Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2013)

Cornelis Dullemond

Kapitel Extra: Tensoren

Warnung: Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als “Lehrbuch”. In der Vorlesung wird viel an Zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

1 Skalar, Vektor, und so weiter...

In den vorigen Vorlesungen haben wir Skalare und Vektoren kennengelernt. Zum Beispiel: Die Temperatur T ist ein Skalar, und $T(x, y, z)$ ist ein Skalarfeld. Eine Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ist ein Vektor, und die Windgeschwindigkeit $\mathbf{v}(x, y, z)$ ist ein Vektorfeld.

Ein Skalar ist einfach eine Zahl. Ein Vektor kann man als “Pfeil” sehen. Mit Hilfe eines Koordinatensystems (x, y, z) kann man ein Vektor *repräsentieren* mit drei Zahlen:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

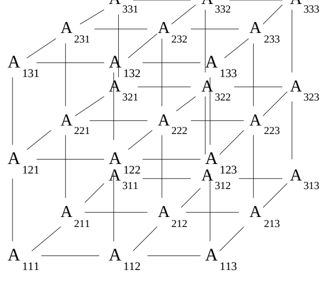
Oder, wenn wir die Koordinaten anstatt (x, y, z) lieber (x_1, x_2, x_3) nennen, so kann man den Vektor folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Diese Repräsentation eines Vektors lässt vermuten, dass man eine neue Art von Objekten definieren kann, zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

oder gar



(4)

und vielleicht noch *höhere Rang* Objekte.

Dies alles sind *Tensoren.* Ein Skalar ist ein Tensor mit Rang 0. Ein Vektor ist ein Tensor mit Rang 1. Gleichung 3 ist ein Tensor mit Rang 2, und Gleichung 4 ist ein Tensor mit Rang 3.

Man kann argumentieren dass Gleichung 3 einfach nur ein Matrix ist. Das stimmt[1], obwohl nicht alle Matrizen Tensoren sind. Ein Matrix kann ja auch 6×6 sein. Ein Tensor, jedoch, kann nur 3×3 sein (weil unser Raum 3-dimensional ist), oder 4×4 wenn wir die Zeit als extra Dimension sehen.

Nur haben wir jetzt ein Problem: Ein Vektor ist ein Objekt (ein "Pfeil") und Gleichung (2) ist seine numerische *Repräsentation.* Wir haben nun Tensoren nur in deren numerischer *Repräsentation* definiert, nicht jedoch die Objekte selbst. Es ist auch nicht ganz einfach sich ein Tensor vor zu stellen, so wie man sich ein Vektor als Pfeil vorstellen kann. Deshalb muss ich leider darum bitten, der Versuchung, Tensoren sich als richtige "Dinge" vor zu stellen, zu widerstehen, und einfach mit den numerischen Repräsentationen zu rechnen.

2 Index-Schreibweise

Es ist am einfachsten mit Tensoren zu rechnen, indem man einfach mit deren Komponenten rechnet. Ein Vektor hat drei Komponenten: v_1, v_2 und v_3. Wenn man eine beliebige dieser drei Komponenten meint, so schreibt man v_i, wo i der Index des Vektors ist, i.e. $i = 1$, oder $i = 2$ oder $i = 3$. Wenn $i = 3$, so ist mit v_i zum Beispiel die Komponente v_3 gemeint. Meist lässt man den Index einfach so stehen. Man sagt dann zum Beispiel salopp "es gibt ein Vektor v_i", wo v_i eigentlich nur einer der drei Komponenten ist. Trotzdem wird unter v_i meistens der Vektor selbst gemeint. Dies kann am Anfang etwas verwirrend sein, aber man gewöhnt sich schnell daran. Ähnlich kann man über den Tensor t_{ij} (Gleichung 3) oder den Tensor A_{ijk} (Gleichung 4) sprechen.

Die Reihenfolge der Indizes ist wichtig. Im allgemeinen gilt, dass

$$t_{ij} \neq t_{ji} \qquad \text{(allgemein)} \tag{5}$$

genau so wie bei normalen Matrizen, obwohl es auch *symmetrische Tensoren zweiten Ranges* gibt wofür gilt, dass

$$t_{ij} = t_{ji} \qquad \text{(symmetrischer Tensor)} \tag{6}$$

Es gibt auch *antisymmetrische Tensoren* wofür gilt, dass

$$t_{ij} = -t_{ji} \qquad \text{(antisymmetrischer Tensor)} \tag{7}$$

Für solche antisymmetrischen Tensoren muss gelten, dass $t_{ii} = 0$, i.e. der Diagonal muss null sein.

Man kann aus zwei Vektoren v_i und w_j ein Tensor zweiten Ranges produzieren:

$$t_{ij} = v_i w_j \tag{8}$$

Beispiel: $v_i = (1, 2, 3)_i$, $w_j = (4, 5, 6)_j$, und damit wird t_{ij}:

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & v_1w_3 \\ v_2w_1 & v_2w_2 & v_2w_3 \\ v_3w_1 & v_3w_2 & v_3w_3 \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}_{ij} \tag{9}$$

[1] Nur in spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie, oder im allgemeinen in Riemannsche Geometrie muss man ein genaueren Unterschied machen.

Gleichung 8 ist ein *Tensorprodukt* der zwei Vektoren.

Achtung: Es ist die Konvention, dass der erste Index in ein Tensor zweiten Ranges immer für die vertikale Position, und der zweite Index für die horizontale Position in der Matrix zuständig ist. Dies sieht man genau in Gleichung 8.

Achtung: Die Wahl der Index-Name ist egal. Also den Tensor t_{ij} kann man auch als t_{kl} schreiben.

Man kann Tensorprodukte beliebig weiterführen, zum Beispiel:

$$A_{ijk} = t_{ij} w_k \qquad \text{oder} \qquad B_{ijkl} = v_i w_j v_k w_l \tag{10}$$

Da die Produkte immer als die Produkte der Komponenten gesehen werden können, kann man letzteres auch folgendermaßen schreiben:

$$B_{ijkl} = v_i w_j v_k w_l = v_i v_k w_j w_l = w_j w_l v_i v_k = \text{etc} \tag{11}$$

Hauptsache, die Indizes bleiben an den korrekten Vektoren hängen.

Man kann Tensoren gleichen Ranges auch addieren und subtrahieren, z.B.:

$$g_{ij} = t_{ij} - w_i v_j \tag{12}$$

3 Einsteinsche Summenkonvention

Das innere Produkt zweier Vektoren kann man mit Index-Schreibweise folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i \tag{13}$$

Das Produkt einer Matrix M_{ij} mit einem Vektor v_j kann man ähnlich schreiben:

$$(M\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij} v_j \tag{14}$$

und wenn man zwei Matrizen mit einander multipliziert, kann man das so schreiben:

$$(MN)_{ik} = \sum_{j=1}^{3} M_{ij} N_{jk} \tag{15}$$

und so weiter:

$$(MN\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} M_{ij} N_{jk} v_k \tag{16}$$

Es ist Einstein aufgefallen, dass immer wenn ein Index doppelt auftaucht, auch darüber summiert wird. Das muss nicht zwangsläufig so sein, aber es stellt sich heraus, dass für nahezu alle sinnvollen Anwendungen dies tatsächlich so ist.

Also hat Einstein die *Summenkonvention* eingeführt die besagt, dass, wenn nicht anders angegeben, automatisch summiert wird über jeden Index, der doppelt autaucht.

Gleichung (16) wird damit:

$$(MN\mathbf{v})_i = M_{ij} N_{jk} v_k \tag{17}$$

usw. Dies erspart uns das Aufschreiben von vielen Summen-Zeichen.

4 Kronecker Tensor, Levi-Civita Tensor

Der Einheitsmatrix, in Tensor-Schreibweise, wird meist als δ_{ij} geschrieben, wo

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases} \tag{18}$$

Der Levi-Civita Tensor ϵ_{ijk} ist ein Tensor dritten Ranges, und ist vollständig antisymmetrisch:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} \tag{19}$$

Damit folgt auch:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} \tag{20}$$

Außerdem gilt, per Definition, dass $\epsilon_{123} = 1$. Wann immer einer der drei Indizes gleich einer der anderen ist, so ist ϵ_{ijk} (e.g. $\epsilon_{112} = 0$). Und damit sind alle Komponenten des Tensors festgelegt!

Mit dem Levi-Civita Tensor kann man Kreuzprodukte aufschreiben:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w})_i = \epsilon_{ijk} v_j w_k \tag{21}$$

Es gilt folgende Regel:

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm} \tag{22}$$

5 Und jetzt geht's los...

Erinnern Sie sich an folgende Vektor Rechenregel:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \tag{23}$$

Mit Tensor-rechnung kann man dies einfach herleiten:

$$A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = B_j \epsilon_{ijk} C_k A_i = B_j \epsilon_{jki} C_k A_i \tag{24}$$

Und was ist mit:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \tag{25}$$

In Tensor-Form:

$$\epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} A_j B_l C_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m = A_m C_m B_i - A_l B_l C_i \tag{26}$$

Man kann dies auch auf Differenzialoperatoren anwenden:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{27}$$

In Tensorform:

$$\epsilon_{ijk} \nabla_j (\epsilon_{klm} \nabla_l A_m) = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} \nabla_j \nabla_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \nabla_j \nabla_l A_m = \nabla_i \nabla_m A_m - \nabla_l \nabla_l A_i \tag{28}$$

Und dies sind nur einige Beispiele.