

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik (WS2012/13)

Cornelis Dullemond
Kapitel 9: Vektorfelder

Viele der Beispiele in diesen Übungen haben direkte Relevanz für Elektromagnetismus.

1. Berechnen Sie den Gradient der folgenden Funktionen in 2-D, und zeichnen Sie (qualitativ) wie das Feld aussieht indem sie an regelmässigen Stellen Pfeile zeichnen:

(a) $f(x, y) = x - y$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(d) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$

2. Berechnen Sie ∇^2 von

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(d) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

3. Zeichnen Sie die folgenden Vektorfelder (qualitativ). Berechnen Sie deren Divergenz, und bestimmen Sie, für welche Bereiche das Feld divergiert oder konvergiert:

(a) $\mathbf{v}(x, y) = (-x, y)$

(b) $\mathbf{v}(x, y) = (x - x^3, y)$

(c) $\mathbf{v}(x, y) = \left(x - \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, y - \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$

4. Zeichnen Sie die folgenden Vektorfelder (qualitativ) in der (x, y) -Ebene. Berechnen Sie die Rotation.

(a) $\mathbf{v}(x, y, z) = (-y, x, 0)$

(b) $\mathbf{v}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$

5. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln, wo ψ ein Skalarfeld ist:

(a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(b) $\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{A}$

(c) $\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = (\nabla \psi) \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A}$