Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2012)

Cornelis Dullemond

Kapitel 1: Gekoppelte Schwingungen & Wellen

Warnung: Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als "Lehrbuch". In der Vorlesung wird viel an Zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

1 Wiederholung Schwingungen: Der transversale Fall

Wir haben schon die Bewegung eines schwingenden Körpers betrachtet. Wir werden dies noch mal kurz wiederholen, jedoch nun ein klein bisschen anders. Gegeben sei ein Körper mit Masse m. Er befindet sich in Ruhe an Stelle $x = \Delta x$, $y = 0$. Er ist via eine Feder mit einer Wand verbunden (an der Stelle $x = 0$, $y = 0$). Diesmal betrachten wir jedoch die Schwingung in y-richtung (anstatt in x-richtung). Die Schwingung ist also transversal (anstatt longitudinal). Die Physik bleibt allerdings die gleiche. Die transversale Federkraft f hängt von der Position des Körpers ab:

$$f = -hy \tag{1}$$

wo diesmal h die transversale Kraftkonstante ist. Der Körper liegt auf eine Eisfläche, es gibt also keine Reibung. Die Beschleunigung des Körpers ist also:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{h}{m}y \tag{2}$$

Dies ist die Differenzialgleichung des Systems für die Funktion $y(t)$. Die Differenzialgleichung ist homogen, also ist die allgemeine Lösung:

$$y(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \tag{3}$$

mit $\omega = \sqrt{h/m}$ oder äquivalent:

$$y(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{4}$$

wo A und B (oder äquivalent C und D) beliebig gewählt werden können (und komplex sein können). Die Werte von A und B werden festgelegt wenn man die *Anfangsbedingungen* festlegt (also wenn man die Anfangsbedingungen festlegt, so sind A und B nicht mehr beliebig wählbar).

2 Zwei gekoppelte Schwingkörper

Lass uns nun einen zweiten Körper hinzufügen (Körper 2). Die Masse ist die gleiche: m. Die Position ist diesmal $x = 2\Delta x$, $y = 0$, und eine Feder verbindet diesen Körper mit der vorigen (Sie Fig. 1). Die Federkraft f_{12} der Körper 1 auf Körper 2 ausübt ist:

$$f_{12} = -k(y_2 - y_1) \tag{5}$$

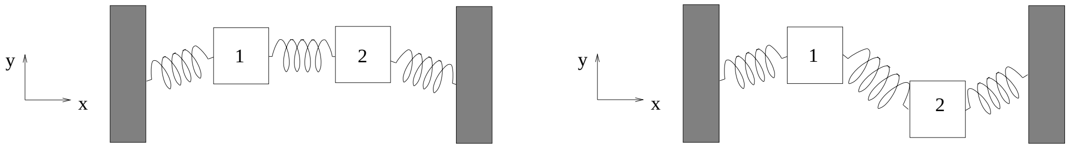

Figure 1: Zwei gekoppelte schwingender Körper. Links: langsame Schwingmodus. Rechts: schnelle Schwingmodus.

wo y_2 die y-Position von Körper 2 ist und y_1 die von Körper 1. Und noch eine Feder verbindet Körper 2 mit einer zweiten Wand (die sich an der Stelle $x = 3\Delta x$ befindet). Auch dieser Feder hat dieselbe Federkonstante. Die Bewegungsgleichung für Körper 2 ist nun:

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{h}{m}y_1 - \frac{h}{m}(y_2 - y_1) = -\frac{h}{m}(2y_2 - y_1) \tag{6}$$

Man sieht dass man diese Gleichung nicht lösen kann, wenn man nichts über Körper 1 weisst. Die Bewegungsgleichung für Körper 1 ist nun:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{h}{m}y_1 - \frac{h}{m}(y_1 - y_2) = -\frac{h}{m}(2y_1 - y_2) \tag{7}$$

In diesem Fall müssen wir etwas über Körper 2 wissen, um die Gleichung zu lösen. Wir sind also gezwungen, die beide Körper zusammen als ein System zu betrachten.

In diesem speziellen Fall haben wir das Glück, dass die drei Federn die gleiche Federkonstante h haben, und die beide Körper die gleiche Masse. Es stellt sich nämlich für solch ein Fall heraus, dass die Schwingfrequenz für die beiden Körper die gleiche ist (dies muss nicht immer so sein). Damit können wir als Ansatz

$$y_1(t) = Ae^{i\omega t} \qquad \text{und} \qquad y_2(t) = Be^{i\omega t} \tag{8}$$

nehmen. Wir lassen, als Vereinfachung, die $e^{-i\omega t}$ Termen weg, da die genau ähnlich gehen. Vergiss nicht, dass A und B komplexe Zahlen sein können. Wir setzen die Ansätze nun ein:

$$-\omega^2 B = -\frac{h}{m}(2B - A) \tag{9}$$

$$-\omega^2 A = -\frac{h}{m}(2A - B) \tag{10}$$

Teilen wir die beide Gleichungen, so fallen ω^2 und h/m raus. Wir erhalten:

$$\frac{B}{A} = \frac{2B - A}{2A - B} \tag{11}$$

oder äquivalent

$$A^2 = B^2 \tag{12}$$

Dies bedeutet, dass wir zwei mögliche Lösungen haben mit unserem Ansatz:

$$A = B \qquad \text{und} \qquad A = -B \tag{13}$$

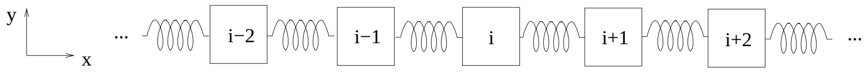

Figure 2: Unendliche Kette schwingender Körper.

Nennen wir die Lösung "l" und "s". Lösungen l and s haben unterschiedliche Frequenzen ω:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{h}{m}} \qquad \text{und} \qquad \omega_s = \sqrt{3\frac{h}{m}} \tag{14}$$

In der Lösung "l" (für "langsam") bewegen sich beide Körper in die gleiche Richtung. In der Lösung "s" (für "schnell") bewegen sich beide Körper immer in entgegengesetzte Richtung. Siehe Fig. 1.

Wir sehen nun, dass unser Ansatz unvollständig war, da wir offensichtlich nicht eine Schwingungfrequenz haben, sondern zwei. Die vollständige Lösung muss offenbar

$$y_1(t) = Ae^{i\omega_l t} + Ce^{i\omega_s t} \qquad \text{und} \qquad y_2(t) = Ae^{i\omega_l t} - Ce^{i\omega_s t} \tag{15}$$

sein. *Wichtig ist, dass man die allgemeine Lösung zusammenbauen kann als Summe von Lösungen mit unterschiedlichen Frequenzen.*

3 Unendliche Kette schwingender Körper

Jetzt lassen wir die Wände weg, und verknüpfen unendlich viele Körper mit einander. Alle haben die gleiche Masse und alle Federn dieselbe Federkonstante. Die Bewegungsgleichung für Masse i ist dann:

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = -\frac{h}{m}(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}) \tag{16}$$

Jetzt gibt es viele Lösungen mit unterschiedlichen Frequenzen. Die Lösung mit der höchsten Frequenz ist die, wo direkt benachbarte Körper sich in gegenseitige Richtung bewegen. Dies ist eine Welle mit Wellenlänge $\lambda = 2\Delta x$. Lösungen mit niedrigeren Frequenzen sind Wellen mit längeren Wellenlängen.

Auch hier gilt: Die vollständige Lösung ist eine beliebige Summe von Wellenlösungen mit unterschiedlichen Frequenzen (Wellenlängen). Mit anderen Worten: Eine Welle ist eine Lösung, aber nicht jede beliebige Lösung ist *eine* Welle. Aber: *Jede beliebige Lösung lässt sich als Summe von Wellenlösungen verschiedener Wellenlängen schreiben.*

4 Kontinuierliche Wellengleichung

Wenn wir nun anstatt eine Kette einen Gummiband mit Masse-pro-Länge μ und Federkonstante-pro-Länge σ betrachten, so erhalten wir die kontinuierliche Version der Gleichung 16:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{17}$$

Als Lösungsansatz nehmen wir eine Welle der Form:

$$y(x,t) = Ae^{i\omega t - ikx} \tag{18}$$

wo $k = 2\pi/\lambda$ die *Wellenzahl* ist. Durch Einsetzen in die Gleichung finden wir die sogenannten *Dispersionsgleichung*:

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\mu} k^2 \tag{19}$$