

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2013)

Cornelis Dullemond

Kapitel 3: Fourier Transformationen

1. Fourier Transformationen einfacher Funktionen

Berechnen Sie die Fouriertransformationen der folgenden Funktionen:

(a) $y(x) = e^{iax}$

(b) $y(x) = \delta(x - a)$

2. Block-Funktion und Sync-Funktion

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases} \quad (1)$$

(b) Berechnen Sie die Limes dieser Fouriertransformation für $k \rightarrow 0$. Hinweis: da soll a/π rauskommen.

(c) Ist die Funktion symmetrisch um $k = 0$ oder antisymmetrisch?

(d) Zeichnen Sie diese Fouriertransformation für $a = 1$ im Bereich $-4\pi < k < 4\pi$. Diese Funktion heißt die *Sync-Funktion* und spielt in z.B. Interferometrie eine Rolle.

3. Gauss-Funktion

Betrachten wir die Gauss-Funktion:

$$y(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \quad (2)$$

Die Berechnung der Fouriertransformation erfordert einige Tricks. Wir brauchen folgende Identität:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi} \quad (3)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation dieser Funktion folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$A(k) = \frac{a}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tilde{x}^2 + i\sqrt{2}ka\tilde{x})} d\tilde{x} \quad (4)$$

mit $\tilde{x} = x/(a\sqrt{2})$.

- (b) Man kann ein Ausdruck $\tilde{x}^2 + 2b\tilde{x}$ in die Form $(\tilde{x} + b)^2 - b^2$ bringen. Benutzen Sie diesen Trick, um das Integral in folgender Form zu bringen:

$$A(k) = \frac{a}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\tilde{x} + \frac{i}{\sqrt{2}}ka\right)^2 - \frac{a^2k^2}{2}\right) d\tilde{x} \quad (5)$$

- (c) Jetzt machen Sie weiter, und berechnen Sie die Fouriertransform der Gauß-Funktion. Sie werden sehen, dass dies auch eine Gauß-Funktion sein wird!
- (d) Zeigen Sie, dass wenn die Gauß-Funktion $y(x)$ breiter gemacht wird (indem man a größer macht), dass dann seine Fouriertransformation schmaler wird.