Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2011)

Cornelis Dullemond

Kapitel 1: Oberflächen- und Volumenintegrale

Warnung: Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als “Lehrbuch”. In der Vorlesung wird viel an zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

1 Oberflächen-Integral in 2-D

Wir haben schon 1-dimensionale Integrale gesehen, z.B.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{1}$$

oder

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{2}$$

Für viele Fälle wissen wir, wie wir diese Integrale auswerten können.

Nun machen wir einen Schritt weiter. Wir haben eine Funktion zweier Variablen $f(x, y)$, und wir werten das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y) \tag{3}$$

aus. Oft (aber nicht immer) kann man dies in zwei Schritten auswerten: Zuerst

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \tag{4}$$

und dann

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} J(x)dx \tag{5}$$

Beispiel:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{x^2+y^2} \tag{6}$$

Hier wird

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2+y^2} dy = \frac{1}{\pi} e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \tag{7}$$

und

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} J(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} dx = 1 \tag{8}$$

Im Allgemeinen wird das Integral allerdings nicht von $-\infty$ bis $+\infty$ genommen. Man könnte es z.B. zwischen -1 und 1 in x, und zwischen -2 und 2 in y nehmen. Hiermit wird das Integral nur über dieses Rechteck genommen.

Noch allgemeiner ist es, wenn unser Integrationsbereich nicht nur rechteckige Formen haben darf, sondern beliebige Formen. Wir definieren also eine geschlossene Kurve C, und bezeichnen die darin eingeschlossene Oberfläche mit dem Symbol S. Also wird das Integral

$$I = \int_S f(x,y)\,dx\,dy \tag{9}$$

wo diesmal das Integralsymbol für das Oberflächenintegral steht. Auch hier können wir das Integral in zwei Schritten berechnen, aber diesmal ist das schon erheblich schwieriger. Nehmen wir erstmal an, dass die Kurve C convex ist. So gibt es einen $x_{\min}$ und einen $x_{\max}$: die zwei Extremen x-Koordinaten der Kurve C. Für jede x zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ gibt es nun eine $y_{(-)}(x)$ und $y_{(+)}(x)$ die den unteren resp. oberen Teil der Kurve C beschreibt. Siehe Vorlesung für genauere Beschreibung. Man kann nun $J(x)$ folgendermaßen schreiben:

$$J(x) = \int_{y_{(-)}(x)}^{y_{(+)}(x)} f(x,y)dy \tag{10}$$

und schließlich

$$I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} J(x)dx \tag{11}$$

Dies geht aber nur auf diese Weise, wenn die Kurve C convex ist.

2 Umsteigen auf andere Integrationsvariablen (2-D)

Lass uns wieder zurück zu unendlichen Integralen gehen (also ohne begrenzten Integrationsbereich S). Manchmal ist es vorteilhaft, auf andere Koordinaten, z.B. Polarkoordinaten, umzusteigen.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{r^2} \end{aligned} \tag{12}$$

wo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ist der Abstand zur Mitte des Koordinatensystems. Jetzt folgt der Trick: Anstatt $dx\,dy$ schreiben wir nun:

$$r\,dr\,d\phi \tag{13}$$

wo

$$x = r\cos\phi \qquad \text{and} \qquad y = r\sin\phi \tag{14}$$

sind. Wir integrieren nun über r und ϕ. Der Grund, warum es $r\,dr\,d\phi$ ist, und nicht $dr\,d\phi$, ist weil wir ein Oberflächenelement haben wollen. Dazu brauchen wir $r\,d\phi$ anstatt nur $d\phi$, weil nur $r\,d\phi$ eine Länge darstellt. Siehe Vorlesung für eine genauere Erklärung. Man erhält also

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{r^2} \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{r^2} r\,dr = \int_0^{\infty} e^{r^2} dr^2 = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

Was wir hier getan haben, ist, die ganze Sache in Polarkoordinaten (r,ϕ) umzuschreiben. Ein Oberflächenelement zwischen r und $r+dr$ und zwischen ϕ und $\phi+d\phi$ hat eine Oberfläche von $r\,dr\,d\phi$.

3 Verteilungsfunktion in 2-D

Stellen Sie sich vor, es gibt eine Stadt mit Bevölkerungsdichte gegeben von $\rho(x,y)$ (wo x und y die Koordinaten sind, ausgedruckt in Kilometer). Die Funktion $\rho(x,y)$ gibt die Anzahl von Bewohnern pro Quadratkilometer an. Der Punk $(0,0)$ ist das Zentrum der Stadt. Alle Gebiete innerhalb von 10 km vom Zentrum gehören zur Stadt. Der Stadtrand C ist also ein Kreis mit 20 km Diameter, und definiert die Stadt-Fäche S. Die totale Anzahl Stadtbewohner ist

$$N = \int_S \rho(x,y)\, dx\, dy \tag{16}$$

Wenn wir dies in Polarkoordinaten umwandeln, so erhalten wir

$$N = \int_0^{10} r\, dr \int_0^{2\pi} d\phi\, \rho(r,\phi) \tag{17}$$

wo $\rho(r,\phi)$ immer noch "Anzahl der Bewohner pro Quadratkilometer" ist, nur diesmal als Funktion von r und ϕ, anstatt von x und y.

Stellen Sie sich jetzt vor, dass die Stadt perfekt rotations-symmetrisch ist, also $\rho(r,\phi_1) = \rho(r,\phi_2)$ für beliebige ϕ_1 und ϕ_2. In diesem Fall, kann man das Integral über ϕ direkt durchführen:

$$N = 2\pi \int_0^{10} \rho(r)\, r\, dr \tag{18}$$

Wie viele Bewohner gibt es nun zwischen r und $r + dr$? Die Antwort lautet $2\pi r\, \rho(r)\, dr$. Deshalb ist es sinnvoll eine neue Art Verteilungsfunktion zu definieren die nicht "Anzahl der Bewohner pro Quadratkilometer" ist, sondern "Anzahl der Bewohner pro Kilometer Abstand vom Zentrum". Nennen wir dies $\tilde{\rho}(r)$. Es wird folgendermaßen definiert:

$$\tilde{\rho}(r)\, dr = 2\pi r\, \rho(r)\, dr \qquad \text{also} \qquad \tilde{\rho}(r) = 2\pi r\, \rho(r) \tag{19}$$

Die totale Anzahl Bewohner ist nun

$$N = \int_0^{10} \tilde{\rho}(r)\, dr \tag{20}$$

Sowohl ρ als $\tilde{\rho}$ sind Verteilungsfunktionen, nur ist die eine "pro Quadratkilometer" und die andere "pro km Abstand vom Stadtzentrum".

4 Volumenintegrale (3-D)

Es ist jetzt nur noch ein kleiner Schritt bis Volumenintegrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(x,y,z) \tag{21}$$

Das Schrittweise Verfahren ist ähnlich, nur sind es jetzt drei Schritte. Und auch hier können wir einen begrenzten Bereich definieren, diesmal durch eine geschlossene Oberfläche S die ein Volumen V einschließt. So erhält man

$$I = \int_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{22}$$

Und auch hier kann man auf anderen Koordinaten umsteigen, zum Beispiel:

- Zilinderkoordinaten (r, ϕ, z), mit $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ und $z = z$, und mit Integrationsoperator $\int [.] \, r \, dr \, d\phi \, dz$.
- Sphärische Koordinaten (r, θ, ϕ), mit $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ und $z = r\cos\theta$, und mit Integrationsoperator $\int [.] \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$.

5 Anwendung auf PEP2

In den Übungen werden wir sehen, wie man mit Hilfe dieser Techniken und einfachen Annahmen die Boltzmannverteilung für die Geschwindigkeit von Gasteilchen herleiten kann.