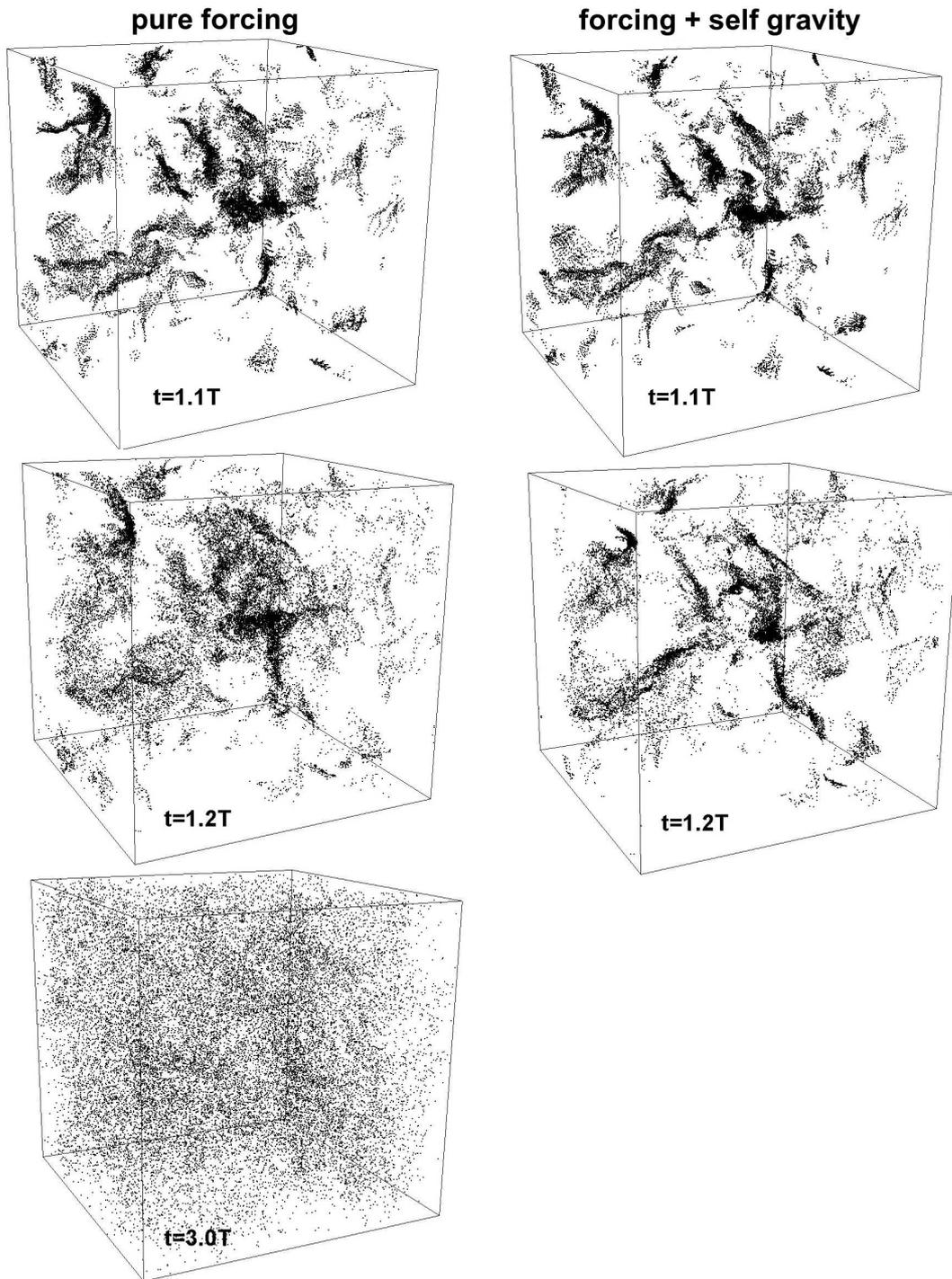


Abbildung 7.5. Zeitliche Entwicklung der Verteilung der Tracer Teilchen für die Simulation ohne Eigengravitation (links), im Vergleich zur Simulation mit Eigengravitation SG64 (rechts).

mulation ohne Eigengravitation und SG64 zu selben Zeitpunkten zeigt, dass Eigengravitation offenbar den Zusammenhalt der Tracer Teilchen auf bestimmten Skalen und für bestimmte Regionen unterstützt, so dass die anfänglich durch Überschallturbulenz erzeugten komprimierten Regionen zumindest auf bestimmten Skalen über längere Zeiten aufrecht erhalten bleiben.

Um quantitative Aussagen über die Verteilung der Tracer Teilchen zu den verschiedenen Zeitpunkten zu machen, wurden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (Probability Density Functions, PDFs) erzeugt. Diese geben die Wahrscheinlichkeitsdichte einer bestimmten Variable wieder. Um Aussagen darüber machen zu können, welcher Anteil der platzierten Tracer Teilchen sich in Bereiche niedrigerer Dichte hineinbewegt, wurden jeweils PDFs der Dichte erzeugt. Dabei muss zwischen PDFs der Dichte, die von den Tracer Teilchen aufgezeichnet wird und PDFs der Dichte, die auf dem Eulerschen Gitter definiert ist, unterschieden werden. Bei Eulerschen PDFs handelt es sich um volumengewichtete PDFs, wohingegen die PDFs der Tracer Teilchen natürlicherweise massengewichtet sind. Dies ist eine Folge der Eigenschaften von Tracer Teilchen. Tracer Teilchen werden, wie in 7.1 beschrieben, stets mit der Strömung des Fluids mitbewegt. Das heißt, dass sich Tracer Teilchen bevorzugt in Regionen aufhalten, in die Materie hinein fließt. Die Verteilung der Tracer Teilchen ist demnach immer eine massengewichtete Verteilung. Um nun aber die volumengewichteten PDFs der Dichte im Eulerschen Gitter direkt mit den massengewichteten PDFs der Tracer Teilchen vergleichen zu können, wurden alle volumengewichteten PDFs des Eulerschen Gitters in massengewichtete PDFs umgeformt. In vielen Turbulenzsimulationen wird im Zustand voll entwickelter Turbulenz eine Log-Normal-Verteilung der Dichte gefunden (z. B. Klessen (2000); Ostriker et al. (2001))¹¹. Für Log-Normal-Verteilungen ist eine Umformung von Volumengewichtung auf Massengewichtung möglich. Dazu ist es sinnvoll die Größe

$$s \equiv \ln(\rho/\rho_0) \quad (7.10)$$

zu definieren und nur PDFs von s zu erzeugen (Li et al. 2003). Die volumengewichtete Log-Normal-Verteilung $p_v(s)$ und die massengewichtete Log-Normal-Verteilung $p_m(s)$ sind durch

$$p_{v,m}(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(s - s_{v,m})^2}{2\sigma^2}\right] ds \quad (7.11)$$

mit der Standardabweichung σ und dem Mittelwert $s_{v,m}$ gegeben. Li et al. (2003) zeigen, dass dann für Log-Normal-Verteilungen

$$s_m = -s_v = \frac{\sigma^2}{2} \quad (7.12)$$

¹¹In der Simulation von Kapitel 6 ergab sich ebenfalls eine Log-Normal-Verteilung für die Dichte-PDF (hier nicht gezeigt).

gilt. $p_v(s)$ und $p_m(s)$ liegen demnach symmetrisch um $s = 0$ und können jeweils durch Verschieben um σ^2 ineinander übergeführt werden.

In den Abbildungen 7.6 ist die zeitliche Entwicklung ($t = 1.00, 1.05, 1.10, 1.20, 1.30, 2.95 T$) der massengewichteten PDFs des Eulerschen Gitters und der Tracer Teilchen gezeigt. Die PDF des Eulerschen Gitters ist für alle gezeigten Zeitpunkte über mindestens 2 Größenordnungen in der Dichte eine Log-Normal-Verteilung (gestrichelte Linie). Die Verschiebung der ursprünglich volumengewichteten PDF gemäß Gleichung (7.12) ist daher gerechtfertigt. Dies wird durch einen Fit der Eulerschen PDF an Gleichung (7.11) unterstützt (gepunktete Linie). Betrachtet man die Verteilung der Dichte, die durch die Tracer Teilchen repräsentiert wird, so sieht man bei $t = 1.00 T$ (Zeitpunkt der Platzierung der Tracer), dass die Tracer Teilchen nur in Zellen mit einem Dichtekontrast von $\rho/\rho_0 \geq 10$ platziert wurden¹². Die PDFs für die nachfolgenden Zeitpunkte beschreiben die zeitliche Entwicklung der Verteilung. Es ist zu erkennen, dass sich die PDF der Tracer immer mehr an die Eulersche PDF annähert und bei $t \approx 1.30 T$ mit der Eulerschen PDF zusammenfällt. Nach fortgeschrittener Entwicklung ($t = 2.95 T$) können bis auf statistische Schwankungen im Bereich niedriger und hoher Dichte keine wesentlichen Unterschiede zur Situation bei $t = 1.30 T$ anhand der PDFs festgestellt werden.

Die Abbildungen 7.7 zeigen die entsprechenden PDFs für die Simulation SG64 für $t = 1.00, 1.05, 1.10, 1.20 T$. Offensichtlich kann durch die Wirkung der Eigengravitation kein Zustand erreicht werden, in dem sich die Eulersche PDF mit der PDF der Tracer Teilchen deckt. Interessant ist die Wirkung der Eigengravitation auf die Form der PDFs. Es ist klar zu erkennen, dass die Eulersche PDF bei $t = 1.20 T$ für hohe Dichten ($\log_{10}[\rho/\rho_0] > 2$) von einer Log-Normal-Verteilung abweicht. Die PDF der Tracer Teilchen ist ebenso für $\log_{10}[\rho/\rho_0] > 2$ stark erhöht. Demnach hinterlässt die Eigengravitation Signaturen, die in der Form der Dichte-PDFs wiedergefunden werden können. Tatsächlich werden häufig Potenzgesetze für die Randbereiche von PDFs, sowohl in Beobachtungen interstellarer Turbulenz als auch in numerischen Turbulenzsimulationen mit Eigengravitation gefunden (z. B. Klessen (2000)). Für die Dichte-PDF des Eulerschen Gitters bei $t = 1.20 T$ in Abbildung 7.7 deutet sich ebenfalls ein Potenzgesetz für $\log_{10}[\rho/\rho_0] > 2$ an.

7.3.3 Auswertung und Diskussion

Zunächst sollen die PDFs des Eulerschen Gitters nochmals genauer betrachtet werden. Für die PDFs der Zeitpunkte $t = 1.00, 1.10, 1.20$ und $1.30 T$ wurden Fits an die Log-Normal-Verteilung von Gleichung (7.11) bezüglich der Breite σ der Vertei-

¹²Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass bei $t = 1.00 T$ einige Tracer Teilchen eine niedrigere Dichte als $\rho/\rho_0 = 10$ repräsentieren. Dies kommt daher, dass die Tracer Teilchen genau genommen *einen* Zeitschritt vor $t = 1.00 T$ platziert wurden, so dass sich alle Tracer Teilchen bei $t = 1.00 T$ bereits einmal gemäß Gleichung (7.8) bewegt haben und deshalb schon einige Tracer zu Bereichen niedrigerer Dichte transportiert wurden.

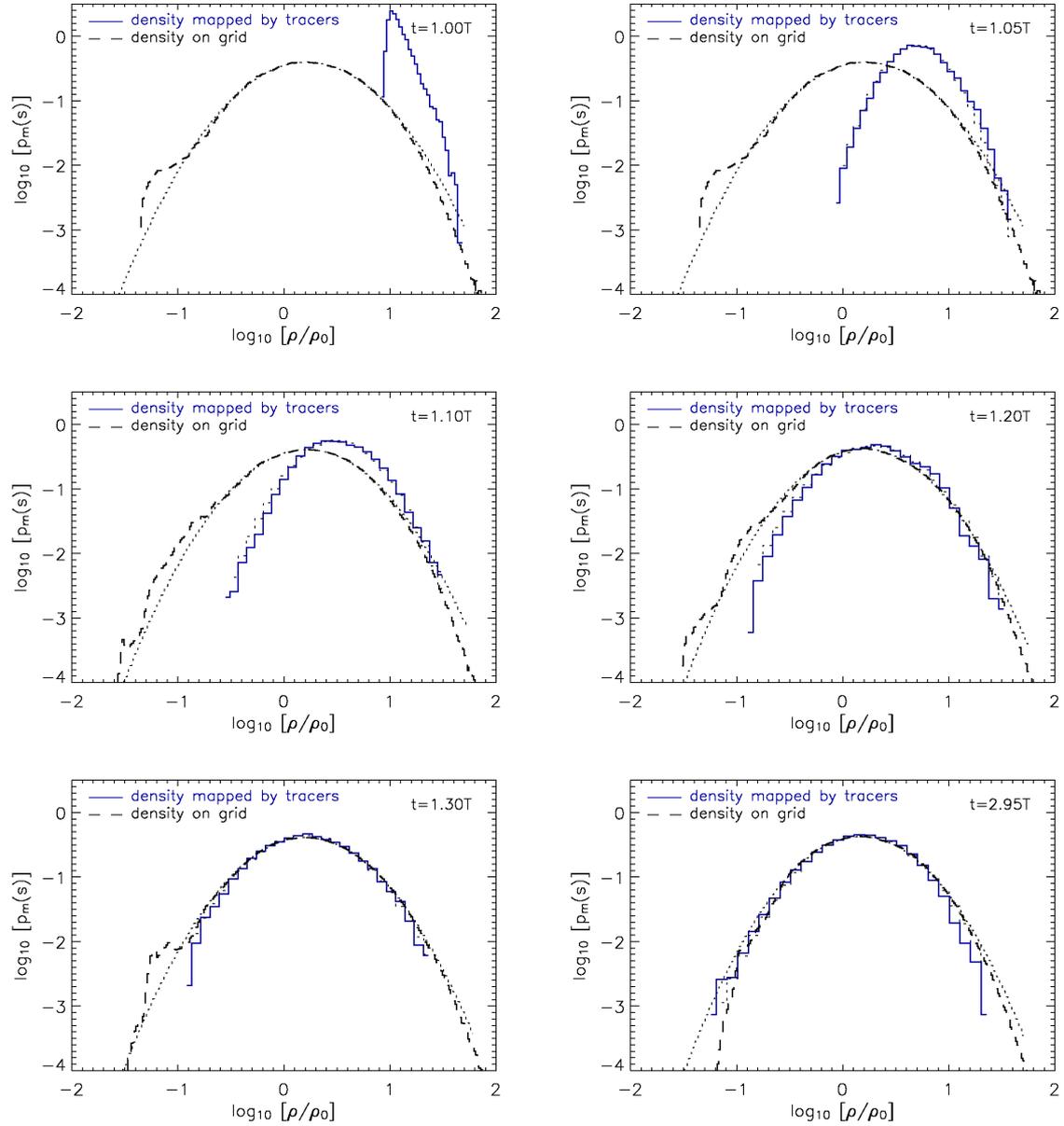


Abbildung 7.6. Zeitliche Entwicklung der massengewichteten PDFs der Dichte für die Simulation ohne Eigengravitation. Die PDF der Tracer Teilchen (durchgezogene Linie) nähert sich allmählich der Eulerschen PDF (gestrichelte Linie) an. Die gepunkteten Linien sind Least-Squares-Fits der Log-Normal-Verteilung (7.11).

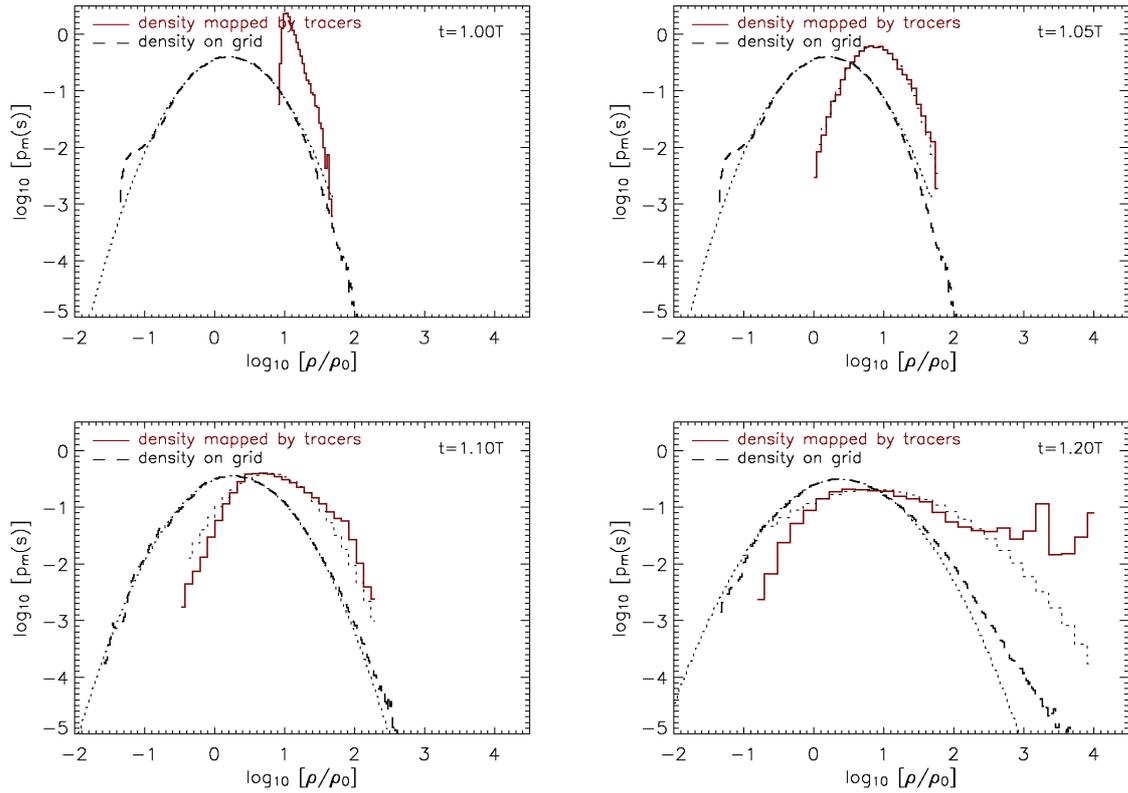


Abbildung 7.7. Zeitliche Entwicklung der massengewichteten PDFs der Dichte für die Simulation SG64. Die PDFs der Tracer Teilchen (durchgezogene Linie) als auch die PDFs des Eulerschen Gitters (gestrichelte Linie) werden vor allem in Bereichen hoher Dichte durch die Wirkung der Eigengravitation verformt und kommen nicht zur Deckung (vgl. Abb. 7.6). Die gepunkteten Linien sind Least-Squares-Fits der Log-Normal-Verteilung (7.11).

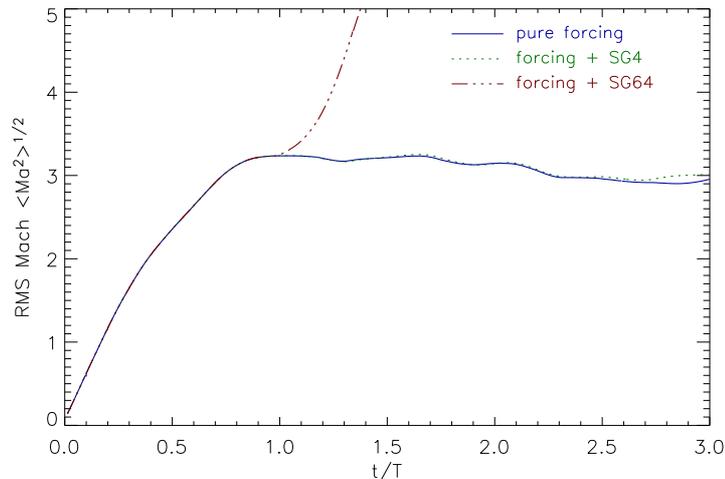


Abbildung 7.8. Zeitliche Entwicklung der rms Mach-Zahl für alle drei Simulationen ab $t = 0$. Bei $t = 1.0T$ wird $\text{Ma}_{\text{rms}} \approx 3$ erreicht. SG4 verhält sich sehr ähnlich zu der Simulation ohne Eigengravitation. Für SG64 hingegen, kann auf bestimmten Skalen Gravitationskollaps erfolgen, der zu einer starken Beschleunigung des Fluids führt und die rms Mach-Zahl erhöht.

lungen ausgewertet. Bildet man den Mittelwert der Breiten σ für die ausgewerteten Zeitpunkte und bezieht die zeitliche Variation der Einzelfits in die Abschätzung des Fehlers mit ein, so ergibt sich $\bar{\sigma} = 0.98 \pm 0.04$ für die Standardabweichung der Eulerischen Dichte-PDFs. Padoan et al. (1997) finden einen Zusammenhang zwischen der Breite der Dichte-PDFs und der rms Mach-Zahl in Überschallturbulenzsimulationen:

$$\sigma^2 = \ln(1 + \beta^2 \text{Ma}_{\text{rms}}^2) \quad (7.13)$$

Padoan et al. (1997) bestimmen $\beta \approx 0.5$ aus numerischen Simulationen getriebener Überschallturbulenz. Wertet man (7.13) für die hier berechnete Breite $\bar{\sigma}$ aus, so ergibt sich $\text{Ma}_{\text{rms}} = 2.6 \pm 0.2$. Dieser Wert ist etwas kleiner als die tatsächliche rms Mach-Zahl von $\text{Ma}_{\text{rms}} \approx 3$. Abbildung 7.8 zeigt die zeitliche Entwicklung der rms Mach-Zahl für alle drei Simulationen. Sie steigt entsprechend den Erwartungen innerhalb der ersten Autokorrelationszeit T auf ≈ 3 an und bleibt dann für die Simulation ohne Eigengravitation, sowie für SG4, abgesehen von kleinen zeitlichen Schwankungen etwa konstant. Damit steht der hier gefundene Zusammenhang zwischen σ und Ma_{rms} in leichtem Widerspruch zu $\beta \approx 0.5$ von Padoan et al. (1997). Mit den hier berechneten Bestwerten findet man $\beta \approx 0.4$.

Es sei noch auf den starken Anstieg der rms Mach-Zahl für SG64 in Abbildung 7.8 hingewiesen, der auf Grund starker Beschleunigung des Fluids durch die Wirkung der Eigengravitation zustande kommt. Die Entwicklung der rms Mach-Zahl für SG4 hingegen verläuft sehr ähnlich zur Simulation ohne Eigengravitation. Dies deutet

darauf hin, dass die Eigengravitation bei SG4 kaum Einfluss auf die Entwicklung des Fluids hat. Das stochastische Kraftfeld bestimmt vielmehr die Dynamik des Fluids, obwohl die mittlere Masse des Fluids 64 mal größer ist, als die mittlere Jeans-Masse. Das Fluid müsste also global kollabieren. Dies wird aber durch die kinetische Energie verhindert, die durch das Kraftfeld bereitgestellt wird und die Turbulenz antreibt. Möchte man nicht nur globale Aussagen über Gravitationsstabilität machen, so müssen Masse und Jeans-Masse auf allen möglichen Längenskalen verglichen werden, um berechnen zu können, ob ein bestimmter Bereich Jeans-instabil ist oder nicht. Offensichtlich übersteigt die kinetische Energie bei SG4 auf allen Skalen den Betrag der potentiellen Energie und es kommt nicht zum Gravitationskollaps (vgl. Abschn. 4.2). Bei SG64 hingegen reicht die kinetische Energie auf kleinen Skalen nicht mehr aus, um Gravitationskollaps zu verhindern¹³.

7.3.4 Zusammenfassung

Die hier verwendeten Tracer Teilchen werden zum Zeitpunkt ihrer Platzierung als verdichtete Regionen mit hohem Anteil an molekularem Wasserstoff aufgefasst. Bei Betrachtung der zeitlichen Entwicklung der PDFs in den Abbildungen 7.6 und 7.7 wird klar, dass sowohl im Fall ohne Eigengravitation, als auch in der Simulation SG64, die Wirkung der Turbulenz dazu führt, dass ein gewisser Anteil der Tracer Teilchen zu Regionen niedriger Gasdichte transportiert wird. Damit können die Vermutungen von GML06 zum turbulenten Transport von H₂, mit Hilfe der hier eingesetzten Lagrangeschen Tracer Teilchen qualitativ bestätigt werden.

Weiterhin liegt die Vermutung nahe, dass für SG64 weniger Tracer Teilchen abtransportiert werden, als bei SG4 und im Fall ohne Eigengravitation. Um diese Aussagen zu quantifizieren, wurde schließlich noch der Anteil der Tracer Teilchen bestimmt, die sich zum Zeitpunkt $t = 1.10 T$ in Regionen mit einer Gasdichte kleiner als $\rho/\rho_0 = 10$ befinden. Dies kann als Maß für den Anteil der Tracer Teilchen angesehen werden, die in einem Zeitraum von $0.1 T$ nach der Platzierung zu Regionen mit niedrigerer Gasdichte transportiert wurden und nicht innerhalb komprimierter Bereiche verbleiben. Dazu wird die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung (CDF) der Dichte, die von den Tracer Teilchen aufgezeichnet wird, verwendet. Abbildung 7.9 zeigt die Dichte-CDF der Tracer Teilchen bei $t = 1.10 T$. Aus der Abbildung ist zu entnehmen, dass für die Simulation ohne Eigengravitation und für SG4 bei $t = 1.1 T$ bereits $\approx 95\%$ der Tracer Teilchen eine niedrigere Dichte repräsentieren, als zum Zeitpunkt ihrer Platzierung. Aus der CDF wird demnach ebenfalls deutlich, dass kein wesentlicher Unterschied zwischen der Simulation ohne Eigengravitation

¹³Um in Turbulenzsimulationen mit Eigengravitation Bereiche und Strukturen detektieren zu können, die Jeans-instabil sind, muss ein Algorithmus entworfen werden, der nach zusammenhängenden "Klumpen" dichten Gases sucht ("clump find algorithm") und deren Masse mit ihrer Jeans-Masse vergleicht. Der Entwurf eines solchen Algorithmus könnte im Rahmen eines zukünftigen Projekts erfolgen.

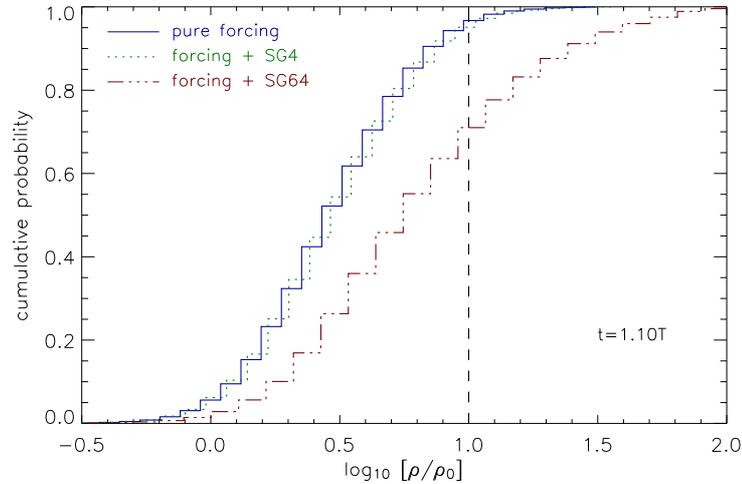


Abbildung 7.9. Kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung der Dichte, die von den Tracer Teilchen zum Zeitpunkt $t = 1.10T$ aufgezeichnet wird. Die gestrichelte Linie entspricht der Dichte, für welche die Tracer Teilchen zum Zeitpunkt ihrer Platzierung als molekularer Wasserstoff aufgefasst werden.

und SG4 besteht. Für SG64 hingegen sind zum selben Zeitpunkt $\approx 70\%$ der Tracer Teilchen in Bereichen mit niedrigerer Gasdichte zu finden. Die Eigengravitation bei SG64 dominiert demnach auf ausreichend kleinen Skalen die Dynamik und übertrifft die Wirkung des stochastischen Kraftfelds, so dass ein größerer Teil der Tracer in komprimierten Regionen gehalten wird. Dies macht sowohl den qualitativen, als auch den quantitativen Unterschied zwischen SG4 und SG64 aus. Die aus den CDFs entnommenen Werte deuten darauf hin, dass turbulentes Mischen in Molekülwolken auf verhältnismäßig kurzen Zeitskalen und mit hoher Effizienz ablaufen kann, was wiederum bedeutende Konsequenzen für die Verteilung chemischer Verbindungen im ISM hat. Aus einer Abschätzung, die sich nach der Umrechnung der simulierten Einheiten auf Größenordnungen typischer Sternentstehungsgebiete ergibt, findet man eine Zeitskala $t_{\text{misch}} \approx 0.1T = 0.1L/V \simeq L/(Ma_{\text{rms}}c_s) \approx 0.1 \times 10^6$ Jahre für die Längenskala $L \approx 10$ pc und die Schallgeschwindigkeit $c_s \approx 2.5 \text{ km s}^{-1}$ im CNM (Größenordnungen analog zur Simulation von GML06).

7.4 Test des Skalenverhaltens von Turbulenz im Lagrangeschen Bezugssystem

Die in dieser Arbeit entwickelte Implementierung von Tracer Teilchen eröffnet die Möglichkeit zur numerischen Untersuchung turbulenter Strömungen im mitbewegten Bezugssystem. Man erwartet für voll entwickelte Turbulenz nicht nur räumliche

Korrelationen im Geschwindigkeitsfeld mit charakteristischem Skalenverhalten, wie in Kapitel 6 eingehend untersucht wurde, sondern auch zeitliche Korrelationen mit einem bestimmten Skalenverhalten. Bisher gibt es hierzu jedoch nur wenige Untersuchungen.

Die Lagrangesche Strukturfunktion (Gleichung 5.18) beschreibt das Skalenverhalten zeitlicher Korrelationen im Geschwindigkeitsfeld für ein mitbewegtes Flüssigkeitselement. Zur Messung dieser Korrelationen muss die Geschwindigkeit eines jeden Flüssigkeitselements zum Zeitpunkt t mit der Geschwindigkeit des selben Flüssigkeitselements zum Zeitpunkt $t + \tau$ verglichen werden und eine Mittelung über möglichst viele solcher Vergleiche erfolgen.

Dies wurde hier in einer Simulation getriebener Turbulenz unter Zuhilfenahme von Tracer Teilchen durchgeführt. Nach der Beschreibung der Initialisierung werden die Ergebnisse dieser Simulation vorgestellt und mit den Erwartungen für das Skalenverhalten nach Kolmogorov (5.25) verglichen.

Initialisierung und Durchführung Die Initialisierung der hier durchgeführten Simulation ist identisch mit der Initialisierung der Simulationen von Abschnitt 7.3, abgesehen davon, dass die Auflösung 128^3 Gitterzellen beträgt und eine Mach-Zahl von $Ma \approx 1$ für den Zustand voll entwickelter Turbulenz eingestellt wurde. Ein weiterer wichtiger Unterschied ist, dass insgesamt 64^3 Tracer Teilchen bereits bei der Initialisierung zum Zeitpunkt $t = 0$ homogen in der Simulationsdomäne verteilt wurden. Die Auflösung des Eulerschen Gitters, die Mach-Zahl, sowie die Anzahl der Tracer Teilchen können und sollten in zukünftigen Simulationen variiert werden.

Zunächst wird für zwei Autokorrelationszeiten T des stochastischen Kraftfelds getrieben und ein Zustand voll entwickelter Turbulenz erzeugt. Das Erreichen dieses Zustands stellt die Grundlage zur Untersuchung des Skalenverhaltens der Lagrangeschen Strukturfunktionen dar¹⁴. Deshalb wurde ab diesem Zeitpunkt mit der Berechnung der Lagrangeschen Strukturfunktionen begonnen. Es wurden Zeitinkremente und Geschwindigkeitsinkremente für die Berechnung der Strukturfunktionen in Gleichung (5.18) bis zu $\tau/T = 1$ berechnet, wobei für jedes Zeitinkrement τ über alle 64^3 Tracer Teilchen gemittelt wurde.

Ergebnisse und Diskussion Abbildung 7.10 (oben) zeigt die berechneten Lagrangeschen Strukturfunktionen bis zur 5. Ordnung. Um deren Skalenverhalten zu erschließen, muss der Inertialbereich lokalisiert werden¹⁵. Anschließend muss der Ska-

¹⁴Hochaufgelöste Simulationen dieser Art könnten in Zukunft mit turbulenten Anfangsbedingungen im Geschwindigkeitsfeld initialisiert werden, um Ressourcen zu sparen.

¹⁵Eine Abschätzung ergibt $0.05 \ll \tau/T \ll 1.00$ für den Inertialbereich der hier durchgeführten Simulation. Die obere Grenze ist durch (5.19) mit $T \approx T_L$ festgelegt. Das untere Limit wird durch die Kolmogorov-Skala festgelegt. Diese ist im vorliegenden Fall von der Auflösung des numerischen Gitters abhängig und setzt eine Größenordnung für die Längenskala fest, auf der numerische Dissipation einsetzt. Schätzt man diese mit $\approx 4\Delta x$ (Δx : Länge einer Gitterzelle) ab,

p	Kolmogorov	Werte aus Abb. 7.10
1	0.5	0.52 ± 0.01
2	1.0	1.00
3	1.5	1.43 ± 0.01
4	2.0	1.82 ± 0.04
5	2.5	2.17 ± 0.07

Tabelle 7.1. Werte des Skalenverhaltens $\xi(p)/\xi(2)$ der Lagrangeschen Strukturfunktionen nach der Kolmogorov-Theorie von Gleichung (5.25) im Vergleich zu den hier berechneten Werten. Die angegebenen Fehler entsprechen den Standardabweichungen aus der Statistik über die Werte von Abbildung 7.10 (unten).

lenexponent des in diesem Bereich gefitteten Potenzgesetzes bestimmt werden. Weil die Reynolds-Zahl in dieser Simulation zu gering ist (bedingt durch die Auflösung des numerischen Gitters), um ein gutes Skalenverhalten der Strukturfunktionen alleine durch diese Analyse zu erhalten, wird zur Auswertung die Methode der erweiterten Selbstähnlichkeit angewendet (Benzi et al. 1993). Das bedeutet, dass zunächst die logarithmischen Steigungen der Strukturfunktionen in Abhängigkeit von τ/T berechnet werden (Abbildung 7.10 mitte) und anschließend das Verhältnis dieser Steigungen zur Steigung der Strukturfunktion 2. Ordnung aufgetragen wird (Abbildung 7.10 unten). Aus dieser Auftragung lassen sich direkt die Skalenexponenten $\xi(p)/\xi(2)$ in (5.18) ablesen. In Tabelle 7.1 sind die aus Abbildung 7.10 (unten) bestimmten Werte, denen nach der Kolmogorov-Theorie vorhergesagten Skalenexponenten gegenüber gestellt. Die hier bestimmten Skalenexponenten $\xi(p)/\xi(2)$ für $p = 1$ und $p = 3$ stimmen gut (wenn auch außerhalb der Fehlergrenzen) mit der Kolmogorov-Theorie überein. Für $p = 4$ und $p = 5$ hingegen ist die Abweichung signifikant. Da die Strukturfunktionen für $p = 4, 5$ jedoch beim hier durchgeführten numerischen Experiment kein gutes Skalenverhalten zeigen, können noch keine definitiven Aussagen zum Skalenverhalten der Strukturfunktionen für $p > 3$ gemacht werden. Es deutet sich jedoch auch bei der hier ausgewerteten Simulation an, dass das Skalenverhalten der Lagrangeschen Strukturfunktionen für $p > 3$ von der Kolmogorov-Theorie abweicht. Diese Erkenntnis ist qualitativ in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen experimenteller Messungen Lagrangescher Turbulenz (Xu et al. 2006) und einer numerischen Simulation von Chevillard et al. (2005).

Im Rahmen dieser Diplomarbeit konnten keine weiteren Untersuchungen der Skaleneigenschaften von Turbulenz im Lagrangeschen Bezugssystem mehr durchgeführt werden. Um klare Ergebnisse zum Skalenverhalten für $p > 3$ zu erzielen, bedarf es einer höheren numerischen Auflösung, um den Inertialbereich zu erweitern. Deswei-

so ergibt sich $\eta_K \gtrsim 0.03$ bei der hier benutzten Auflösung und Länge der Simulationsdomäne $L_{\text{Box}} = 1$. Aus Gleichung (5.8) folgt mit $L = 0.5$ und $V = \text{Ma } c_s \approx 1.0$ schließlich $\tau_K/T \gtrsim 0.05$.

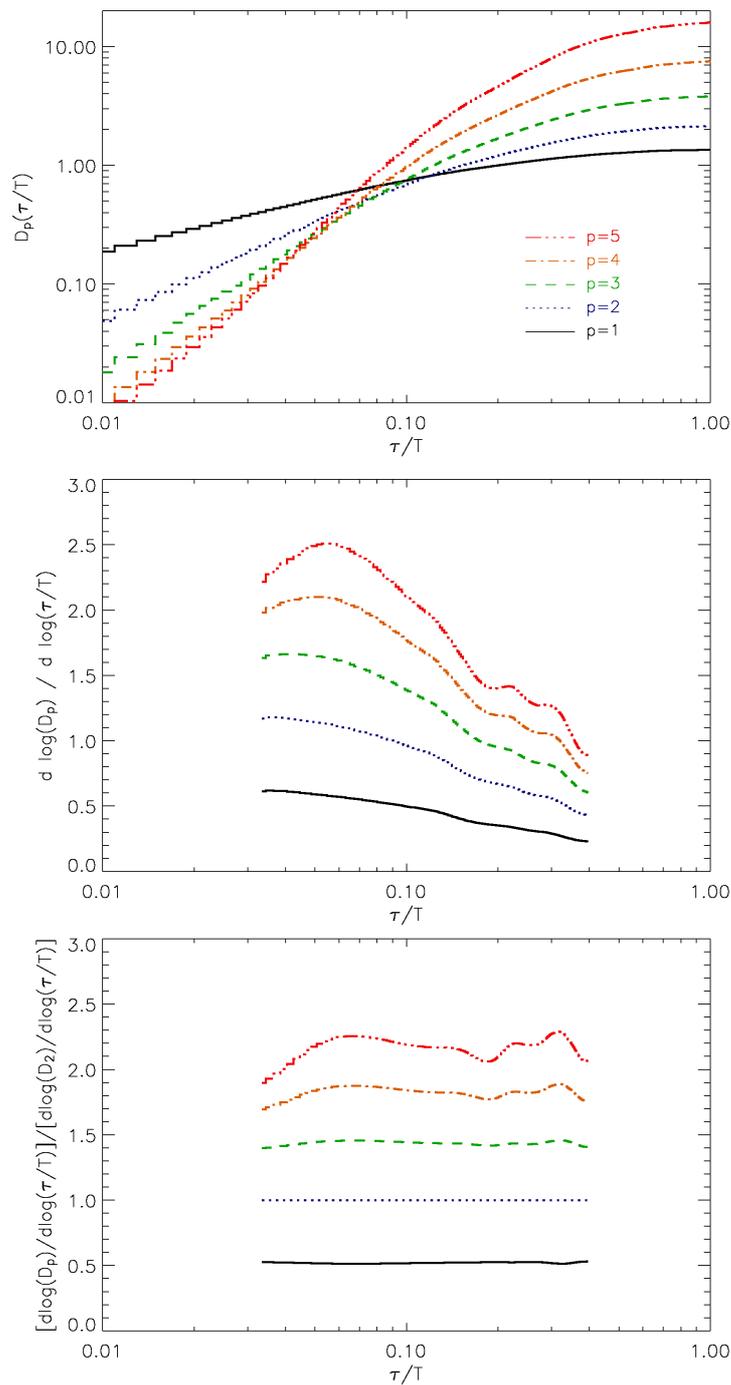


Abbildung 7.10. Lagrangesche Strukturfunktionen, berechnet für $p = 1, 2, 3, 4, 5$ (oben). Die Darstellung in der Mitte zeigt die logarithmischen Steigungen $\xi(p)$. Schließlich wurden diese Steigungen auf $\xi(2)$ normiert (unten). In dieser Auftragung erschließt sich ein erweiterter Bereich des Skalierungsverhaltens, in Übereinstimmung mit der Selbstähnlichkeitshypothese von Benzi et al. (1993).

teren muss über ein größeres Ensemble aus Tracer Teilchen gemittelt werden, um eine aussagekräftige Statistik zu gewährleisten.

Es bleibt jedoch festzuhalten, dass es mit den in dieser Arbeit entwickelten Tracer Teilchen möglich war, das erwartete Skalenverhalten von Turbulenz im Lagrange-schen Bezugssystem zu reproduzieren und die Voraussetzungen für weitere Untersuchungen auf diesem Feld zu schaffen.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Zahlreiche Beobachtungen der letzten Jahre zeigen, dass die Dynamik in Sternentstehungsgebieten von überschallschnellen ungeordneten Bewegungen dominiert wird. Überschallturbulenz erzeugt ein komplexes Netzwerk wechselwirkender Stoßwellen über einen weiten Skalenbereich. Dies führt auf natürliche Weise zu der beobachteten selbstähnlichen Struktur in Form dichter Filamente und nahezu leerer Zwischenräume in Molekülwolken. Gravitation spielt dabei erst für besonders dichte Bereiche, die ihre Jeans-Masse überschreiten, eine Rolle.

Es deutet vieles darauf hin, dass thermische Instabilität und Supernova-Explosionen wichtige Treiber der interstellaren Turbulenz sind. Wenn dies der Fall ist, erwartet man, dass die Turbulenz auf großen Skalen vorwiegend kompressiv getrieben wird. Diese Form des Treibens interstellarer Turbulenz wurde deshalb in einer numerischen Simulation untersucht und in dieser Arbeit ausgewertet. Die Auswertung erfolgte mit Hilfe statistischer Methoden durch Berechnung von Energiespektren und Strukturfunktionen.

Die dabei gewonnenen Werte des Skalierungsverhaltens von Überschallturbulenz wurden im Rahmen des Modells von Boldyrev (2002) bezüglich der fraktalen Dimension dissipativer Strukturen weiter ausgewertet. Es wurde gezeigt, dass sich für die hier untersuchte Simulation eine fraktale Dimension dissipativer Strukturen von ≈ 2.3 ergibt. Dieser Wert stimmt gut mit Bestimmungen der fraktalen Dimension der Dichtestruktur in interstellaren Wolken überein (Larson 1992; Elmegreen & Elmegreen 2001; Chappell & Scalo 2001). Sollte es eine einfache Korrelation zwischen der Dichtestruktur und den dissipativen Strukturen in Überschallturbulenz geben, was wahrscheinlich ist, so kann dies als Hinweis darauf gedeutet werden, dass interstellare Turbulenz hauptsächlich kompressiv getrieben wird. Das wiederum passt zu den Erwartungen im Falle dominanten Treibens durch Supernovae und gegeneinander laufende Dichtewellen, die durch thermische Instabilität hervorgerufen werden können und vorwiegend kompressible Moden im Geschwindigkeitsfeld des ISM anregen. Eine direkte Berechnung der fraktalen Dimension des Dichtefelds in numerischen Simulationen getriebener Überschallturbulenz wäre ein interessanter nächster Schritt, um einen Vergleich mit der hier abgeleiteten fraktalen Dimension dissipativer Strukturen vorzunehmen.

Das wichtigste Ergebnis der hier durchgeführten Auswertungen ist, dass kompressiv getriebene Überschallturbulenz nicht nur auf großen Skalen kompressible Moden im Geschwindigkeitsfeld erzeugt. Auch auf weitaus kleineren Skalen konnte der Charakter des kompressiven Treibens noch deutlich durch das Verhältnis von

kinetischer Energie in solenoidalen Moden zu kinetischer Energie in kompressiblen Moden nachgewiesen werden. Diese Feststellung macht den entscheidenden Unterschied zwischen der hier ausgewerteten Simulation und der Simulation von Boldyrev et al. (2002a) aus. Vermutlich wird das Skalenverhalten von Überschallturbulenz durch den Charakter kompressiven Treibens modifiziert. Es ist fraglich, ob die Kolmogorov-Skaleneigenschaften für das Geschwindigkeitsfeld und die Wirbelzeitskala im Inertialbereich, die in das Modell von Boldyrev (2002) eingehen, erhalten bleiben, wenn der Inertialbereich signifikant von kompressiblen Moden beeinflusst wird. Das Modell von Boldyrev (2002) kann deshalb nur bedingt Anwendung finden und bedarf möglicherweise einer Modifikation.

Schließlich wurde das berechnete Skalenverhalten benutzt, um die Form der IMF nach dem Modell von Padoan & Nordlund (2002) für isotherme Stoßwellen abzuleiten. Das Ergebnis ist mit Padoan et al. (2007) vereinbar, enthält jedoch ebenfalls die Modifikation durch den kompressiven Charakter des Treibens. Damit ist es in dieser Arbeit unter anderem gelungen zu zeigen, dass ein möglichst realistisches Szenario des Antriebs von interstellarer Überschallturbulenz, mit der allgemeinen Theorie der Sternmassenverteilung in Übereinstimmung zu bringen ist.

Desweiteren wurde untersucht, wie turbulenter Transport zur Umverteilung chemischer Verbindungen im ISM führt. Durch Veränderung der relativen Konzentration chemischer Spezies in bestimmten Regionen von Molekülwolkenkomplexen wird sowohl die chemische, als auch die physikalische Entwicklung von Sternentstehungsgebieten beeinflusst. Abschirmung gegenüber UV-Strahlung ist beispielsweise abhängig von der Zusammensetzung des interstellaren Gases. Aus der beobachteten Konzentration chemischer Verbindungen (Tracer) wird weiterhin auf die Gasdichte bestimmter Regionen geschlossen (Garrod et al. 2006a). Turbulenter Transport könnte jedoch zu einer schnellen räumlichen Umverteilung bestimmter chemischer Tracer führen. Für den Fall, dass die Zeitskala des turbulenten Transports kleiner ist als die Zeitskala, auf der chemische Reaktionen stattfinden, müssen die Effekte des turbulenten Transports berücksichtigt werden. Auf Grund der geringen Gasdichten können chemische Reaktionen im ISM auf verhältnismäßig langen Zeitskalen ablaufen.

In Simulationen getriebener Überschallturbulenz wurde deshalb an einem einfachen Beispiel untersucht, wie schnell sich molekularer Wasserstoff, der in Regionen hoher Gasdichte gebildet wurde, zu Bereichen niedriger Gasdichte transportiert wird. Dies war mit Hilfe von Tracer Teilchen möglich, die im Rahmen dieser Arbeit für den hydrodynamischen Code ENZO entwickelt, implementiert und damit verfügbar gemacht wurden. Aus der zeitlichen Entwicklung von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen wurde eine Zeitskala von $\approx 0.1 \times 10^6$ Jahre für diesen turbulenten Mischvorgang in Sternentstehungsgebieten abgeschätzt. Die Größenordnung dieser Zeitskala legt nahe, dass die chemische Entwicklung von Sternentstehungsgebieten durch das Durchmischen auf Grund turbulenter Strömungen beeinflusst wird.

Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass die für diese Arbeit entwickelten Tracer Teilchen, ein hervorragendes Mittel zur numerischen Untersuchung von Turbulenz im Lagrangeschen Bild der Hydrodynamik darstellen. Auf diesem Forschungsfeld sind bisher kaum numerische Daten verfügbar. Diese Situation kann durch die im Rahmen dieser Diplomarbeit entwickelten Lagrangeschen Methoden und Analysealgorithmen verbessert werden und ermöglicht zukünftig weitere Einblicke und Erkenntnisse über die grundlegenden Eigenschaften von Turbulenz.

A Anhang

A.1 Ideale Gasgleichung

Die ideale Gasgleichung ist

$$\frac{PV}{T} = N k_B \quad \text{oder} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{N}{m} k_B T \quad \text{oder} \quad P = n k_B T \quad . \quad (\text{A.1})$$

Das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1 + \frac{2}{f} \quad (\text{A.2})$$

mit der Anzahl der Freiheitsgrade f wird auch als Adiabatenindex bezeichnet. Für ein einatomiges Gas mit $f = 3$ ist z. B. $\gamma = 5/3$, für ein zweiatomiges Gas ist $\gamma = 7/5$, weil neben den drei Translationsfreiheitsgraden noch zwei Rotationsfreiheitsgrade dazukommen. Schwingungsfreiheitsgrade werden vernachlässigt. Die spezifische innere Energie eines idealen Gases

$$u = \frac{f N}{2 m} k_B T \quad (\text{A.3})$$

ist nur durch seine Temperatur bestimmt. Setzt man in diese Gleichung die Gleichungen (A.1) und (A.2) und formt um, erhält man die ideale Gasgleichung

$$P = \rho(\gamma - 1) u \quad (\text{A.4})$$

ausgedrückt durch den Adiabatenindex γ , die als Zustandsgleichung (3.23e) verwendet wird.

A.2 Eulerableitung für Vektorfelder

In Abschnitt 3.1.2 wurde gezeigt, dass man mit Hilfe der Eulerableitung (3.4) zwischen Lagrangescher und Eulerscher Darstellung der Hydrodynamik wechseln kann. Die Herleitung der Eulerableitung erfolgte für ein Skalarfeld $f(\mathbf{x}, t)$. Sie gilt aber auch allgemein für Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, indem man einfach die Komponenten f_x , f_y und f_z in die Eulerableitung einsetzt. Verallgemeinert darf deshalb

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.5})$$

geschrieben werden. Zu Beachten ist die Reihenfolge der Operationen, die dabei durchgeführt werden, denn manchmal findet man auch $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{f}$ oder $\mathbf{v} \nabla \mathbf{f}$.

Es ist

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{f} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{f} = (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{f} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{f} \quad (\text{A.6})$$

in kartesischen Koordinaten. Allgemeiner kann der sogenannte Vektorgradient $\frac{\partial}{\partial x_k} v_i$, ein Tensor zweiter Stufe definiert werden, so dass (A.6) $v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i$ wird.

A.3 Herleitung der Energiegleichung

Ausgehend von Gleichung (3.21) und unter Einsetzen der Eulergleichung (3.15) ist

$$\frac{de}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \frac{d}{dt} \mathbf{v} \quad (\text{A.7a})$$

$$= -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \left(-\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi \right) \quad (\text{A.7b})$$

Multipliziert mit ρ und anschließendes Nutzen der Eulerableitung ergibt

$$\rho \frac{de}{dt} + P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla P = -\rho \mathbf{v} \nabla \Phi \quad (\text{A.8a})$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \nabla e + P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla P = -\rho \mathbf{v} \nabla \Phi \quad (\text{A.8b})$$

Weil $\partial(\rho e)/\partial t = \rho \partial e/\partial t + e \partial \rho/\partial t$ und durch erneutes Nutzen der Kontinuitätsgleichung kann auch

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \left[e \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \nabla e + P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla P \right] = -\rho \mathbf{v} \nabla \Phi \quad (\text{A.9})$$

geschrieben werden.

Weil der Term in eckigen Klammern gleich

$$\nabla \cdot [\mathbf{v}(\rho e + P)] = \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} e + \mathbf{v} P] = e \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \nabla e + P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla P \quad (\text{A.10})$$

ist, folgt die Gleichung (3.22) für die Energiedichte ρe

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\rho e + P)] = -\rho \mathbf{v} \nabla \Phi \quad (\text{A.11})$$

A.4 Ergänzungen zur Jeans Analyse

Ausgehend von den Gleichungen der Hydrodynamik (3.23) für nicht-viskose kompressible selbstgravitierende Flüssigkeiten und dem Übergehen von vollständig dynamischen Größen ρ , \mathbf{v} , P und Φ zu konstanten Hintergrundgrößen mit einem fluktuierenden Störungsanteil wie in Abschnitt 4.1 folgen die Gleichungen inklusive Störungen. Für die Kontinuitätsgleichung (3.23a) sind die einzelnen Schritte

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}) \nabla (\rho_0 + \delta \rho) + (\rho_0 + \delta \rho) \nabla (\mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.12a})$$

$$\begin{aligned} \iff \quad & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \mathbf{v}_0 + \\ & \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \delta \mathbf{v} + \\ & \mathbf{v}_0 \nabla \delta \rho + \delta \mathbf{v} \nabla \rho_0 + \delta \rho \nabla \mathbf{v}_0 + \\ & \delta \mathbf{v} \nabla \delta \rho + \delta \rho \nabla \delta \mathbf{v} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.12b})$$

Die Terme 1,2,3 in Gleichung (A.12b) sind die ursprüngliche Kontinuitätsgleichung mit $\rho = \rho_0$ und $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, die per Definition Null ergeben müssen. Außerdem sind Ableitungen der konstanten Größen ρ_0 und \mathbf{v}_0 immer gleich Null. Zusammen mit der Forderung, dass im Gleichgewicht $\mathbf{v}_0 = 0$ sein muss, fallen auch die Terme 6,7,8 weg und die Terme 9 und 10 sind zweiter Ordnung und werden ebenfalls vernachlässigt. Es bleiben also nur die Terme 4 und 5

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \delta \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.13})$$

aus Gleichung (A.12b) übrig.

Für die Impulsgleichung (3.23b) verfährt man genauso und erhält schließlich

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 + \delta \rho} \nabla \delta P - \nabla \delta \Phi . \quad (\text{A.14})$$

Weil die Störungen als klein gegenüber den Hintergrundwerten angenommen werden, ist $\frac{1}{\rho_0 + \delta \rho} \simeq \frac{1}{\rho_0}$. Mit der Schallgeschwindigkeit c_s für eine isotherme Zustandsgleichung

$$c_s^2 = \frac{P_0 + \delta P}{\rho_0 + \delta \rho} \quad (\text{A.15})$$

erhält man für die linearisierte Impulsgleichung

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta \rho - \nabla \delta \Phi . \quad (\text{A.16})$$

Die Poisson-Gleichung (3.23d) ist nach Einsetzen

$$\Delta(\Phi_0 + \delta \Phi) = 4\pi G(\rho_0 + \delta \rho) \quad (\text{A.17})$$

und ergibt sich zu

$$\Delta(\delta\Phi) = 4\pi G(\delta\rho), \quad (\text{A.18})$$

weil $\Delta\Phi_0 = 4\pi G\rho_0$.

A.5 Herleitung der Kolmogorov-Skala

Die Reynolds-Zahl, die effektiv auf der Kolmogorov-Skala η_K wirkt, ist nach (5.4)

$$\text{Re}(\eta_K) = \frac{v(\eta_K)\eta_K}{\nu} = \frac{V\eta_K^{4/3}}{L^{1/3}\nu}. \quad (\text{A.19})$$

Hier wurde im zweiten Schritt das Skalenverhalten (5.7) $v(\eta_K) \sim \eta_K^{1/3}$ genutzt. Geht man davon aus, dass auf der Kolmogorov-Skala die Viskosität ν beginnt zu wirken und eine laminare Strömung zur Folge hat, so muss $\text{Re}(\eta_K) \approx 1$ sein. Daraus ergibt sich nach Umformung

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\langle\epsilon\rangle}\right)^{1/4} = \text{Re}^{-3/4} L. \quad (\text{A.20})$$

A.6 Dichtespektren der Auswertung von 6.2

Die folgenden Abbildungen A.1 und A.2 zeigen die Verteilung der Dichte im Wellenzahlraum für die Simulation getriebener Überschallturbulenz von Kapitel 6.

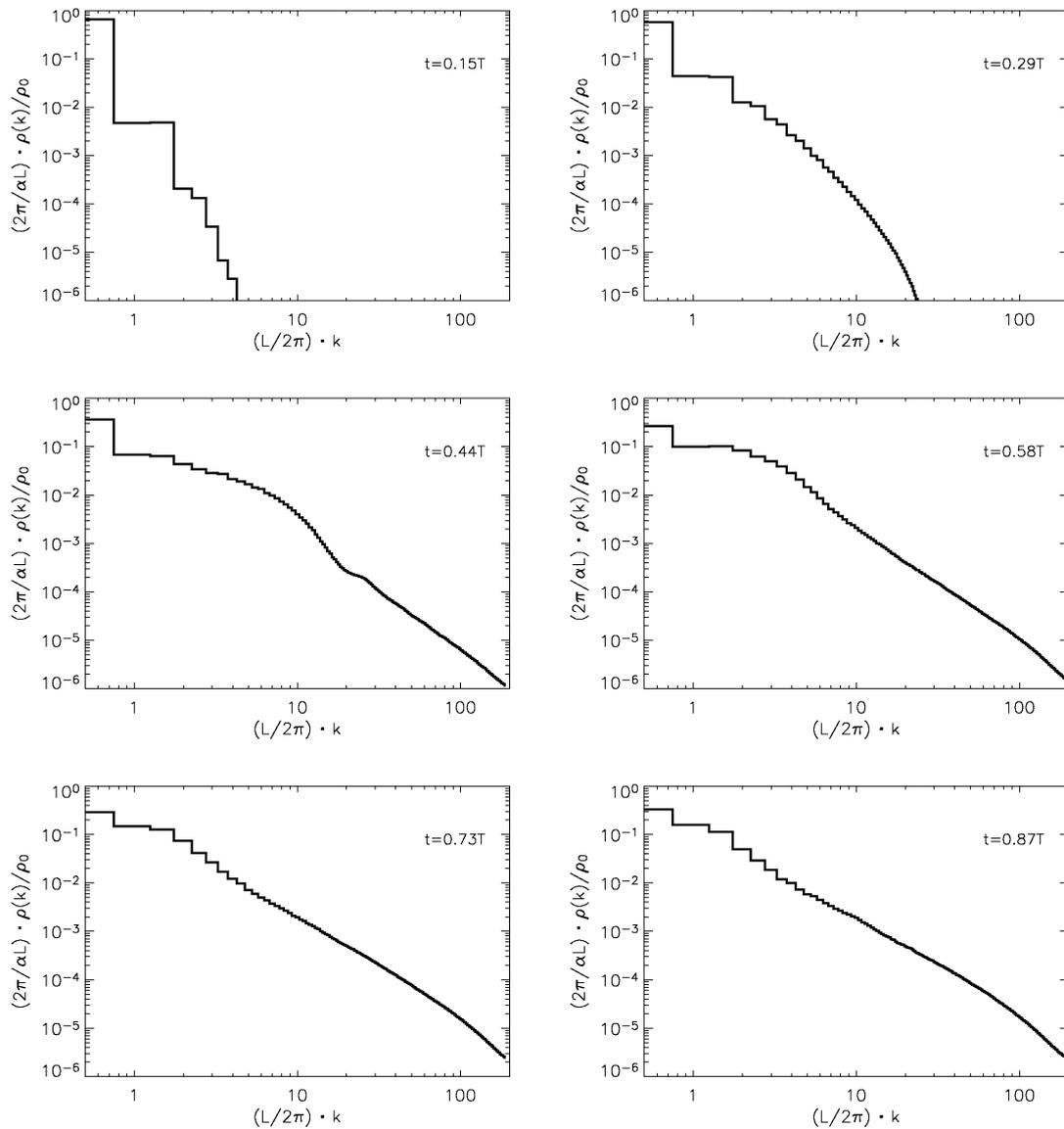


Abbildung A.1. Zeitliche Entwicklung der Dichtespektren für die Zeiten $t = 0.15, 0.29, 0.44, 0.58, 0.73, 0.87 T$ analog zu 6.1.

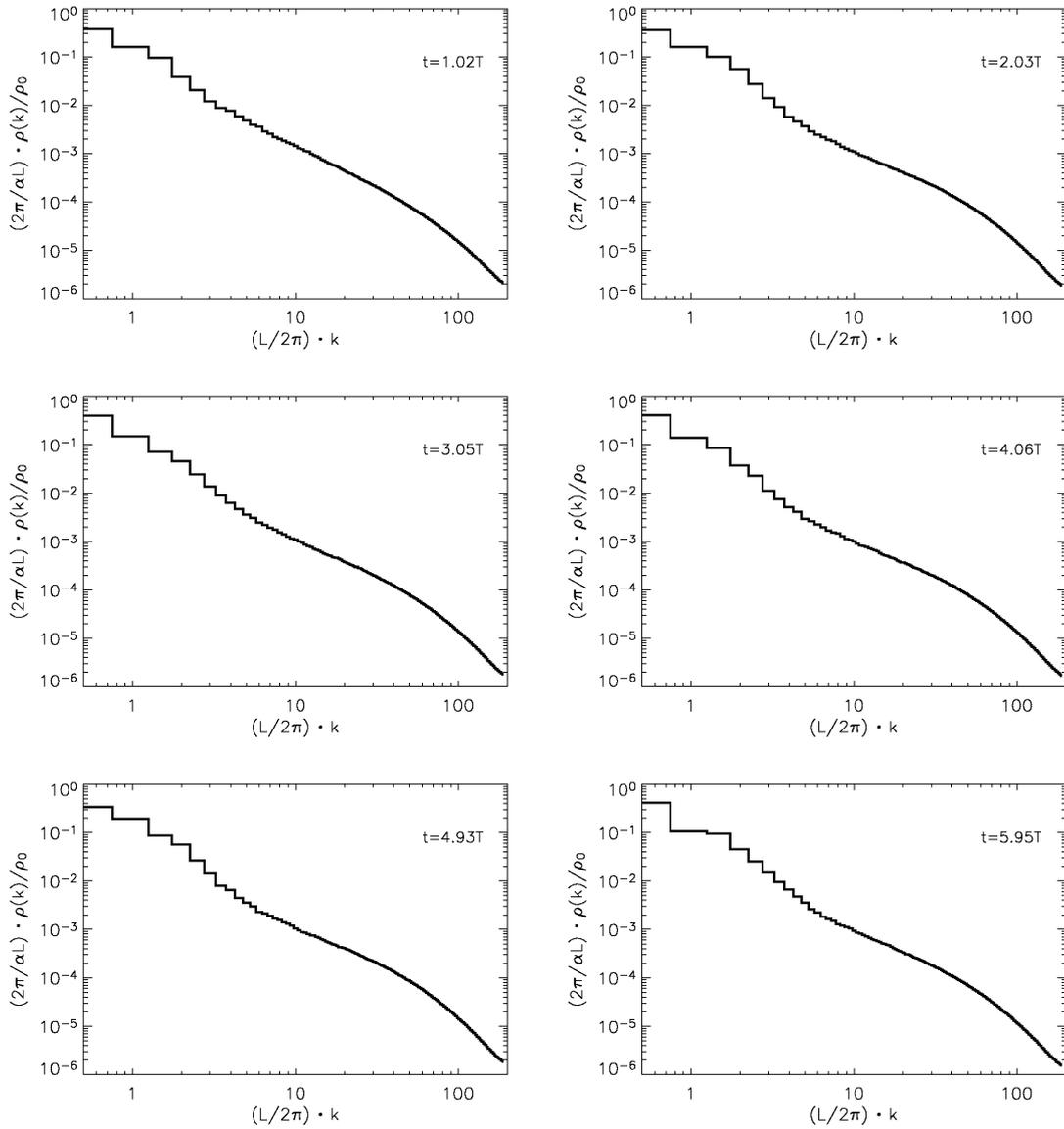


Abbildung A.2. Zeitliche Entwicklung der Dichtespektren für die Zeiten $t = 1.02, 2.03, 3.05, 4.06, 4.93, 5.95 T$ analog zu 6.2.

Literaturverzeichnis

- Benzi, R., Ciliberto, S., Tripicciono, R., et al. 1993, *Phys. Rev. E*, 48, R29
- Boldyrev, S. 2002, *ApJ*, 569, 841
- Boldyrev, S., Nordlund, Å., & Padoan, P. 2002a, *ApJ*, 573, 678
- Boldyrev, S., Nordlund, Å., & Padoan, P. 2002b, *Physical Review Letters*, 89, 031102
- Bonazzola, S., Heyvaerts, J., Falgarone, E., Perault, M., & Puget, J. L. 1987, *A&A*, 172, 293
- Bryan, G. L., Norman, M. L., Stone, J. M., Cen, R., & Ostriker, J. P. 1995, *Comp. Phys. Comm.*, 89, 149
- Burkert, A. & Lin, D. N. C. 2000, *ApJ*, 537, 270
- Chandrasekhar, S. 1951, *Proc. R. Soc. London*, 210, 18
- Chappell, D. & Scalo, J. 2001, *ApJ*, 551, 712
- Chevillard, L., Roux, S. G., Lévêque, E., et al. 2005, *Physical Review Letters*, 95, 064501
- Clark, P. C. & Bonnell, I. A. 2006, *MNRAS*, 368, 1787
- Colella, P. & Woodward, P. R. 1984, *Journal of Computational Physics*, 54, 174
- Crutcher, R. M. 1999, *ApJ*, 520, 706
- Crutcher, R. M., Troland, T. H., Goodman, A. A., et al. 1993, *ApJ*, 407, 175
- Dobler, W., Haugen, N. E. L., Yousef, T. A., & Brandenburg, A. 2003, *Phys. Rev. E*, 68, 026304
- Elmegreen, B. G. 1997, *ApJ*, 477, 196
- Elmegreen, B. G. & Elmegreen, D. M. 2001, *AJ*, 121, 1507
- Field, G. B., Goldsmith, D. W., & Habing, H. J. 1969, *ApJ*, 155, L149+
- Frisch, U. 1995, *Turbulence* (Cambridge University Press)

- Garrod, R. T., Williams, D. A., Hartquist, T. W., Rawlings, J. M. C., & Viti, S. 2005, *MNRAS*, 356, 654
- Garrod, R. T., Williams, D. A., & Rawlings, J. M. C. 2006a, *MNRAS*, 373, 577
- Garrod, R. T., Williams, D. A., & Rawlings, J. M. C. 2006b, *ApJ*, 638, 827
- Glover, S. C. O. 2003, *ApJ*, 584, 331
- Glover, S. C. O. & Mac Low, M.-M. 2006a, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0605120
- Glover, S. C. O. & Mac Low, M.-M. 2006b, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0605121
- Goldsmith, D. W., Habing, H. J., & Field, G. B. 1969, *ApJ*, 158, 173
- Greiner, W. & Stock, H. 1984, Theoretische Physik: Hydrodynamik (Verlag Harri Deutsch - Thun und Frankfurt am Main)
- Heitsch, F., Slyz, A. D., Devriendt, J. E. G., Hartmann, L. W., & Burkert, A. 2006, *ApJ*, 648, 1052
- Hollenbach, D. J. & Tielens, A. G. G. M. 1999, *Reviews of Modern Physics*, 71, 173
- Hollenbach, D. J., Werner, M. W., & Salpeter, E. E. 1971, *ApJ*, 163, 165
- Jappsen, A.-K., Klessen, R. S., Larson, R. B., Li, Y., & Mac Low, M.-M. 2005, *A&A*, 435, 611
- Jeans, J. H. 1902, *Phil. Trans. A.*, 199, 1
- Klessen, R. S. 2000, *ApJ*, 535, 869
- Klessen, R. S. 2004, The relation between interstellar turbulence and star formation
- Klingenberg, C., Schmidt, W., & Waagan, K. 2006, Numerical comparison of Riemann solvers for astrophysical hydrodynamics
- Kolmogorov, A. N. 1941, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 32, 16
- Kolmogorov, A. N. 1962, *J. Fluid Mech.*, 13, 82
- Koyama, H. & Inutsuka, S.-I. 2000, *ApJ*, 532, 980
- Koyama, H. & Inutsuka, S.-i. 2002, *ApJ*, 564, L97
- Krumholz, M. R. & McKee, C. F. 2005, *ApJ*, 630, 250

- Landau, L. D. & Lifschitz, E. M. 1986, Lehrbuch der Theoretischen Physik: Hydrodynamik (Akademie Verlag)
- Larson, R. B. 1992, *MNRAS*, 256, 641
- Lekien, F. & Marsden, J. E. 2005, Intern. J. for Num. Meth. in Engin., 63, 455
- Li, Y., Klessen, R. S., & Mac Low, M.-M. 2003, *ApJ*, 592, 975
- Mac Low, M.-M. 1999, *ApJ*, 524, 169
- Mac Low, M.-M. & Klessen, R. S. 2004, Reviews of Modern Physics, 76, 125
- Maier, A. 2005, Detonationsfronten in teilweise verbranntem Sternmaterial
- McKee, C. F. & Ostriker, J. P. 1977, *ApJ*, 218, 148
- Niemeyer, J. C., Schmidt, W., & Klingenberg, C. 2005, in Interdisciplinary Aspects of Turbulence, ed. F. Kupka & W. Hillebrandt, 175–181
- Norman, M. L. & Bryan, G. L. 1999, in ASSL Vol. 240: Numerical Astrophysics, ed. S. M. Miyama, K. Tomisaka, & T. Hanawa, 19
- O’Shea, B. W., Bryan, G., Bordner, J., et al. 2004, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0403044
- Ostriker, E. C., Stone, J. M., & Gammie, C. F. 2001, *ApJ*, 546, 980
- Padoan, P., Jimenez, R., Nordlund, Å., & Boldyrev, S. 2004, Physical Review Letters, 92, 191102
- Padoan, P., Juvela, M., Kritsuk, A., & Norman, M. L. 2006, *ApJ*, 653, L125
- Padoan, P. & Nordlund, Å. 2002, *ApJ*, 576, 870
- Padoan, P., Nordlund, A., & Jones, B. J. T. 1997, *MNRAS*, 288, 145
- Padoan, P., Nordlund, A., Kritsuk, A. G., Norman, M. L., & Li, P. S. 2007, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0701795
- Pope, S. B. 1994, Ann. Rev. Fl. Mech., 26, 23
- Pope, S. B. 2000, Turbulent Flows (Cambridge University Press)
- Price, R. J., Crawford, I. A., Barlow, M. J., & Howarth, I. D. 2001, *MNRAS*, 328, 555
- Salpeter, E. E. 1955, *ApJ*, 121, 161

- Sawford, B. 2001, *Ann. Rev. Fl. Mech.*, 33, 289
- Schmidt, W. 2004, Turbulent thermonuclear combustion in degenerate stars
- Schmidt, W. & Federrath, C. 2007, A parameter study of forced supersonic turbulence in large eddy simulations, in preparation
- Schmidt, W., Hillebrandt, W., & Niemeyer, J. C. 2004, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0406083
- Schmidt, W., Hillebrandt, W., & Niemeyer, J. C. 2006, *Comp. Fluids.*, 35, 353
- She, Z.-S. & Leveque, E. 1994, *Phys. Rev. Lett.*, 72, 336
- She, Z.-S. & Waymire, E. C. 1995, *Phys. Rev. Lett.*, 74, 262
- Stahler, S. W. & Palla, F. 2004, *The Formation of Stars* (WILEY-VCH)
- Tennekes, H. & Lumley, J. L. 1972, *A First Course in Turbulence* (MIT Press)
- Troland, T. H., Crutcher, R. M., Goodman, A. A., et al. 1996, *ApJ*, 471, 302
- Truelove, J. K., Klein, R. I., McKee, C. F., et al. 1997, *ApJ*, 489, L179+
- Turner, B. E. & Heiles, C. 2006, *ApJS*, 162, 388
- van Dishoeck, E. F. & Blake, G. A. 1998, *ARA&A*, 36, 317
- Vázquez-Semadeni, E. 2006, in IAU Symposium
- Vázquez-Semadeni, E. 2006, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0609716
- Vázquez-Semadeni, E., Gazol, A., & Scalo, J. 2000, *ApJ*, 540, 271
- Vázquez-Semadeni, E., Gomez, G. C., Jappsen, A. K., et al. 2006, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0608375
- Verma, M. K. & Donzis, D. 2005, ArXiv Nonlinear Sciences e-prints, 10026
- Vishniac, E. T. 1994, *ApJ*, 428, 186
- Willacy, K., Langer, W. D., & Allen, M. 2002, *ApJ*, 573, L119
- Wolfire, M. G., Hollenbach, D., McKee, C. F., Tielens, A. G. G. M., & Bakes, E. L. O. 1995, *ApJ*, 443, 152
- Xu, H., Ouellette, N. T., & Bodenschatz, E. 2006, *Physical Review Letters*, 96, 114503
- Yeung, P. K. 2002, *Ann. Rev. Fl. Mech.*, 34, 115

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Jens Niemeyer für äußerst wichtige Impulse, Anregungen und Ideen im Entwicklungsprozess dieser Arbeit bedanken.

Ebenso danke ich Dr. Wolfram Schmidt, von dem ich sehr viel über die Physik der Turbulenz, aber auch über technische Details numerischer Simulationen lernen konnte.

Mein Dank richtet sich auch an Prof. Dr. Christian Klingenberg und an Prof. Dr. Friedrich Schmitz, die nachhaltig für mein Verständnis von numerischen Verfahren und der Hydrodynamik beitrugen.

Besonders bedanken möchte ich mich noch bei Melanie Keller, Markus Hupp, Andreas Maier und Dr. Luigi Iapichino, die für eine angenehme Arbeitsatmosphäre gesorgt haben und mit denen ich zahlreiche konstruktive Gespräche führen konnte.

Ich danke auch Prof. Dr. Ralf Klessen und Dr. Simon Glover für interessante Ideen zu Anwendungen der Tracer Teilchen und für tiefere Einblicke in die Physik und Chemie von Sternentstehungsgebieten, die ich von meinen Besuchen am ZAH Heidelberg und am AIP Potsdam nach Würzburg mitnehmen konnte.

Bedanken möchte ich mich schließlich bei Daniela Sacher, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit immer liebevoll unterstützt hat.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen Quellen benutzt habe.

Würzburg, 6. Juni 2007