Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Kandidat Richard Auer
aus Ludwigshafen am Rhein

1996

Ein Zwei-Zonen Modell der Randschicht einer Akkretionsscheibe

Die Diplomarbeit wurde von R. Auer ausgeführt am
Institut für Theoretische Astrophysik
unter der Betreuung von
Herrn Priv.-Doz. W.J. Duschl

I will put Chaos into fourteen lines
And keep him there; and let him thence escape
If he be lucky; let him twist, and ape
Flood, fire, and demon — his adroit designs
Will strain to nothing in the strict confines
Of this sweet Order, where, in pious rape,
I hold his essence and amorphous shape,
Till he with Order mingles and combines.
Past are the hours, the years, of our duress,
His arrogance, our awful servitude:
I have him. He is nothing more than less
Than something simple not yet understood;
I shall not even force him to confess;
Or answer. I will only make him good.

— Edna St. Vincent Millay

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In der Astrophysik wird eine Akkretionsscheibe benutzt, um viele verschiedene Phänomene zu erklären. Die Existenz eines Planetensystems wird genauso wie das Algol-Paradoxon[1] durch Massenakkretionen erklärt. In aktiven galaktischen Kernen (Active Galactic Nuclei — AGN) und Röntgen-Doppelsternen werden ebenfalls Akkretionsscheiben vermutet.

Kataklysmische Veränderliche (Cataclysmic Variables — CVs) sind Doppelsterne, wobei einer von den Sternen ein Weißer Zwerg ist. Im Gegensatz zu normalen Weißen Zwergen werden aber sehr kräftige Strahlungen im Röntgen-Bereich beobachtet. Diese Strahlung ist am einfachsten durch gewaltige Stoßprozesse zu erklären. Man nimmt an, daß die Zwerge die Primärsterne eines Doppelsternsystems sind. Dabei ist dann der Sekundärstern ein Stern, der so groß ist, daß er sein Roche-Lobe überfüllt und Materie an dem Primärstern verliert (siehe Abbildung 1.1). Die Materie kreist um den Primärstern und bildet eine Scheibe. Durch nur zum Teil erklärbare Reibungsprozesse akkretiert die Materie auf dem Primärstern. Dabei muß die Materie ihren Drehimpuls verlieren, denn sonst schafft sie es nie zur Sternoberfläche, sondern kreist ewig um den Zwerg herum.

Nach dem Standardansatz von Shakura & Sunyaev [18] müßte ein großer Teil der Scheibe relativ kühl sein ($\sim 10^4$K) und eine theoretisch unendlich dünne

[1] Das *Algol-Paradoxon* bezieht sich auf die Beobachtung eines Doppelsterns, bei dem der massenärmere Stern sich scheinbar schneller entwickelt hat. Die Erklärung ist die, daß der massenärmere Stern zuerst massenreicher war, sich dann schneller entwickelt hat, und dabei Masse an dem massenärmeren Stern abgegeben hat.

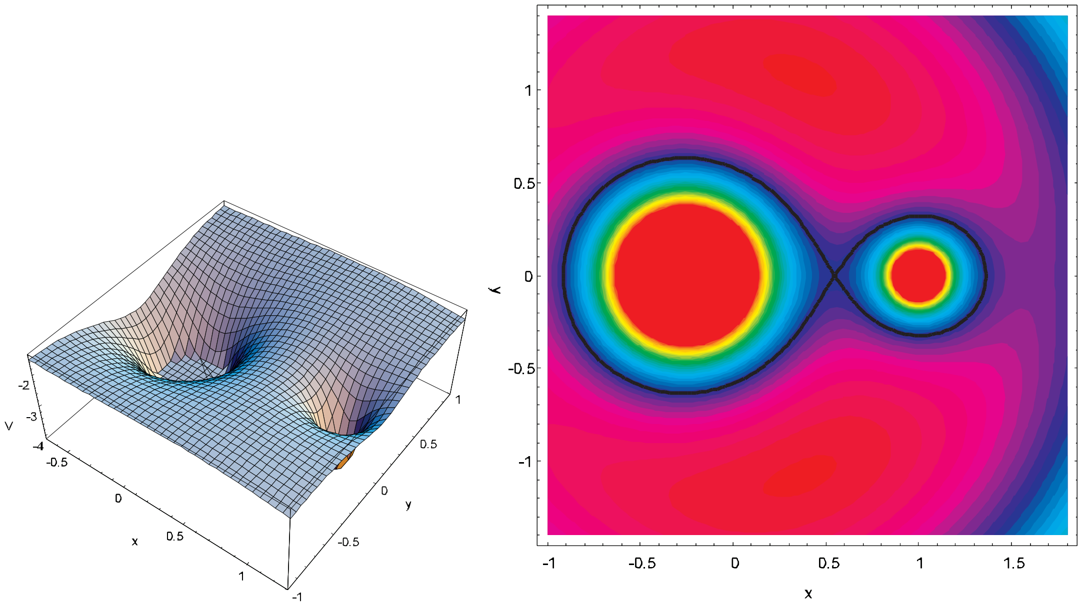

Abbildung 1.1: **Das Potential im mit-rotierenden Bezugssystem eines Doppelsterns: das Roche-Potential. Die zwei Sterne bewegen sich um den Punkt $x = 0$, $y = 0$. Der massenreichere Stern ist in dieser Abbildung links, und der massenärmere rechts. In diesem Sternsystem ist $M_1/M_2 = 0.25$. Die Kurve im rechten Bild entspricht mit ihren zwei Kreisen den “Roche” Loben. Mit genügend Energie kann Materie aus einer Lobe entweichen und womöglich in die andere Lobe hineinfallen. Füllt ein Stern seine Lobe, wird am Berührungspunkt Materie von der überfüllten Lobe zur anderen abgegeben.**

Randschicht müßte die Hälfte der Energie abstrahlen[2]. Praktisch ist die Randschicht dann doch nicht unendlich dünn, sondern hat eine Skalenhöhe. Die Wellenlänge, bei der der Strahlungsfluß in der Annahme eines Schwarzkörperstrahlers maximal wird, liegt im Röntgen-Bereich.

Leider sind die Temperaturen, die man für eine Keplerscheibe berechnet, nicht groß genug, um thermisch harte Röntgen-Strahlen zu erzeugen. Den Beobachtungen nach sind CVs oft Quellen harter Röntgen-Strahlen. In dieser Arbeit wird dieses Problem nicht abgehandelt. In dem Artikel von Patterson & Raymond ([12], [13]) wurde ein Versuch gemacht, das Problem mit dem Standardmodell in Einklang zu bringen. Patterson & Raymond weisen u.a. darauf hin, daß, wenn Akkretionsscheiben optisch dünn werden, sie im harten Röntgen-Bereich strahlen. In *dieser* Arbeit wird eine optisch dicke Scheibe angenommen, und deswegen werden nur thermische, weiche Röntgen-Strahlen erzeugt. Nach dem momentanen Stand ist es aber wahrscheinlicher, daß die harte Röntgen Strahlung von einer Corona erzeugt wird. Dies würde dann wieder im Einklang mit dieser Arbeit stehen.

Beobachtungen von dem UV und dem optischen Spektrum von V603 Aql in [8] zeigen, daß bei diesem älteren System die Beobachtungen sehr gut mit einer Akkretionsscheibe übereinstimmen. Bath, Pringle, & Whelan [1] berichten von Beobachtungen, die mit dem *IUE* von BV Cen, EX Hya, und VW Hyi gemacht wurden. Auch in diesen Fällen stimmt das Standardmodell mit den Beobachtungen überein.

Es stimmen also Beobachtung und Theorie einigermaßen überein. Jedoch ist die radiale "Skalendicke", die nach dem Standardmodell eingeführt werden muß, noch eine *ad hoc* Annahme, die es nicht zuläßt, daß die Randschicht sich anders verhält. In der Arbeit von Duschl & Tscharnuter [6] wird die Randschicht als eine separate Zone behandelt.

Das 1-Zonen Modell der Randschicht teilt die Akkretionsscheibe in zwei Bereiche auf. Der größte Teil der Scheibe ist immer noch der Keplerscheibe gewidmet. Die Randschicht selbst wird mit ζ parameterisiert. Dabei enthält ζ Information über die Ausdehnung der Randschicht und das Maximum der Winkelgeschwin-

[2] Das heißt dünn in der radialen Richtung: $\Delta r/R_* \ll 1$ wobei Δr die Dicke der Randschicht und R_* der Sternradius ist. Diese Bezeichnungen werden im restlichen Text nicht gültig sein. Sie wurden hier nur eingeführt, um die Erklärung zu erleichtern.

digkeit in der Randschicht. Es zeigt sich, daß der physikalisch interessanteste Zustand derjenige ist, bei dem das Maximum der Winkelgeschwindigkeit fast an der Sternoberfläche liegt. Dabei wird angenommen, daß dieses Maximum aber nicht höher als die Keplergeschwindigkeit am äußeren Rand der Randschicht ist (siehe Abbildung 1.2). Das liegt daran, daß die beiden anderen Möglichkeiten dem Standardmodell entsprechen oder zumindest sehr ähneln.

Mit dem 1-Zonen Modell errechnet sich also eine Effektivtemperatur als Funktion des Randschichtparameters ζ (Siehe Abbildung 1.3). Hier entdeckt man, daß weniger als die Hälfte der Gesamtstrahlung der Scheibe in die Randschicht abgestrahlt wird. Im Standardmodell hingegen wird immer die Hälfte aus der Randschicht abgestrahlt.

Im 1-Zonen Modell und auch im Standardmodell wird aber eines nicht berücksichtigt: es wird immer noch angenommen, daß die Energie lokal abgestrahlt wird, bzw. daß der Strahlungstransport innerhalb der Scheibe sehr klein ist. Wenn die Randschicht viel breiter wäre als sie dick ist, dann wäre das eine akzeptable Annahme. Das ist aber selten und im Standardmodell nie der Fall.

Als nächste Näherung wäre es also sehr sinnvoll, eine zweite Zone einzuführen, die von der Kinematik her noch zur Keplerscheibe gehört, aber von der ersten Zone aufgeheizt wird. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dieser Aufgabenstellung. Ein Vergleich mit dem 1-Zonen Modell wird nach der Modellbeschreibung am Ende in der Analyse durchgeführt.

Man könnte sich natürlich stattdessen auch ein ausführlicheres Modell vorstellen, bei dem man ein Gleichungssystem numerisch lösen würde. Das wurde schon von Popham & Narayan [14] durchgeführt. In dem Artikel wird zum großen Teil von den gleichen Annahmen wie im Standardmodell ausgegangen, außer daß die Winkelgeschwindigkeit von der Keplergeschwindigkeit abweichen kann und daß der Strahlungstransport in größerem Detail abgehandelt wird. Dabei wird die Standard-Keplerscheibe als äußere Randbedingung und der Stern als innere Randbedingung gegeben. In der Analyse dieser Arbeit wird ein Vergleich zwischen dem 2-Zonen Modell und der Randschicht von Popham & Narayan durchgeführt.

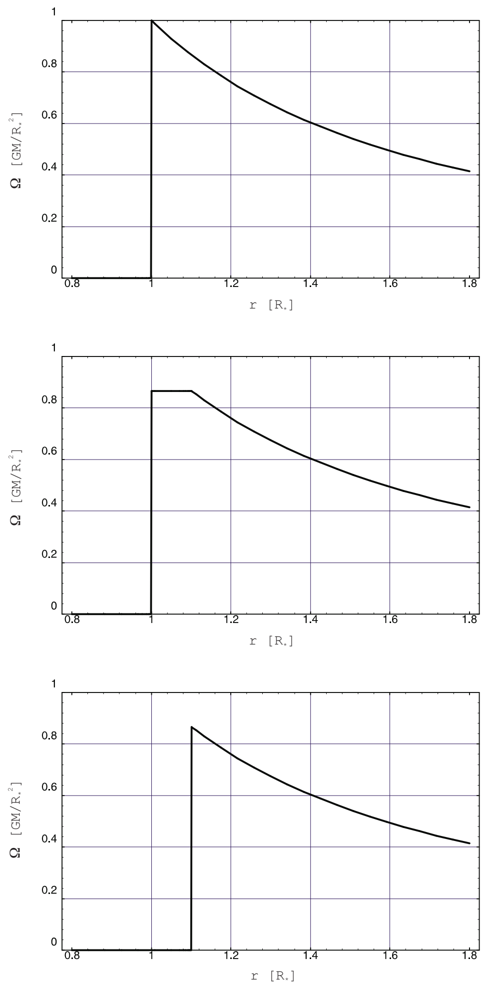

Abbildung 1.2: **Die drei extremen Zustände, die durch den Parameter ζ dargestellt werden können. In der obersten Abbildung steigt die Winkelgeschwindigkeit weiter bis zur Sternoberfläche. Das ist nicht vom Standardmodell zu unterscheiden. In der untersten Abbildung ist das Maximum der Winkelgeschwindigkeit schon am äußeren Rand der Randschicht erreicht. Auch dieser Fall ist nicht von dem Standardmodell zu unterscheiden.**

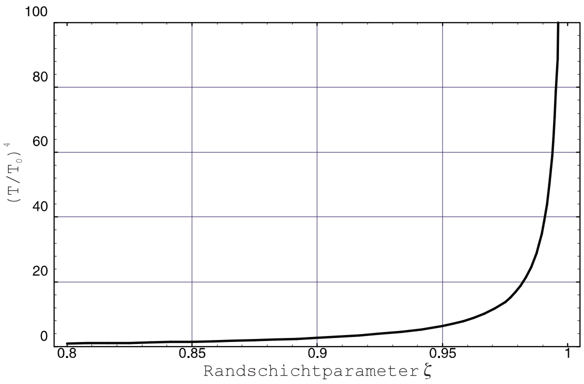

Abbildung 1.3: **Die Effektivtemperatur T der Randschicht als Funktion des Randschichtparameter ζ im 1-Zonen Modell. T wird in Einheiten von T_0 gegeben, wobei $T_0^4 = \frac{GM\dot{M}}{2\pi\sigma s_*^3}$.**

Kapitel 2

Das Modell

2.1 Grundriß

Das Gesamtmodell besteht hauptsächlich aus 3 Teilen, die in Abbildung 2.1 gezeigt werden:

1. Der <u>*Stern*</u>, mit dem Radius s_*, der Effektivtemperatur T_* und der Masse M_*. Es wird angenommen, daß der Stern sich nicht dreht. Das ist eine gute Annahme im Vergleich zu den hohen Geschwindigkeiten[1], die in der

[1] Die Winkelgeschwindigkeit in der Keplerscheibe, die durch die Gravitation vorgegeben wird, ist groß genug, daß die Materie in der Scheibe sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegt. Mit Schallgeschwindigkeit ist die auf die Bedingungen in der Keplerscheibe bezogene Geschwindigkeit gemeint.

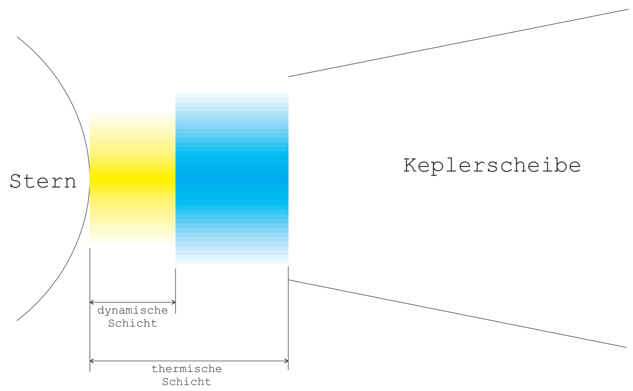

Abbildung 2.1: **Akkretionsscheibe mit dynamischer und thermischer Randschicht.**

Keplerscheibe herrschen. Beim Stern können wir von einer Kugelsymmetrie ausgehen.

2. Die *Keplerscheibe* ist die Scheibe der akkretierenden Masse um den Stern, die eine in der Regel sehr kleine Radialgeschwindigkeit besitzt. Im Gegensatz zum Stern wird die Materie aber nicht bei ihrem radialen Abstand durch einen Druck gehalten, sondern durch eine Zentrifugalkraft. Die Winkelgeschwindigkeit wird also durch

$$\Omega_{\mathrm{K}}^{2}(s) = \frac{GM_*}{s^3} \tag{2.1}$$

beschrieben, wobei s der radiale Abstand vom Sternzentrum ist. Bei der Keplerscheibe ist eindeutig eine zylindrische Symmetrie vorhanden.

3. Zwischen dem Stern und der gewöhnlichen Keplerscheibe ist die *thermische Randschicht*, die sich von s_* bis $s_{\mathrm{therm}} = s_*(1 + \delta_{\mathrm{therm}})$ erstreckt.

   Diese thermische Randschicht kann wiederum in zwei Bereiche aufgeteilt werden:

   - Die *dynamische* Randschicht, die von der Sternoberfläche s_* bis zu $s_{\mathrm{dyn}} = s_*(1 + \delta_{\mathrm{dyn}})$ reicht und durch die Leuchtkraft L_{dyn}, die Skalenhöhe (in der vertikalen Richtung) $H_{\mathrm{dyn}} = s_* h_{\mathrm{dyn}}$ und die Effektivtemperatur T_{dyn} charakterisiert wird.
   - Der Rest der thermischen Randschicht, d.h. der Bereich von s_{dyn} bis s_{therm}, ist im allgemeinen äquivalent zur Keplerscheibe, außer daß sie von der dynamischen Schicht aufgewärmt wird. Dieser Bereich wird durch die Leuchtkraft $L_{\mathrm{ring}}[s_{\mathrm{dyn}}, s_{\mathrm{therm}}]$, die Skalenhöhe $H_{\mathrm{therm}} = s_* h_{\mathrm{therm}}$ und die Effektivtemperatur T_{therm} charakterisiert.

2.2 Keplerscheibe

Der Stern selbst ist schon ein äußerst komplexes Gebilde. Das einzige, was uns am Stern interessiert, sind die Größen, die von außen beobachtet werden können und somit einen Einfluß auf die Akkretionsscheibe haben.

Die Scheibe wird durch einen Mechanismus gebildet. Da die Materie *hinein*akkretiert und nicht *heraus*akkretiert, ist anzunehmen, daß interessante Phänomene am äußeren Rand der Akkretionsscheibe geschehen. Bei CVs gibt es z.B. die sogenannte "hot spots"[2], von denen bei Warner und Nather [21] und Grauer *et al.* [9] Beispiele erwähnt werden. Diese Phänomene werden wir vorerst ignorieren und annehmen, daß sie keinen direkten Einfluß auf unser Modell haben. Patterson & Raymond schließen "hot spots" als Röntgen-Quellen ganz aus, denn als Quellen wären sie sehr leuchtschwach.

Zwischen dem äußeren Rand der Scheibe und dem Stern muß sich ein Gleichgewicht einpendeln, von dem wir hier ausgehen. Wenn kein Gleichgewicht vorhanden ist, gibt es Stoßprozesse bis es sich doch einstellt. Es kann natürlich auch so sein, daß die Stoßprozesse so schnell erzeugt werden, daß die Scheibe keine Zeit mehr hat, sich in einen Gleichgewichtszustand zu bringen. Wir gehen davon aus, daß die Zeitskalen dieser Prozesse viel kürzer als die thermische Zeitskala sind[3].

Im Gleichgewicht wird die Scheibe eine Keplerscheibe. Die Materie in der Scheibe hat einen Drehimpuls (eine Zentrifugalkraft), die viel größer ist als der Druck (thermisch oder durch Strahlung). Deshalb muß sich die Materie in einer gravitativ bestimmten Kreisbahn befinden. Ihre Ausdehnung in der z-Richtung ist viel kleiner als in der r-Richtung. Das Problem wird also in der Annahme einer "dünnen" Scheibe gelöst. Die akkretierende Materie M kommt von Distanzen $s \gg s_*$. Wenn sie an der Sternoberfläche ankommt, hat sie eine Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} =: \Omega \to 0$ und eine Radialgeschwindigkeit $\dot{s} =: v_r \to 0$. Sie muß also ihre Energie abgeben. Der Energieverlust ist die Differenz der Potentialenergien:

$$\Delta E = 0 - \left(-\frac{GM_*M}{s_*}\right) = \frac{GM_*M}{s_*}$$

[2]Die Bezeichnung "hot spot" wird in der Geologie genauso verwendet wie in der Astrophysik. Sie bezieht sich auf eine punktförmige Wärmequelle. In der Geologie ist Hawaii ein "hot spot" unter dem Pazifik. Bei einer Akkretionsscheibe werden mit "hot spot" leider oft zwei verschiedene Ereignisse gemeint. Oft meint der Autor einen Punkt, an dem durch Magnetfelder gelenkte Materieströme auf der Sternoberfläche auftreffen.
Hier wird aber der Punkt gemeint, an dem die akkretierende Materie von außen auf der Akkretionsscheibe trifft. Durch Stoßprozesse wird dann an einem Punkt sehr viel Energie freigesetzt.

[3]Die thermische Zeitskala ist die Zeit, in der Information von einem Ende der Scheibe zum anderen übertragen werden kann. Es ist also eine Skalenlänge geteilt durch die Schallgeschwindigkeit: ℓ/c_s.

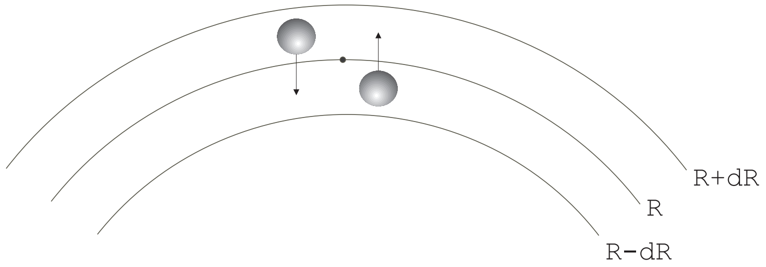

Abbildung 2.2: **Durch chaotische Bewegungen bewegt sich ein Gasklumpen nach innen, ein anderer nach außen. Die Masse der zwei Klumpen muß gleich sein (ansonsten gibt es eine Massenakkretion bzw. -abschiebung). Dadurch, daß die Klumpen aber unterschiedliche Drehimpulse haben, resultiert ein Drehmoment.**

Die Energie kommt letztendlich als eine radiative Strahlung aus der Scheibe. Aus der zeitlichen Ableitung von ΔE, und der Tatsache, daß M_*, $\dot{M}$, G und s_* Konstanten sind, muß also gelten:

$$L_{\text{accr}} = \frac{GM_*\dot{M}}{s_*} \tag{2.2}$$

Es ist also von Interesse, wie die Energie dissipiert wird. Der wichtigste Mechanismus ist die Scherung durch stochastisch advektierende Gasklumpen. In [7] wird dieses Phänomen so beschrieben: daß advektierende Gasklumpen ihre Drehimpulse, die sie wegen ihrer Kreisbahnen haben, mit sich nach außen und nach innen tragen (vergleiche mit Abbildung 2.2). Das *Drehmoment*, das vom inneren Ring auf den äußeren Ring wirkt, ist dann gegeben durch die Drehimpulsadvektion,

$$\mathcal{G}(s) = 2\pi s \Sigma \nu s^2 \Omega'(s). \tag{2.3}$$

Hier ist Σ die Säulendichte und ν ein Viskositätskoeffizient.

Die Leistung, die das Drehmoment verrichtet, ist

$$\begin{aligned}
\Omega \cdot [\mathcal{G}(s+ds) - \mathcal{G}(s)] &= \Omega \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s}\, ds \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{G}\Omega) - \mathcal{G}\Omega'\right] ds \\
&= \mathcal{G}\Omega'\, ds
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt kommt dadurch zustande, daß $[\partial(\mathcal{G}\Omega)/\partial s]\, ds$ nur von den Randbedingungen abhängt. An beiden Rändern ist Ω Null: am inneren Rand, weil die

Sternoberfläche per Definition $\Omega \to 0$ und am äußeren Rand, weil die Kepler'sche Winkelgeschwindigkeit mit $1/s^{3/2}$ abfällt.

Die Leistung wird lokal aus einem Ring mit einer Fläche von $2 \cdot 2\pi s\, ds$ (einmal nach oben und einmal nach unten) abgestrahlt. Der Strahlungsfluß ist also

$$D(s) = \frac{\mathcal{G}\Omega'\, ds}{4\pi s\, ds} = \frac{\nu\Sigma(s\Omega')^2}{2} \tag{2.4}$$

Als nächstens wird die Dynamik der Scheibe beschrieben. Es ist klar, daß in der Akkretion der Scheibe die Masse erhalten bleiben muß. Also gilt die Massenerhaltung:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

Wenn wir uns nur auf Akkretionsbewegungen konzentrieren, d.h. auf radiale Massenbewegungen, dann läßt sich die Massenerhaltung unter Berücksichtigung der Zylindersymmetrie umschreiben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,(\Sigma/H)}{\partial t} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\Sigma}{H}v_r\right) &= 0 \\ s\frac{\partial\Sigma}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(s\Sigma v_r\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Hier wurde $H = konst.$ angenommen, was auf eine dünne Scheibe mit Σ als Säulendichte[4] und H als Skalenhöhe der Scheibe gut zutrifft.

Der Drehimpuls eines Massenelementes muß bekannterweise auch erhalten bleiben. Also können wir ganz äquivalent zur Massenerhaltung

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_L$$

schreiben. Hier ist L der Drehimpuls eines Massenelementes. In dieser Gleichung ist der Drehimpulsfluß eine kompliziertere Größe als der Dichtefluß oben. Der Dichtefluß kann ganz einfach als $\vec{j}_\rho = \rho\vec{v}$ umgeschrieben werden. Beim Drehimpulsfluß müssen zwei Terme berücksichtigt werden:

$$\vec{j}_L = j_L\hat{r} = \left[Lv_r - \frac{\mathcal{G}(s)}{2\pi sH}\right]\hat{r}.$$

Das Minuszeichen vor dem Term mit $\mathcal{G}(s)$ kommt dadurch, daß durch das Drehmoment Drehimpuls nach außen transportiert wird. $\mathcal{G}(s)$ wird durch $2\pi sH$ geteilt,

[4] Die Säulendichte ist eine Dichte, die über eine Länge, i.A. entlang der Blickrichtung, aufintegriert wird. Bei einer Scheibe wird in z-Richtung aufintegriert.

denn $\mathcal{G}(s)$ ist das Drehmoment von einem *ganzen* Ring auf einen danebenliegenden. Wir brauchen aber die Dichte. Die Drehimpulsdichte eines Massenelementes ist $L = (\Sigma/H)s^2\Omega$. Durch die zylindrische Symmetrie folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Sigma}{H}s^2\Omega\right) &= -\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left[s\left(\frac{\Sigma}{H}s^2\Omega v_r - \frac{\mathcal{G}(s)}{2\pi s H}\right)\right] \\ s\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma s^2\Omega\right) &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\Sigma s^3\Omega v_r - \frac{\mathcal{G}(s)}{2\pi}\right) \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt vom stationären Zustand, d.h. das System ist im Äquilibrium[5], ausgehen, formen sich Gl.(2.5) und Gl.(2.6) um zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}\left(s\Sigma v_r\right) \qquad (2.7)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}\left(\Sigma s^3\Omega v_r - \frac{\mathcal{G}(s)}{2\pi}\right) \qquad (2.8)$$

und können sofort integriert werden. Gleichung (2.7) ergibt dann die Massenakkretionsrate (Gl.(2.10), S.15) und Gl.(2.8) integriert sich zu:

$$\frac{C}{2\pi} = \Sigma s^3\Omega v_r - \frac{\mathcal{G}(s)}{2\pi}.$$

Setzt man nun $\mathcal{G}(s)$ von Gl.(2.3) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{C}{2\pi s^3} &= \Sigma\Omega v_r - \frac{2\pi\Sigma\nu s^3\Omega'(s)}{2\pi s^3} \\ -\nu\Sigma\Omega' &= -\Sigma\Omega v_r + \frac{C}{2\pi s^3}. \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Diese Gleichung Gl.(2.9) gilt noch für eine ganz allgemeine Scheibe, denn die spezielle Form von $\Omega(s)$ – wie sie bei einer Keplerscheibe auftritt – ist noch nicht berücksichtigt. Im Prinzip muß nur noch C bestimmt werden. Das geschieht im Standardmodell durch die Annahme, daß die Keplerscheibe bis zu venachlässigbarer Nähe der Sternoberfläche reicht. Dann fällt die Winkelgeschwindigkeit schlagartig von $\Omega_\mathrm{K} = \sqrt{GM_*/s_*^3}$ auf Null. Also ist $\Omega' = 0$ bei $s = s_*$. Daraus ergibt sich für das *Standardmodell*

$$C = C_\mathrm{St} = -\dot{M}\sqrt{GM_* s_*}.$$

[5] Mit der Bezeichnung Äquilibrium ist die zeitliche Unabhängigkeit gemeint.

2.3 Dynamische Randschicht

In der Keplerscheibe ist die Winkelgeschwindigkeit Ω_K, Gl.(2.1), gegeben. Bei $s \to 0$ wird nach Gl.(2.1) auf S.10 $\Omega_\mathrm{K} \to \infty$. Das kann physikalisch nicht sein. Bereits an der Sternoberfläche muß die Winkelgeschwindigkeit auf fast Null gesunken sein. Es muß also einen Bereich geben, in dem die Winkelgeschwindigkeit von der Keplerrotation abweicht. Das ist die *dynamische Randschicht*.

Es muß also auch ein Maximum in der Geschwindigkeitskurve in dieser Schicht geben. Die Drehimpulserhaltung ergab Gl.(2.9):

$$-\nu\Sigma\Omega' = -\Sigma v_r \Omega + \frac{C}{2\pi s^3}$$

wobei C eine Konstante ist. Diese Gleichung folgte nur aus der Impulserhaltung und ist also auch in der dynamischen Randschicht gültig. In der dynamischen Randschicht ist bei s_0 das Maximum der Winkelgeschwindigkeit erreicht worden, d.h. $\Omega'(s_0) = 0$. Wenn wir das einsetzen, kann man nach C auflösen:

$$C = 2\pi s_0^3 \Sigma_0 v_{r0} \Omega_0.$$

Dabei sind Σ_0, v_{r0}, und Ω_0 die Säulendichte, die Radialgeschwindigkeit, und die Winkelgeschwindigkeit an der Stelle s_0.

Die Massenakkretionsrate muß in unserem Fall auch konstant sein; wir gehen von einem Gleichgewichtszustand aus. Es ist im Prinzip einfach ein Massenfluß in der Richtung des Sterns:

$$\dot{M} = -2\pi s \Sigma v_r. \tag{2.10}$$

Das Minuszeichen kommt dadurch zustande, daß die Akkretionsrate *positiv* definiert ist wenn v_r negativ (die Materie am *hinein*fallen) ist. Und, da $\dot{M}$ konstant ist im Äquilibrium, muß Gl.(2.10) auch beim radialen Abstand s_0 gelten. Also ist

$$\dot{M} = -2\pi s_0 \Sigma_0 v_{r0}$$

und unsere Konstante C wird

$$\begin{aligned} C &= -\dot{M} s_0^2 \Omega_0 \\ &= -\dot{M} s_*^2 (1+\delta_0)^2 \hat{\phi} \Omega_\mathrm{K}(s_*) \\ &= -\dot{M}\sqrt{G M_* s_*}\zeta. \end{aligned}$$

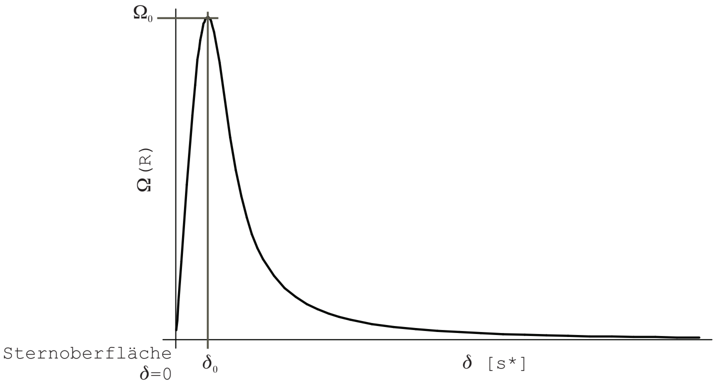

Abbildung 2.3: **Die Winkelgeschwindigkeit fällt mit $\Omega \sim \frac{1}{s^{3/2}} \to \frac{1}{s_*^{3/2}(1+\delta)^{3/2}}$ in der Keplerscheibe. An der Sternoberfläche $s = s_*$ bzw. $\delta = 0$ ist $\Omega \to 0$. Es muß also ein Maximum in der Winkelgeschwindigkeitskurve Ω_0 bei $s = s_0 = s_*(1 + \delta_0)$ geben.**

mit $\hat{\phi} = \Omega(s_0)/\Omega_{\mathrm{K}}(s_*)$ und $\zeta = \hat{\phi}\,(1 + \delta_0)^2$.

In Gl.(2.4) sahen wir, daß der Strahlungsfluß von der Größe $\nu\Sigma$ abhängig ist. Diese Größe können wir jetzt für die Keplerscheibe bestimmen. Es ist sehr wichtig zu erkennen, daß die Randschicht und die Keplerscheibe sehr eng miteinander verbunden sind. Die Randschicht ist ein Randwert für die Keplerscheibe. Die Größe $\nu\Sigma$ ist also nach Gl.(2.9):

$$\begin{aligned}
\nu\Sigma &= \frac{\Sigma\Omega v_r}{\Omega'} - \frac{C}{2\pi s^3 \Omega'} \\
& \Omega = \Omega_{\mathrm{K}} = \sqrt{\frac{GM_*}{s^3}} \\
& \Omega' = -\frac{3}{2}\frac{\Omega}{s} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_*}{s^5}} \\
\nu\Sigma &= -\frac{2\Sigma\Omega v_r s}{3\Omega} - \frac{-\dot{M}\sqrt{GM_* s_*}\zeta}{2\pi s^3}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s^5}{GM_*}}\right) \\
& \Sigma v_r s = -\frac{\dot{M}}{2\pi} \\
\nu\Sigma &= \frac{2}{3}\frac{\dot{M}}{2\pi} - \frac{\dot{M}\zeta}{2\pi}\frac{2s_*^{1/2}}{3s^{1/2}} \\
&= \frac{\dot{M}}{3\pi}\left[1 - \zeta\left(\frac{s_*}{s}\right)^{1/2}\right]. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Die Gleichung (2.11) gilt *nur* in der Keplerscheibe. Wenn wir sie jetzt mit Gl.(2.4) kombinieren, gilt der Strahlungsfluß *nur* in der Keplerscheibe und *nur* für Strahlung, die durch Reibungsquellen entstanden ist. Das ergibt dann

$$
\begin{aligned}
D(s) &= \frac{1}{2}\frac{9GM_*}{4s^3}\frac{\dot{M}}{3\pi}\left[1-\zeta\left(\frac{s_*}{s}\right)^{1/2}\right] \\
&= \frac{3}{8\pi}\frac{GM_*\dot{M}}{s^3}\left[1-\zeta\left(\frac{s_*}{s}\right)^{1/2}\right]. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Jetzt betrachten wir die Grenzbereiche von ζ ($\zeta := \hat{\phi}(1+\delta_0)^2$). Es gibt primär zwei Möglichkeiten:

1. $\delta_0 \to \delta_{\rm dyn}$: In diesem Fall ist das System nicht von dem Standardmodell zu unterscheiden.

2. $\delta_0 \to 0$: Das Maximum der Winkelgeschwindigkeitskurve ist an der Sternoberfläche. Hier können wir noch zwei zusätzliche Unterscheidungen machen:

   (a) $\hat{\phi}_0 \to 1$: Das System ist wieder nicht vom Standardmodell zu unterscheiden, denn $\Omega(s_0 = s_*) = \Omega_{\rm K}(s_*)$. Das heißt, daß die Kepler'sche Winkelgeschwindigkeit durchgehend bis zur Sternoberfläche die Scheibe beschreibt; kurz: Standardmodell.

   (b) $\hat{\phi}_0 \to \Omega_{\rm K}(s_{\rm dyn})/\Omega_{\rm K}(s_*) = \left[1/(1+\delta_{\rm dyn})^{3/2}\right]$: Ein Grenzwert, der uns interessiert, denn er unterscheidet sich ganz gewaltig vom dem Standardmodell. Es erlaubt uns auch, eine sehr praktische, charakteristische Größe einzuführen, denn

$$
\begin{aligned}
\zeta &:= \hat{\phi}\,(1+\delta_0)^2 \qquad (2.13)\\
&= \left(\frac{1}{1+\delta_{\rm dyn}}\right)^{3/2} \qquad (2.14)\\
\delta_{\rm dyn} &= \zeta^{-2/3} - 1. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

   Wenn $\delta_{\rm dyn} \to 0$, d.h. $\zeta \to 1$, führt dies wieder zum Standardmodell.

Die Leuchtkraft der Keplerscheibe können wir auch jetzt erst bestimmen, denn die dynamische Randschicht ist auch hier eine wichtige Randbedingung. Der Strahlungsfluß ist ja durch Gl.(2.12) gegeben. Also ist die zwischen s und $s+ds$ abgestrahlte Leuchtkraft

$$
\begin{aligned}
dL(s) &= 2\cdot[\pi(s+ds)^2 - \pi s^2]D(s) \\
&= \frac{3}{2}\frac{GM_*\dot{M}}{s^2}\left[1-\zeta\left(\frac{s_*}{s}\right)^{1/2}\right]ds + O(ds^2). \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis liefert nicht nur Informationen über die Keplerscheibe, sondern auch Informationen über die dynamische Randschicht. Wenn man nämlich $dL(s)$ über die ganze Keplerscheibe integriert, bekommt man:

$$\begin{aligned}
\int_{s_{\rm dyn}}^{\infty} dL(s) &= \int_{s_{\rm dyn}}^{\infty} \frac{3}{2}\frac{GM_*\dot{M}}{s^2}\left[1-\zeta\left(\frac{s_*}{s}\right)^{1/2}\right] ds \\
&= \frac{3GM_*\dot{M}}{2}\int_{s_{\rm dyn}}^{\infty}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{\zeta s_*^{1/2}}{s^{5/2}}\right] ds \\
&= \frac{3L_{\rm accr}s_*}{2}\left[-\frac{1}{s}+\frac{2\zeta s_*^{1/2}}{3s^{3/2}}\right]_{s_{\rm dyn}}^{\infty} \\
&= L_{\rm accr}\frac{s_*}{s_{\rm dyn}}\left[\frac{3}{2}-\zeta\left(\frac{s_*}{s_{\rm dyn}}\right)^{1/2}\right] \\
&= L_{\rm accr}\frac{1}{1+\delta_{\rm dyn}}\left[\frac{3}{2}-\zeta\left(\frac{1}{1+\delta_{\rm dyn}}\right)^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

Wenn wir dann Gl.(2.15) anwenden, erhalten wir

$$L_{\rm disk;visc} = \int_{s_{\rm dyn}}^{\infty} dL(s) = L_{\rm accr}\left[\frac{3}{2}\zeta^{2/3}-\zeta^2\right]. \tag{2.17}$$

Die Prozesse, die zur Energieabstrahlung in der dynamischen Randschicht führen, werden hier nicht erklärt. Stattdessen werden wird auf indirekte Weise eine Beschreibung der dynamischen Randschicht vorgenommen. So wie im Standardmodell muß die Strahlung, die nicht in der Scheibe abgestrahlt wurde, in die dynamischen Schicht abgestrahlt werden. Also ist

$$\begin{aligned}
L_{\rm dyn} &= L_{\rm accr} - L_{\rm disk;visc} = L_{\rm accr}\left(1-\frac{3}{2}\zeta^{2/3}+\zeta^2\right) \\
&= \lambda_{\rm dyn}L_{\rm accr} \\
\lambda_{\rm dyn} &= 1-\frac{3}{2}\zeta^{2/3}+\zeta^2. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Die Energie, die in der Keplerscheibe abgestrahlt wird, wird näherungsweise lokal abgestrahlt. Diese Näherung gilt aber nur, weil der Temperaturgradient in der radialen Richtung klein ist: $\frac{1}{T}\frac{dT}{ds} \sim 10^{-11}\frac{1}{\rm m}$. Das heißt, daß der radiale Energietransport durch Strahlung zu vernachlässigen ist.

In der Randschicht muß das anders sein. Denn zwischen der Randschicht und der Scheibe bzw. zwischen der Randschicht und dem Stern ist ein größerer Temperaturgradient. Der Stern hat eine Effektivtemperatur $T_* \sim 10^4$K, die

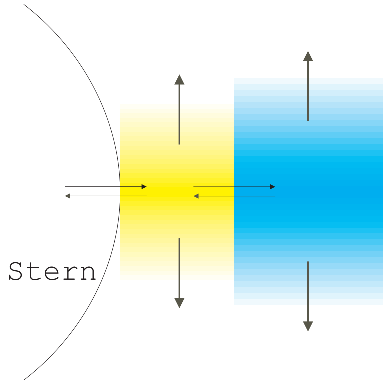

Abbildung 2.4: **Strahlung wird im Standardmodell und auch in dem 1-Zonen Modell nur lokal abgestrahlt (also ohne radialen Strahlungstransport). Im 2-Zonen Modell wird die Keplerscheibe durch die 1. Zone aufgeheizt.**

Keplerscheibe eine Temperatur $\sim 10^5$K und die dynamische Schicht, bei der die Hälfte der Strahlung der *ganzen* Scheibe entweicht, hat eine Effektivtemperatur $T_{\text{dyn,eff}} \sim 10^5 - 10^7$K. Auf jeden Fall wird Energie aus der dynamischen Schicht in den Stern und womöglich auch in die Keplerscheibe radiativ transportiert. Diese Strahlungsvorgänge sind in Abbildung 2.4 schematisch gezeigt. Die Keplerscheibe wird dadurch aufgeheizt.

Die Energie, die in der dynamischen Schicht freigegeben wird, wird zum Teil in der Keplerscheibe radiativ transportiert. Natürlich wird auch die Energie, die in der Keplerscheibe erzeugt wird, radiativ in die dynamischen Schicht hineintransportiert. Es kann also eine *effektive* Fläche für die dynamische Randschicht berechnet werden, die diesen Energieaustausch berücksichtigt. Deshalb definieren wir ein x_{therm} (x_{therm} ist die Flußdifferenz normiert auf dem Strahlungsfluß der dynamischen Randschicht):

$$\begin{aligned} x_{\text{therm}} &= \frac{\sigma T^4_{\text{eff;dyn}} - \sigma T^4_{\text{eff;therm}}}{\sigma T^4_{\text{eff;dyn}}} \\ &= 1 - \left(\frac{T_{\text{eff;therm}}}{T_{\text{eff;dyn}}}\right)^4 . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Eine ähnliche Parameterisierung können wir auch für den Energiefluß zwischen dem Stern und der dynamischen Randschicht einführen: $x_* = 1 - \left(\frac{T_*}{T_{\text{eff;dyn}}}\right)^4$.

In der dynamischen Randschicht der Akkretionsscheibe wird die Strahlungsleistung aus allen Flächen emittiert:

$$\begin{aligned}
L_{\rm dyn} &= 2\pi s_* \cdot 2H_{\rm dyn}(\sigma T^4_{\rm eff;dyn} - \sigma T^4_*) + 2\pi s_{\rm dyn} \cdot 2H_{\rm dyn}(\sigma T^4_{\rm eff;dyn}\sigma T^4_{\rm eff;therm}) + \\
&\quad +2\left[\pi(s^2_{\rm dyn} - s^2_*)\right]\sigma T^4_{\rm eff;dyn} \\
&= 2\pi s^2_*\sigma T^4_{\rm eff;dyn}\left[2h_{\rm dyn}x_* + 2h_{\rm dyn}(1+\delta_{\rm dyn})x_{\rm therm} + (1+\delta_{\rm dyn})^2 - 1\right] \\
&= 2\pi s^2_*\sigma T^4_{\rm eff;dyn}\left[2h_{\rm dyn}x_* + 2h_{\rm dyn}\zeta^{-2/3}x_{\rm therm} + \zeta^{-4/3} - 1\right]
\end{aligned}$$

wobei $H_{\rm dyn} = h_{\rm dyn}s_*$ die Skalenhöhe der Schicht ist. Der letzte Term in der ersten Zeile ist die Strahlung in z-Richtung und wird zweimal genommen: einmal für die Strahlung nach "oben" und einmal die Strahlung nach "unten". Genauso werden die ersten zwei Terme in der ersten Zeile mit zwei multipliziert, denn die Skalenhöhe geht vom Scheibenzentrum aus.

Die effektive Fläche $A_{\rm dyn}$ wird nun folgendermaßen definiert:

$$A_{\rm dyn} = 2\pi s^2_*\left[2h_{\rm dyn}x_* + 2h_{\rm dyn}\zeta^{-2/3}x_{\rm therm} + \zeta^{-4/3} - 1\right] \tag{2.20}$$

und die normierte Fläche

$$a_{\rm dyn} = 2\left[2h_{\rm dyn}x_* + 2h_{\rm dyn}\zeta^{-2/3}x_{\rm therm} + \zeta^{-4/3} - 1\right] \tag{2.21}$$

so, daß die Leuchtkraft ganz einfach:

$$L_{\rm dyn} = A_{\rm dyn}\,\sigma T^4_{\rm eff;dyn} = a_{\rm dyn}\,\pi s^2_*\,\sigma T^4_{\rm eff;dyn}$$

ist. Es ist **wichtig**, hier noch hinzuzufügen, daß die bisherige Ausführung in der **groben** Annahme vom *isothermen*[6] Zustand der einzelnen Randschichten ausgeht. Das ist nicht immer so. $T_{\rm therm}$ wird z.B. im thermischen Gleichgewicht berechnet. Es wäre nützlich, auch die dynamische Schicht im thermischen Gleichgewicht zu berechnen. Doch das macht die Aufgabe komplizierter als es für dieses Modell erwünscht wäre.

Die Skalenhöhe $H_{\rm dyn}$ wird im hydrostatischem Gleichgewicht bestimmt, wobei wir ein ideales Gas vorraussetzen. Die Navier-Stokes'sche Gleichung[7] ergibt für

[6]Isotherm, denn es wird angenommen, daß der Strahlungstransport durch einen Wärmeaustausch zwischen zwei isothermen Körpern von Temperatur $T_{\rm eff;therm}$ und $T_{\rm eff;dyn}$ dargestellt werden kann.

[7]Die Navier-Stokes'sche Gleichung ist im allgemeinen die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi$$

wobei p der Druck (mit innerer Reibung auch ein Tensor), ρ die Dichte und Φ ein Potential ist.

die z-Komponente

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g_z \rho,$$

denn die Geschwindigkeit der Materie in z-Richtung ist im Mittel null. Bei einem idealen Gas[8] ist die Zustandsgleichung allgemein bekannt:

$$P = \frac{\rho \Re T}{\mu}.$$

Auch hier nehmen wir einen isothermen Zustand an. Obwohl T von z abhängig ist und $T_{\mathrm{dyn}} \neq T_{\mathrm{dyn;eff}}$, wird hier die folgende Aussage gemacht[9]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dz} &= -\frac{g_z \mu}{\Re T_{\mathrm{eff;dyn}}} \rho \\ &= -\frac{G M_* z}{s^3} \frac{\mu}{\Re T_{\mathrm{eff;dyn}}} \rho, \end{aligned}$$

die wir an einem charakteristischen Ort $\overline{s_{\mathrm{dyn}}}$ auswerten, um die Skalenhöhe zu bestimmen. Der Ort $\overline{s_{\mathrm{dyn}}}$ ist das geometrische Mittel der Breite der Schicht:

$$\begin{aligned} \overline{s_{\mathrm{dyn}}} &= \sqrt{s_* s_{\mathrm{dyn}}} \\ &= s_* \sqrt{1 + \delta_{\mathrm{dyn}}} \\ &= s_* \zeta^{-1/3}. \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung ist

$$\rho \propto \exp\left\{ -\frac{G M_* \mu}{\Re T_{\mathrm{eff;dyn}} \overline{s_{\mathrm{dyn}}}^3} z^2 \right\} = \exp\left\{ -\left(\frac{z}{H_{\mathrm{dyn}}} \right)^2 \right\}.$$

und die Skalenhöhe kann man von ihr direkt ablesen

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{dyn}}^2 &= \frac{H_{\mathrm{dyn}}^2}{s_*^2} = \frac{\Re T_{\mathrm{eff;dyn}}}{G M_* \mu} \frac{\overline{s_{\mathrm{dyn}}}^3}{s_*^2} \\ &= \frac{\Re}{G M_* \mu} \frac{s_*^3 \zeta^{-1}}{s_*^2} \left(\frac{L_{\mathrm{dyn}}}{\pi s_*^2 a_{\mathrm{dyn}} \sigma} \right)^{1/4} \\ &= \boxed{\frac{\Re s_*^{1/2}}{G M_* \mu \zeta} \left(\frac{\lambda_{\mathrm{dyn}} L_{\mathrm{accr}}}{\pi a_{\mathrm{dyn}} \sigma} \right)^{1/4}} \end{aligned} \tag{2.22}$$

---

[8] $\Re$ ist die Rydberg-Konstante. $\Re = 8.317 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}}$

[9] Dies ist eine zweifelhafte Annahme, denn sie geht davon aus, daß wir keine z-Struktur haben. Auf der anderen Seite benutzen wir sie, um eine Aussage über diese z-Struktur zu machen. In der dynamischen Schicht wird allerdings davon ausgegangen, daß diese Annahme zutrifft. In der thermischen Schicht wird das thermische Gleichgewicht angenommen.

2.4 Thermische Randschicht

Die thermische Randschicht enthält wie gesagt zwei Bereiche. Der 1. Bereich wurde im letzten Abschnitt ausführlich beschrieben. Der 2. Bereich wird in diesem Abschnitt erklärt.

Obwohl die dynamische zur thermischen Schicht gehört, beschreibt die Bezeichnung *therm* häufig nur den 2. Bereich und trifft dann nicht auf den ersten zu. Man muß also vorsichtig mit der Bezeichnung *therm* sein. So bezeichnet man zum Beispiel mit L_{therm} die Leistung, die in der dynamischen Schicht erzeugt und aus der gesamten thermischen Schicht abgestrahlt wird (d.h. überall, nur nicht in dem Stern hinein (vergleiche mit a_{dyn}, Gl.(2.21), S.20)):

$$L_{\mathrm{therm}} = \frac{2\left[2h_{\mathrm{dyn}}\zeta^{-2/3}x_{\mathrm{therm}} + \zeta^{-4/3} - 1\right]}{a_{\mathrm{dyn}}} L_{\mathrm{dyn}}.$$

Sie ist deshalb auch eine gute Beschreibung der *thermischen* Schicht. Um den Anteil der Leuchtkraft zu benennen, die nur im 2. Bereich abgestrahlt wird, aber in der 1. Zone erzeugt wurde, benützen wir die Bezeichnung:

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{therm}}\left[s_{\mathrm{dyn}}, s_{\mathrm{therm}}\right] &= \frac{4h_{\mathrm{dyn}}\zeta^{-2/3}x_{\mathrm{therm}}}{a_{\mathrm{dyn}}} L_{\mathrm{dyn}} \\
&= \frac{4h_{\mathrm{dyn}}x_{\mathrm{therm}}}{a_{\mathrm{dyn}}} \zeta^{-2/3}\lambda_{\mathrm{dyn}} L_{\mathrm{accr}} \\
&= \lambda_{\mathrm{therm}} L_{\mathrm{accr}} \\
\lambda_{\mathrm{therm}} &= \frac{4h_{\mathrm{dyn}}x_{\mathrm{therm}}}{a_{\mathrm{dyn}}} \zeta^{-2/3}\lambda_{\mathrm{dyn}} \\
&= \frac{4h_{\mathrm{dyn}}x_{\mathrm{therm}}}{a_{\mathrm{dyn}}} \left(\zeta^{-2/3} - \frac{3}{2} + \zeta^{4/3}\right). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

(Im letzten Schritt wurde die Gleichung (2.18) auf Seite 18 benützt.) Man sieht, daß λ_{therm} eine Größe ist, die sich nicht auf die gesamte thermische Schicht bezieht, sondern nur auf den 2. Bereich.

Aus dem 2. Bereich der thermischen Randschicht wird nicht nur die Energie, die im 1. Bereich erzeugt wurde, abgestrahlt. Zusätzlich strahlt der 2. Bereich durch "Reibungsprozesse" wie in der Keplerscheibe Energie ab. Denn die 2. Zone ist immerhin noch ein Teil der Keplerscheibe, auch wenn sie zusätzlich von der dynamischen Randschicht aufgeheizt wird. Dazu benützen wir wie zuvor Gl.(2.16).

$$L_{\mathrm{visc}}\left[s_{\mathrm{dyn}}, s_{\mathrm{therm}}\right] = \int_{s_{\mathrm{dyn}}}^{s_{\mathrm{therm}}} dL(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{s_{\mathrm{dyn}}}^{s_{\mathrm{therm}}} \frac{3}{2}\frac{GM_*\dot{M}}{s^2}\left[1-\zeta\left(\frac{s_*}{s}\right)^{1/2}\right] ds \\
&= \frac{3GM_*\dot{M}}{2}\int_{s_{\mathrm{dyn}}}^{s_{\mathrm{therm}}}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{\zeta s_*^{1/2}}{s^{5/2}}\right] ds \\
&= \frac{3GM_*\dot{M}}{2}\left[-\frac{1}{s}+\frac{2}{3}\frac{\zeta s_*^{1/2}}{s^{3/2}}\right]_{s_{\mathrm{dyn}}}^{s_{\mathrm{therm}}} \\
&= \frac{3GM_*\dot{M}}{2s_*}\left[\frac{1}{1+\delta_{\mathrm{dyn}}}-\frac{1}{1+\delta_{\mathrm{therm}}}+\right. \\
&\qquad \left.+\frac{2\zeta}{3}\left(\frac{1}{(1+\delta_{\mathrm{therm}})^{3/2}}-\frac{1}{(1+\delta_{\mathrm{dyn}})^{3/2}}\right)\right] \\
&= \frac{GM_*\dot{M}}{s_*}\left[\frac{3\zeta^{2/3}}{2}-\frac{3/2}{1+\delta_{\mathrm{therm}}}+\frac{\zeta}{(1+\delta_{\mathrm{therm}})^{3/2}}-\zeta^2\right] \\
&= L_{\mathrm{accr}}\lambda_{\mathrm{visc}} \\
\lambda_{\mathrm{visc}} &= \frac{3}{2}\left(\zeta^{2/3}-\frac{1}{1+\delta_{\mathrm{therm}}}\right)+\frac{\zeta}{(1+\delta_{\mathrm{therm}})^{3/2}}-\zeta^2 \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Der Energiefluß im thermischen Gleichgewicht ist gegeben durch

$$F = \frac{4\sigma T^4}{3\tau} \qquad (2.25)$$

bzw.

$$F = \frac{L}{A}. \qquad (2.26)$$

Für die zweite Definition folgt unter Verwendung von Gl.(2.23) und Gl.(2.24):

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{therm}} &= \frac{L_{\mathrm{therm}}\left[s_{\mathrm{dyn}}, s_{\mathrm{therm}}\right]+L_{\mathrm{visc}}\left[s_{\mathrm{dyn}}, s_{\mathrm{therm}}\right]}{2\pi s_*^2\left[(1+\delta_{\mathrm{therm}})^2-(1+\delta_{\mathrm{dyn}})^2\right]} \\
&= \boxed{\frac{\lambda_{\mathrm{therm}}+\lambda_{\mathrm{visc}}}{\left[(1+\delta_{\mathrm{therm}})^2-\zeta^{-4/3}\right]}\cdot\frac{L_{\mathrm{accr}}}{2\pi s_*^2}}. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Im Gegensatz zu F_{therm} bezieht sich hier jedoch die Größe δ_{therm} auf die ganze Schicht. Sie ist nämlich die auf dem Sternradius normierte radiale Ausdehnung der thermischen Randschicht. Die Ausdehnung der 2. Zone der thermischen Randschicht ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{-\tau_s} = \mathrm{e}^{-\kappa\rho_{\mathrm{therm}}(s_{\mathrm{therm}}-s_{\mathrm{dyn}})} \\
\ln y &= -\kappa\rho_{\mathrm{therm}}s_*\left(1+\delta_{\mathrm{therm}}-1-\delta_{\mathrm{dyn}}\right) \\
&= \boxed{-\kappa\rho_{\mathrm{therm}}s_*\left(1+\delta_{\mathrm{therm}}-\zeta^{-2/3}\right)}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

2.5 Die Gleichungen

Nun haben wir 3 Gleichung zur Verfügung. Die Gleichungen (2.22), (2.27) und (2.28) können zusammen mit den folgenden Beziehungen zu lösbaren Gleichungen zusammengesetzt werden.

$$\rho_{\mathrm{therm}} = \frac{\Sigma_{\mathrm{therm}}}{2H_{\mathrm{therm}}} \tag{2.29}$$

$$H_{\mathrm{therm}} = \frac{c_{\mathrm{s}}}{\Omega} \tag{2.30}$$

$$c_{\mathrm{s}}^2 = \frac{P}{\rho_{\mathrm{therm}}} \tag{2.31}$$

$$P = \frac{\rho_{\mathrm{therm}}\Re T_{\mathrm{therm}}}{\mu} \tag{2.32}$$

$$\kappa = \kappa_0 \rho_{\mathrm{therm}}^a T_{\mathrm{therm}}^b \tag{2.33}$$

$$\tau_{z;\mathrm{therm}} = \kappa \rho_{\mathrm{therm}} H_{\mathrm{therm}} \tag{2.34}$$

$$\nu\Sigma_{\mathrm{therm}} = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left[1-\zeta\left(\frac{s_*}{\overline{s_{\mathrm{therm}}}}\right)^{1/2}\right] = \frac{\dot{M}f}{3\pi} \tag{2.35}$$

$$\overline{s_{\mathrm{therm}}} = \sqrt{s_{\mathrm{dyn}}s_{\mathrm{therm}}} = s_*\zeta^{-1/3}\sqrt{1+\delta_{\mathrm{therm}}} \tag{2.36}$$

$$\nu = \alpha H_{\mathrm{therm}} c_{\mathrm{s}} \tag{2.37}$$

$$\Omega^2 = \frac{GM_*}{\overline{s_{\mathrm{therm}}}^3} \tag{2.38}$$

$$\pi s_*^2 a_{\mathrm{dyn}}\,\sigma T_{\mathrm{eff;dyn}}^4 = \lambda_{\mathrm{dyn}} L_{\mathrm{accr}} \tag{2.39}$$

Diese Beziehungen beinhalten folgende Annahmen: die eine, die schon in Fußnote 9 auf Seite 21 erwähnt wurde, ist, daß die thermische Randschicht im Gegensatz zur isothermen dynamischen Randschicht im thermischen Gleichgewicht ist. Das hat die Folge, daß der Druck durch Gl.(2.32) beschrieben wird. Diese Bedingung für P hat direkte Folgen für alle andere Größen. Die Bedingung wird in dem Artikel von Patterson & Raymond [12] zur Erklärung der harten Röntgen-Strahlungen erwähnt.

Die oben gegebenen Definitionen können dann zusammen mit Gl.(2.18) und Gl.(2.21), in Gl.(2.22), Gl.(2.27), u. Gl.(2.28):

$$h_{\mathrm{dyn}} = \frac{\Re s_*^{1/2}}{GM_*\mu\zeta}\left(\frac{\lambda_{\mathrm{dyn}}L_{\mathrm{accr}}}{\pi a_{\mathrm{dyn}}\sigma}\right)^{1/4} \tag{2.22}$$

$$F_{\rm therm} = \frac{\lambda_{\rm therm}+\lambda_{\rm visc}}{\left[(1+\delta_{\rm therm})^2-\zeta^{-4/3}\right]}\cdot\frac{L_{\rm accr}}{2\pi s_*^2} = \frac{4\sigma T^4_{\rm therm}}{3\tau_{\rm z;therm}} \tag{2.27}$$

$$\ln y = -\kappa\rho_{\rm therm}s_*\left(1+\delta_{\rm therm}-\zeta^{-2/3}\right) \tag{2.28}$$

für $\ln y$ eingesetzt werden, um 3 unabhängige Gleichungen zu produzieren. Die *Variablen* des Systems sind nun $h_{\rm dyn}$, $T_{\rm therm}$ und $\delta_{\rm therm}$.

Von den Parametern, die in Gln. (2.29)-(2.39) aufgelistet sind, ist nur Gl.(2.39) schwierig zu lösen. Denn $a_{\rm dyn}$ enthält die Größe $T_{\rm dyn}$ sowohl in x_* als auch in $x_{\rm therm}$. Es muß also $T_{\rm dyn}$ separat numerisch bestimmt werden. Dazu erstellen wir die Gleichung

$$f_1 = a_{\rm dyn}\pi s_*^2\sigma T^4_{\rm eff;dyn} - \lambda_{\rm dyn}L_{\rm accr}. \tag{2.40}$$

Die erste von den 3 Gleichungen, die wir brauchen (Gl.(2.22)), die für $h_{\rm dyn}$, kann so bleiben, denn $\lambda_{\rm dyn}$ ist eine einfache Funktion von ζ, und $a_{\rm dyn}$ ist nur eine Funktion von $T_{\rm dyn}$, $h_{\rm dyn}$ und ζ.

Die zweite Gleichung (Gl.(2.27)) benötigt die Größe $\tau_{z;\rm therm}$. Dazu brauchen wir κ, welches eine Funktion von $\rho_{\rm therm}$ und $T_{\rm therm}$ ist. $T_{\rm therm}$ ist eine unserer Systemvariablen. Dagegen ist $\rho_{\rm therm}$ eine Größe, die von Gl.(2.29) ausgehend zusammen mit Gl.(2.30) und Gl.(2.35) umgeschrieben werden kann:

$$\rho_{\rm therm} = \frac{\Sigma_{\rm therm}}{2H_{\rm therm}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\dot{M}f}{3\pi\nu}\cdot\frac{\Omega}{c_{\rm s}}. \tag{2.41}$$

Zusammen mit

$$\nu = \alpha H_{\rm therm}c_{\rm s} = \frac{\alpha c_{\rm s}^2}{\Omega}$$

und der mit Hilfe von Gl.(2.32) umgeformten Gl.(2.31)

$$c_{\rm s}^2 = \frac{\Re T_{\rm therm}}{\mu}$$

können wir schreiben

$$\rho_{\rm therm} = \frac{\dot{M}f\Omega^2}{6\pi\alpha}\left(\frac{\mu}{\Re T_{\rm therm}}\right)^{3/2}. \tag{2.42}$$

Jetzt könnte $\rho_{\rm therm}$ in κ eingesetzt werden. Stattdessen wird $\tau_{z;\rm therm}$ umgeformt:

$$\begin{aligned}\tau_{z;\rm therm} &:= \rho_{\rm therm}\kappa H_{\rm therm}\\ &= \kappa_0\rho^{a+1}_{\rm therm}T^b_{\rm therm}H_{\rm therm}\end{aligned}$$

und κ_0 direkt eingesetzt. Am Ende haben wir nun:

$$\begin{aligned}
\tau_{z;\mathrm{therm}} &= \kappa_0 \left[\frac{\dot{M} f \Omega^2}{6\pi\alpha}\left(\frac{\mu}{\Re T_{\mathrm{therm}}}\right)^{3/2}\right]^{a+1} T_{\mathrm{therm}}^{b} \frac{c_s}{\Omega} \\
&= \kappa_0 \left(\frac{\dot{M} f}{6\pi\alpha}\right)^{a+1} \left(\frac{\mu}{\Re}\right)^{\frac{3}{2}(a+1)} T_{\mathrm{therm}}^{b-\frac{3}{2}(a+1)} \Omega^{2a+1} \left(\frac{\Re T_{\mathrm{therm}}}{\mu}\right)^{1/2} \\
&= \kappa_0 \left(\frac{\dot{M} f}{6\pi\alpha}\right)^{a+1} \left(\frac{\mu}{\Re}\right)^{\frac{3a}{2}+1} T_{\mathrm{therm}}^{b-\frac{3}{2}a-1} \Omega^{2a+1}. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Verwendet man nun $\tau_{z;\mathrm{therm}}$ für die Definition von F_{therm} gemäß Gl.(2.25), so folgt

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{therm}} &= \frac{4\sigma T_{\mathrm{therm}}^4}{3\tau_{z;\mathrm{therm}}} \\
&= \frac{4\sigma}{3\kappa_0 \Omega^{2a+1}} \left(\frac{6\pi\alpha}{\dot{M} f}\right)^{a+1} \left(\frac{\Re}{\mu}\right)^{\frac{3a}{2}+1} T_{\mathrm{therm}}^{5+\frac{3}{2}a-b}. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Nun, zu allerletzt kommen wir zu Gl.(2.28). Auch hier werden wir κ aus Gl.(2.33) zuerst einsetzen bevor wir ρ_{therm} aus Gl.(2.42) verwenden. Dies führt zu

$$\begin{aligned}
\ln y &= -\kappa_0 \rho_{\mathrm{therm}}^{a} T_{\mathrm{therm}}^{b} \rho_{\mathrm{therm}} s_* \left(1+\delta_{\mathrm{therm}} - \zeta^{-2/3}\right) \\
&= -\kappa_0 \rho_{\mathrm{therm}}^{a+1} T_{\mathrm{therm}}^{b} s_* \left(1+\delta_{\mathrm{therm}} - \zeta^{-2/3}\right) \\
&= -\kappa_0 s_* \left(1+\delta_{\mathrm{therm}} - \zeta^{-2/3}\right) \left[\frac{\dot{M} f \Omega^2}{6\pi\alpha}\left(\frac{\mu}{\Re T_{\mathrm{therm}}}\right)^{3/2}\right]^{a+1} T_{\mathrm{therm}}^{b} \\
&= -\kappa_0 s_* \left(1+\delta_{\mathrm{therm}} - \zeta^{-2/3}\right) \left[\frac{\dot{M} f \Omega^2}{6\pi\alpha}\left(\frac{\mu}{\Re}\right)^{3/2}\right]^{a+1} T_{\mathrm{therm}}^{b-\frac{3}{2}(a+1)} \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Somit sind nun alle 3 Gleichungen auf eine grundlegende Form umgeschrieben. Die Methode, die angewandt wird, um die Gleichungen auszuwerten, ist die “Newton-Raphson Nullstellensuche”. Um diese durchzuführen, müssen die 3 Gleichungen noch folgendermaßen umgeformt werden:

$$g_1 = h_{\mathrm{dyn}}^2 - \frac{\Re s_*^{1/2}}{G M_* \mu \zeta} \left(\frac{\lambda_{\mathrm{dyn}} L_{\mathrm{accr}}}{\pi a_{\mathrm{dyn}} \sigma}\right)^{1/4} \qquad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
g_2 &= \frac{4\sigma}{3\kappa_0 \Omega^{2a+1}} \left(\frac{6\pi\alpha}{\dot{M} f}\right)^{a+1} \left(\frac{\Re}{\mu}\right)^{1+\frac{3a}{2}} T_{\mathrm{therm}}^{5-b+\frac{3a}{2}} + \\
&\quad - \frac{\lambda_{\mathrm{therm}} + \lambda_{\mathrm{visc}}}{(1+\delta_{\mathrm{therm}})^2 - \zeta^{-4/3}} \cdot \frac{L_{\mathrm{accr}}}{2\pi s_*^2} \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

$$g_3 = \kappa_0 s_* \left(1 + \delta_{\text{therm}} - \zeta^{-2/3}\right) \left[\frac{\dot{M} f \Omega^2}{6\pi\alpha} \left(\frac{\mu}{\Re}\right)^{3/2}\right]^{a+1} T_{\text{therm}}^{b-\frac{3}{2}(a+1)} + \ln y. \qquad (2.48)$$

Die Variable, die in dem System variiert werden, sind:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{\text{dyn}} \\ V_2 &= T_{\text{therm}} \\ V_3 &= \delta_{\text{therm}} \end{aligned} \qquad (2.49)$$

2.6 Die Aufgabe

Die Aufgabe des Programms ist die Nullstellen mehrerer Gleichungen zu finden. Das eine System ist ein 1-dimensionales System um T_{dyn} zu bestimmen. Dazu brauchen wir Gl.(2.40). Das 2. System ist ein 3-dimensionales System um h_{dyn}, T_{therm} und δ_{therm} zu bestimmen. Dazu werden Gl.(2.46), Gl.(2.47) und Gl.(2.48) benutzt.

Kapitel 3

Nullstellensuche

3.1 Newton-Raphson Methode

Eine Nullstellensuche besteht im einfachsten Fall daraus, bei einer Funktion $f(x)$ den Wert von x, bei dem $f(x) = 0$ ist, zu bestimmen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Nullstellen numerisch zu bestimmen, aber hier wird nur die Methode, die als Newton-Raphson Methode[1] bekannt ist, erläutert. Es ist bekannt, daß die Methode sehr schnell konvergiert, wenn man mit einem guten Schätzungswert anfängt. Vor allem konvergiert sie dann immer, wenn der "Weg" im Parameterraum stetig zur Lösung führt.

Das Prinzip der Methode ist sehr einfach. Die Funktion wird in einer Taylorreihe entwickelt und nach dem linearen Term abgeschnitten:

$$f\left(x + \Delta x\right) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Wir wollen die Änderung, die zu x dazugefügt werden muß, bestimmen um $f(x + \Delta x)$ Null werden zu lassen. Also gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) + f'(x)\Delta x \\ \Delta x &= -\frac{f(x)}{f'(x)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir haben aber ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten. Die Methode wird komplizierter, aber im Prinzip ändert sich nichts.

$$\vec{G}\left(\vec{V} + \Delta\vec{V}\right) = \vec{G}\left(\vec{V}\right) + \left(\vec{\nabla}_{\vec{V}} \cdot \vec{G}^{\mathrm{T}}\right) \cdot \Delta\vec{V}$$

[1] Aus "Numerical Recipes" [15].

Das $\vec{G}^{\mathrm{T}}$ soll in der Matrix-Schreibweise die Transponierte von $\vec{G}$ sein. Wir können die Gleichung aber auch anders schreiben:

$$G_i\left(\{V_j + \Delta V_j\}\right) = G_i\left(\{V_j\}\right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_i}{\partial V_k} \Delta V_k.$$

Der Term unter der Summe ist eine Matrix:

$$A_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial V_j}.$$

Also lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} -G_i\left(\{V_j\}\right) &= A_{ik}\Delta V_k \\ \Delta V_k &= -G_i\left(\{V_j\}\right) \cdot A_{ik}^{-1} \end{aligned}$$

So kann man also die Änderung von $\vec{V_i}$, d.h. $\Delta\vec{V}_i$ bestimmen. Diese Prozedur funktioniert aber nur, wenn man einen Anfangswert kennt. Es funktioniert ebenfalls nur, wenn der "Weg" durch den Parameterraum zur Lösung immer streng monoton verläuft. Das heißt, es darf auf dem Weg kein lokaler Extremwert auftreten[2].

Man sucht sich also einen guten Anfangswert aus und iteriert bis man eine Lösung hat. In unserer Rechnung werden die G_i durch die Gleichungen (2.46)-(2.48) und die V_i durch die Parameter (2.49) ersetzt.

3.2 Matrix Inversion

Mathematisch gesehen ist, eine Matrix zu invertieren, eine einfache und eindeutige Aufgabe. Numerisch kann es aber ganz anders sein: im Vergleich zweier Zahlen, die die endliche Genauigkeit des Computers besitzt, können riesige Fehler auftauchen. Diese Fehler können minimiert werden, wenn man sorgfältig vorangeht.

Die LU-Decomposition hebt sich nicht dadurch gegenüber andere Methoden hervor, daß es diese Fehler minimiert, sondern daß es eine $N \times N$-Matrix mit $\frac{1}{2}N^3$ Schritten löst statt wie bei der Gauß'schen Elimination mit $\frac{4}{3}N^3$.

[2] Bronstein [4], S. 745. Zitat: "Konvergenz liegt vor, wenn $|h'(x)| \equiv \left|\frac{f''f}{f'^2}\right| < 1$ in einer Umgebung von x_N gilt." Dabei ist x_N eine einfache Nullstelle und $h(x)$ die Korrektur, die nach Newton benötigt wird, um die Nullstelle zu finden: $h(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

3.2.1 Das Prinzip der LU-Decomposition

Man will die allgemeine Gleichung

$$A \cdot x = b \tag{3.2}$$

lösen, wobei die $N \times N$-Matrix A und der N-Vektor b bekannt sind, und x gesucht wird. Die *LU-Decomposition* wird so genannt, weil A in eine *lower* und eine *upper* Dreiecksmatrix L und U geteilt wird, und zwar so, daß $L \cdot U = A$. Dann wird Gl.(3.2)

$$\begin{aligned} (L \cdot U) \cdot x &= b \\ L \cdot (U \cdot x) &= b. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wenn man dann ein y so definiert, daß $y = U \cdot x$, dann kann man die Einträge von y als die Lösung eines gestaffelten Systems $L \cdot y = b$ bestimmen. Für x erhält man dann durch Rücksubstitution ein weiteres gestaffelte System mit der lower Matrix, das ebenfalls gelöst werden kann.

3.2.2 Die einzelne Programmierschritte

Zuerst wird angenommen, daß die Matrix L mit Komponenten l_{ij} schon bestimmt wurde. Die Komponenten von y, d.h. y_i, können dann bestimmt werden. Dies setzt man folgendermaßen um:

$$l_{11} y_1 = b_1$$

wird umgeschrieben, so daß

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}.$$

Der nächste Term lautet

$$l_{21} y_1 + l_{22} y_2 = b_2$$

bzw.

$$y_2 = \frac{b_2 - l_{21} y_1}{l_{22}}$$

et cetera. Mit der neuen Gleichung $U \cdot x = y$ kann man das gleiche machen und somit x bestimmen.

Jetzt besteht das Hauptproblem daraus, die Dreiecksmatrizen L und U zu bestimmen. Diese sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Dadurch wurden N freie Parameter eingeführt, die wir eliminieren, indem wir alle Einträge der Hauptdiagonale der U-Matrix 1 setzen. Dann ist die erste Spalte von L durch

$$\begin{aligned} l_{11}u_{11} &= l_{11} = a_{11} \\ l_{21}u_{11} &= l_{21} = a_{21} \\ &\vdots \\ l_{n1}u_{11} &= l_{n1} = a_{n1} \end{aligned}$$

bestimmt. Im nächsten Schritt wird u_{12} bestimmt: $l_{11}u_{12} = a_{12}$ bzw. $u_{12} = a_{12}/l_{11}$. Nun wird die nächste Spalte von L bestimmt:

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} &= l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22} \\ &\rightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{32} &= a_{32} - l_{31}u_{12} \\ &\vdots \\ l_{n2} &= a_{n2} - l_{n1}u_{12}. \end{aligned}$$

Man sieht also, daß man spaltenweise vorangehen kann. Dabei bestimmt man zuerst die Spalte der U-Matrix durch

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}; \; j > i \tag{3.5}$$

und dann die Spalte der L-Matrix durch

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}; \; j \leq i. \tag{3.6}$$

Mehr Speicherplatz als die Originalmatrix A braucht man auch nicht, um die zwei neuen Matrizen zu speichern, denn beide Matrizen L und U können in einer $N \times N$-Matrix abgespeichert werden.

3.2.3 Fehlerminimierung

In Rechnungen dieser Art werden automatisch Fehler auftauchen. Das stammt daher, daß die Werte eine endliche Genauigkeit haben und folglich eine Differenz bzw. ein Quotient durch kleine Unterschiede große Fehler erzeugt. Um bei der LU-Decomposition die Fehler zu minimieren, sucht man sich ein "Pivot"-Element aus.

Das Ziel des "pivoting" ist lediglich Reihen oder Spalten so auszutauschen, daß das Diagonalelement den passensten Wert hat. In Gl.(3.5) wird durch das Diagonalelement l_{ii} geteilt. Man sucht sich l_{ii} so groß wie möglich, um den Fehler in u_{ij} möglichst klein zu halten.

In der LU-Decomposition wird nur "partial pivoting" verwendet. Im "partial pivoting" werden nur die Reihen nach einem geeigneten Diagonalelement durchgesucht, um Zeit und vor allem Aufwand zu sparen. Das "partial pivoting" ist erfahrungsgemäß fast so effektiv wie das "full pivoting".

3.3 Dämpfungen der Suchparameter

Unsere Parameter sind physikalische Größen, die per Definition nicht negativ sein können. Zum Beispiel sollte eine negative Temperatur T_{therm} nie vorkommen. Wenn h_{dyn} verschwindet, existiert die Scheibe überhaupt nicht. Und wenn $\delta_{\text{therm}} < 0$, dann wird die Strahlungstransportnäherung sinnlos. Alle Größen müssen also positiv bleiben, um überhaupt noch sinnvoll zu sein.

Eine Iteration der Newton-Raphson Methode soll nicht beliebig groß werden, denn sonst wird die Taylor'sch Reihenentwicklung, die dazu geführt hat, sinnlos. Wenn der Gradient in einer bestimmten Region klein ist, wird die Parameteränderung sehr groß (Siehe Gl.(3.1), S.28 und Fußnote 2, S.29). Daher muß die Änderung eingeschränkt werden.

Die Forderung, daß das System physikalisch Verständlich bleibt, gibt uns die

Möglichkeit, eine Einschränkung einzubauen. Es wird nun verlangt, daß keine Änderung eines Parameters größer als die Hälfte des Parameters selbst ist. Symbolisch ausgedrückt:

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Man kann die Parameteränderung als einen Richtungsvektor im Parameterraum auffassen. Wenn eine Parameterveränderung die Einschränkung überschreitet, dann muß der ganze Vektor umskaliert werden. Diese Skalierung muß so vorgenommen werden, daß die *Richtung* der Skalierung erhalten bleibt, daß aber keine Änderung zu groß ist.

Es ist wichtig hinzuzufügen, daß diese Einschränkung keine Garantie der Konvergenz ist. Konvergenz liegt nur sicher vor, wenn die Anfangswerte in der Parameterraumsuche nahe genug an der Lösung sind.

Kapitel 4

Analyse

4.1 Vergleich mit dem 1-Zonen Modell

Dieses Modell soll eine Verallgemeinerung des 1-Zonen Modells sein. Insofern ist es sinnvoll, Rechenergebnisse zu vergleichen. Das 1-Zonen Modell wurde von Duschl und Tscharnuter [6] ausführlich beschrieben. Darin wird eine in ihrer radialen Ausdehnung nicht verschwindende Randschicht angenommen. Diese Ausdehnung wird in der selben Form wie in Gln.(2.13-2.15) parameterisiert.

Die Standardannahme, daß die Strahlung dann in erster Näherung lokal abgestrahlt wird, wurde auch in [6] gemacht. Es ist also angebracht, den Übergang von dem herrkömmlichen Modell in das neue zu beschreiben. Hierzu wurde ein Parameter in Gl.(2.19) auf Seite 19 eingeführt, der es erlaubt, die Strahlung in radialer Richtung zu reduzieren (Siehe Abbildungen 4.7 und 4.8). Wenn der Parameter gegen null geht, ergibt sich das 1-Zonen Modell. Erhöht man den Parameter, läßt man den radialen Strahlungstransport wieder zu. Ist der Parameter gleich eins, ergibt sich das 2-Zonen Modell, das oben beschrieben wurde.

Wenn sonst keine Angaben gemacht werden, werden folgende Werte als Standardgrößen verwendet:

$$\begin{aligned} M_* &= 0.6\,\mathrm{M}_\odot \\ \dot{M} &= 10^{-8}\,\frac{\mathrm{M}_\odot}{\mathrm{a}} \\ R_* &= 0.0125\,\mathrm{R}_\odot \\ T_* &= 2\cdot 10^4\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu &= 0.6\,\frac{\mathrm{amu}}{\mathrm{Teilchen}} \\
\kappa_0 &= 6.6\cdot 10^{22}\,\frac{\mathrm{cm^5K^{7/2}}}{\mathrm{g}} \\
&\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -\tfrac{7}{2} \end{aligned}\right\}\ \text{Kramers Opazität} \\
\alpha &= 0.1 \\
\zeta &= 0.97 \\
\ln y &= -1
\end{aligned}
$$

κ_0, a, und b wurden aus "Principles of Stellar Structure" [5] entnommen.

In Abbildung 4.1 sieht man einen Vergleich zwischen dem Modell von Duschl & Tscharnuter [6] und dem 2-Zonen Modell. Es wird die Effektivtemperatur der dynamischen Randschicht als Funktion des Randschichtparameters ζ gezeigt. Da ζ nach Gl.(2.14) als eine direkte Parameterisierung der dynamischen Randschicht betrachtet werden kann, sieht man genau, daß das 2-Zonen Modell bei kleineren ζ ähnliche Ergebnisse wie das 1-Zonen Modell liefert: bei $\zeta \to 1$ wird die dynamische Randschicht immer dünner. Die Winkelgeschwindigkeit wird von $\Omega_{\mathrm{K}}(s_{\mathrm{dyn}})$ auf $\Omega(s_*) = 0$ in der dynamischen Schicht abgebremst. Also muß auch der gesamte Energieverlust aus dieser Schicht abgestrahlt werden. In dem 1-Zonen Modell wird die Energie nur lokal abgestrahlt. Wenn also $\zeta \to 1$, dann läuft $\delta_{\mathrm{dyn}} \to 0$ und die Fläche, aus der die Strahlung entweichen kann, wird unendlich dünn. Dadurch wird der Strahlungsfluß genau so wie die effektive Temperatur unendlich hoch. Im 2-Zonen Modell kann die Strahlung zumindest noch in die 2. Zone hineinstrahlen. Die 2. Zone bewirkt also eine Abkühlung der 1. Zone.

Den gleichen Effekt sieht zeigt auch Abbildung 4.2 in den Skalenhöhen. Die Differenz zwischen den Skalenhöhen wird mit steigendem ζ immer größer. Bei $\zeta = 1$ steigt h_{dyn} zusammen mit T_{dyn} ins Unendliche.

Auch sehr interessant sind die Größen in der 2. Zone. Hier hilft der oben eingeführte Parameter, der es ermöglicht, den Strahlungstransport in radialer Richtung zu reduzieren. Bei dem Übergang vom 2-Zonen in das 1-Zonen Modell gehen die Größen außerhalb der dynamischen Schicht in die der Keplerscheibe über. Dadurch kann man die beide Modelle direkt über den gesamten Bereich miteinander vergleichen. Im Folgenden sind die Ergebnisse des 1-Zonen Modells

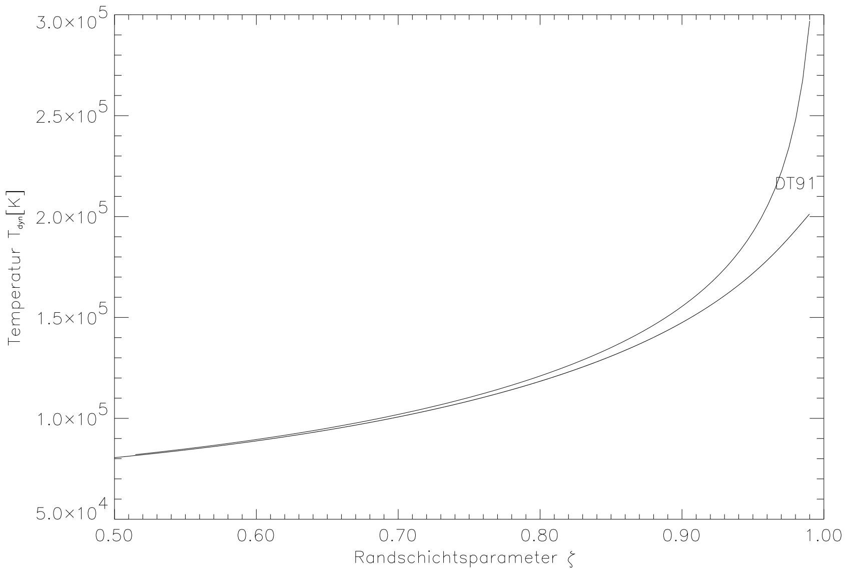

Abbildung 4.1: **Die Effektivtemperatur der dynamischen Randschicht als Funktion des Randschichtparameters (definiert in Gl.(2.14)). $\zeta \to 1$ ist dann äquivalent zu $\delta_{\rm dyn} \to 0$. Die Rechnung des 2-Zonen Modells geht bei kleineren ζ in das 1-Zonen Modell über. Das 1-Zonen Modell wird mit "DT91" bezüglich der Arbeit von W. Duschl und W. Tscharnuter bezeichnet. Diese Berechnungen benutzten Kramers Opazität.**

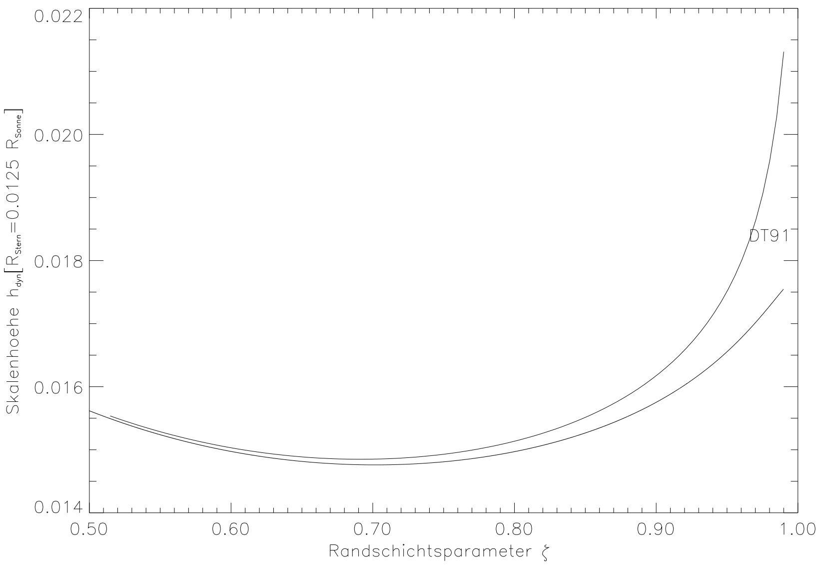

Abbildung 4.2: **Die Skalenhöhe der dynamischen Randschicht als Funktion des Randschichtparameters. Die Rechnung des 2-Zonen Modells geht auch hier bei kleineren ζ in das 1-Zonen Modell über.**

in Anlehnung an die Arbeit von Duschl & Tscharnuter [6] mit "DT91" bezeichnet.

Die Ausdehnung der 2. Zone sieht man in Abbildung 4.3. Interessant ist, daß die 2. Zone von "DT91" nicht nur die Temperatur der Keplerscheibe annimmt, sondern auch tatsächlich in ihrer radialen Ausdehnung verschwindet. Bedingt durch die Opazität steigt die Ausdehnung der thermischen Randschicht stark an. Dies hat eine große Oberfläche zur Folge. Das heißt, die Energie muß nicht nur lokal abgestrahlt werden, sondern kann auch in radialer Richtung transportiert werden.

Wenn man nun die Temperaturen der thermischen Schicht vergleicht, sieht man eindeutige Unterschiede. In Abbildung 4.4 verläuft "DT91" ganz wie im Standardmodell. Im 2-Zonen Modell steigt die Temperatur mit steigendem ζ. Die Temperatur der Zentralebene der Scheibe $T_{\rm therm}$ ist auch erhöht. Und, obwohl der Effekt in Abbildung 4.5 nicht so groß ist wie $T_{\rm therm;eff}$ in Abbildung 4.4, wird der Unterschied interessant.

Noch erstaunlicher werden nämlich die Unterschiede, wenn man z.B. $\rho_{\rm therm}$ mit $T_{\rm therm}$ abbildet wie in Abbildung 4.6. Hier sieht man direkt, daß wesentliche Unterschiede zwischen den zwei Modellen existieren. Diese Unterschiede könnten

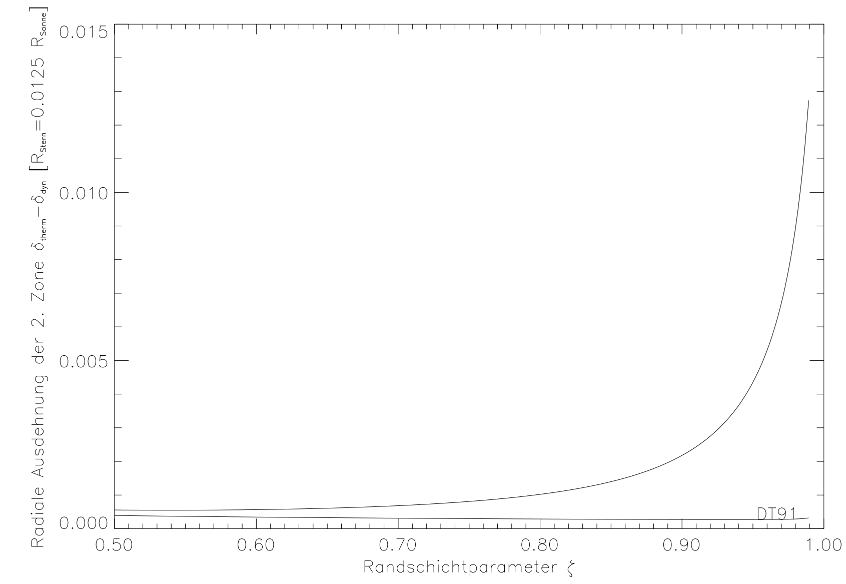

Abbildung 4.3: **Die Ausdehnung der 2. Zone der thermischen Randschicht als Funktion des Randschichtparameters.**

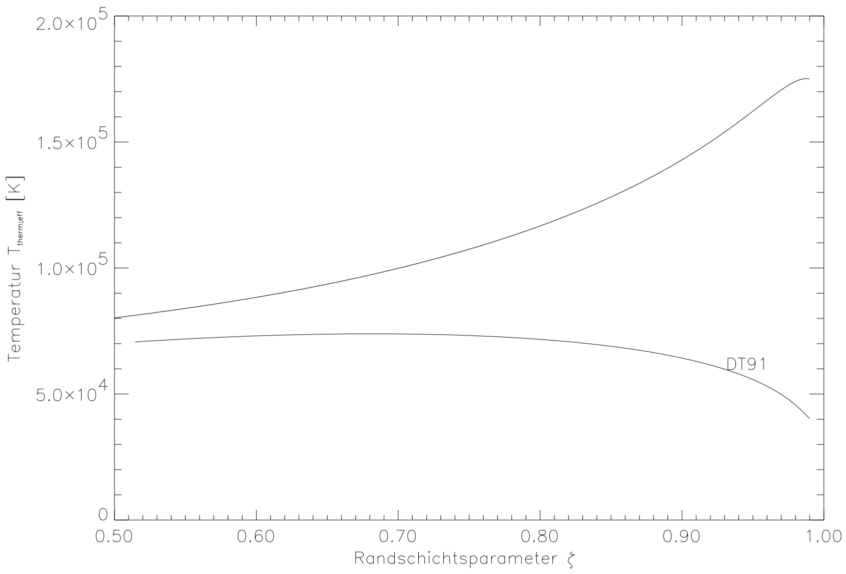

Abbildung 4.4: **Die effektive Temperatur der 2. Zone. Im Standardmodell bleibt diese Temperatur klein. Im 2-Zonen Modell wird die thermische Randschicht umso stärker aufgeheizt, je dünner die dynamische Schicht ist.**

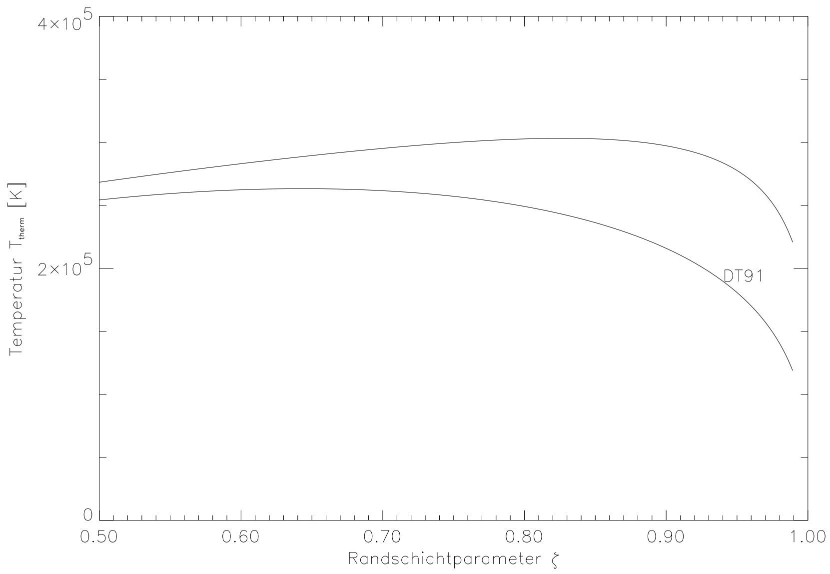

Abbildung 4.5: **Die Temperatur der 2. Zone.**

sehr nützlich sein, um Ungereimtheiten in den Beobachtungen zu erklären. Eine dieser Ungereimtheiten ist als "Post-outburst radiation" bekannt [11]. Nach dem Standardmodell wird erwartet, daß die Massenakkretionsrate zwischen den Zwergnova "Outbursts" klein sein müßte und die Scheibe kühl. Beobachtungen von VW Hyi [19] zeigen jedoch, daß die Röntgen Strahlung bzw. die UV-Strahlung nur langsam zurückgeht. Theoretisch wird erwartet, daß bei einer Scheibeninstabilität der Strahlungsfluß zwischen den "Outbursts" *steigt* (Siehe Pringle *et al.* [17]). Mit den Rechnungen, die in Abb. 4.6 gezeigt wurden, könnte sich alles verändern. Diese Möglichkeit zu erforschen liegt aber außerhalb das Bezugsbereichs dieser Arbeit.

Wie oben erwähnt, kann der stetige Übergang vom 2-Zonen auf dem 1-Zonen Modell auch dargestellt werden. Dies geschieht z.B. in Abbildung 4.7, bei der die effektive dynamische bzw. thermische Temperatur verfolgt wird. Nach links hin wird die Strahlung in die Keplerscheibe aus der dynamischen Schicht reduziert. Wie zu erwarten war, fällt die effektive thermische Temperatur bis zu ihrem typischen Wert von $\sim 5 \times 10^4$K und die effektive Temperatur der dynamischen Randschicht steigt.

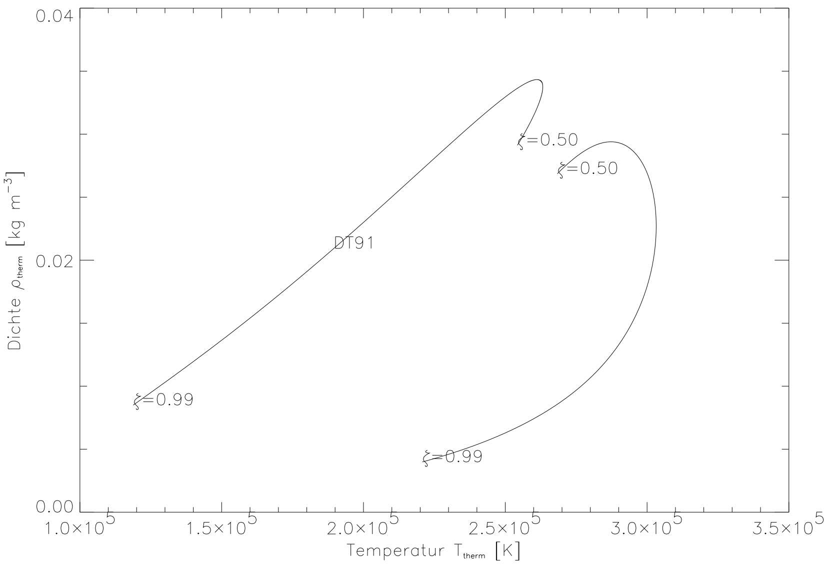

Abbildung 4.6: ρ_{therm} **vs.** T_{therm}

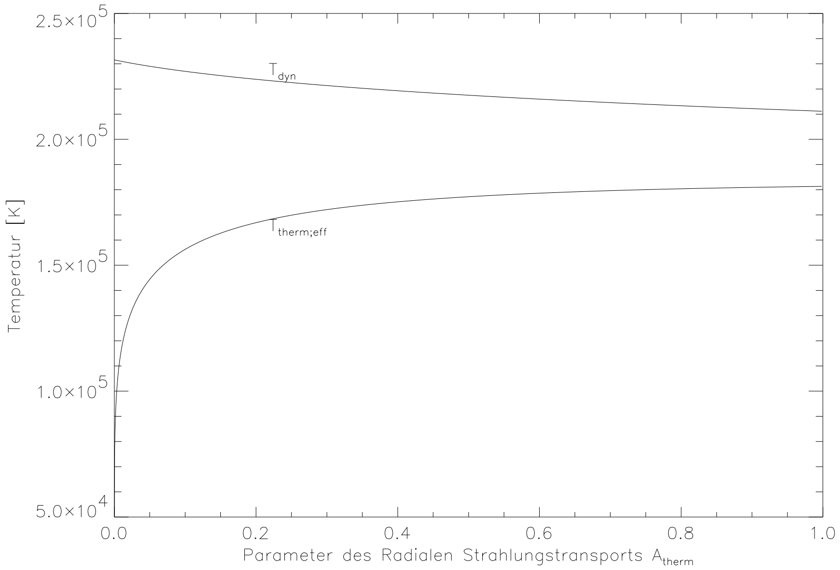

Abbildung 4.7: **Das Verhalten der Effektivtemperaturen der dynamischen bzw. thermischen Randschichten, wenn der Strahlungstransport aus der 1. Zone in der 2. Zone reduziert (nach links) bzw. erhöht (nach rechts) ist. Das Parameter** A_{therm} **wurde in der Näherungsgleichung für Strahlungstransport eingeführt:** $x_{\text{therm}} = A_{\text{therm}} \left[1 - \left(T^4_{\text{therm}} / T^4_{\text{dyn}} \right) \right]$

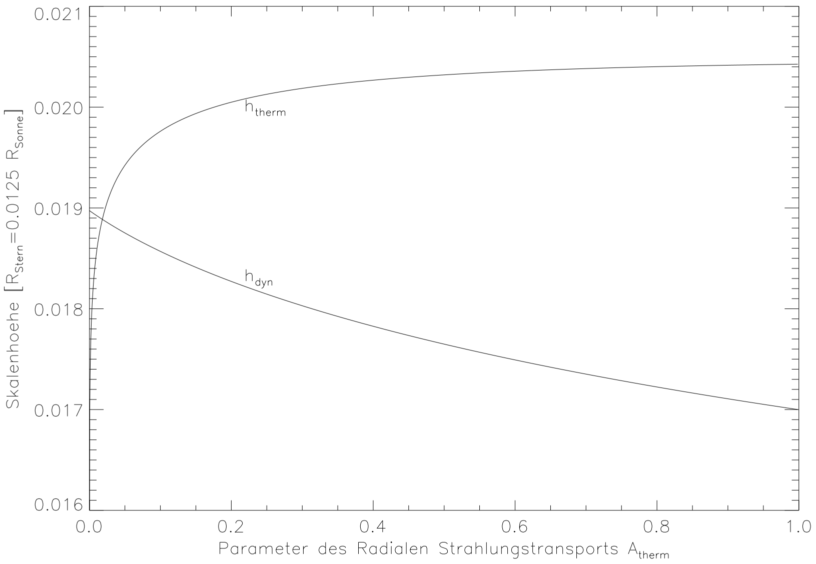

Abbildung 4.8: **Das Verhalten der Skalenhöhen der dynamischen bzw. thermischen Randschichten, wenn der Strahlungstransport aus der 1. Zone in der 2. Zone reduziert (nach links) bzw. erhöht (nach rechts) ist.**

Abbildung 4.8 ist auch eine Abbildung, die den Effekt des Strahlungstransports zeigt. Dabei sieht man, daß bei fehlendem Strahlungstransport, die Skalenhöhe der dynamischen Schicht $h_{\rm dyn}$ weit über die Skalenhöhe der thermischen Schicht $h_{\rm therm}$ herausragt. Dieses Resultat kann man unterschiedlich interpretieren. Entweder kann man dieses Ergebnis als Beweis dafür benutzen, daß die Notwendigkeit einer 2. Zone bestätigt wird, oder man kann das Ergebnis als eine physikalische Möglichkeit betrachten, daß die dynamische Randschicht über die thermische Randschicht herausragt.

Problematisch an der zweiten Betrachtungsweise ist, daß das Modell in der Annahme aufgestellt wurde, daß $h_{\rm dyn}$ kleiner als $h_{\rm therm}$ bleibt (vor allem bei der Bestimmung der Fläche $a_{\rm dyn}$ in Gl.(2.21), S. 20). Ein anderes Problem der zweiten Betrachtungsweise ist, daß der Strahlungstransport reduziert werden muß, um $h_{\rm dyn} > h_{\rm therm}$ zu erzeugen. Das wäre sinnvoll bei niedrigerem ζ (bei niedrigere $T_{\rm dyn}$), denn dann verschwindet der radiale Strahlungstransport. Man kann aber zeigen, daß dieser Kreuzungspunkt sich bei sinkendem ζ immer weiter nach links verschiebt. Das heißt, im Versuch diesen Effekt hervorzuheben, schalten wir diesen aus.

Also ist die zweite Betrachtungsweise auszuschließen. Die erste, daß die Notwendigkeit einer 2. Zone bestätigt ist, ist die bessere Erklärung des Effektes der in Abbildung 4.8 dargestellt ist.

Kramers Opazität gilt leider nicht für alle Temperaturen und Dichten. Die Opazität von Kramer wird von gebunden-freien Übergängen der Elektronen in einem Gasgemisch mit solarer Konsistenz berechnet. Das gilt natürlich nur in einem bestimmten Dichte- und Temperaturbereich. Eine ausführliche Beschreibung der Opazitäten wird im Moment von der "Opacity Project" (OP) gemacht. Einige Resultate können auch schon per Internet [22] in Tabellenform abgerufen werden.

Diese Opazitäten sind viel genauer als sie für diese Arbeit nötig sind oder gar sinnvoll sind. Jedoch gibt es keine andere einigermaßen vollständige Beschreibung der Opazitäten. Die OP Opazitäten mit der Chemie der Sonne (in diesem Fall heißt das $X = 0.7875$, $Y = 0.1925$, und $Z = 0.02$[1]) sind in Abbildung 4.9 im $\log_{10} R$-$\log_{10} T$ Raum dargestellt. Eine beliebige Opazität wird durch "Interpolations-Splines" bestimmt.

Die allgemeine Form der Resultate bleibt allerdings gleich. Bei der dynamischen Randschicht, deren Eigenschaften primär durch den Randschichtsparameter ζ bestimmt wird, ändert sich wenig. In Abbildung 4.10 sieht man z.B., daß T_{dyn} sich bei einem reduzierten radialen Strahlungstransport (DT91) überhaupt nicht verändert und sich bei erhöhtem Strahlungstransport um geringe Mengen verändert. In der Abbildung bezieht sich "OP" auf die Rechnung mit den Opazitäten von der "Opacity Project" und "Kramer" auf Kramers Opazität. Auch die effektive Temperatur der thermischen Randschicht $T_{\mathrm{eff;therm}}$ verhält sich ungefähr auf vergleichbare Weise an den zwei Opazitäten.

Daß die Verläufe ähnlich sind in diesen Größen, ist nicht verwunderlich. Es hat mit der Definition von x_{therm} Gl.(2.19) zu tun. In der Definition wird die Näherung des Strahlungstransports vom Verhältnis $\frac{T_{\mathrm{eff;therm}}}{T_{\mathrm{dyn}}}$ abhängig gemacht. T_{dyn} wird fast ausschließlich von ζ vorgegeben, also wird die effektive Temperatur der 2.

[1] In der Astrophysik ist X der Massenanteil an Wasserstoff (als Verhältnis zur Gesamtmasse) eines Gemischs. Genauso ist Y der Massenanteil an Helium, und Z der Massenanteil der restlichen Atome.

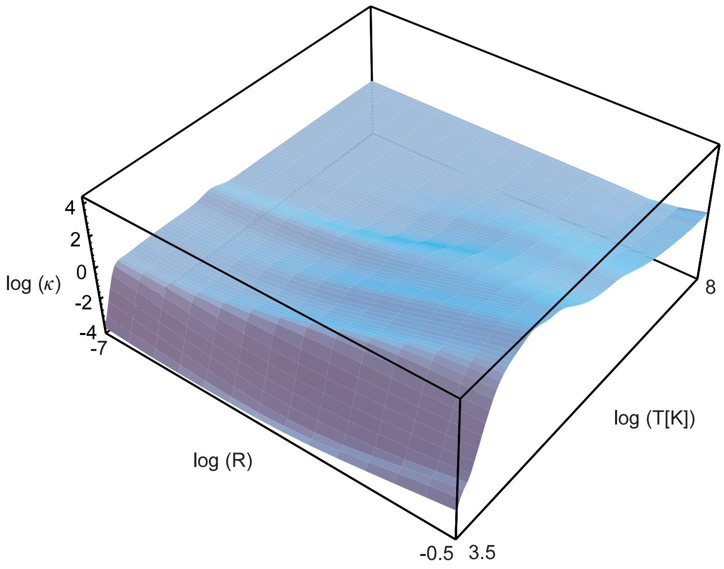

Abbildung 4.9: **Die Opazitäten der Opacity Project (*OP*). Die Opazitäten werden als Funktionen der $\log_{10} T$ und $\log_{10} R = \log_{10}\left(\frac{\rho}{T_6^3}\right) = \log_{10}\rho + 18 - \log_{10} T$. Die Berechnungen der Akkretionsscheibe liegen Hauptsächlich in dem Bereich $-3.5 > \log_{10} R > -5$ und $5.5 > \log_{10} > 6$.**

Zone so lange erhöht bzw. erniedrigt bis die dynamische Schicht sich abkühlen kann. Bei $\zeta \to 1$ wird die Rückkopplung von $T_{\text{eff;therm}}$ stärker und die Abweichung zwischen den 2 Opazitäten vergrößert sich.

Im Vergleich dazu ist die Differenz zwischen den *Zentraltemperaturen* der 2.Zone T_{therm} sehr groß. In Abbildung 4.11 sieht man, daß T_{therm} bei der Rechnung mit den *OP* Opazitäten viel größer ist als bei Kramers Opazität. Das kommt daher, daß die optische Tiefe größer ist. Dadurch muß die Temperatur T_{therm} sich erhöhen, um den gleichen Energiefluß, d.h. die Effektivtemperatur, aufrecht zu erhalten.

Es ist aber wichtig hinzuzufügen, daß die Verläufe der Kurven nahezu exakt identisch sind. Die umgekehrten Kurven in Abbildung 4.6 werden also, wie in Abbildung 4.12 gezeigt, eine identische Form haben.

Daraus läßt sich endgültig schließen, daß die Benutzung der *OP* Opazitäten anstelle von Kramers Opazität keine große *phänomenologische* Änderungen produziert. Im Vergleich dazu ist in den Abbildungen 4.6 und 4.12 ein eindeutiger Unterschied zwischen dem 1-Zonen und dem 2-Zonen Modell der Randschicht zu erkennen.

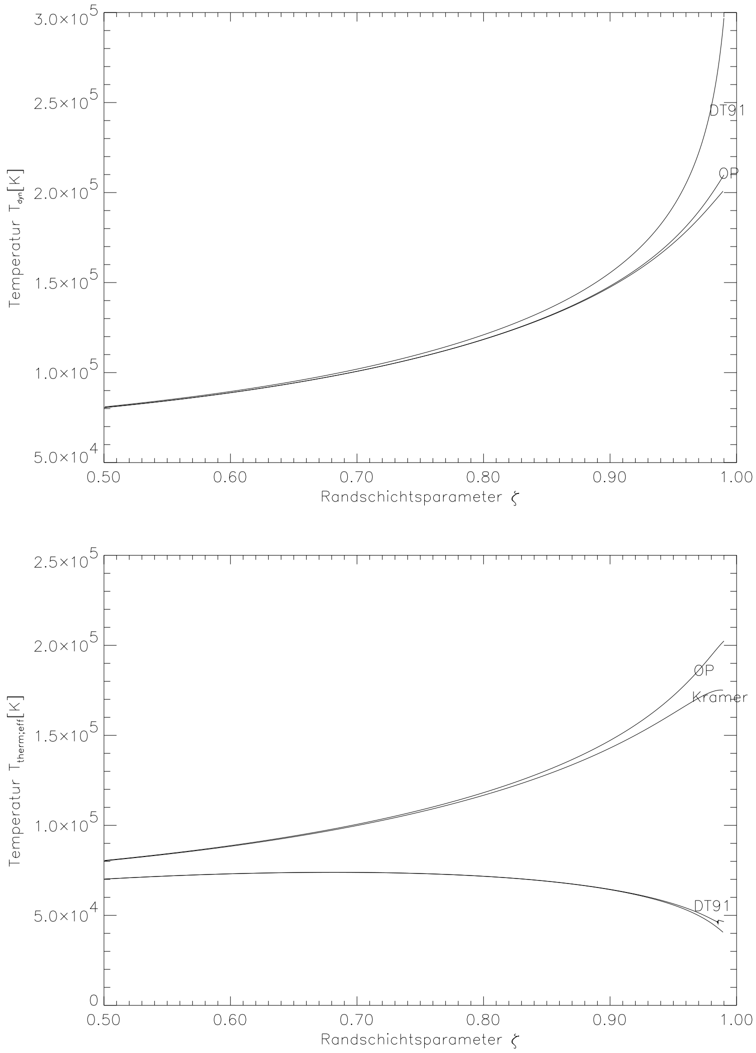

Abbildung 4.10: **Diese Abbildungen sind direkt vergleichbar mit Abb.4.1 und Abb.4.4. DT91 bezieht sich auf das 1-Zonen Modell und OP bezieht sich auf Berechnungen mit Opazitäten der "Opacity Project". Die Bezeichnung "Kramer" in der 2. Abbildung bezieht sich auf einer Opazität, die mit den Werten der Kramer Opazität berechnet wurden (Siehe Seite 35).**

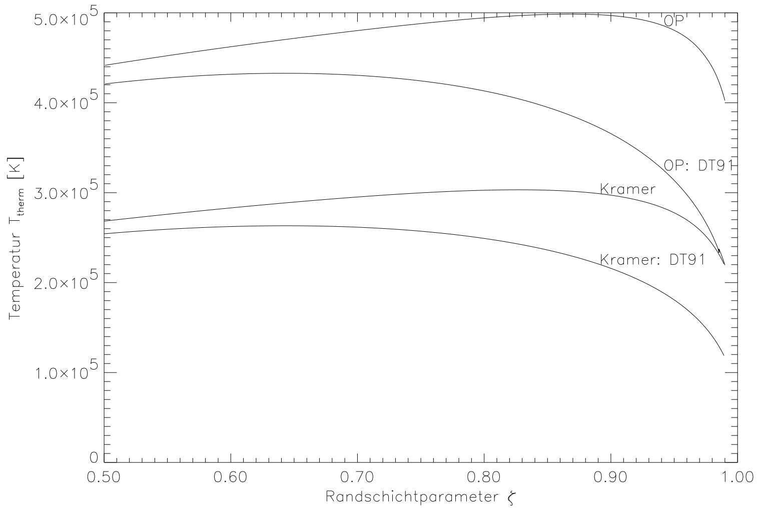

Abbildung 4.11: **Diese Abbildung kann verglichen werden mit Abb.4.5. Die Opazität der** OP **ist höher als die von Kramer, also wird die Temperatur** T_{therm} **größer.**

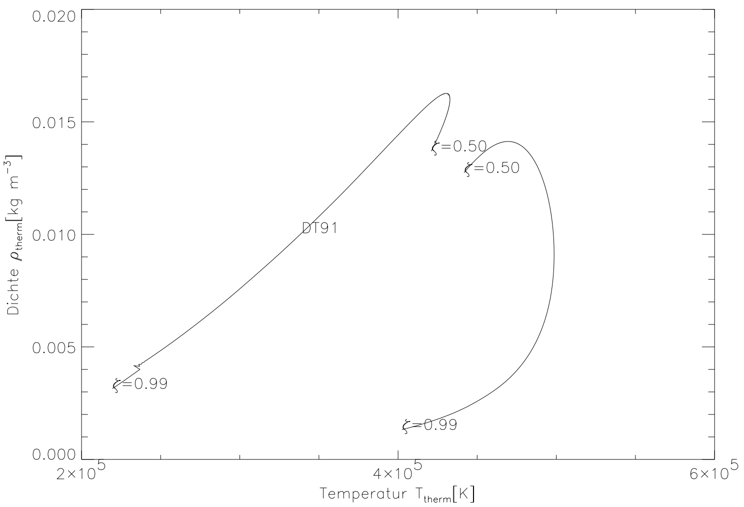

Abbildung 4.12: **Der Verlauf im Parameterraum** ρ_{therm}-T_{therm} **läuft in anderen Größen bei den Opazitäten der** OP **als bei den Opazitäten von Kramer (siehe Abb. 4.6), jedoch bleibt die Form gleich.**

4.2 Vergleich mit dem Modell von Popham & Narayan

Der Vergleich mit dem 1-Zonen Modell stellt sich als äußerst interessant heraus. Man sah auch ein Verhalten mit beobachtbaren Konsequenzen. Natürlich ist es sinnvoll, auch einen Vergleich mit einem komplizierteren Modell anzustellen. Das Modell von Popham & Narayan [14] liegt nahe, denn das Modell ähnelt 2-Zonen Modell. In ihrem Modell werden als Randbedingungen außen die Keplerscheibe (bei 100 s_*) und innen ein nicht-rotierender Weißer Zwerg angenommen. Zusätzlich wurde ein radialer Strahlungstransport zugelassen. Der Strahlungstransport in dem Modell von Popham & Narayan ist sehr formal im Vergleich zu dem 2-Zonen Modell.

In Abbildung 4.13 wird beim 2-Zonen Modell die Opazität von Kramer verwendet (siehe Seite 35). Die R/R_*- bzw. s/s_*- oder $(1+\delta)$-Werte, die der dynamischen Randschicht entsprechen (d.h. δ_{dyn}), sind die Werte bei denen, in der oberen Hälfte der jeweilige Abbildung, die Winkelgeschwindigkeit der Kepler'schen Winkelgeschwindigkeit entspricht. Für die 4 Massenakkretionsraten in der linken Abbildung wurden diese δ_{dyn}-Werte abgelesen und die entsprechenden ζ-Werte berechnet. Die Gleichungen wurden gelöst und die Ergebnisse entsprechen den Temperaturen T_{dyn} und $T_{\text{eff;therm}}$ und der radialen Dicke δ_{therm}, die dann in der unteren Hälfte von Abbildung 4.13 gezeigt werden.

Es ist erstaunlich, daß das einfache 2-Zonen Modell so sehr dem komplizierteren Modell entspricht. Die Temperaturen in der dynamischen Schicht sind bei jeder Rechnung im 2-Zonen Modell um ca. 15% niedriger als die maximalen Temperaturen im Modell von Popham & Narayan. Jedoch sind die Flächen unter beiden Kurven nahezu gleich. Auch die Ausdehnung der gesamten thermischen Schicht stimmt mit dem Modell von Popham & Narayan überein.

Man könnte natürlich sofort den Einwand machen, daß es nicht zu erwarten ist, daß die Temperatur außerhalb der thermischen Randschicht dann schlagartig auf Null bzw. auf die Temperaturen in der Keplerscheibe fallen sollte. Man könnte dann doch noch eine 3. Zone einführen, in die der Überschuß aus der 2. Zone abgestrahlt wird. Das Problem mit dieser Überlegung ist, daß man dann nicht unbedingt bei der 3. Zone aufhören sollte. Denn ansonsten hätten wir den

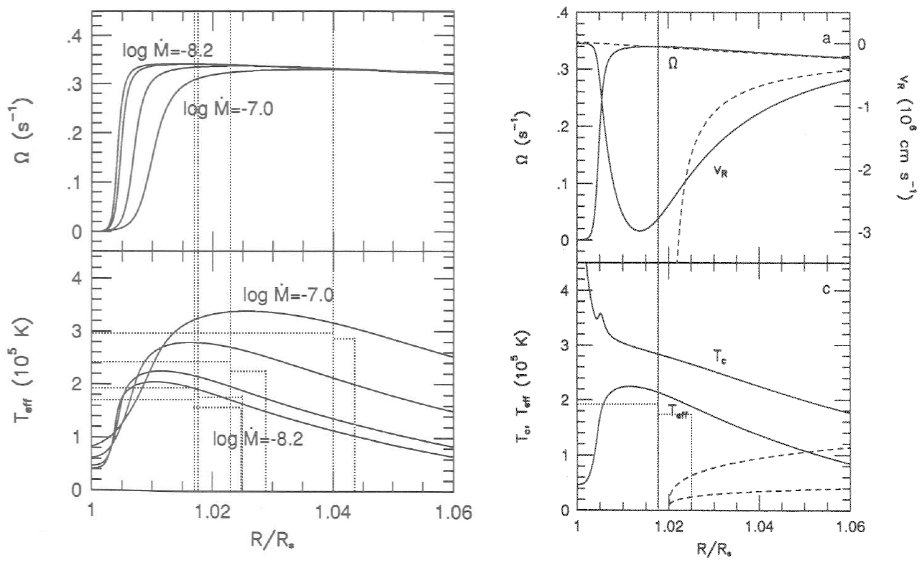

Abbildung 4.13: **Das Modell von Popham & Narayan wurde bei mehreren Massenakkretionsraten berechnet. In ihrem Modell entstand die Randschicht aus den Randbedingungen. In dem 2-Zonen Modell muß das ζ-Parameter vorgegeben werden. Das $\delta_{\rm dyn}$ kann in der oberen Hälfte der linken Abbildung für die Massenakkretionen $\log_{10}\dot{M} = -8.2,\ -8.0,\ -7.5,\ -7.0$: $\delta_{\rm dyn} = 0.017,\ 0.0175,\ 0.023$, und 0.04 entsprechend einem ζ von $0.9750, 0.9743, 0.9663$, und 0.9428 abgelesen werden. In der rechten Abbildung wird von einer Massenakkretion von $\log_{10}\dot{M} = -8.0$ ausgegangen. Dabei ist dann nach der oberen Hälfte der rechten Abbildung $\zeta = 0.9743$ und nach der Rechnung $\delta_{\rm therm} = 0.025$, $T_{\rm eff;therm} = 1.72\times10^5$ und $T_{\rm dyn} = 1.89\times10^5$. Die kurzgestrichelten Linien wurden alle mit dem 2-Zonen Modell berechnet (Kramers Opazität). Die langgestrichelten Linien entsprechen dem Standardmodell. Die Abbildungen wurden aus der Arbeit von Popham & Narayan entnommen.**

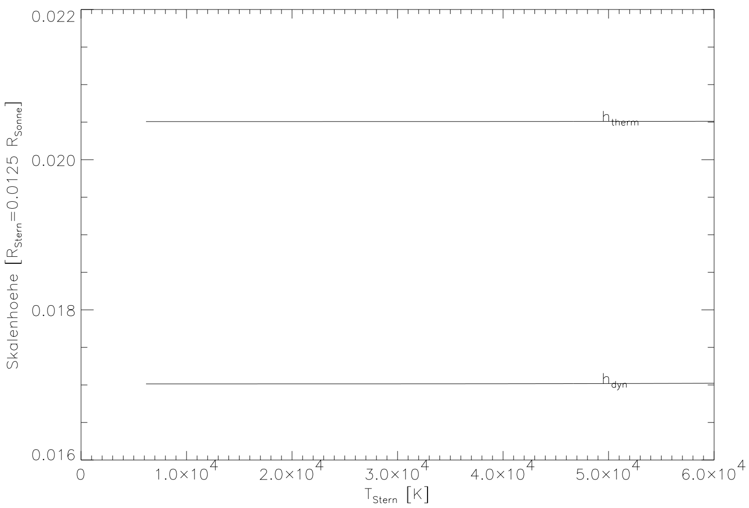

Abbildung 4.14: **Die Skalenhöhe, wie sie mit der Sterntemperatur verändert. Die Sterntemperaturen wurden hier ins absurde gerückt ohne bemerkbarem Effekt. Die Skalenhöhen steigen minimal bei höheren Temperaturen.**

Temperatursprung nach der 3. Zone. Man könnte im Prinzip gleich beliebig viele Zonen einführen. Das führt unmittelbar zu einer numerischen Integration. Dabei geht dann die einfachere Betrachtungsweise verloren.

4.3 Parameterveränderungen in dem 2-Zonen Modell

Nach einem Vergleich mit anderen Modellen ist es interessant, die Parameter im 2-Zonen Modell zu variieren. Manche Resultate der Nullstellensuche lassen sich fast gar nicht von der Parametervariation beeinflussen. Die Temperatur des Sterns hat fast keinen Einfluß auf sämtliche Größen. Charakteristische Größen der Randschicht sind die Skalenhöhen, die in diesem Fall in Abbildung 4.14 abgebildet wurden. Es ist nicht überraschend, daß die Effektivtemperatur des Sterns so wenig Einfluß hat. Die Energien, die in der Randschicht freigesetzt werden, sind um Größenordnungen größer als die entsprechende Energie des Sterns. Die Effektivtemperatur der Randschicht ist $\sim 10^5$-10^6K und die des Sterns $\sim 10^4$. Nach der Strahlungstransportnäherung in Gl.(2.19) auf Seite 19 wird also viel mehr

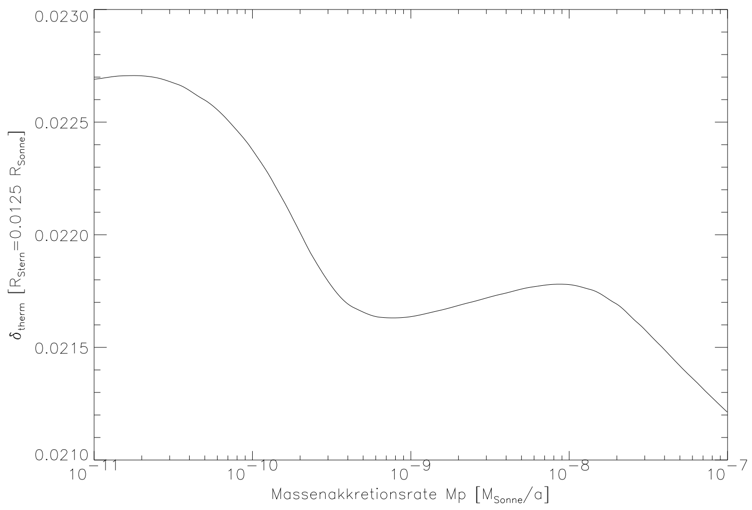

Abbildung 4.15: **Eine charakteristische S-Kurve, die oft bei dynamischen Instabilitäten so wie Zwergnovae auftauchen. Dabei ist $\delta_{\text{dyn}} = 0.0205$.**

Energie aus der Randschicht in den Stern hereinstrahlen als *vice versa*.

Die Sterntemperatur ist der Parameter, der am wenigsten Einfluß auf die Systemgrößen hat. Wie wir in den vorherigen Abschnitten sahen, haben die Parameter ζ, $\dot{M}$ und κ hingegen einen großen Effekt auf die Lösungen. Wenn alle Größen außer $\dot{M}$ konstant gehalten werden, dann sieht man eine S-Kurve. Eine ähnliche Kurve wird für die Zwergnova-"Outbursts" verantwortlich gemacht. In Abbildung 4.15 wird die S-Kurve im $\dot{M}$-δ_{therm} Raum abgebildet.

Das Problem mit dieser S-Kurve ist, daß sie nicht der Kurve entspricht, die normalerweise als Erklärung von Zwergnovae verwendet wird. Die Kurve liegt normalerweise im ρ-$\dot{M}$ bzw. Σ-ν Parameterraum. Es wird argumentiert, daß eine Instabilität vorliegt, wenn $d\nu/d\Sigma \leq 0$ (Lightman & Eardley 1974 [10], Bath & Pringle 1982 [2]) wobei ν der Reibungskoeffizient und Σ die Oberflächendichte ist. Eine Zwergnova entspricht einer Erhellung, die durch eine erhöhte Massenakkretion entstehen müßte. Die erhöhte Massenakkretion könnte dann entstehen, wenn die "Reibung", die durch ν parameterisiert wird, steigt. Durch die lokal erhöhte Massenakkretion müßte natürlich auch die Dichte lokal geringer werden. Ist nun die mittlere Akkretionsrate niedriger als die nun lokal erhöhte, wird die Dichte immer geringer. Es kommt nicht genug Nachschub an Materie. Theoretische Betrachtungen (siehe Pringle [16]) zeigen, daß $d\nu/d\Sigma$ im stabilen Zustand

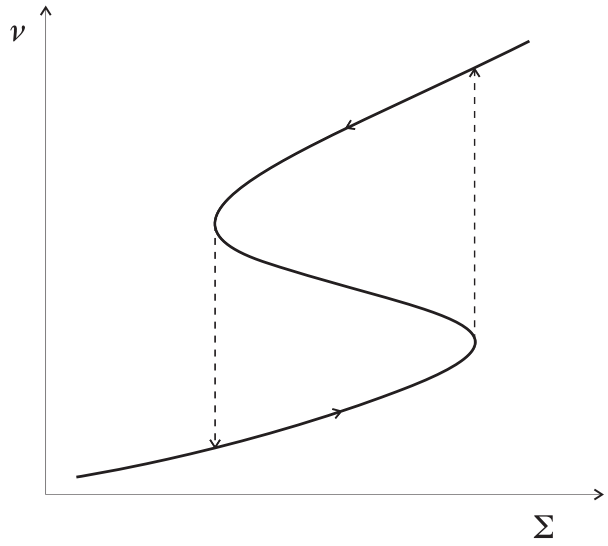

Abbildung 4.16: **Wenn die Akkretionsrate einen Zustand bevorzugt, bei dem ν in dem negativen $d\nu/d\Sigma$-Bereich liegt, dann wird sich ein nach den Pfeilen richtenden Zyklus einstellen.**

nur positiv sein kann, also müßte ν wieder fallen (Siehe Abbildung 4.16). Kommt der Zustand in einem Bereich, bei dem $d\nu/d\Sigma$ negativ ist, kann ν sehr schnell fallen bzw. die Viskosität sehr schnell sehr klein werden. Die Oberflächendichte aber kann nicht so schnell steigen. Die Oberflächendichte müßte zuerst durch die Akkretionsrate genährt werden. Durch die geringere Viskosität ist die lokale Akkretionsrate kleiner als die mittlere. Es sammelt sich Materie an, d.h. Σ steigt, also muß ν steigen. Zwangsläufig trifft man wieder den Bereich, bei dem $d\nu/d\Sigma$ negativ wird. Wie zuvor, paßt sich ν schneller an die Umstände als Σ an. Der Zyklus geht wieder von vorne los.

Die Diskussion ob dieser Zyklus auch in der S-Kurve im δ_{therm}-$\dot{M}$ Parameterraum vorhanden ist, ist nicht die Aufgabe dieser Arbeit. Die S-Kurve ist aber auffällig. Es ist außerdem nicht sofort ersichtlich, daß ein ähnliches Verhalten durch diese Kurve unbedingt zu erwarten ist.

Weniger überraschende Ergebnisse entstammen aus den Parametern M_* und R_*. Die Effekte sind zwar größer als die, die von T_* stammen, neue Einsichten gewinnt man jedoch nicht. Mit steigender Sternmasse fallen die Skalenhöhen h_{dyn} und h_{therm} und die Randschichtdicke δ_{therm}, die Temperatur T_{therm} allerdings steigt. Mit steigendem Radius ist das Verhalten genau umgekehrt. Da eine stei-

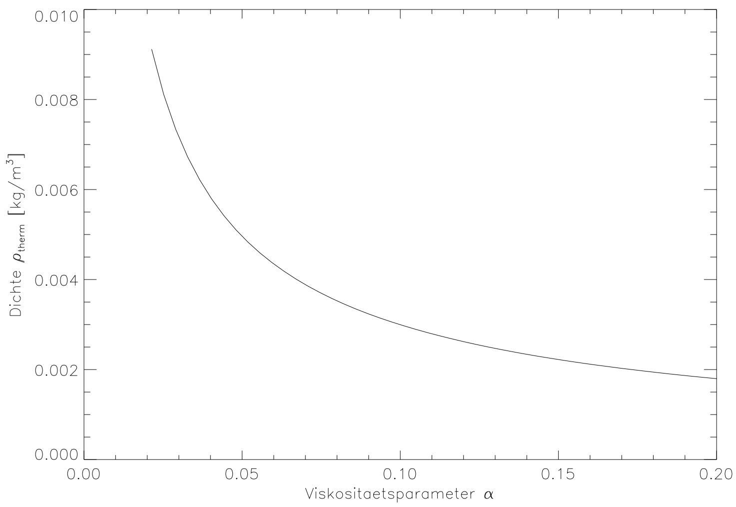

Abbildung 4.17: **Die Dichte der thermischen Randschicht als Funktion des Viskositätskoeffizienten.**

gende Masse einen fallenden Radius bei Weißen Zwergen impliziert, verstärken sich die Effekte noch.

Auch der Parameter α liefert keine überraschenden Ergebnisse. Mit steigendem α fallen die Temperaturen T_{dyn}, T_{therm}, und $T_{\mathrm{eff;therm}}$. Das α parameterisiert den Viskositätskoeffizient. Naturgemäß müßte bei einer steigenden Viskosität die Massenakkretion steigen, denn dann steigt auch der Drehmoment. Der Drehimpuls wird dann auch schneller wegtransportiert. Wir halten die Massenakkretion konstant bei verschiedenen α's. Also muß sich etwas anderes ändern: die Dichte muß fallen (siehe Abbildung 4.17) und der Effekt ist der, daß die Temperaturen und auch die Skalenhöhen fallen.

Es ist natürlich klar, daß einige Parameter voneinander abhängig sind. Diese Zusammenhänge sind komplizierter als die Abhandlungen in diesem Modell. (Wie zum Beispiel der Zusammenhang zwischen der Viskosität und die Massenakkretion, den wir im vorherigen Absatz erwähnten.) Zwischen der Masse des Weißen Zwergs und seinem Radius gibt es eine inverse Beziehung, die auch nicht berücksichtigt wurde. Beim Vergleich des 2-Zonen Modell mit dem Modell von Popham & Narayan (Abbildung 4.13) sieht man, daß ein Zusammenhang zwischen der Massenakkretion $\dot{M}$ und dem Randschichtsparameter ζ existiert. Diese Beobachtung ist nicht überraschend.

Kapitel 5

Diskussion

Das Modell der 2-zonigen Randschicht einer Akkretionsscheibe wurde eingeführt, weil man sich nicht vorstellen konnte, daß eine schmale und um ein oder zwei Größenordnungen heißere Randschicht nur lokal ihre Energie abstrahlen kann. Es war jedoch klar, daß maximal die Hälfte der Energie, die aus der gesamten Akkretionsscheibe abgestrahlt wird, auch aus der Randschicht strahlt. Das einfachste Modell einer Akkretionsscheibe geht von einer dünnen Scheibe aus. Die ganze Struktur ist also eine Struktur, die nur vom radialen Abstand vom Weißen Zwerg abhängt. Also kann man auch einen vereinfachten radialen Strahlungstransport einführen.

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Berechnungen zusammengefaßt, d.h. es wird erwähnt, was sich im Vergleich zu andere Modellen verändert hat, sowie das, was unverändert blieb. Es wird auch kurz erwähnt, wo Probleme in der Aufgabenstellung liegen und wie sinnvoll die Annahmen, die gemacht wurden, sind.

5.1 Ergebnisse

Das Zwei-Zonen Modell der Randschicht produziert in dem limes, bei dem die 2. Zone ausgeschaltet wird, das Ein-Zonen Modell. Das ist sehr wichtig, denn es bestätigt, daß das Modell zumindest als Grenzwert bekannte Größen reproduziert.

Außerhalb des limes bekommt man Ergebnisse, die man verstehen kann. Bei großem ζ wird die 2. Zone immer effektiver von der 1. Zone aufgeheizt. Dabei kann sich die Skalenhöhe der 1. Zone verkleinern. In Abschnitt 4.1 wurde im Zusammenhang mit Abbildung 4.8 erklärt, daß diese Verkleinerung physikalisch notwendig ist.

Das Verhältnis zwischen der Dichte und der Temperatur der thermischen Schicht (ρ_{therm} und T_{therm}) mit ζ als Parameter (Abb. 4.6 bzw. Abb. 4.12) ist anders als erwartet. Es wurde vorgeschlagen, daß diese Unterschiede zwischen den Modellen auch beobachtbare Folgen haben könnten. Vor allem als mögliche Erklärung der "Post-Outburst" Strahlung.

Auch im Vergleich zu einem komplizierteren Modell zeigt sich das 2-Zonen Modell als ausgezeichnet. Das Modell von Popham & Narayan [14] geht von einem nicht-rotierenden Stern und einer Keplerscheibe als Randbedingungen aus. Es wird unter Berücksichtigung des radialen Strahlungstransports numerisch integriert. Dabei entstehen Berechnungen, die dem 2-Zonen Modell nahe kommen.

Der Einfluß mancher Parameter ist relativ uninteressant. Die Größe T_* zeigt wenig Einfluß auf das Modell. Das ist zu erwarten, genau so, wie es zu erwarten ist, daß die Massenakkretionsrate $\dot{M}$ einen großen Einfluß hat. Das Verhalten von δ_{therm} als Funktion $\dot{M}$ erinnert sehr an die typische S-Kurve, die als Bedingung für Scheibeninstabilitäten notwendig ist. Jedoch ist das keine Garantie einer Instabilität. Im Gegensatz zu diesem interessanten Verhalten bei der Massenakkretion, ist das Verhalten als Funktion des Sternradius R_* und des Viskositätsparameters α unergiebig.

5.2 Kritische Betrachtungen

Das Modell in seiner jetzigen Form hat noch viele Ansätze, um weiterzuforschen. Unter anderem muß man sich überlegen, wie gut die Annahmen, die gemacht wurden, sind. Zum Beispiel ist die Annahme, die zu x_{therm} bzw x_* führte, eine sehr grobe Annahme. Für eine bessere Annahme muß man aber mehr über die z-Struktur wissen. Man müßte zumindest die Transportnäherungen mit den Temperaturen $T_{\mathrm{c,dyn}}$ und T_{therm} anstatt mit den Temperaturen T_{dyn} und $T_{\mathrm{eff;therm}}$ durchführen. Das Modell ist das Modell einer *dünnen* Scheibe. Wir betrachten die *Zentralgrößen*, d.h. die Größen bei $z = 0$, als charakteristische Größen. Die Zentraltemperatur der dynamischen Randschicht $T_{\mathrm{c;dyn}}$ zu bestimmen, übersteigt die Möglichkeiten der Annahmen. Deswegen wurden in Gl.(2.19) auf Seite 19 die Effektivtemperaturen verwendet.

Die Definition von δ_{therm} könnte auch besser formuliert werden. Im Moment ist sie unabhängig von h_{dyn} definiert. Die thermische Randschicht soll aber dazu dienen, die von der dynamischen Schicht nicht-lokal abgestrahlte Energie abzustrahlen. Das heißt, sie sollte nicht zu dünn sein. Im Prinzip müßte $\delta_{\mathrm{therm}} - \delta_{\mathrm{dyn}} \sim h_{\mathrm{dyn}}$ sein. Man könnte das anstatt $\ln y$ (Gl.(2.28)) als Definition verwenden. Dann haben wir das Problem, daß die Dicke der 2. Zone unter gewissen Umständen verschwinden soll (so wie in Abbildung 4.3). Zum Beispiel, wenn die Temperatur der dynamischen Randschicht sich nicht von der Temperatur der Keplerscheibe unterscheidet. Oder wenn der radiale Strahlungsfluß reduziert wird. Beide Definitionen haben ihre Makel. In dieser Arbeit wurde δ_{therm} über $\ln y$ festgelegt, was das kleinere Übel darstellt.

Daß es ein Verhältnis zwischen $\dot{M}$ und ζ gibt, ist durch die Arbeit von Popham & Narayan deutlich erkennbar. Es wäre also auch interessant, das Verhalten von ζ mit $\dot{M}$ zu erforschen. Jedoch ist stark anzunehmen, daß man dazu ausführlichere numerische Rechnungen durchführen müßte.

Literaturverzeichnis

[1] Bath, G.T., Pringle, J.E., Whelan, J.A.J., *MNRAS*, **190**, 185-194, (1980).

[2] Bath, G.T., Pringle, J.E., *MNRAS*, **199**, 267-280, (1982).

[3] Black, D.C., Matthews, M.S., eds. *Protostars & Planets II*, The University of Arizona Press, 1985.

[4] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., *Taschenbuch der Mathematik*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 25. Auflage, 1991.

[5] Cox, J.P., Giuli, R.T., *Principles of Stellar Structure, Vol. 1: Physical Principles*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1968.

[6] Duschl, W.J., Tscharnuter, W.M., *A&A* **241**, 151-158, (1991)

[7] Frank, King, Raine, *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press, 1985.

[8] Ferland, G.J., Lambert, D.L., McCall, M.L., Shields, G.A., Slovak, M.H., *ApJ*, **260**, 794-806, (1982).

[9] Grauer, A.D., Ringwald, F.A., Wegner, G., Liebert, J., Schmidt, G.D., Green, R.F., *AJ*, **108** (1), 214-221, (1994).

[10] Lightman, A.P., Eardley, D.M., *ApJ Lett*, **187**, L1-L3, (1974).

[11] Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E., *A&A*, **288**, 175-182, (1994).

[12] Patterson, J., Raymond, J.C., *ApJ*, **292**, 535-549, (1985).

[13] Patterson, J., Raymond, J.C., *ApJ*, **292**, 550-558, (1985).

[14] Popham, R., Narayan, R., *ApJ*, **442**, 337-357, (1995).

[15] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, 2nd ed.*, Cambridge University Press, 1992.

[16] Pringle, J.E., *ARA&A*, **19**, 137-162, (1981).

[17] Pringle, J.E., Bateson, F.M., Hassall, B.J.M., Heise, J., van der Woerd, H., Holberg, J.B., Polidan, R.S., van Amerongen S., van Paradijs, J., Verbunt, F., *MNRAS*, **225**, 73-92, (1987).

[18] Shakura, N.I., Sunyaev, R.A. *A&A*, **24**, 337-355, (1973).

[19] van der Woerd, H., Heise, J., *MNRAS*, **225**, 141-153, (1987).

[20] Verbunt, F., *A&AS*, **71**, 339-361, (1987).

[21] Warner, B., Nather, R., *MNRAS*, **152**, 219-229, (1971).

[22] Opacity Project: *http://astro.u-strasbg.fr/OP.html*

Danksagung

Vor allem vielen Dank an alle meine Freunde und meine Familie für deren moralische und praktische Unterstützung.

Vielen Dank an Herrn Duschl, denn ohne seine Hilfe wäre nichts zustande gekommen. Vor allem für die Zeit, die er sich genommen hat, um mir weiter zu helfen und mir das, was mir noch unverständlich war, zu erklären.

Vielen Dank an Peter Kreß, dem ich nicht nur erzählen und erklären konnte, und dabei selbst mehr gelernt habe, sondern der mir auch unter die Arme gegriffen hat bei meiner Grammatik und Vorschläge zur besseren Formulierung so wie Vorschläge ganz allgemein machte.

Zur Perfektionierung der Grammatik und Formulierung muß ich mich natürlich auch bei Alexandra Noky bedanken. Ihre Verbesserungsvorschläge wurden nur von der Ablenkung ihrer Anwesenheit überboten.

An alle Institutsmitglieder, Diplomanten, Doktoranten, Dozenten und Professoren, die für ein angenehmes Klima sorgten und immer offen für Fragen waren. Insbesondere Kerstin Weis, Bernd Vollmer und Thomas Beckert, mit denen ich die meisten Gesprächen führte.

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den .... Unterschrift: ....