Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2014)

Cornelis Dullemond

Kapitel 4: Fourier Transformationen

1. **Fourier Transformationen einfacher Funktionen**
   Berechnen Sie die Fouriertransformationen der folgenden Funktionen:

   (a) $y(x) = e^{iax}$

   (b) $y(x) = \delta(x - a)$

2. **Block-Funktion und Sync-Funktion**

   (a) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

   $$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| < a \\ 0 & \text{für} \quad |x| > a \end{cases} \tag{1}$$

   (b) Berechnen Sie die Limes dieser Fouriertransformation für $k \to 0$. Hinweis: da soll a/π rauskommen.

   (c) Ist die Funktion symmetrisch um $k = 0$ oder antisymmetrisch?

   (d) Zeichnen Sie diese Fouriertransformation für $a = 1$ im Bereich $-4\pi < k < 4\pi$. Diese Funktion heißt die *Sync-Funktion* und spielt in z.B. Interferometrie eine Rolle.

3. **Gauss-Funktion**
   Betrachten wir die Gauss-Funktion:

   $$y(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \tag{2}$$

   Die Berechnung der Fouriertransformation erfordert einige Tricks. Wir brauchen folgende Identität:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi} \tag{3}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation dieser Funktion folgendermaßen geschrieben werden kann:

   $$A(k) = \frac{a}{\sqrt{2}\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tilde{x}^2 + i\sqrt{2}ka\tilde{x})} d\tilde{x} \tag{4}$$

   mit $\tilde{x} = x/(a\sqrt{2})$.

(b) Man kann ein Ausdruck $\tilde{x}^2 + 2b\tilde{x}$ in die Form $(\tilde{x} + b)^2 - b^2$ bringen. Benutzen Sie diesen Trick, um das Integral in folgender Form zu bringen:

$$A(k) = \frac{a}{\sqrt{2}\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(- \left(\tilde{x} + \frac{i}{\sqrt{2}} k a \right)^2 - \frac{a^2 k^2}{2} \right) d\tilde{x} \tag{5}$$

(c) Jetzt machen Sie weiter, und berechnen Sie die Fouriertransform der Gauß-Funktion. Sie werden sehen, dass dies auch eine Gauß-Funktion sein wird!

(d) Zeigen Sie, dass wenn die Gauß-Funktion $y(x)$ breiter gemacht wird (indem man a größer macht), dass dann seine Fouriertransformation schmäler wird.