# Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik (WS2010/11)

Cornelis Dullemond

Kapitel 9: Differenzialgleichungen (Teil 1)

1. Finden Sie die allgemeine Lösung zu den folgenden linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung:

   (a)
   $$\frac{df(x)}{dx} + 1 = 0 \tag{1}$$

   (b)
   $$\frac{df(x)}{dx} + f(x) + 3 = 0 \tag{2}$$

   (c)
   $$\frac{df(x)}{dx} + 2xf(x) = 0 \tag{3}$$

   (d)
   $$\frac{df(x)}{dx} + x^2 f(x) = 0 \tag{4}$$

   (e)
   $$\frac{df(x)}{dx} = f(x) + x^2 \tag{5}$$

2. Die Lösung der Differenzialgleichung zweiter Ordnung

   $$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + Af(x) = 0 \tag{6}$$

   mit konstante $A$ kann man mit dem Ansatz $f(x) = Ce^{ikx}$ finden.

   (a) Wie lautet die Dispersionsrelation, und was für Werte von $k$ und $C$ erfüllen diese Gleichung?

   (b) Was ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung? Tipp: bitte beachten Sie alle möglichen Werte von $k$!

   (c) Wie viele freie komplexe Koeffizienten haben wir also? Anmerkung: da jeder komplexe Koeffizient aufgebaut ist aus zwei reellen Zahlen (entweder $a+bi$ oder $ce^{i\phi}$), bedeutet dies doppelt soviele freie reelle Koeffizienten!

   (d) Wie kann man durch geschickte Wahl der freien komplexen Koeffizienten dafür sorgen, dass die allgemeine Lösung reell ist? Zeigen Sie damit, dass jetzt nur noch zwei freie reelle Koeffizienten (oder äquivalent ein freier komplexer Koeffizient) übrig sind (ist).

(e) Interpretieren Sie diesen freien Koeffizienten als Amplitude und Phase einer Welle.

3. Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) = 1 \tag{7}$$

4. Die Differenzialgleichung für den gedämpften Oszillator ist, laut der Zusammenfassung,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{8}$$

mit Dispersionsrelation:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{m^2} \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{\gamma}{2m} \tag{9}$$

(a) Macht die Dämpfung $\gamma$ die Periode der Oszillation länger, kürzer oder gleichlang?

(b) Wenn die Dämpfung zu stark wird, verliert die Lösung sein Charakter einer Schwingung. Wann? Und wie sieht die Lösung dann qualitativ aus?

5. Betrachten Sie die folgende DG:

$$\frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0 \tag{10}$$

Geben Sie die Lösung die die Randbedingung

$$f(0) = 4 \tag{11}$$

erfüllt.

6. Betrachten Sie die folgende DG:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) = 0 \tag{12}$$

Geben Sie die Lösung die die Randbedingungen

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=2\pi} = 2 \tag{13}$$

erfüllt.