Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Thomas Beckert
aus Pegnitz/Obf.

1995

Modellierung des Radio-Spektrums von Sagittarius A* mittels Synchrotronstrahlung

Die Diplomarbeit wurde von Thomas Beckert ausgeführt am
Institut für theoretische Astrophysik
unter der Betreuung von
Herrn Priv.-Doz. Wolfgang Duschl

Inhaltsverzeichnis

'You're really not going to like it,' observed Deep Thought.
'Tell us!'
'All right,' said Deep Thought. *'The Answer to the Great Question ... '*
'Yes ... !'
'Is ... ' said Deep Thought, and paused.
'Yes ... !'
'Is ... '
'Yes...!!!...?'
'Forty-two,' said Deep Thought, with infinite majesty and calm.

Douglas Adams, *The Hitch Hiker's Guide to the Galaxy*, Chap. 27

1 Einleitung - Motivation

Die vorliegende Arbeit behandelt ein mögliches Erklärungsmodell für das Radiospektrum von Sagittarius A* (Sgr A*), eine Quelle, die in mehrfacher Hinsicht eine Besonderheit in unserer Galaxie, der Milchstraße, darstellt. Sgr A* wurde 1974 erstmals von Balick und Brown als kompakte Radioquelle beschrieben, die auch mit der aktuellen Technik nicht aufgelöst werden kann. Ihre Lage bringt für die Beobachtung große Probleme, da sie eine Komponente der Molekülwolke Sgr A West darstellt. Die Extinktion im visuellen Bereich ist so stark, daß sie nicht mit normalen Teleskopen bei Wellenlängen kleiner 1 μm beobachtet werden kann. Die Position von Sgr A* stimmt sehr gut mit dem kinematischen Zentrum unserer Gallaxie überein. Die Informationen darüber stammen zum einen aus der Bewegung von Molekülwolken um das Zentrum, zum anderen, auf einer kleineren Längenskala, aus den Beobachtungen der NeII-Linie bei 12.8 μm , wie sie von Lacy, Achtermann & Serabyn (1991) und Gezari (1992) beschrieben werden. Die Identifizierung von Sgr A* mit irgendeiner Röntgenquelle, die von ROSAT, ART-P und SIGMA gesehen wird, ist sehr unsicher, da die Dichte der Quellen in dieser Region sehr groß ist und die Auflösung dieser Systeme nicht ausreicht. Sgr A* zeichnet sich durch eine enorme Leuchtkraft von mehreren $10^4 L_\odot$ allein im Radiobereich aus. Weiterhin ist die Form des Spektrum einzigartig für ein solches Objekt in der Milchstraße, da es über einen weiten Bereich von 1 bis 400 GHz ein invertiertes, das heißt mit der Frequenz ansteigendes Spektrum, zeigt. Die Lage, sowie seine Leuchtkraft, lassen es als schwaches Abbild der Kerne von aktiven Gallaxien erscheinen. Daher wurde bereits 1971 von Lynden-Bell & Rees, in Anlehnung an die Beobachtung aktiver Galaxien, die Vermutung geäußert, im Zentrum unserer Milchstraße ein schwarzen Loch zu finden. Derartige Objekte gelten heute als Standarderklärung für die enorme Leuchtkraft, die von fernen Quasaren erzeugt wird.

In den 50-er Jahren wurde die Synchrotronstrahlung bereits als astrophysikalischer Strahlungsprozeß, zum Beispiel von Westfold (1959), untersucht. Die erste grundlegende Arbeit stammt aber schon Julian Schwinger aus dem Jahr 1949, der sie im Hinblick auf Strahlungsverluste in Teilchenbeschleunigern betrachtete. Dieser Strahlungsmechanismus ist im folgenden noch häufig untersucht worden und hat Eingang in die Lehrbücher gefunden. Das Ziel dieser Arbeit ist es, die bekannte Theorie der Synchrotronstrahlung soweit zu entwickeln, daß sich für verschiedene Elektronenverteilungen die emittierten Synchrotronspektren berechnen lassen. Dazu werden wir in einem ersten Schritt die Bahn eines geladenen Teilchens in Magnetfeldern beschreiben.

Im Kapitel 3 leiten wir daraus das Spektrum der Synchrotronstrahlung eines Teilchens in homogenen Magnetfeldern ab und geben die aus der Literatur bekannten Näherungen in etwas modifizierter Form an. Im vierten Kapitel wird der Weg aufgezeigt, um von der Emission eines einzelnen Teilchens ausgehend, für verschiedene homogene und isotrope Elektronenverteilungen die Synchrotronspektren zu erhalten. Weiter werden wir mehrere Näherungen einführen, um die Berechnungen einfacher zu gestalten. Im Kapitel 5 unternehmen wir den Versuch das gemessene Spektrum von Sgr A* mit verschiedenen Elektronenverteilungen zu erklären. Die Eignung verschiedener Verteilungen wird unter anderem durch den Einfluß der Selbstabsorption in der Quelle beurteilt werden können.

Starten wollen wir mit einer Beschreibung der Bahn relativistischer Teilchen in Magnetfeldern aus fundamentallen Prinzipien.

2 Bewegung im homogenen Magnetfeld

Synchrotronstrahlung ist die Folge der Beschleunigung von relativistischen, geladenen Teilchen in Magnetfeldern. Wir nehmen an, daß die Bahn des Teilchens allein durch die Lorentzkraft bestimmt wird, die ein äußeres Feld ausübt. Wir vernachlässigen so gerade die Strahlungsverluste, deren Spektrum uns interessiert. Ob diese Annahme gerechtfertigt ist, muß im nachhinein geklärt werden.
Die Bewegung eines Teilchens der Ladung q in elektromagnetischen (el.-mag.) Feldern läßt sich nach Landau & Lifschitz (1992) aus einer Lagrangefunktion L ableiten.

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$$

Das el.-mag. Feld wird hier durch seine Potentiale $(\varphi, \vec{A})$ ausgedrückt, die im allgemeinen orts- und zeitabhängig sind. Der verallgemeinerten Impuls $\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}$ setzt sich aus dem kinetischen Impuls des Teilchens $\vec{p} = \gamma\, m\vec{v}$ und dem Vektorpotential zusammen. Ersetzt man die Geschwindigkeit durch den Impuls $\vec{P}$, so finden wir für die Hamilton-Funktion

$$H = c\sqrt{(mc)^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + q\varphi \tag{1}$$

Die Bewegung folgt aus den Lagrange-Gleichungen nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}P_i - \frac{q}{c}\nabla_i(\vec{A}\cdot\vec{v}) + q\nabla_i\varphi = 0$$

Bei der Untersuchung der abgestrahlten Leistung ist die kovariante Schreibweise der Bewegungsgleichungen hilfreich. Die Wirkung ist gegeben durch das Wegintegral über die Lagrange-Funktion entlang der Bahn des Teilchens zwischen den Punkten a und b .

$$S = \int L\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \left(-mc\mathrm{d}s - \frac{q}{c}A_\nu \mathrm{d}x^\nu\right)$$

Die Variation der Wirkung nach den Variablen $\mathrm{d}x^\mu$ führt auf die kovariante Form der Bewegungsgleichungen

$$mc\frac{\mathrm{d}u^\nu}{ds} \;=\; \frac{q}{c}F^{\nu\mu}u_\mu \tag{2}$$

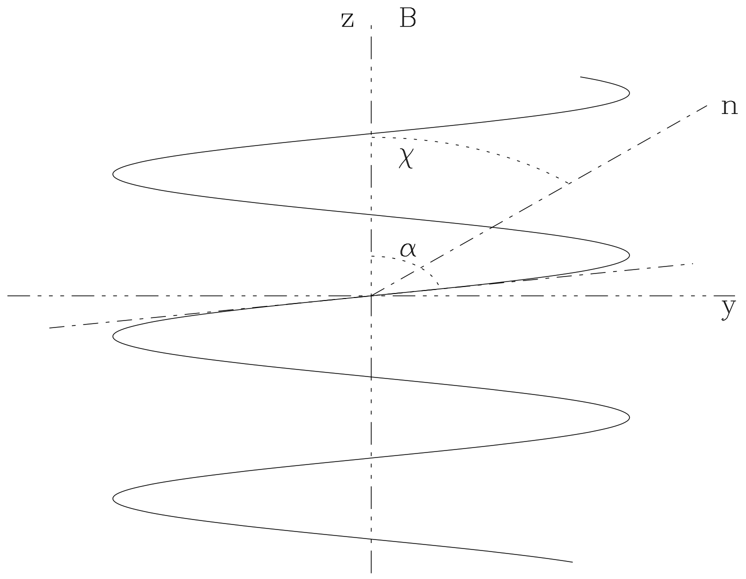

Abbildung 1: Projektion der Bahn eines geladenen Teilchens in einem homogenen und stationären Magnetfeld B längs der z-Achse auf die $(y$-$z)$-Ebene

mit $F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ als Feldstärketensor des elektromagnetischen Feldes.

Wir wollen nun annehmen, daß Raumladungen und somit statische elektrischen Felder keine Rolle spielen, d.h. $\vec{\nabla}\varphi = 0$. Das Magnetfeld soll in Raum- und Zeitbereichen, in denen die Bewegung für die Strahlung wichtig ist, homogen und stationär sein.

Der Gradient des Skalarprodukts von $\vec{A}$ mit $\vec{v}$ schreibt sich als

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{v}\times\vec{B}$$

wobei $\nabla\times\vec{A} = \vec{B}$ die magnetische Induktion ist, die wir im folgenden - in unkorrekter Weise - als Magnetfeldstärke bezeichnen werden. Die Differenzierung des verallgemeinerten Impuls $\vec{P}$ nach der Zeit führt zu den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)A_i \tag{3}$$

in denen die Zeitableitung der Vektorpotentials mit der angenommenen Zeitunabhängigkeit des Magnetfelds verschwindet. Der Index in (3) bezeichnet die Komponenten der vektoriellen Größen. Damit verbleibt nur ein Term, der vom Magnetfeld abhängt, und wir kommen zu dem bekannten Ergebnis, daß die Lorentzkraft die Bewegung bestimmt.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

Da keine explizite Zeitabhängigkeit in der Hamilton-Funktion auftritt, folgt die Erhaltung des Betrags der Geschwindingkeit und $\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2-|\vec{v}|^2}}$ ist konstant. So wird die Bewegungsgleichung für den kinetischen Impuls zu einer Gleichung für die Teilchengeschwindigkeit. Die Orientierung des Koordinatensystems, in dem wir die Bewegung beschreiben, ist von der Wahl des Magnetfelds als homogen und stationär, nicht betroffen. Wir wählen die Richtung des Magnetfelds als z-Richtung unseres Koordinatensystems. Die Feldstärke sei B.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{\gamma mc}\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist eine Kreisbewegung in (x,y)-Ebene mit der Kreisfrequenz $\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc}$ und einer gleichförmigen Bewegung in z-Richtung. Die Orientierung des Koordinatensystems wird endgültig fixiert durch die Richtung zum Beobachter $\vec{n}$, die in der (y,z)-Ebene liegen soll und mit dem Magnetfeld den Winkel χ einschließt. Wir haben noch die freie Wahl des Zeit-Nullpunkts und wir wählen ihn so, daß $\vec{v}(t=0) = v(0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ ist, wobei wir den Pitchwinkel α zwischen Magnetfeld $\vec{B}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eingeführt haben.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\chi \\ \cos\chi \end{pmatrix} \quad \vec{v}(t) = v\begin{pmatrix} \sin\alpha\ \sin\phi \\ \sin\alpha\ \cos\phi \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \begin{pmatrix} -R_B\ \cos\phi \\ R_B\ \sin\phi \\ tv\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

Als Parameter der Bahn haben wir den Winkel $\phi = \omega_B t$ gewählt, der mit ω_B, d.h. mit der Ladung, sein Vorzeichen und so den Drehsinn der Helix ändert. Die Bahn ist für Elektronen eine linkshändige Helix mit Radius

$$R_B = \frac{\gamma\beta mc^2}{qB}\sin\alpha.$$

Die Projektion der Teilchenbahn in die (y,z)-Ebene ist in Abbildung 1 veranschaulicht.

3 Die Strahlungsleistung

Die Bahn des Teilchen (4) stellt eine beschleunigte Bewegung dar, und strahlt deshalb el.-mag. Wellen ab. Die entstehenden zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Felder transportieren Energie, die der Bewegung des Teilchens entzogen wird. Dies spiegelt sich darin wieder, daß die Hamilton-Funktion (1) durch die Felder explizit zeitabhängig wird. Die Kopplung der Felder an die Bewegung des Teilchen wird durch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

ausgedrückt.

Die Intensität I der Strahlung ist die pro Zeiteinheit durch die Fläche dA in den Raumwinkel dΩ abgestrahlte Energie. Die vom Beobachter in einer Entfernung R gemessene Flußdichte S ergibt sich aus der Intensität I, multipliziert mit der Fläche des Empfängers $d\Omega R^2$. Die Flußdichte beim Beobachter läßt sich demnach aus dem Poynting-Fluß (Jackson 1962)

$$\tilde{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$$

und der Fläche R^2 zusammensetzen. Behandeln wir die Welle beim Beobachter als eben, so gilt $\vec{E} = \vec{n} \times \vec{B}$ und die Flußdichte bekommt die Gestalt

$$S = \frac{c}{4\pi} R^2 |\vec{E}|^2 = \frac{q^2}{4\pi c} |\vec{g}|^2 \tag{5}$$

Um das elektrische Feld durch die Bewegung des geladenen Teilchens (des Elektrons) auszudrücken, benötigen wir eine Darstellung, welche die Felder beim Beobachter durch die Bewegung der Ladung ausdrückt, wie dies die Liénard-Wichert-Potentiale leisten (Landau & Lifschitz 1992). Da das 4-er Potential ein Vektor (Tensor 1.-ter Stufe) ist, und wir seine Form in einem speziellen Koordinatensystem, das der ruhenden Ladung, kennen

$$\varphi = \frac{q}{R} = \frac{q}{c \cdot (t - t')} \quad , \quad \vec{A} = 0 \quad , \tag{6}$$

benötigen wir eine Darstellung durch Tensoren, die in dem speziellen Koordinatensystem die Form (6) hat. Ein solcher Vierervektor ist

$$A^\nu = q \frac{u^\nu}{R_\mu u^\mu}$$

mit der 4-er Geschwindigkeit u^ν

$$u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} = \gamma \beta^\nu \qquad \beta^\nu = \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

deren 0-Komponente gerade $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ist. Da Vektoren sich bei beliebigen Koordinatentransformationen linear und homogen transformieren, ist die angegebene Form eindeutig. R^μ ist hier die Koordinatendifferenz von Beobachter und dem Ort der Ladung zum retardierten Zeitpunkt t' der Emission. Dieser Abstand R zeichnet sich dadurch aus, daß $R^\mu R_\mu = 0$ ist, da das Ereignis der Emission durch den Schnittpunkt der Weltlinie des geladenen Teilchens mit dem rückwärtigen Lichtkegel des Beobachters gegeben ist.

$$R^\mu R_\mu = c \cdot (t - t') - R(t') = 0$$

Um aus den Potentialen die Felder $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$ und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ zu erhalten, muß nach den Koordinaten des Beobachters differenziert werden. Dies ist im Anhang B durchgeführt und ergibt als Resultat für das Strahlungsfeld

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{cR}\vec{g}(t') \\ \vec{B} &= \vec{n} \times \vec{E} \\ \vec{g}(t) &= \left.\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}(\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})\right|_{ret.} \end{aligned} \tag{7}$$

Der Vektor $\vec{g}$ ist eine Funktion der retardierten Koordinaten und drückt das Feld beim Beobachter durch diese aus. Dieses Vektorfeld hat die Dimension einer inversen Zeit, ist demnach nicht nur ein dimensionslos geschriebenes elektrisches Feld.

Die Abstrahlung von el.-mag. Wellen führt zum Energieverlust der beschleunigten Ladung an das Feld und der entsprechende Viererimpuls läßt sich aus der Dipolstrahlung im Ruhesystem der Ladung in gleicher Weise wie oben die Potentiale ableiten. Nach Landau & Lifschitz (1992) ist dieser gegeben durch

$$\mathrm{d}P^\nu = -\frac{2q^2}{3c}\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}x^\nu$$

Die Ableitung der Vierergeschwindigkeit nach dem Linienelement läßt sich durch die Bewegungsgleichung mit der Ursache der Beschleunigung, in unserem Fall dem vorgegebenen Magnetfeld, verbinden. Benutzen wir (2), so folgt

$$\mathrm{d}P^\nu = -\frac{2q^4}{3m^2c^5}(F_{\mu\sigma}u^\sigma)(F^{\mu\rho}u_\rho)\mathrm{d}x^\nu$$

Die abgestrahlte Energie ist die 0-Komponente dieses Vierervektors und schreibt sich für ein homogenes und stationäres Magnetfeld $\vec{B}$

$$\mathrm{d}E = \frac{2q^4}{3m^2c^5}(\vec{v}\times\vec{B})^2\gamma^2 dt$$

Verwenden wir den im Kapitel 2 eingeführten Pitch-Winkel α zwischen Magnetfeld und Geschwindigkeit, so ist die in alle Richtungen abgestrahlte Leistung gleich

$$L = \frac{2q^4\beta^2}{3m^2c^3}B^2\gamma^2\sin^2\alpha \tag{8}$$

Besteht Grund zu der Annahme einer isotropen Verteilung der Elektronen, so ist über eine Kugelschale im Impulsraum zu mitteln, und man erhält

$$\bar{L} = \frac{2q^4\beta^2}{3m^2c^3}B^2\gamma^2\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\alpha)\sin^2\alpha \;=\; \frac{4q^4\beta^2}{9m^2c^3}B^2\gamma^2 \tag{9}$$

Die in der Zeit Δt von der Quelle in einen Raumwinkel abgestrahlte Energie bekommen wir, indem wir die Energieflußdichte am Ort $\vec{x}$ multipliziert mit dem Quadrat des Abstands von der Quelle $R^2(\vec{x})$ in (5) über die Zeit integrieren.

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} \;=\; \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\,\frac{q^2}{4\pi c}|\vec{g}(t)|^2$$

In allen physikalisch relevanten Situationen können wir das Feld $\vec{g}$ durch seine Fouriertransformierte ausdrücken. Da wir Stöße der Elektronen untereinander und mit anderen Teilchen vernachlässigen und bei der Bestimmung der Teilchenbahn Strahlungsverluste nicht berücksichtigt haben, ist $\vec{g}(t)$ nicht quadratintegrabel. Die folgende Darstellung ist daher physikalisch sinnvoll, aber mit den bereits ausgeführten und den noch zu machenden Näherungen analytisch nicht realisierbar. Drücken wir $\vec{g}$ durch seine Fouriertransformierte aus,

$$\vec{g}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\vec{g}_\omega\,e^{-i\omega t} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{g}_\omega \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\vec{g}\,e^{i\omega t}$$

so finden wir für die insgesamt abgestrahlte Energie

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}\omega' \vec{g}_\omega \vec{g}^*_{\omega'} \delta(\omega-\omega') = \frac{q^2}{4\pi c}\int \mathrm{d}\omega\, \vec{g}_\omega \cdot \vec{g}^*_\omega$$

Um die abgestrahlte Energie als Funktion der Frequenz zu bestimmen, müssen wir die Fouriertransformierte von $\vec{g}$ kennen. Das Integral über die Zeit des Beobachters t läßt sich durch die retardierte Zeit $\tau + \frac{R(\tau)}{c} = t$ ausdrücken,

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau + \frac{\mathrm{d}R(\tau)}{c\,\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1 - \frac{\vec{R}}{R}\vec{\beta} = 1 - \vec{n}\vec{\beta}$$

wobei $\vec{R} = \vec{x} - \vec{r}(\tau)$ der Abstand von Quelle und Beobachter ($\vec{x}$) ist.

$$\Rightarrow \vec{g}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^2}(\vec{n}\times(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})e^{i\omega(\tau+\frac{R}{c})}$$

Ein Teil des Integranden läßt sich in einfacher Weise umschreiben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})}{1-\vec{n}\vec{\beta}} = \frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^2}\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}) \tag{10}$$

Ist die Bewegung, die durch R und $\vec{\beta}$ in (10) eingeht, zeitlich begrenzt, so kann man den Ausdruck für $\vec{g}_\omega$ partiell integrieren und man erhält den einfachen Ausdruck

$$\vec{g}_\omega = -i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, (\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta}))e^{i\omega(\tau+\frac{R}{c})}$$

Verschwindet in einer Näherung die Geschwindigkeit für unendliche Zeiten $t \to \pm\infty$ nicht, so ist $\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})$ sicher nicht quadratintegrabel. Es bleibt die Möglichkeit, die Bewegung formal zeitlich auf ein Interval $[t, t+\Delta t]$ einzuschränken, oder den Integranden mit einer Testfunktion (z.B. $e^{-\gamma\tau^2}$) zu multiplizieren und zu normieren, um die Quadratintegrabilität zu erzwingen. Ein anderer Ausweg besteht darin, die Bewegung als streng periodisch anzunehemen und $\vec{g}(t)$ in einer Fourierreihe zu entwickeln. Das Integral erstreckt sich entsprechend nur über eine Periode und führt auf ein diskretes Spektrum. Da wir bei der Beschreibung der Teilchenbahn Strahlungsverluste und andere Wechselwirkungen nicht berücksichtigt haben und wir willkürliche Grenzen vermeiden wollen, werden wir die letzte Möglichkeit wählen. Bevor wir damit fortfahren, suchen wir ein geschickteres Koordinatensystem, um die Rechnungen zu vereinfachen und den transversalen Charakter von el.-mag. Wellen im Vakuum auszunutzen.

3.1 Die Leistung in gedrehten Koordinaten

Für die weitere Berechnung der empfangenen Leistung ist es praktischer, ein Koordinatensystem zu verwenden, in dem der $\vec{n}$-Vektor, der die Richtung zum Beobachter angibt und demnach auch die zu untersuchende Ausbreitungsrichtung der Strahlung, der $\vec{e}_3$-Einheitsvektor im neuen Koordinatensystem ist. Die Komponenten aller Vektoren im neuen, gedrehten Koordinatensystem erhält man durch Multiplikation mit der Drehmatrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & -\sin\chi \\ 0 & \sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{n} \to \Lambda\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

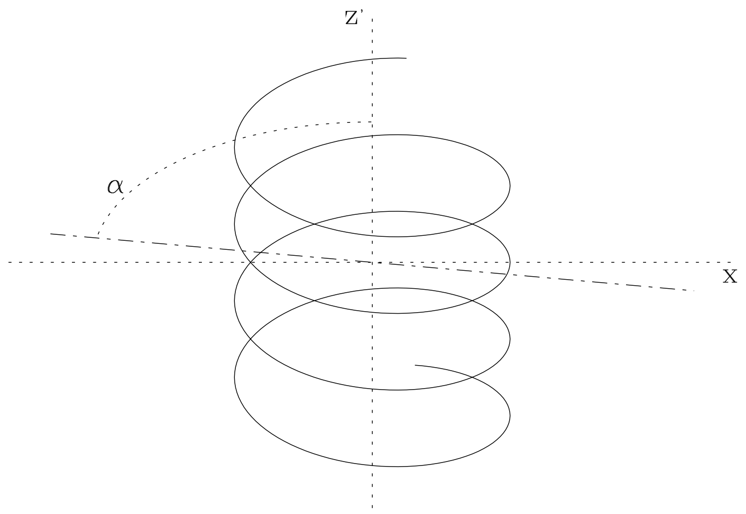

Abbildung 2: Projektion der Teilchenbahn auf die (x-z')-Ebene des gedrehten Koordinatensystems (Ansicht des Beobachters)

Der Vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ ausgedrückt in neuen Koordinaten hat die Gestalt

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 \; = \; \begin{pmatrix} -R_B \cos\phi \\ R_B \cos\chi \, \sin\phi \; - \; tv \sin\chi \, \cos\alpha \\ R_B \sin\chi \, \sin\phi \; + \; tv \cos\chi \, \cos\alpha \end{pmatrix}$$

in der $\vec{r}_0$ der Ort des Mittelpunkts der Spirale zur Zeit $\tau = 0$ im Quellgebiet ist. Damit läßt sich sofort die Geschwindigkeit in diesem Koordinatensystem angeben.

$$\vec{v} \; = \; v \begin{pmatrix} \sin\alpha \, \sin\phi \\ \cos\chi \, \sin\alpha \, \cos\phi \; - \; \sin\chi \, \cos\alpha \\ \sin\chi \, \sin\alpha \, \cos\phi \; + \; \cos\chi \, \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Die Bahn des Teilchens aus der Sicht des Beobachters ist in Abb.2 dargestellt. Der im Exponenten der Fouriertransformation auftretende Abstand $R(\tau)$ läßt sich in den neuen Koordinaten in einer Näherung leicht ausdrücken

$$R(\tau) \; = \; |\vec{x} - \vec{r}(\tau)| \; = \; \sqrt{x^2 + r^2 - 2\vec{x}\vec{r}} \; = \; x \; + \; \frac{-2\vec{x}}{2x}\vec{r} \; + \; \ldots \approx \; x \; - \; \vec{n}\vec{r}(\tau)$$

Nehmen wir an, daß die Ausdehnung der Quelle $\sim r_0$ klein ist gegen den Abstand zum Beobachter bei $\vec{x}$, so kann man alle zeitlich konstanten Beiträge gegen x vernachlässigen und der Exponent nimmt folgende Gestalt an

$$\exp\left[i\omega(\tau + \frac{R}{c})\right] = \exp\left[i\omega x/c + i\omega(\tau(1 - \beta\cos\alpha\,\cos\chi) \; - \; R_B/c\,\sin\chi\,\sin\phi)\right] \quad (11)$$

Auch der Ausdruck $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})$ erhält die einfache Form

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) \;=\; \beta \begin{pmatrix} -\sin\alpha\,\sin\phi \\ -\cos\chi\,\sin\alpha\,\cos\phi \;+\; \sin\chi\,\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um nun die empfangene Energie je Frequenzintervall und Raumwinkel auszudrücken, definieren wir die Größe $\frac{d^2W}{d\omega\, d\Omega}$ so, daß

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} \;=\; \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\omega \;=\; \frac{q^2}{4\pi c}\int_0^\infty \vec{g}_\omega \cdot \vec{g}^*_\omega\,\mathrm{d}\omega$$

Die spektrale empfangene Energie im Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ ist demnach die Größe

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega} \;=\; \frac{q^2}{4\pi c}\,\vec{g}_\omega \vec{g}^*_\omega$$

Da in unserer Betrachtung der Winkel zwischen der Geschwindigkeit zur Zeit $\tau \;=\; m\frac{2\pi}{\omega_B}$ und der Richtung $\vec{n}$ zum Beobachter für ganze Zahlen m immer konstant ist und der Abstand Beobachter-Emissionspunkt als konstant angenommen wird, ist der Integrand periodisch in τ. Daher ist es möglich den Vektor $\vec{g}(t)$ in einer Fourier-Reihe zu entwickeln

$$\vec{g}(t) \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{g}_m e^{im\omega' t} \qquad \vec{g}_m \;=\; \frac{\omega'}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega'}} \mathrm{d}t\,\vec{g}(t)e^{-im\omega' t}$$

Betrachten wir kurz die Zeitabhängigkeit der emittierten Leistung eines einzelnen Teilchens. Sie wird vorallem durch den Nenner von $\vec{g}(t)$ bestimmt, den wir um kleine Winkel entwickeln können.

$$1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta}(t) \approx 1 - \beta + \frac{\beta}{2}\theta(t)$$

Der Winkel $\theta(t)$ zwischen Beobachtungsrichtung und der momentanen Geschwindigkeit des Teilchens hat für $\tau = m\frac{2\pi}{\omega_B}$ ein Minimum $\theta\left(m\frac{2\pi}{\omega_B}\right) = |\vartheta| = |\alpha - \chi|$, wie man leicht sieht :

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{\beta}}{\beta} = \sin\chi\,\sin\alpha\,\cos(\omega_B t) \;+\; \cos\chi\,\cos\alpha$$

Die emittierte Leistung wird demnach für $\tau \;=\; m\frac{2\pi}{\omega_B}$ maximal und wir entwickeln zu diesen Zeiten den Nenner für ultrarelativistische Teilchen in ϑ und bemerken, daß die Winkelabhänigkeit für $\vartheta^2 \approx 2(1-\beta)$ wichtig wird. Mit $2 \approx 1+\beta$ kommen wir zu der Abschätzung

$$\vartheta_c \approx \sqrt{1-\beta^2} = \gamma^{-1}$$

Es wird sich zeigen, daß für große Frequenzen die Strahlung auf einen Winkelbereich $\vartheta < \vartheta_c$ beschränkt ist.

Ein Ensemble von Elektronen mit gleicher Energie und gleichem Pitchwinkel wird die Zeitabhängigkeit nicht zeigen (keine kohärenten Effekte) und wir führen ein mittleres Elektron ein, indem wir über die Leistung beim Beobachter mitteln, wobei die Frequenz ω' erst noch zu bestimmen ist.

$$\frac{\mathrm{d} < P(\alpha,\chi) >_t}{\mathrm{d}\Omega} \;=\; \frac{\omega'}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega'}} \mathrm{d}t\,\frac{q^2}{4\pi c}|\vec{g}(t)|^2 \;=\; \frac{q^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{2}\,|\vec{g_0}|^2 \;+\; \sum_{m=1}^{\infty}|\vec{g_m}|^2\right) \tag{12}$$

Der Koeffizient $\vec{g}_0$ ist proportional zum mittleren elektrischen Feld am Ort des Beobachters. Da die Quelle keine statischen Felder im Strahlungsfeld erzeugt, ist dieser Koeffizient gleich Null. Die übrigen Fourier-Koeffizienten erhalten wir in gleicher Weise wie die Fourier-Transformierte im vorigen Abschnitt, indem wir durch die retardierte Zeit τ substituieren. Zu beachten ist dabei die Umkehrung der Retardierung in den Integrationsgrenzen $t = h(\tau) = \tau + \frac{R(\tau)}{c}$. Sie ist möglich, da eine eindeutige Zuordnung von Emissionszeit und Empfangszeit für massebehaftete Teilchen ($\beta < 1$) besteht.

$$\vec{g}_m = \frac{\omega'}{2\pi} \int_{h-1(-\pi/\omega')}^{h^{-1}(\pi/\omega')} \mathrm{d}\tau \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \right) e^{-im\omega'(\tau + \frac{R(\tau)}{c})} \right\}$$

Führen wir wieder eine partielle Integration aus, so ist zu beachten, daß nicht von vornherein klar ist, ob die Randterme verschwinden. Dies ist, wie noch nachzuweisen bleibt, der Fall und wir erhalten als vorläufiges Ergebnis

$$\vec{g}_m = i\frac{m\omega'^2}{2\pi} \int_{h^{-1}(-\pi/\omega')}^{h^{-1}(\pi/\omega')} \mathrm{d}\tau \, (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}))\, e^{-im\omega'(\tau + \frac{R(\tau)}{c})}$$

Tatsächlich werden wir die Frequenz ω' so bestimmen, daß Randterme der partiellen Integration sich aufheben. Anders gesagt kann eine periodischen Bewegung durch unsere Transformation der Integrationsvariablen ihre Periodizität nicht verlieren. Dies wäre der Fall für eine zusätzliche, nicht periodische, beschleunigte Bewegung von Quelle oder Beobachter.

3.2 Retardierung und Integrationsgrenzen

Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, müßten wir die Retardierungsbedingung umkehren.

$$t = \tau + \frac{R(\tau)}{c} = \tau(1 - \beta \cos\chi \cos\alpha) - \frac{R_B}{c} \sin\chi \sin(\omega_B \tau) + \frac{x}{c} = h(\tau)$$

Wir wissen allerdings nicht, über welches Zeitintervall das Integral zu erstrecken ist, da die gemessene Frequenz ω' des Beobachters noch nicht festgelegt ist. Sie ergibt sich aus der Periode des Integranden, die nur in Bezug auf τ angegeben werden kann. Durch die ausgeführte Substitution der Integrationsvariablen $t \to \tau$ wird die Eigenschaft des Integrationsintervalls, sich über eine Periode des Integranden zu erstrecken, nicht verändert und wir können die Integrationsgrenzen - bezogen auf τ - direkt angeben : $h^{-1}(-\pi/\omega') = -\frac{\pi}{\omega_B}$ und $h^{-1}(\pi/\omega') = \frac{\pi}{\omega_B}$. Mit der Abkürzung $\eta = \beta \cos\alpha \cos\chi$ bekommen wir auch die Frequenz beim Beobachter in einfacher Form

$$\begin{aligned}
t_1 &= h\left(\frac{-\pi}{\omega_B}\right) = -\frac{\pi}{\omega_B}(1 - \eta) - \frac{\beta}{\omega_B} \sin\alpha \sin\chi \sin\left(\omega_B \frac{-\pi}{\omega_B}\right) \\
t_2 &= h\left(\frac{\pi}{\omega_B}\right) = \frac{\pi}{\omega_B}(1 - \eta) \\
\omega' &= \frac{2\pi}{t_2 - t_1} = \frac{\omega_B}{1 - \eta}
\end{aligned}$$

Sehen wir uns mit diesem Ergebnis die Randterme der partiellen Integration aus dem vorigen Abschnitt an, so hat $\frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v})}{1-\vec{n}\vec{\beta}}$ die Periode $\frac{2\pi}{\omega_B}$ und der Wert an den Integrationsgrenzen ist gleich. Die Sinus-Terme in $h(\pm\frac{\pi}{\omega_B})$ verschwinden und

$$e^{-im\frac{\omega_B}{1-\eta}\frac{\pi}{\omega_B}(1-\eta)} = e^{-im\pi} = e^{im\pi} = (-1)^m$$

Damit verschwinden die Randterme vollständig und wir erhalten das Ergebnis

$$\vec{g}_m = \frac{i\beta}{2\pi}\frac{m\omega_B}{(1-\eta)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi \begin{pmatrix} -\sin\alpha\,\sin(\phi) \\ -\cos\chi\,\sin\alpha\,\cos(\phi)+\sin\chi\,\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} e^{-im(\phi-\lambda\sin(\phi))} \quad (13)$$

im dem wir eine neue Funktion

$$\lambda = \frac{\beta\,\sin\alpha\,\sin\chi}{1-\eta} \quad (14)$$

eingeführt haben.

3.3 Das Linienspektrum eines Elektrons

Für die Harmonische $\vec{g}_m$ suchen wir interpretierbare Darstellungen, die uns zuerst auf Besselfunktionen vom Typ J_m führen werden.

Rigorose Behandlung der Integrale Das erste Integral von Interesse ist die x-Komponente von (13) ohne konstante Faktoren

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\,\sin\phi\,(\cos(m\phi - m\lambda\sin\phi) - i\sin(m\phi - m\lambda\sin\phi)) = f_1 \quad (15)$$

Der erste Term verschwindet wegen der Symmetrie des Integrationsintervalls und das Produkt zweier Sinus-Funktionen läßt sich in eine Summe umformen

$$f_1 = -2i\int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi\,\frac{1}{2}(\cos((m-1)\phi - m\lambda\sin\phi) - \cos((m+1)\phi - m\lambda\sin\phi))$$

Die Funktion $\lambda(\gamma,\alpha,\chi)$ (14) ist offensichtlich positiv für $0 \leq \alpha,\chi \leq \pi$ und auch kleiner eins, so daß wir eine Darstellung des Integrals durch eine Besselfunktion nach Abramowitz & Stegun (1972 [9.1.21]) angeben können.

$$\pi J_n(z) = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\cos(z\sin x - nx)$$

$$f_1 = -i\pi(J_{m-1}(m\lambda) - J_{m+1}(m\lambda)) = i2\pi J_m'(m\lambda)$$

In der gleichen Weise kann man die beiden anderen auftrettenden Integrale der y-Komponente von (13) behandeln und erhält

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\,(\cos(m\phi - m\lambda\sin\phi) - i\sin(m\phi - m\lambda\sin\phi)) = 2\pi J_m(m\lambda)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, \cos\phi\,(\cos(m\phi - m\lambda\sin\phi) - i\sin(m\phi - m\lambda\sin\phi)) = \frac{2\pi}{\lambda} J_m(m\lambda)$$

wobei wir von der Rekursionsbeziehung (Abramowitz & Stegun 1972 [9.1.27])

$$J_{m-1}(m\lambda) + J_{m+1}(m\lambda) = \frac{2m}{m\lambda} J_m(m\lambda)$$

Gebrauch gemacht haben. So bekommt man die angekündigte Darstellung von $\vec{g}_m$:

$$\vec{g}_m \;=\; i\beta\frac{m\omega_B}{(1-\eta)^2}\begin{pmatrix} -i\sin\alpha\, J'_m(m\lambda) \\ \left(\sin\chi\,\cos\alpha - \frac{1}{\lambda}\cos\chi\,\sin\alpha\right) J_m(m\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

3.4 Näherung für die Besselfunktion $J_m(m\lambda)$

Um eine bessere Vorstellung von der Form der Besselfunktionen $J_m(m\lambda)$ zu bekommen, können wir auf eine asymptotische Entwicklung für große m (exakt im Limes $m \to \infty$) zurückgreifen. Nach Abramowitz & Stegun (1972 [9.3.6]) gilt für den ersten Term der Entwicklung

$$J_m(m\lambda) = \left(\frac{4\xi}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{Ai}(m^{\frac{2}{3}}\xi)m^{-\frac{1}{3}}$$

und für die Ableitung von $J_m(m\lambda)$ nach dem Argument unter der gleichen Bedingung wie oben (Abramowitz & Stegun 1972 [9.3.43])

$$J'_m(m\lambda) = -\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1-\lambda^2}{4\xi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{Ai}'(m^{\frac{2}{3}}\xi)m^{-\frac{2}{3}}$$

Mit der Airschen Funktion Ai(x) , die wiederum durch modifizierte Besselfunktionen K_ν ausgedrückt werden kann (A. & S. [10.4.14] bzw. [10.4.16])

$$\mathrm{Ai}(m^{\frac{2}{3}}\xi) = \frac{m^{\frac{1}{3}}\sqrt{\xi}}{\pi\sqrt{3}} K_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}m\xi^{\frac{3}{2}})$$

und

$$\mathrm{Ai}'(m^{\frac{2}{3}}\xi) = -\frac{m^{\frac{2}{3}}\xi}{\pi\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3}m\xi^{\frac{3}{2}})$$

wobei der neue Parameter ξ durch

$$\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}} = \kappa = \ln\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} - \sqrt{1-\lambda^2}$$

definiert ist. Damit kommen wir zu der Näherung für $\vec{g}_m$:

$$\vec{g}_m \;=\; im\beta\frac{\omega_B}{(1-\eta)^2}\begin{pmatrix} -i\sin\alpha\,\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1-\lambda^2}{4\xi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\xi}{\pi\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}}(m\kappa) \\ \left(\sin\chi\,\cos\alpha - \frac{1}{\lambda}\cos\chi\,\sin\alpha\right)\left(\frac{4\xi}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{\xi}}{\pi\sqrt{3}} K_{\frac{1}{3}}(m\kappa) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Die modifizierten Besselfunktionen $K_\nu(z)$ besitzen ein Integraldarstellung

$$K_\nu(z) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\nu}{2}\pi\right)} \int_0^\infty \sin(z\sinh x)\, \sinh(\nu x)\, \mathrm{d}x$$

die mit (15) verglichen werden kann. Der Integrationsbereich ist nach ∞ ausgedehnt worden. Dies kann man so verstehen, daß nur Beiträge bei $\phi = 0$ wesentlich sind. Die Frage, ob die Bahn der Teilchen eine exakte Helix ist, wird in dieser Näherung unwichtig.

3.5 Weitere Näherungen

Da die emittierte Leistung mit γ^2 wächst, sind wir im weiteren an der Strahlung energiereicher Elektronen $\beta \to 1$ interessiert. Betrachtet man die ursprüngliche, zeitabhängige Form von $g(t)$, so kann man den Nenner für $t = 0$ um kleine Winkel $\vartheta = \alpha - \chi$ entwickeln

$$1 - \vec{k}\vec{\beta} \approx 1 - \beta(1 - \frac{\vartheta^2}{2})$$

$$\vartheta \approx \sqrt{2(1-\beta)} \approx \sqrt{(1-\beta)(1+\beta)} = \gamma^{-1}$$

Die stärkste Intensität beim Beobachter wird demnach von Elektronen mit $\alpha = \chi$ und großer Energie verursacht. In diesem Fall strebt $\lambda \approx \beta$ gegen 1 und κ gegen 0. Für kleine Harmonische $m\kappa \to 0$ kann man nach A.& S. (1972 [9.6.9]) die Näherung

$$K_\nu(m\kappa) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu)(\frac{m\kappa}{2})^{-\nu}$$

verwenden und erhält

$$\vec{g}_m \approx i\frac{\omega_B}{\sin^2\alpha} \begin{pmatrix} -i\sin\alpha\, \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\lambda} \left(\frac{1-\lambda^2}{4\xi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{3^{\frac{1}{6}}}{\pi} m^{\frac{1}{3}} \\ \sin(2\alpha)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{4\xi}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})3^{-\frac{1}{6}}}{4\pi} m^{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Fall sehr großer Frequenzen $\omega = \frac{m\omega_B}{\sin^2\alpha}$ findet man einen exponentiellen Abfall in den Harmonischen, entsprechend des ersten Terms einer Entwicklung der modifizierten Besselfunktion $K_\nu(z)$ für große Argumente.

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \ldots \right\}$$

Berücksichtigen wir nur den ersten Term, so finden wir

$$\vec{g}_m \approx i\frac{\omega_B}{\sin^2\alpha} \begin{pmatrix} -i\sin\alpha\, \frac{1}{\lambda}\left(1-\lambda^2\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} m^{-\frac{1}{2}} e^{-m\kappa} \\ \sin(2\alpha)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\lambda^2\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} m^{-\frac{1}{2}} e^{-m\kappa} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Exponent als Funktion der Kreisfrequenz beim Beobachter bringt uns zur kriti-

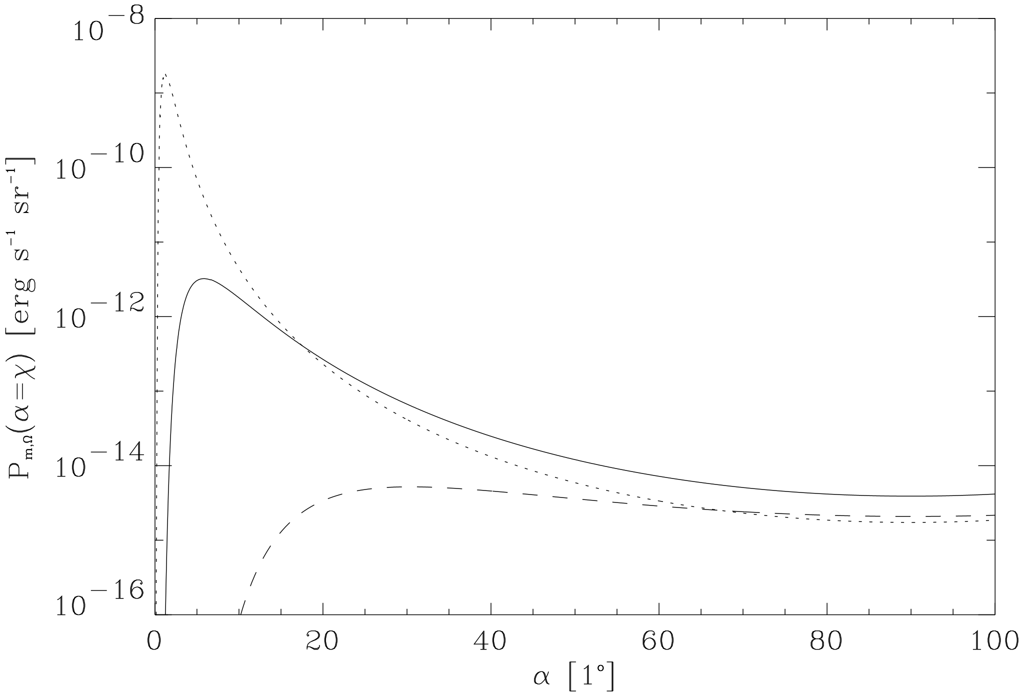

Abbildung 3: Leistung der nächsten Harmonischen zur Frequenz $\frac{1}{3}\omega_c$ für die Näherung $\alpha = \chi$ als Funktion von α. Die gepunktete Kurve entspricht $\omega = \frac{1}{15}\omega_c$ und die punktierte Kurve $\omega = \frac{5}{3}\omega_c$. Die Parameter sind das Magnetfeld $B = 10$G und die Energie der Elektronen $\gamma = 100$. Es ist nur die in x-Richtung polarisierte Strahlung verwendet worden.

schen Frequenz $\omega_c = \frac{\omega_B}{2\kappa \sin^2 \alpha}$, so daß der Exponentialfaktor die Form $e^{-\frac{\omega}{2\omega_c}}$ erhält. In dem betrachteten Spezialfall $\lambda \approx \beta$ können wir κ umschreiben, wenn wir berücksichtigen, daß

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \;\Rightarrow\; \kappa = \ln\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) - \frac{1}{\gamma}$$

ist. Entwickelt man den Logarithmus um 1, so folgt für κ

$$\kappa = \frac{1}{3\gamma^3} + \frac{1}{4\gamma^4} + \ldots$$

und die kritische Frequenz bekommt die Standardform, wie sie in Jackson (1962) angegeben ist,

$$\omega_c = \frac{3\gamma^3\omega_B}{2\sin^2\alpha} \tag{18}$$

wenn wir nur den ersten Term mitnehmen. Dieses Ergebnis können wir verwenden, um den Strahlungsfluß beim Beobachter zu ermitteln. Zuerst läßt sich ein Faktor im Fall kleiner Frequenzen weiter vereinfachen.

$$\frac{1-\lambda^2}{4\xi} \approx \quad 24^{-\frac{1}{3}}$$

und für $\beta(1-\frac{1}{\lambda})$ schreiben wir

$$\beta\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=\beta-1\approx-\frac{1}{2\gamma^2}$$

Im Fall $\omega\to\omega_B$ folgt daraus für die gemittelte Leistung am Empfänger

$$\frac{\mathrm{d}<P_\omega>_T}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{q^2}{(2\pi)^3c}\omega_B^{\frac{4}{3}}\qquad\left(48^{\frac{1}{3}}\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\omega}{\sin\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}+\right.$$
$$\left.+\,12^{-\frac{1}{3}}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\omega^2\sin\alpha}{\omega_B}\right)^{\frac{2}{3}}\cos^2\alpha\right)\tag{19}$$

Dabei entsprechen die beiden Summanden den unterschiedlichen Polarisationsrichtungen. Der dominierende erste Term ist proportional zu $\omega^{\frac{2}{3}}$ und $\gamma^{-\frac{4}{3}}$ und wird mit abnehmenden Pitch-Winkel α größer. Diese Komponente steht immer senkrecht zur Magnetfeldrichtung. Der zweite Term ist einer Orientierung des elektrischen Feldes längs der y'-Achse zuzuordnen, die immer eine Komponente parallel zum Magnetfeld aufweist.

Am anderen Ende des Spektrums, zu großen Frequenzen hin, ergibt sich für die empfangene Leistung

$$\frac{\mathrm{d}<P>_T}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{q^2\omega_B^3}{8\pi^2c\sin^4\alpha}\left(\frac{1}{\gamma\omega}+(1-\sin^2\alpha)\frac{1}{\gamma^3\omega}\right)e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}$$

ein exponentieller Abfall jenseits der kritischen Frequenz ω_c. Diese Näherung ist insofern inkonsistent, als die kritische Frequenz (18) mit kleiner werdendem Pitch-winkel α zunehmen soll, während die insgesammt emittierte Leistung (9) abnimmt und die Emission bei kleinen Frequenzen zunimmt. Die Abbildung 3 zeigt, daß die Leistung in einer Linie für Frequenzen $\omega<\omega_c(\alpha=\frac{\pi}{2})$ bei kleinen α ein Maximum besitzt, während für Frequenzen $\omega>\omega_c$ die Leistung vorwiegend von Elektronen mit großem α emittiert wird. Die Winkelabhängigkeit in (18) ist demnach irelevant. Zusätzlich ist die Beschränkung der Näherung (19) auf α deutlich größer als 0 zu erkennen. Die Einschränkung folgt schon aus der Tatsache, daß die Emission für $\alpha=0$ verschwindet, während der erste Term in (19) divergiert.

4 Das Spektrum monoenergetischer Elektronen

Da in allen denkbaren Situationen immer eine große Zahl von Elektronen zur beobachteten Synchrotronstrahlung beitragen, beschreiben wir sie durch eine Verteilung im Phasenraum $f(\vec{r},\vec{p})$, die wir als gegeben ansehen wollen. Als einfachsten Fall betrachten wir eine homogene, isotrope und monoenergetische Elektronenverteilung $f=n_0\delta(p-p_0)$ im Raumgebiet V. Die emittierte Leistung von so verteilten Elektronen P_f pro Raumwinkel ist dann

$$\frac{\mathrm{d}P_f}{\mathrm{d}\Omega}=\int_V\mathrm{d}^3x\int\mathrm{d}^3p\,f(\vec{r},\vec{p})\,\frac{\mathrm{d}<P>_T}{\mathrm{d}\Omega}=V\,2\pi\,n_0\,p_0^2\int_0^\pi\mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha\,\frac{\mathrm{d}<P>_T}{\mathrm{d}\Omega}$$

Die Gesamtzahl der beteiligten Elektronen sei N

$$N=\int_V\mathrm{d}^3x\int\mathrm{d}^3p\,f(\vec{r},\vec{p})=V\,4\pi\,n_0\,p_0^2$$

Benutzen wir die Fourierreihe für die Darstellung der ausgestrahlten Leistung eines Elektrons (12), dann erhält man das Ergebnis

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_f}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{Nq^2}{4\pi c}\int_0^\pi \mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\vec{g}_m|^2\right) = \\ &= \frac{Nq^2}{8\pi c}\sum_m \int_0^\pi \mathrm{d}\alpha \sin\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\;\delta\left(\omega - \frac{m\omega_B}{1-\eta}\right)|\vec{g}_m|^2\end{aligned}$$

Das Frequenzspektrum beim Beobachter können wir daraus leicht ablesen, wenn wir das Integral über den Polarwinkel α zuerst auswerten und berücksichtigen, daß $\eta = \beta\cos\alpha\,\cos\chi$ eine Funktion von α ist.

$$\frac{\mathrm{d}^2 P_f}{2\pi d\nu\, d\Omega} = \frac{Nq^2}{4\pi c}\sum_m\left(\sin\alpha_0\frac{(1-\eta(\alpha_0))^2}{m\omega_B\beta\sin\alpha_0\,|\cos\chi|}|\vec{g}_m(\alpha_0)|^2\right) \tag{20}$$

Die Bedingung für α_0 ist eindeutig und folgt direkt aus dem Argument der $\delta-$Funktion

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{\beta\cos\chi}\left(1 - \frac{m\omega_B}{\omega}\right) \tag{21}$$

Dies gilt nur solange $\chi \neq \pi/2$ erfüllt ist. In dem Fall, daß die Beobachtungsrichtung senkrecht auf der Magnetfeldrichtung steht, ist $\eta = 1$; die auftretenden Frequenzen sind $\omega = m\omega_B$ und das Spektrum bleibt auch für eine isotrope, monoenergetische Elektronenverteilung diskret, da in der Näherung (11) keine Dopplerverschiebung in Beobachtungsrichtung auftritt.

Aus der Bedingung (21) für $\cos\alpha_0$ wird direkt eine Einschränkung der Summationsgrenzen in (20), da folgende Bedingung erfüllt sein muß

$$\frac{\omega}{\omega_B}(1-\beta|\cos\chi|) \leq m \leq \frac{\omega}{\omega_B}(1+\beta|\cos\chi|)$$

damit $|\cos\alpha_0| \leq 1$ gewährleistet ist. Für $\alpha = \alpha_0$ wird $1-\eta(\alpha)$ zu

$$1 - \eta(\alpha_0) = \frac{m\omega_B}{\omega}$$

und wir sehen, daß sich die Gleichung (20) noch vereinfachen läßt zu

$$\frac{\mathrm{d}^2 < P >_t}{\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega} = \frac{Nq^2}{2c}\sum_m\left(\frac{\beta\omega^2}{m\omega_B|\cos\chi|}F(\alpha_0,\gamma,\chi)\right)$$

Mit der im folgenden Abschnitt behandelten Funktion F.

4.1 Das erste Synchrotronintegral

Es bleibt die Aufgabe $|\vec{g}_m|^2$ aus (13) zu berechnen :

$$|\vec{g}_m|^2 = \frac{(\beta m\omega_B)^2}{(2\pi)^2(1-\eta)^4}F(\alpha_0,\gamma,\chi) \tag{22}$$

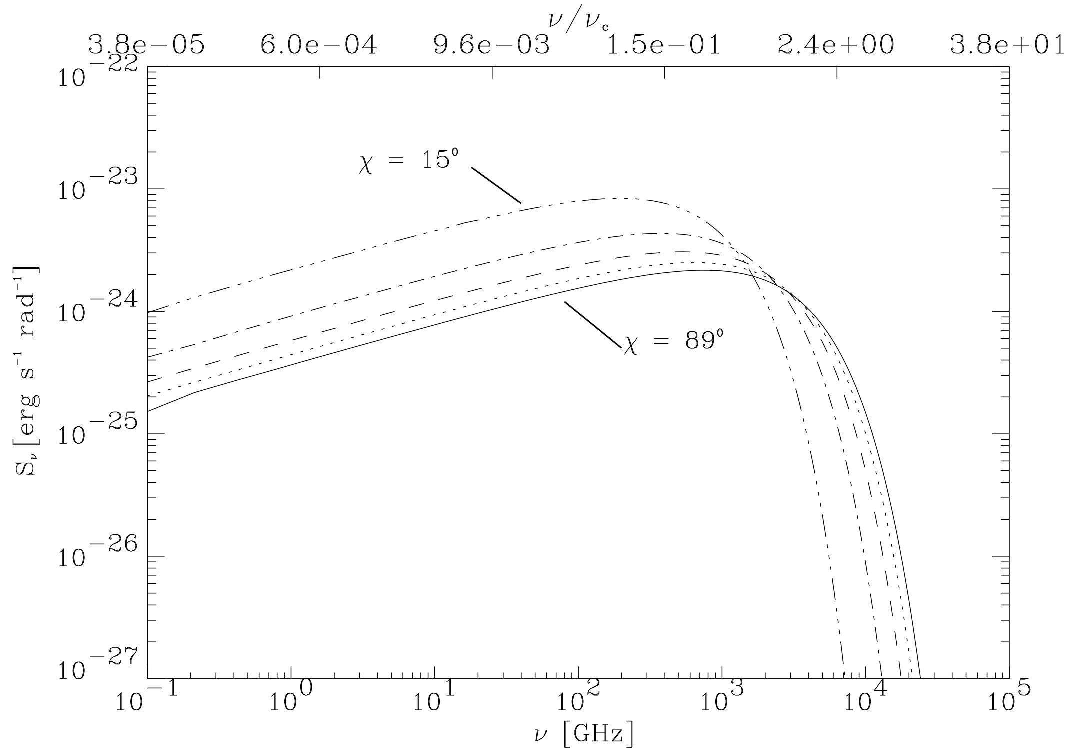

Abbildung 4: Strahlungsfluß der Synchrotronstrahlung von monoenergetischen Elektronen $\gamma = 250$ in einem Magnetfeld $B = 10$ G normiert auf ein Elektron. Der Einfluß des Winkel $\chi = 15^o, 30^o, 45^o, 60^o, 89^o$ zwischen Magnetfeldrichtung und Beobachter als Parameter auf die Schar von Spektren ist deutlich erkennbar.

Aus (16) gewinnen wir eine einfache Darstellung für F

$$\frac{F}{(2\pi)^2} = \sin^2\alpha_0 \left(J'_m(m\lambda)\right)^2 + (\sin\chi\,\cos\alpha_0 - \frac{1}{\lambda}\cos\chi\,\sin\alpha_0)^2\, J_m^2(m\lambda)$$

in der

$$\lambda = \frac{\beta\omega}{m\omega_B}\sin\alpha_0\,\sin\chi \tag{23}$$

keine einfache Gestalt erhält. D.h. die Interpretation als Geschwindigkeit β geht hier verloren und λ ist nun eine Funktion von (m, χ, ω, β), die hier keine klare Vereinfachung zuläßt. Um eine Vorstellung von weiteren möglichen Näherungen zu bekommen, suchen wir noch andere Darstellungen der Funktion F als Doppelintegral

$$\begin{aligned} F(\alpha_0, \gamma, \chi) &= \iint_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi\,(\sin^2\alpha_0\,\sin\phi\sin\psi + \sin^2\!\chi\,\cos^2\!\alpha_0 - \\ &- \cos\chi\,\sin\alpha_0\,\sin\chi\,\cos\alpha_0(\cos\phi + \cos\psi) + \cos^2\!\chi\,\sin^2\!\alpha_0\,\cos\phi\,\cos\psi)\,\times \\ &\times\,\exp[-im((\phi-\psi) - \lambda(\sin\phi - \sin\psi))] \end{aligned} \tag{24}$$

Von dieser Form von F wollen wir wieder zu den Besselfunktionen zurückfinden und dabei einen Faktor 2 erklären.

4.2 Alternative Bewertung der Integrale

Das Integral F können wir in einzelne Summanden aufteilen und exemplarisch den ersten Term untersuchen. $F_1 = \sin^2\alpha\, F_1'$

$$F_1' = \int \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\psi\ \sin\phi\ \sin\psi\, e^{-im((\phi-\psi)-\lambda(\sin\phi-\sin\psi))}$$

Wie im nächsten Abschnitt ausführlich beschrieben gehen wir zu den neuen Winkeln $x = \phi - \psi\,,\ y = \phi + \psi$ über und erhalten

$$F_1' = \frac{1}{4}\int_{-2\pi}^{2\pi} \mathrm{d}y \int_{-2\pi+|y|}^{2\pi-|y|} \mathrm{d}x(\cos x - \cos y)e^{-imx}e^{2im\lambda\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{y}{2}} \tag{25}$$

Mit der zusätzlichen Transformation $x \to 2x, y \to 2y$ gelangen wir zu der Form

$$F_1' = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}y \int_{-\pi+|y|}^{\pi-|y|} \mathrm{d}x(\cos 2x - \cos 2y)e^{2im\lambda\sin x\,\cos y - 2imx}$$

Zerlegen wir den zweiten Exponentialfaktor nach $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ und dehnen den Integrationsbereich über y nach $(-\pi, +\pi)$ aus, so verschwindet im Integral über x der Imaginärteil wegen der Antisymmetrie von $\sin(\sin x - x)$ und wir können folgende Darstellung der Besselfunktion J_n für gerade Ordnungen n nach A & S 9.1.21 verwenden und schreiben

$$\pi J_n(z) = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\,\cos(z\sin x - nx)$$

Das Vorzeichen von $z = 2m\lambda\cos y$ spielt eine wesentliche Rolle bei der Bestimmung der Ordnung, allerdings gilt hier die Bezeihung

$$J_{-n}(z) = (-)^n J_n(z) \qquad \text{A.\& S 9.1.5}$$

mit dem bekannten Produkt zweier Cosinus-Funktionen

$$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

kommen wir zu folgender Form für F_1'

$$\begin{aligned} F_1 &= \pi\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y(J_{2(m+1)}(z) + J_{2(m-1)}(z) - (4\cos^2 y - 2)J_{2m}(z))\right. \\ &+ \left.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}y(J_{-2(m+1)}(-z) + J_{-2(m-1)}(-z) - (4\cos^2 y - 2)J_{-2m}(-z))\right] \\ &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y(J_{2(m+1)}(z) + J_{2(m-1)}(z) - 2\cos 2y\,J_{2m}(z)) \end{aligned}$$

Auch diese Integrale sind in der Literatur bekannt (Gradshteyn & Ryzhik 1980 [6.519 u. 6.681])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\ J_{2\nu}(2z\cos x) = \frac{\pi}{2}\,J_\nu^2(z)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \cos(2\mu x)\, J_{2\nu}(2z\cos x) = \frac{\pi}{2} J_{\nu-\mu}(z)\, J_{\nu+\mu}(z)$$

$$F_1' = 2\pi^2 \left(J_{m+1}^2(m\lambda) + J_{m-1}^2(m\lambda) - 2\, J_{m+1}(m\lambda)\, J_{m-1}(m\lambda) \right)$$

Das Ergebnis ist ein einfaches Quadrat,

$$F_1' = 2\pi^2 \left(J_{m-1}(m\lambda) - J_{m+1}(m\lambda) \right)^2$$

das wir nach (A.&S. 1972 [9.1.27]) noch weiter vereinfachen können zu

$$F_1 = 2\pi^2 \sin^2\alpha \, \left(2J_m'(m\lambda) \right)^2 \tag{26}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit (8), so sehen wir, daß die Ausweitung des Integrationsgebietes genau einen Faktor 2 zuviel bringt. In gleicher Weise kann man die Integrale F_2, F_3, F_4 behandeln und erhält

$$\begin{aligned} F_2 &= 8\pi^2 \sin^2\chi \cos^2\alpha \, J_m^2(m\lambda) \\ F_3 &= -\frac{4\pi^2}{\lambda} \sin(2\chi)\, \sin(2\alpha)\, J_m^2(m\lambda) \\ F_4 &= \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \cos^2\chi \, \sin^2\alpha \, J_m^2(m\lambda) \end{aligned}$$

Da diese Integrale alle zur gleichen Polarisationsrichtung gehören, können wir sie zusammenfassen und den verbleibenden Winkelanteil zu einem Quadrat umformen.

$$\hat{F} = 2(2\pi)^2 J_m^2(m\lambda) \left(\sin\chi \, \cos\alpha - \frac{1}{\lambda} \cos\chi \, \sin\alpha \right)^2 \tag{27}$$

Der einzige Fehler, der durch die Ausweitung des Integrationsgebiets hinzutritt, ist ein Faktor 2. In allen weiteren Näherungen, in denen die Ausweitung des Integrationsgebiets verwendet wird, ist auf auf diesen Fehler korrigiert.

4.3 Entwicklung der Winkelfunktionen

Wir wissen bereits, daß wesentliche Beiträge zur Leistung für große m nur im Fall $\alpha_0 \approx \chi$ und damit $\lambda \approx 1$ auftreten. Um das Doppelintegral auszuwerten werden wir im ersten Schritt die Methode der Stationären Phase (z.B. Jeffreys & Jeffreys 1962) verwenden, die eine Entwicklung der Phase Ψ um deren Extremwert auf der reellen Achse (Sattelpunkt im Komplexen) benutzt.

$$\begin{aligned} \Psi &= -m((\phi - \psi) - \lambda(\sin\phi - \sin\psi)) \qquad (28) \\ \sin\phi - \sin\psi &= 2\sin\frac{(\phi-\psi)}{2} \cos\frac{(\phi+\psi)}{2} \end{aligned}$$

Um die Phase zu vereinfachen, führen wir noch eine Variablentransformation durch, wobei allerdings das Integrationsgebiet $G = [-\pi \le \phi \le \pi\,,\, -\pi \le \psi \le \pi]$ erhalten bleiben soll.

$$\phi - \psi = x\,, \qquad \phi + \psi = y \tag{29}$$

$$\text{Jacobi-Matrix} \quad \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \tag{30}$$

Im Inneren des Integrationsbereichs besitzt die Phase $\Psi(x,y)$ einen Extremwert bei $y=0$ und wir können die Phase bis zur 2-ten Ordnung in y entwickeln und erhalten

$$\Psi = -m(x - 2\lambda \sin\frac{x}{2}(1-\frac{y^2}{8}))$$

Das Integral nimmt damit die Gesalt

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}(F_1+F_2+F_3+F_4) \\
F_1 &= \frac{\sin^2\alpha_0}{4}\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(\cos x - \cos y)\exp[-im(x-2\lambda\sin\frac{x}{2}(1-\frac{y^2}{8}))] \\
&= \frac{\sin^2\alpha_0}{4}\int \mathrm{d}x e^{-im(x-2\lambda\sin\frac{x}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y(\cos x-\cos y)e^{-im\frac{\lambda}{4}\sin\frac{x}{2}\,y^2} \\
F_2 &= \frac{1}{2}\sin^2\chi\,\cos^2\alpha_0\int \mathrm{d}x\,e^{-im(x-2\lambda)\sin\frac{x}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,e^{-im\frac{\lambda}{4}\sin\frac{x}{2}\,y^2} \\
F_3 &= \frac{1}{4}\cos^2\chi\,\sin^2\alpha_0\int \mathrm{d}x\,e^{-im(x-2\lambda\sin\frac{x}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,(\cos x+\cos y)\,e^{-im\frac{\lambda}{4}\sin\frac{x}{2}\,y^2} \\
F_4 &= -\cos\chi\,\sin\chi\,\cos\alpha_0\,\sin\alpha_0\int \mathrm{d}x\,e^{-im(x-2\lambda\sin\frac{x}{2})} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\,e^{-im\frac{\lambda}{4}\sin\frac{x}{2}y^2}
\end{aligned}$$

an. Der hier zusätzlich eingeführte Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt die Erweiterung des Integrationsgebietes auf $G' = [-\pi < x, y < \pi]$, wodurch die Integrationsgrenzen des ersten auszuwertenden Integrals nicht mehr von der Integrationsvariable der zweiten Integration abhängt. Da die Ableitung des 2.-ten Exponenten nach y bei $y=0$ verschwindet, können wir die Methode der Stationären Phase verwenden, bei der wir die Amplitude um $y=0$ (Sattelpunkt des analytischen Exponenten für $y\in C$) entwickeln. Dies ist zulässig, da für $m\to\infty$ der Wert des Integrals durch den Integranden bei $y=0$ bestimmt wird, so daß wir außerdem die Integrationsgrenzen als $\pm\infty$ annehmen können (Ausweitung des ursprünglichen Integrationsgebiets G'). Das erste Integral

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\,e^{-im\frac{\lambda}{4}\sin\frac{x}{2}y^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\;e^{-im\frac{\lambda}{4}\sin\frac{x}{2}y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{m\lambda\,|\sin\frac{x}{2}|}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(\sin\frac{x}{2})} \tag{31}$$

ist in der Literatur als Fresnelsches Integral bekannt und sein Wert ist oben angegeben. Obwohl man die Integrale, deren Integranden mit y^2 zu divergieren scheinen, wenn man die Integrationsgrenzen nach $(-\infty,\infty)$ ausdehnt, nicht direkt ausrechnen kann, so läßt sich ihr Wert für $m\lambda x\to\pm\infty$ nach Anhang C doch abschätzen:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\,y^2\,e^{-im\frac{\lambda}{4}\sin\frac{x}{2}y^2} \approx \frac{-4i}{m\lambda\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{\pi}{m\lambda\,|\sin\frac{x}{2}|}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(\sin\frac{x}{2})}$$

Das Integral F_1 erhält in dieser Näherung die Form

$$F_1 = \frac{\sin^2\alpha_0}{2}\int \mathrm{d}x\,\left(\cos x - 1 - \frac{i}{m\lambda\sin\frac{x}{2}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{m\lambda\,|\sin\frac{x}{2}|}}e^{-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(\sin\frac{x}{2})}e^{-im[x-2\lambda\sin\frac{x}{2}]} \tag{32}$$

In dieser Form divergiert der Integrand für $x \to 0$, d.h. wir haben bei dieser Näherung einen wesentlichen Fehler gemacht. Betrachtet wir dazu unser ursprüngliches Integrationsgebiet für $y = \phi + \psi \in [-2\pi, 2\pi]$, so ergibt das Integral für $x = 0$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \mathrm{d}y\,(1 - \cos y) = 4\pi$$

D.h. die Divergenz für $x \to 0$ rührt von der Integralabschätzung her.

Wenden wir diese Abschätzungen an und ordnen die Terme um, so erhält man

$$\begin{aligned} F(\chi) &= \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi} \mathrm{d}x \exp\left[-im\left(x - 2\lambda \sin\frac{x}{2}\right)\right] \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right] \times \\ &\times \sqrt{\frac{\pi}{m\lambda\left|\sin\frac{x}{2}\right|}} \left(\frac{\sin^2\alpha_0}{2}\left(\cos x - 1 - \frac{i}{m\lambda\sin\frac{x}{2}}\right) + \right. \\ &+ \left(\sin\chi\,\cos\alpha_0 - \cos\chi\,\sin\alpha_0\,\cos\frac{x}{2}\right)^2 + \\ &+ \left.\frac{\cos\chi\,\sin\alpha_0}{2}\left(\cos\chi\,\sin\alpha_0 - \sin\chi\,\cos\alpha_0\,\cos\frac{x}{2}\right)\frac{i}{m\lambda\sin\frac{x}{2}}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

Wir wollen nun den reellen Charakter von F sehen und schreiben dazu die komplexen Exponentialfunktionen in Cosinus- und Sinus-Terme um. Zusätzlich transformieren wir die Integrationsvariable $x \to 2x$ und nutzen die Symmetrie des Integrationsintervalls, sowie des Integranden um imaginäre Terme verschwinden zu lassen.

$$\begin{aligned} F &= 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\,(\cos(2mx - 2m\lambda\sin x) - \sin(2mx - 2m\lambda\sin x))\sqrt{\frac{\pi}{2m\lambda|\sin x|}} \times \\ &\times \left(\sin^2\alpha_0\,\sin^2 x + (\sin\chi\,\cos\alpha_0 - \cos\chi\,\sin\alpha_0\,\cos x)^2\right) \\ &- 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\,(\sin(2mx - 2m\lambda\sin x) + \cos(2mx - 2m\lambda\sin x))\sqrt{\frac{\pi}{2m\lambda|\sin x|}} \times \\ &\times \left(\sin^2\alpha_0 - \cos\chi\,\sin\alpha_0(\cos\chi\,\sin\alpha_0 - \sin\chi\,\cos\alpha_0\,\cos x)\right)\frac{1}{2m\lambda\sin x} \end{aligned}$$

4.4 Mittelung über alle Magnetfeld-Richtungen

In astrophysikalisch vorstellbaren Situationen ist nicht davon auszugehen, daß eine Magnetfeldrichtung ausgezeichnet ist, vorallem dann, wenn wir ein turbulentes Plasma mit hinreichend hoher Leitfähigkeit als Quellgebiet annehmen. Dazu mitteln wir über den Winkel χ zwischen Beobachter und Magnetfeldrichtung. Dabei ist P_f - wie in (20) - die emitierte Leistung von Elektronen, deren Impulse durch die Verteilungsfunktion f beschrieben werden, normiert auf ein mittleres Elektron.

$$\frac{\mathrm{d}^2 P_f}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega} \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\chi\,\sin\chi\frac{\mathrm{d}^2 P_f}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}^2 \bar{P}_f}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega}$$

Vertauschen wir Integration mit Summation, so können wir schreiben

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}_f}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega} = \frac{Nq^2}{16\pi c^3}\sum_m \int \mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha \int \mathrm{d}\chi\,\sin\chi\,\delta\left(\omega - \frac{m\omega_B}{1-\eta}\right)|\vec{g}_m|^2 \tag{34}$$

Die in (16) gezeigte Winkelverteilung der Strahlung legt es nahe zu Summe und Differenz der Winkel α und χ überzugehen, um dann das Integral über $\varphi = \alpha + \chi$ mit der $\delta-$Funktion auszuführen. Die Jacobi-Determinante der zugehörigen Variablentransformation ist wieder $\frac{1}{2}$ und die winkelabhängigen Größen lauten nun

$$\begin{array}{l} \vartheta = \alpha - \chi \\ \varphi = \alpha + \chi \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2\alpha = \vartheta + \varphi \\ 2\chi = \varphi - \vartheta \end{array} \tag{35}$$

$$1 - \eta = 1 - \frac{\beta}{2}(\cos\vartheta + \cos\varphi) \tag{36}$$

$$\lambda = \frac{\beta(\cos\vartheta - \cos\varphi)}{2 - \beta(\cos\vartheta + \cos\varphi)} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} |\vec{g}_m|^2 &= \frac{(m\beta\omega_B)^2}{(1-\eta)^4}\left(\frac{1}{2}(1 - \cos\vartheta\,\cos\varphi + \sin\vartheta\,\sin\varphi)J'^2(m\lambda) + \right. \\ &+ \left.\frac{1}{4}\left(\sin\varphi - \sin\vartheta - \frac{1}{\lambda}(\sin\varphi + \sin\vartheta)\right)^2 J_m^2(m\lambda)\right) \end{aligned} \tag{38}$$

Wollen wir das Integral über φ zuerst auswerten, so ist zu sehen, daß die Integrationsgrenzen nicht mehr unabhangig von der ϑ-Integration sind, da das Integrationsgebiet erhalten bleibt. Diese Einschränkung läßt sich leicht aus den Grenzen für α, χ verstehen.

$$\begin{array}{l} 0 \le 2\alpha = \vartheta + \varphi \le 2\pi \\ 0 \le 2\chi = \varphi - \vartheta \le 2\pi \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad |\vartheta| \le \varphi \le 2\pi - |\vartheta|$$

Die Nullstellen des Arguments der $\delta-$Funktion liegen bei

$$\cos\varphi_i = \frac{2}{\beta}\left(1 - \frac{m\omega_B}{\omega}\right) - \cos\vartheta \tag{39}$$

und dessen Ableitung nach φ ist notwendig um nach der bekannten Beziehung

$$\int \mathrm{d}\varphi\, g(\varphi)\,\delta(f(\varphi)) = \sum_i \frac{g(\varphi_i)}{|f'(\varphi)|_{\varphi=\varphi_i}}$$

zu sehen, daß in unserem Fall $f'(\varphi) = \frac{m\omega_B}{(1-\eta)^2}\frac{\beta}{2}\sin\varphi$ ist und es zwei Lösungen $\varphi_0, \varphi_0' = 2\pi - \varphi_0$ für die Gleichung $f(\varphi) = 0$ gibt. Eine Ausnahme bildet der Fall $\cos\varphi_0 = \pm 1$, der für die φ-Werte $0, \pi, 2\pi$ auftreten kann.

Eine weitere Einschränkung für die Existenz zweier Lösungen folgt aus den Integrationsgrenzen der φ-Integration und wir müssen fordern, daß

$$\cos\vartheta \ge \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{m\omega_B}{\omega}\right)$$

erfüllt ist. Ist dies der Fall, so bemerken wir, daß in der Summe über φ_i sich die Terme $\propto \sin\varphi$ gegenseitig aufheben. Wir erhalten so

$$\lambda = \frac{\omega}{m\omega_B}\left(\beta\cos\vartheta - \left(1 - \frac{m\omega_B}{\omega}\right)\right) \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega} &= \frac{Nq^2}{32\pi c}\sum_m \frac{2\beta\omega^2}{m\omega_B}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\left(\cos\vartheta - \frac{1-\frac{m\omega_B}{\omega}}{\beta}\right)\frac{1}{|\sin\varphi_0|}\times \\ &\times \left[(1-\cos\vartheta\,\cos\varphi_0)J_m'^2(m\lambda)+\frac{1}{2}\left(\sin^2\varphi_0\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \right.\right. \\ &+ \left.\left.\sin^2\vartheta\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2\right)J_m^2(m\lambda)\right]\end{aligned} \tag{41}$$

Um das Integral über die Differenz $\vartheta = \alpha - \chi$ von Pitchwinkel α und Beobachtungswinkel zum Magnetfeld χ auszuführen, gehen wir zur Entwicklung der Winkelfunktionen aus Abschnitt 4.3 zurück. Dabei werden aus den Quadraten der Besselfunktionen Integrale über Differenz $x = \phi - \psi$ und Summe $y = \phi + \psi$ der Azimuth-Winkel, die die Teilchenbahn parametrisieren. Das Integral über y kann wieder im Sinne der Sattelpunktsmethode angenähert werden. Verwenden wir nur den ersten Term der entsprechenden asymptotischen Entwicklung, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega} &= \frac{Nq^2}{8\pi c}\sum_m \frac{\beta\omega^2}{m\omega_B}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\frac{\cos\vartheta-\xi}{|\sin\varphi_0|(2\pi)^2}\int_{-2\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{\pi}{m\lambda|\sin\frac{x}{2}|}}\times \\ &\times \exp\left[-im\left(x-2\lambda\sin\frac{x}{2}\right)\right]\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right]\times \\ &\times \left[-\sin\frac{x}{2}(1-\cos\vartheta\,\cos\varphi_0)+(\cos^2\vartheta+\cos^2\varphi_0)\cos\frac{x}{2} + \right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}(\sin^2\vartheta+\sin^2\varphi_0)\right]\end{aligned} \tag{42}$$

Hier haben wir als neue Funktion $\xi = \left(1-\frac{m\omega_B}{\omega}\right)\beta^{-1}$ eingeführt.

Der erste Term der Summe kommt von den senkrecht zu Beobachtungsrichtung und Magnetfeld polarisierten Anteilen der Strahlung. Die beiden folgenden Terme von den dazu senkrecht polarisierten Anteilen. Bei vollständiger Isotropie ist diese Aufteilung nicht mehr möglich. Sie wird allerdings nicht durch die ϑ-Integration erreicht, da dies nur die Mittelung über den Polarwinkel der Richtungsverteilung des Magnetfeldes entspricht. Die Isotropie wird durch Integration über den zugehörigen Azimuthwinkel verwirklicht, von dem die angegebenen Formeln nicht abhängen und die sich in der Beobachtung durch vollständig unpolarisierte Strahlung zeigt.

Das Integral über ϑ werten wir durch die gleiche asymmptotische Reihe aus, wenn wir den $\cos\vartheta$ in λ (40) bis zur 2.-ten Ordnung entwickeln und so im Exponenten einsetzen. In allen anderen ϑ-abhängigen Faktoren nehmen wir nur den Term 0-ter Ordnung für $\vartheta = 0$ mit. So bekommen wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega} &= \frac{Nq^2}{(8\pi)^2 c}\sum_m \frac{\omega}{m}\frac{1-\xi(m)}{\sqrt{\xi(m)}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\quad\times \\ &\times\quad i\exp[-2im(x-\lambda_0\sin x)]\left[\sin x\ -\xi(m)\frac{(1-\cos x)^2}{\sin x}\right]\end{aligned} \tag{43}$$

λ_0 ist jetzt nur noch eine Funktion der Harmonischen m als $\lambda_0 = 1 - \frac{\omega(1-\beta)}{m\omega_B}$, die für ultrarelativistische Geschwindigkeiten praktisch gleich eins ist. Außderdem folgt eine weitere Einschränkung für den erlaubten Wertebereich von ξ aus der Entwicklung der Winkelfunktionen um $\vartheta = 0$. Damit der Winkel φ_i in (39) sinnvoll definiert ist, muß nun

$$\cos\varphi_i = 2\xi - 1 \qquad \Rightarrow \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

erfüllt werden.

4.5 Näherungen nach der Sattelpunktsmethode

Zur Auswertung des Integrals in (43) interpretieren wir die Integrationsvariable als komplexe Zahl $x \in C$. Der Integrand ist analytisch mit Ausnahme von $x = 0$, läßt sich aber in diesem Punkt problemlos fortsetzten. Für den Exponenten führen wir die Funktion $h(x) = -i(x - \lambda_0 \sin x) = \Phi + i\Psi$ ein mit dem Realteil Φ und Imaginärteil Ψ sowie

$$f(x) = i\left(\sin x \; - \; \xi\frac{(1-\cos x)^2}{\sin x}\right) \tag{44}$$

Die reelle Funktion Φ ist in Abb.5 gezeigt. Das Integral ist entlang der reellen Achse nicht leicht auswertbar, wenn wir seinen Wert für sehr große m berechnen wollen. Da der Integrand analytisch ist, können wir nach dem Cauchyschen Integralsatz einen beliebigen Weg $\mathcal{C}$ von $x = -\pi$ nach $x = \pi$ wählen. Ein geeigneter Integrationsweg verläuft auf Wegen mit konstantem Imaginärteil Ψ, da auf ihnen die Variation des Realteil Φ maximal ist. Von dieser Eigenschaft leitet sich die englische Bezeichnung 'method of steepest descents' (Watson 1944) oder der Begriff der Stationären Phase ab. Ein solcher Weg sollte zusätzlich durch einen Sattelpunkt bei $x = \pm i\epsilon$ verläufen. Der Sattelpunkt ist wichtig bei der Berechnung des Integrals, wenn der Realteil des Exponenten Φ in ihm ein Maximum auf $\mathcal{C}$ annimmt. Dies trifft auf $x = -i\epsilon$ zu und der entsprechende Weg ist in Abb.6 dargestellt.

$$I \; = \; \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, e^{2mh(x)} f(x) \; = \; \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}x\, e^{2mh(x)} f(x) \tag{45}$$

Die Sattelpunkte erhalten wir aus

$$\begin{aligned} h(x) &= \Phi(x) + i\Psi(x) \qquad & \Psi &= -u + \lambda_0 \sin u \cosh v \\ x &= u + iv & \Phi &= v - \lambda_0 \cos u \sinh v \end{aligned} \tag{46}$$

$$h'(x_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = 2n\pi \pm i\epsilon = 2n\pi + i \ln\left(\frac{1}{\lambda_0} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - 1}\right) \tag{47}$$

Beschränken wir uns auf einen Streifen $-\pi \leq \Re(x) \leq \pi$, d.h. $n = 0, \pm 1$, so verschwindet der Imaginärteil Ψ in beiden Sattelpunkten und Wege konstanten Imaginärteils sind gekennzeichnet durch $\Re(x) = n\pi$ und

$$n\pi + u = \lambda_0 \sin u \cosh v$$

Für ungerade n verlaufen die Wege $\Re(x) = u = n\pi$ nicht durch einen Sattelpunkt und für gerade n nimmt Φ in $x_1 = -i\epsilon$ ein Minimum an. Zerlegen wir den komplexen Sinus und Cosinus in Real- und Imaginärteil

$$\sin x = -(\sin u \cosh v + i \cos u \sinh v)$$

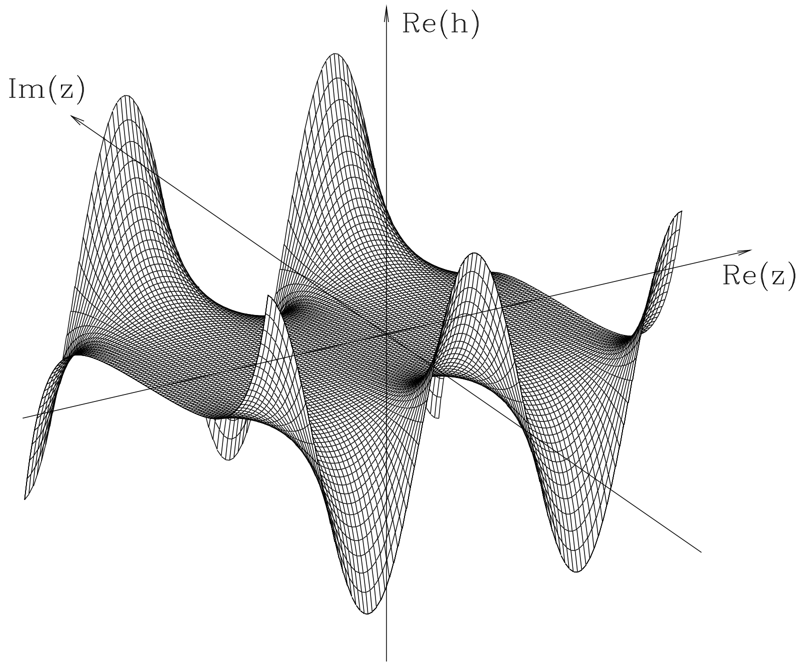

Abbildung 5: Realteil der Funktion $h(z) = -i(z - \lambda_0 \sin z)$ im Bereich $-2\pi < \Re(z), \Im(z) < 2\pi$ für $\lambda_0 = 0.93$. Die Wahl von λ_0 ist nicht an praktischen Werten orientiert, sondern folgt aus $B = 10.0$G, $\gamma = 4$, $\omega = 1$ GHz sowie $m = 10$ und eignet sich für die gezeigte Figur. Tatsächlich ist $\lambda_0 \approx 1$ und die beiden Sattelpunkte bei x_1 und x_2 fallen nahezu zusammen.

$$\cos x = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v$$

so sehen wir, daß auf den Wegen $\Re(x) = \pi$ und $\Re(x) = -\pi$ die Integranden völlig identisch sind. Wollen wir auf dem Integrationsweg $\mathcal{C}$ von $x = -\pi$ über $x = (-\pi, -i\infty)$, von dort durch den Sattelpunkt und über $x = (\pi, -i\infty)$ nach $x = \pi$ gelangen, so heben sich die Wegstrecken mit $\Re(x) = \pm\pi$ gegenseitig auf. Deshalb genügt es, den zweiten Wegabschnitt durch den Sattelpunkt zu betrachten. Die Werte von $h(x)$ in den Sattelpunkten $x_{1,2} = \pm i\epsilon$ sind

$$h(\pm i\epsilon) = \pm(\epsilon - \lambda_0 \sinh \epsilon)$$

Das zu berechnende Integral (45) ist also

$$I = \int_{-\pi-i\infty}^{\pi-i\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{mh(x)}$$

in dem wir eine neue Integrationsvariable $\zeta^2 = h(-i\epsilon) - h(x)$ einführen wollen. $h(x) - h(-i\epsilon)$ ist auf dem Weg $\mathcal{C}$ reell und negativ, da $h(x)$ in $x = -i\epsilon$ auf $\mathcal{C}$ ein Maximum hat. In einer Reihenentwicklung von $h(x)$ um $x = -i\epsilon$ verschwindet der Term erster

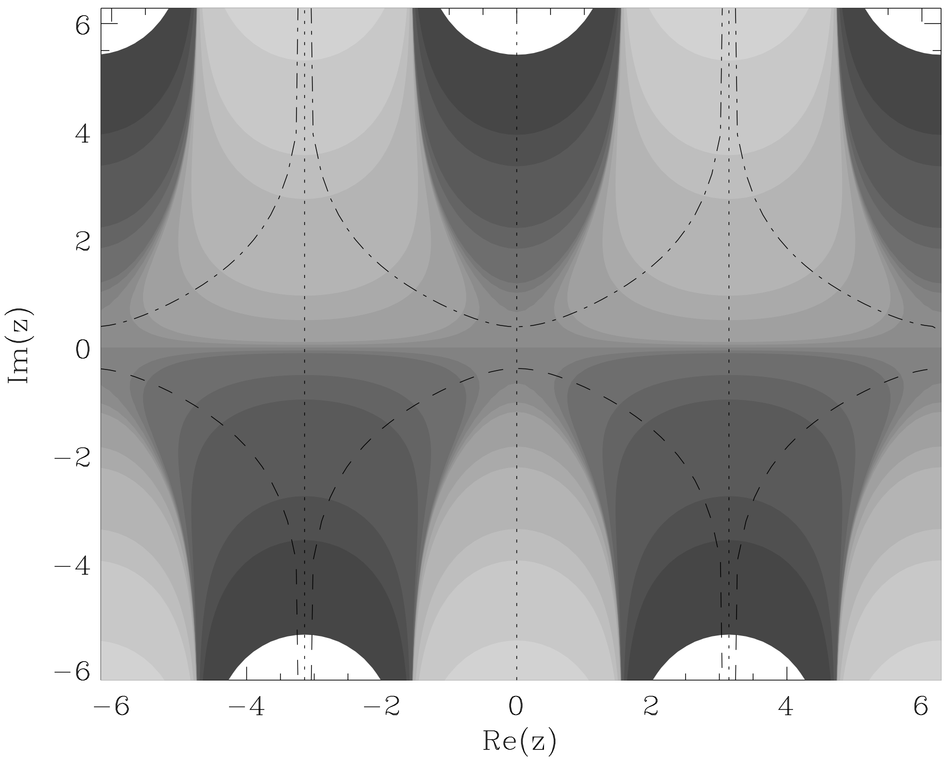

Abbildung 6: Konturlinien des Realteils der Funktion $h(z) = -i(z - \lambda_0 \sin z)$ im Bereich $-2\pi < \Re(z), \Im(z) < 2\pi$ für $m = 10$ und $\lambda_0 = 0.93$. Die Funktionswerte sind $-100, -20, -10, -2, -1, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 1, 2, 10, 20, 100$. Die gestrichelt eingezeichneten Kurven sind Wege entlang des Gradienten des Realteils durch die Sattelpunkte und gleichzeitig Wege auf denen der Imaginärteil konstant ist. Die Wahl der Parameter entspricht Abb.5 .

Ordnung in x und in zweiter Ordnung ist $\zeta^2 \propto (x + i\epsilon)^2$. Da die Funktion $f(x)$ nach (44) nicht symmetrisch ist bezüglich einer Spiegelung an der imaginären Achse $u \to -u$, spalten wir das Integral bei $x = -i\epsilon$ in zwei Teilwege $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ auf.

$$I = e^{mh(-i\epsilon)} \left(\int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} \right) \mathrm{d}\zeta \, f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta} e^{-m\zeta^2} \tag{48}$$

$$\text{mit } \zeta = \sqrt{-\epsilon + \lambda_0 \sinh \epsilon + i(x - \lambda_0 \sin x)} \tag{49}$$

Untersuchen wir zuerst das zweite Integral entlang $\mathcal{C}_2$. Die Ableitung $\zeta'(x)$ verschwindet bei $x = -i\epsilon$, da ζ dort sein Maximum auf der Kurve $\mathcal{C}$ erreicht. An dieser Stelle ist es Zeit eine neue, in $x = -i\epsilon$ analytische Funktion $g(x)$ einzuführen

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta} f(x) = \frac{2\zeta}{i(1 - \lambda_0 \cos x)} f(x) \tag{50}$$

Der Realteil der Funktion $g(x)$ ist in der Abbildung 7 dargestellt und zeigt, daß der Integrand bei $x_2 = i\epsilon$ nun einen von mehreren Polen besitzt, der den Konvergenzradius

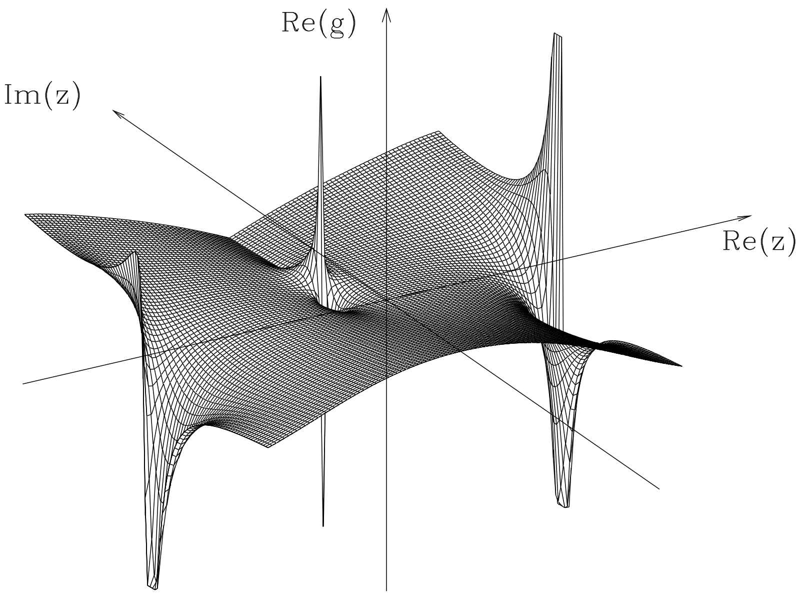

Abbildung 7: Realteil von $g(x) = \frac{2\zeta(x)}{1-\lambda\cos x}\left(\sin x + \xi\frac{(1-\cos x)}{\sin x}\right)$ im Gebiet $(-\pi < \Re(x) < \pi \ , \ -0.5\pi < \Im(x) < 0.5\pi)$. Dabei ist die Wahl der Phase von ζ in den verschiedenen Gebieten so angepaßt, daß eine glatte Funktion entsteht.

einer Reihenentwicklung von $g(x)$ um $x = x_1$ beschränkt. Um das Integral auszuwerten, benötigen wir nur noch eine Entwicklung von $g(x)$ um $\zeta = 0$ in Potenzen von ζ

$$g(x(\zeta)) = \sum_n a_n\,\zeta^{\frac{n}{r}} \qquad \text{mit } r > 0$$

mit der wir das Integral formal angeben können

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\zeta\, 2e^{-m\zeta^2}\left(\sum_n a_n\,\zeta^{\frac{n}{r}}\right) = \sum_n a_n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2r}+\frac{1}{2}\right)}{m^{\frac{n}{2r}+\frac{1}{2}}} \tag{51}$$

4.6 Eine asymptotische Entwicklung für $g(x)$

Um zu einem analytischen Ergebnis für unser letztes Integral (51) zu gelangen, benötigen wir eine Reihendarstellung von $g(x)$ im Punkt $x = -i\epsilon$. Da die Funktion selbst in $x = i\epsilon$ divergiert und wir am Fall $\epsilon \to 0$ interessiert sind, können wir keine in $x = -i\epsilon \Leftrightarrow \zeta = 0$ konvergente Reihe erwarten. Unser Ziel ist daher eine asymptotische Entwicklung, die im Grenzfall $\zeta \to 0$ die Funktion $g(x)$ wiedergibt und von der wir keine Konvergenz mehr fordern wollen. Konvergiert eine solche Reihe dennoch, so

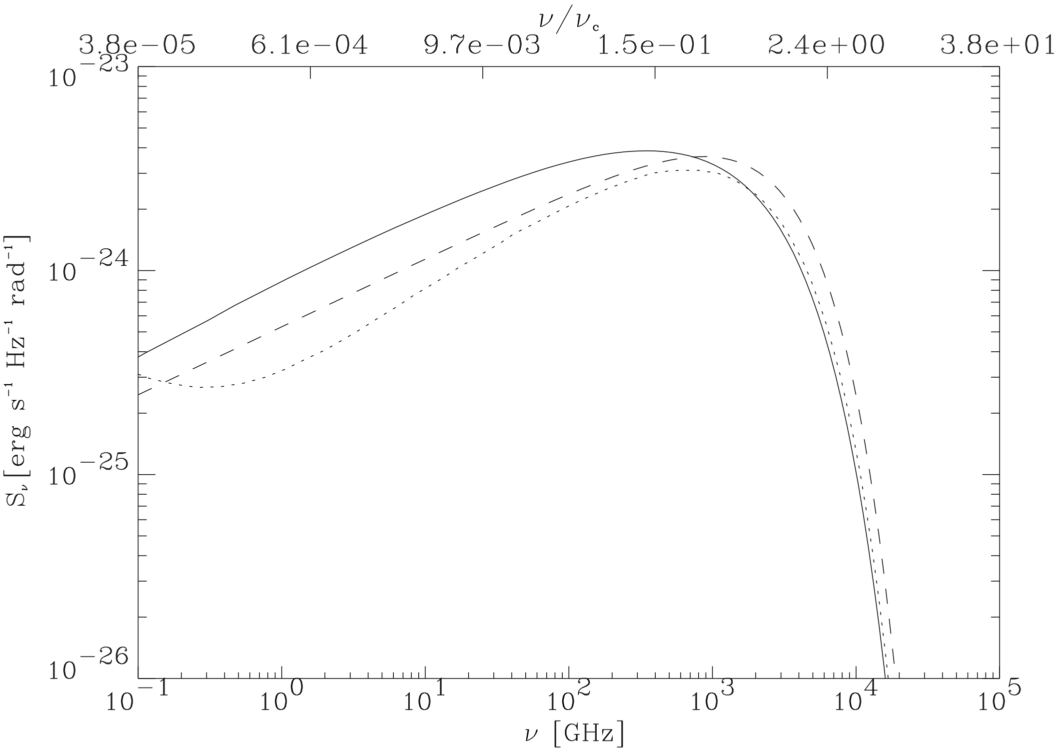

Abbildung 8: Vergleich der Näherungen für den völlig isotropen Fall bei einem Magnetfeld $B = 12.8$ G und einem Elektronenimpuls von $p = 220mc$. Die durchgezogene Kurve gibt das Ergebnis der nummerischen Integration über die Besselfunktionen aus (41) . Die punktierte Kurve folgt der Näherung $S_\nu \sim \nu^{\frac{1}{3}} \exp[-\frac{\nu}{\nu_c}]$ die auf die emittierte Leistung (9) normiert ist. Die gestrichelte Kurve entspricht dem ersten Term der Entwicklung (51) .

konvergiert sie in einer genügend kleinen Umgebung des Entwicklungspunktes gegen die Funktion selbst. Die Theorie der Asymptotischen Reihen ist bei Erdelyi (1956) ausführlich diskutiert. Allgemein schreiben wir

$$g(x) \sim \sum_n a_n \, \Phi_n(\zeta(x)) \tag{52}$$

und fordern von der Folge von Funktionen Φ_n, daß sie für $\zeta \to \zeta_0$ (in unserem Fall $\zeta_0 = 0$) in der jeweils folgenden Funktion Φ_{n+1} von höherer Ordnung in ζ innerhalb einer Umgebung von ζ_0 sind. Wir verwenden dafür das Symbol o in dem Sinn, daß

$$\frac{\Phi_{n+1}(\zeta)}{\Phi_n(\zeta)} \overset{\zeta \to \zeta_0}{\to} 0 \;\Leftrightarrow\; \Phi_{n+1} = o(\Phi_n)$$

erfüllt ist und nennen die Reihe (52) asymptotisch wenn gilt:

$$g(x) - \sum_{n=n_0}^{M} a_n \, \Phi_n(\zeta(x)) = o(\Phi_M)$$

Als Satz von Funktionen in ζ, die dieser Forderung genügen, wählen wir die Potenzen

$$\Phi_n(\zeta) = \zeta^{\frac{n}{r}}$$

mit positiven Parameter $r > 0$. Die Koeffizienten können wir durch sukzessive Betrachtung des Grenzwertes

$$a_m = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - \sum_n^{m-1} a_n \Phi_n(\zeta(x))}{\Phi_m(\zeta(x))}$$

gewinnen. Der Faktor $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta}$ in (50) divergiert nicht für den Grenzfall $x \to -i\epsilon$, wie eine Variablentransformation auf $x + i\epsilon$ zeigt.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{2[i(x + i\epsilon - \sin(x + i\epsilon)) - (\cos(x + i\epsilon) - 1)\lambda \sinh\epsilon]^{\frac{1}{2}}}{\lambda \sin(x + i\epsilon)\sinh\epsilon + i(1 - \cos(x + i\epsilon))}$$

Eine Entwicklung der trigonometrischen Funktionen zeigt, daß alle konstanten und linearen Terme in $x + i\epsilon$ unter der Wurzel verschwinden, und daß auch der Nenner von erster Ordnung in $x + i\epsilon$ ist. In erster Näherung finden wir daher für $g(x)$

$$g(-i\epsilon) = \sqrt{\frac{2}{\lambda \sinh\epsilon}} \left(\sinh\epsilon + \xi \frac{(1 - \cosh\epsilon)^2}{\sinh\epsilon} \right)$$

und haben so den ersten Koeffizienten $a_0 = g(-i\epsilon)$ erhalten. Da $g(x)$ im Sattelpunkt nicht divergiert, können zu beliebigen r keine nicht verschwindenden Koeffizienten zu negativen Potenzen in ζ auftreten.

4.7 Vergleich der Näherungen

Auf eine Fortführung der Reihe (51) verzichten wir hier und fragen nach der Qualität der Näherung. Zum einen ist vom ersten Term $n = 0$ ein Anstieg des Spektrums proportional zu $\nu^{\frac{1}{2}}$ zu erwarten, der sich bei mittleren Frequenzen auch zeigt. Wie aus der Entwicklung der Asymptotischen Reihe für $m \to \infty$ folgt, ist der erste Term der Entwicklung nur bei großen Frequenzen $\nu > 0.3\,\nu_c$ eine gute Näherung und stimmt mit der Beschreibung über Besselfunktionen nach Abb. 8 im exponentiellen Abfall gut überein. Der Anstieg der Näherung (51) bei ganz kleinen Frequenzen ist an dieser Stelle unklar. Die völlig isotrope Situation, die keine durch das Magnetfeld ausgezeichnete Richtung mehr kennt, ist durch die Breite des Spektrums am Maximum bei $\nu = 0.3\nu_c$ charakterisiert und läßt sie für die Beschreibung des Spektrums von Sgr A* als nicht geeignet erscheinen. Wir werden sie im folgenden nicht weiter verfolgen.

Einen bemerkenswerten Fehler finden wir, wenn wir die insgesamt emittierte Leistung, auf welche die Näherung $\nu^{\frac{1}{3}} \exp[-\frac{\nu}{\nu_c}]$ in Abb. 8 normiert ist, mit dem über die Frequenz integrierten Fluß aus (41) vergleichen. Es ergibt sich, daß wir in unseren Berechnungen die Leistung um einen Faktor $\frac{L_0 - L}{L_0} = 0.269$ unterschätzen, mit der gesamten emittierten Leistung L_0 nach (9). Da die Ursache dieses Fehlers nicht klar ist, werden wir weiterhin nicht darauf korrigieren.

5 Impuls-Verteilungen oder der Fall Sgr A*

..., quod scientia realis non est de rebus,
sed est de intentionibus supponentibus pro rebus,
quia termini propositionum scitarum supponunt pro rebus.

Wilhelm von Ockham : *Prologus in expositionem super* VIII *libros Physicorum*

Das besondere Interesse an der Radioquelle Sgr A* gründet sich zum einen auf seine Kompaktheit und zum anderen auf seine Lage im Galaktischen Zentrum. B.Balick und R.L.Brown berichteten 1974 zum ersten Mal von einer hellen nicht aufgelösten Radioquelle in der Richtung zum Galaktischen Zentrum, die in der Folgezeit den Namen Sgr A* erhielt. Die Intensitätsverteilung in den verschiedenen Radiobeobachtungen dieser Quelle wird am besten durch einen zwei-dimensionalen Gauß-fit wiedergegeben (z.B. J.M. Marcaide et al. 1992; Lo et al. 1981), deren Skalenlänge ($L_s = R\tan\theta_s \simeq R\theta_s$) eine quadratische Abhänigkeit von der Wellenlänge λ zeigt. Diese Abhängigkeit kann durch interstellare Szintillationen erklärt werden (Davis et al. 1976). Dabei wird angenommen, daß Fluktuationen in der Elektronendichte Δn zwischen Quelle und Beobachter auf einer Längenskala a existieren, die über Vielfachstreuung zu einer Phasenverschiebung ϕ führen, die proportional zur Wellenlänge ist. Die beobachtete Ausdehnung der Intensitätsverteilung ist proportional zur Phasenverschiebung und wiederum zur Wellenlänge, so daß sich nach Harris et al. (1970) die charakteristische Ausdehnung θ_s zu

$$\theta_s \cong (2\ln 2)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{3}{4}} r_e\,\lambda^2\,\Delta n\left(\frac{L}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt, mit der Entfernung der Quelle vom Beobachter L und dem klassischen Elektronenradius r_e . Abweichungen von dem λ^2-Gesetz zeigen sich erst bei einer Wellenlänge von 7 mm (entsprechend 43 GHz) (Krichbaum et al. 1993) womit sich auf eine Ausdehnung $\theta_s = 0.34$ mas und mit einer Entfernung von $R = 8.5$ kpc auf einen Radius von $r = 4.42\cdot 10^{13}$ cm ≈ 3 AE schließen läßt. Die Unsicherheiten sind sowohl bei der Entfernung ($\Delta R \approx 1.5$ kpc) als auch bei der Ausdehnung ($\Delta\theta_s = 0.2$ mas) erheblich.

Die Lage von Sgr A* im kinematischen Zentrum unserer Galaxie ergibt sich vorallem aus Radiobeobachtungen, da für kleinere Wellenlängen das interstellare Medium, vorallem Dunkelwolken, in dieser Richtung zu einer Extinktion im visuellen Bereich von $A_V \approx 30$ mag führt und damit undurchsichtig ist. Die Zentralregion unserer Galaxie kann eingeteilt werden (Zylka et al. 1995; Zylka Mezger Lesch 1992) in eine Scheibe aus HII-Molekülwolken und Zwischengas im Bereich von 20 - 200 pc vom Zentrum, der Circumnuclear Disc (CND) zwischen 1 - 6 pc und der Central Cavity mit einem zentralen Sternhaufen und der HII-Region (Molekülwolke) Sgr A West. Der Sternhaufen ist nach D.Gezari (1992) und dort zitierten Arbeiten mit der Molekülwolke insofern assoziiert, als seine heißen Sterne, als separat erkennbare Quellen, den Staub der Umgebung heizen und zu räumlich korrelierten Strukturen von Sag A West im Infraroten (5 - 20 μm) führen. Der Sternhaufen ist durch seine hohe Sterndichte $\sim 10^6 M_\odot$ pc^{-3} im Zentrum ausgezeichnet, und sein Kern (IRS16) besteht nach Eckart et al. (1992) selbst aus heißen HeI/HI-Sternen, die einen dichten, schnellen Wind (≥ 1000 km s^{-1}) erzeugen und als blaue Überriesen angesehen werden. Diese Sterne dominieren die Emission im Infraroten, während Sgr A* im Zentrum das Radiospektrum bestimmt.

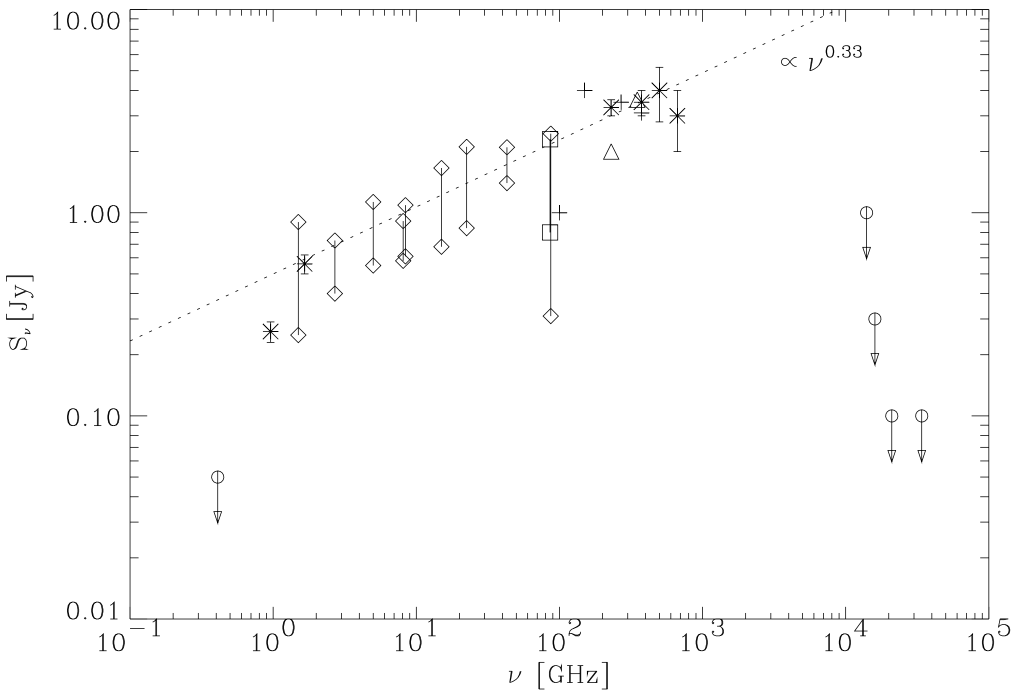

Abbildung 9: Das gemessene Spektrum von Sgr A* nach Duschl und Lesch (1994) und dort zitierten Arbeiten, sowie Davis et. al. (1976)

Die Variabilität des Strahlungsfluß S_ν von Sgr A* ist wohl bekannt (Zhao et al. 1991) und bis zu Wellenlängen von λ = 3 mm hinab untersucht (Wright & Backer 1993). Die zugehörigen Zeitskalen reichen von Jahren und Monaten bis zu $\sim$ 10 Tagen. Die verfügbaren Meßwerte sind in Fig. 9 dargestellt und zeigen ein invertiertes Spektrum $S_\nu \propto \nu^\alpha$, $\alpha \approx 0.35$ (Duschl & Lesch 1994) bis circa $\nu = 1000$ GHz, sowie einen steilen Abfall zum infraroten Bereich , in dem nur Obergrenzen für den Fluß angegeben werden können. Das weitere Ziel der Arbeit ist es, die in den vorherigen Kapiteln entwickelte Synchrotron-Theorie zur Beschreibung des Spektrums von Sgr A* heranzuziehen.

5.1 Modellierung des Radiospektrums

Die Leuchtkraft der Quelle ist die emittierte Leistung eines mittleren Elektrons multipliziert mit der Anzahl der Elektronen $n_e V$. Im Fall einer isotropen und monoenergetischen Elektronenverteilung $f = f(\gamma)$ in einem homogenen Magnetfeld ist dies nach (9)

$$L = \frac{4}{9}\frac{q^4}{m_e^2 c^3} B^2 \gamma^2 n_e V \; = \; 1.058 \cdot 10^{-15} B^2 \gamma^2 n_e V \, \text{erg s}^{-1}$$

sofern B in Gauß [G] gemessen wird. Da keine Meßwerte für die Dichte der relativistischen Elektronen ermittelt werden können, ist es sinnvoll eine Gleichverteilung von magnetischer und kinetischer Energiedichte anzusetzten, die eine Wechselwirkung der

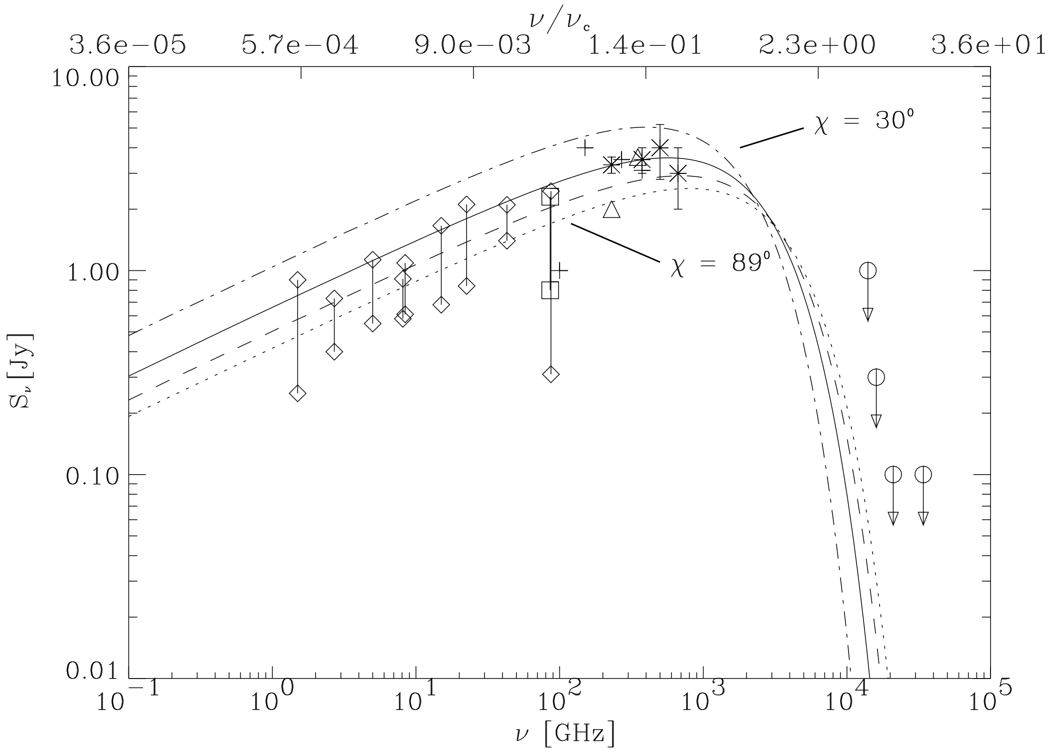

Abbildung 10: Strahlungsfluß S_ν von Sgr A* modelliert durch Synchrotron-Strahlung von monoenergetischen Elektronen $\gamma = 220$ in einem homogenen Magnetfeld $B = 13.8$ G. Als Parameter bleibt der Winkel zwischen Magnetfeld und Beobachtungsrichtung $\chi = 89^o, 60^o, 45^o, 30^o$. Die durchgezogene Linie entspricht $\chi = 45^o$.

beiden Komponenten, wenn nicht einen gemeinsamen Ursprung, voraussetzt.

$$n_e = \frac{B^2}{8\pi(\gamma-1)m_e c^2} = 4.87 \cdot 10^4 \,\mathrm{cm}^{-3} \left[\frac{\gamma-1}{190}\right]^{-1} \left[\frac{B}{13.8\,\mathrm{G}}\right]^2 \tag{53}$$

Die Frage der Selbstkonsistenz dieses Bildes werden im weiteren nicht berücksichtigt. An dessen Stelle wollen wir das Magnetfeld als gegeben ansehen, und die Frage nach den möglichen Elektronenverteilungen stellen. Dazu benötigen wir in der Gleichverteilung die mittlere kinetische Energie eines Elektrons

$$\overline{\gamma - 1} = 4\pi \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2\, (\gamma - 1)\, f(\gamma)$$

wobei Isotropie vorausgesetzt ist und die Verteilungsfunktion $f(\gamma)$ auf ein Teilchen normiert sein soll. Die entsprechende Synchrotron-Leuchtkraft und sofern dies der dominierende Strahlungsprozeß ist - der Radioleuchtkraft ($\nu \leq 10^4$ GHz) - führt auf

$$L = 9.2 \cdot 10^{37} \left[\frac{B}{11.8\,\mathrm{G}}\right]^4 \left[\frac{\gamma}{240}\right] \left[\frac{V}{2.7 \cdot 10^{41}\,\mathrm{cm}^3}\right] \;\mathrm{erg\ s}^{-1}$$

im ultrarelativistischen Fall $\gamma \gg 1$. Die Abschätzung mit den angegebenen Werten für Magnetfeld, Volumen und Energie zeigen eine Leuchtkraft von $L_R = 2.4 \cdot 10^4\, L_\odot$ allein im Radiobereich, die jedoch noch deutlich unter der Obergrenze von $5 \cdot 10^7 L_\odot$ von Falcke et al. (1993) liegt, die aus den Werten im Infraroten abgeleitet wurden.

Um zu beurteilen, ob die Vernachlässigung des Einflusses der Strahlungsverluste auf die Teilchenbahn zulässig war, betrachtet man die Änderung der kinetischen Energie $E_k = (\gamma - 1)mc^2$ mit der Zeit, die gleich der abgestrahlten Leistung L aus (9) ist. Im relativistischen Grenzfall $\beta \to 1$ und $E_k \to \gamma mc^2$ können wir schreiben

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = -L \approx -\kappa E_k^2$$

mit der formalen Lösung $\tilde{E} = (\kappa t)^{-1}$. Geht man von einer Anfangsenergie $E_0 = \gamma_0 mc^2$ zur Zeit $t = 0$ aus, so folgt für die zeitliche Entwicklung

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \frac{t}{t_R}} \quad \text{mit} \quad t_R = \frac{1}{\kappa E_0}$$

Die Zeitskala für Strahlungsverluste ist t_R auf der ein geladenes Teilchen durch Synchrotronstrahlung die Hälfte seiner kinetischen Energie verliert. Ihr Wert ist

$$t_R = \frac{3m^3c^5}{2q^4\gamma_0 B^2 \sin^2\alpha} = \frac{4.158h}{\sin^2\alpha} \cdot \left[\frac{B}{12.0\mathrm{G}}\right]^{-2} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{240}\right]^{-1}$$

Für die hier veranschlagten Parameter B, γ_0 ist t_R viel größer als die Periode der Bahn $t_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$ und ihr Verhältnis ist

$$\frac{t_B}{t_R} = 4.78 \cdot 10^{-10} \cdot \left[\frac{B}{12\mathrm{G}}\right] \cdot \left[\frac{\gamma_0}{240}\right]^2$$

Die ursprüngliche Annahme bei der Bestimmung der Teilchenbahn, daß die Strahlungsverluste keinen Einfluß auf die Bewegung der Teilchen haben, ist hiermit gerechtfertigt. Da die emittierte Leistung noch vom Pitchwinkel α abhängt wird sich eine isotrope, monoenergetischen Elektronenverteilung auf der Zeitskala t_R entwickeln. Dabei wird die Isotropie verloren gehen in der Weise, daß in einem idealisierten Fall, die Verteilung der Elektronen für jede einzelne Richtung monoenergetisch bleibt, aber der Impulsbetrag der Elektronen richtungsabhängig wird. Dies ist insofern eine Idealisierung, als die Verteilung nicht nur durch die Synchrotron-Verluste, sondern auch durch Stöße der Elektronen untereinander oder mit anderen Teilchen, wie auch durch Bremsstrahlung und inversen Compton-Effekt beeinflußt wird.

5.2 Potenz-Spektren

Die Synchrotronstrahlung ist in der Astrophysik zuerst in den 50-er Jahren zur Erklärung von offensichtlich nicht thermischen Spektren im Radiobereich als möglicher Strahlungsmechanismus herangezogen worden. Dabei galt das Interesse den Potenzspektren der Form $S_\nu \propto \nu^{-p'}$, die sich durch ein entspechendes Potenzspektrum für die Energieverteilung der Elektronen erklären lassen. Das Argument verwendet die haarsträubende Vereinfachung, das Spektrum eines mittleren Elektrons der Energie $E = \gamma m_e c^2$ durch eine Dirac-δ-Funktion an der Frequenz $\omega = \gamma^3 \omega_B$ zu ersetzen. Als Spektrum eines mittleren Elektrons sei hier die Mittelung des Strahlungsfluß über alle

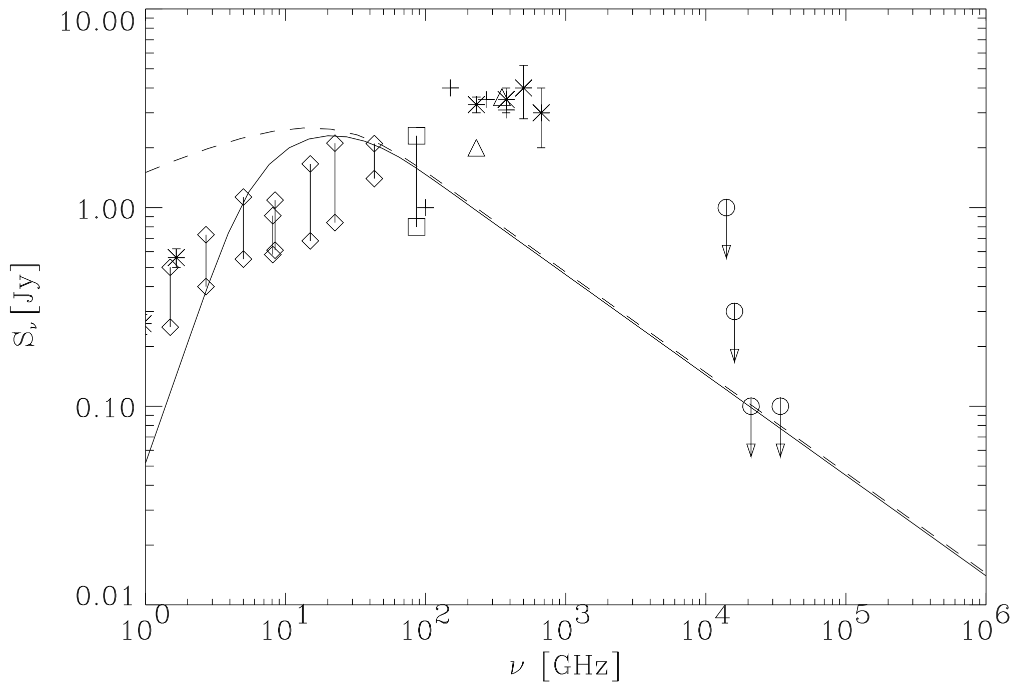

Abbildung 11: Flußdichte S_ν einer isotropen Elektronenverteilung mit einem Potenzgesetz $n(p) \sim p^{-2}$ für die Energieabhängigkeit. Die Verteilung wird charakterisiert durch den mittleren Impulsbetrag $< p >= 180\ mc$ und der Breite der Verteilung $\delta = \Delta p/p_m = 1.9998$. Die Elektronen befinden sich in einem Magnetfeld der Stärke $B = 13.4$G, das gegen den Beobachter um einen Winkel $\chi = 60°$ geneigt ist. Die durchgezogene Kurve berücksichtigt die Selbstabsorption im Quellgebiet, während die gestrichelte Linie das Spektrum ohne Absorption, zum Beispiel in einem Quellgebiet geringer Elektronendichte, wiedergibt.

Pitchwinkel α verstanden. Für den Strahlungsfluß eines solchen Elektrons ergibt sich nach (9)

$$\frac{\mathrm{d}P(\gamma)}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{4q^2\omega_L^2}{9c}\beta^2\gamma^2\ \delta(\omega - \gamma^2\omega_L)$$

Dabei haben wir die energieunabhängige Lamorfrequenz $\omega_L = \gamma\omega_B$ verwendet. Elektronen, deren Energieverteilung einem Potenzspektrum der Form $n(\gamma) = n_0\gamma^{-p}$ gehorchen, erzeugen ein Potenzspektrum für die emittierten Leistung,

$$P_\omega = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} \mathrm{d}\gamma \frac{4q^2\omega_L^2}{9c}\beta^2\gamma^2\ \delta(\omega - \gamma^2\omega_L)n_0\gamma^{-p} = n_0\frac{2q^2\omega_L}{9c}\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{-\frac{p-1}{2}} \tag{54}$$

wobei wir $beta = 1$ gesetzt haben. Wollen wir das Spektrum auf ein - nun auch über die Energieverteilung gemitteltes - Elektron normieren, so ist für eine Gesamtzahl von

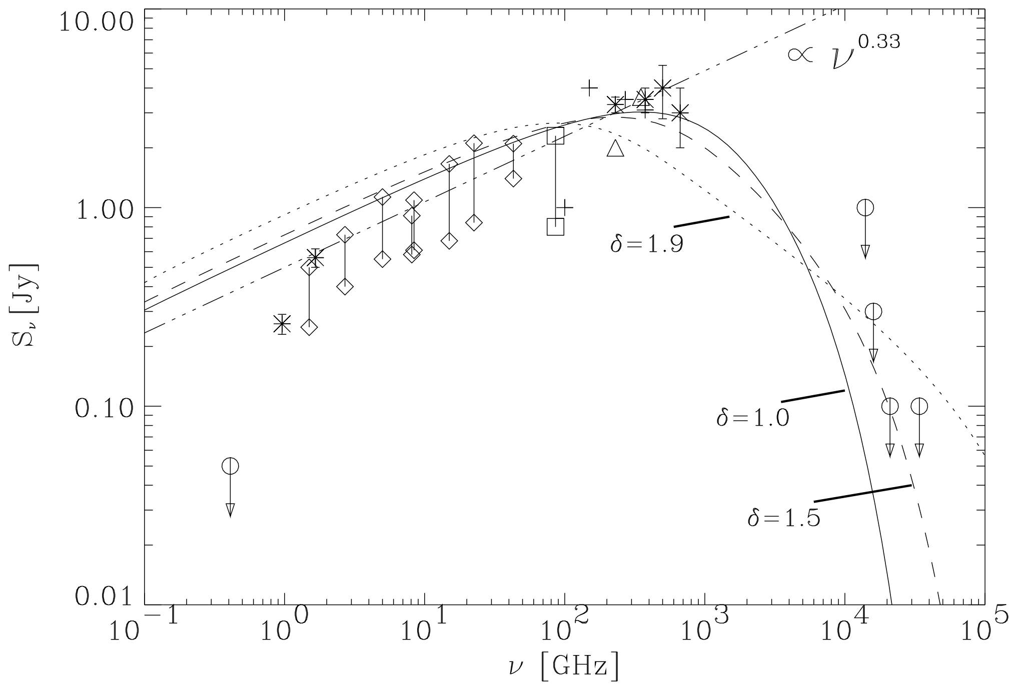

Abbildung 12: Flußdichte S_ν einer isotropen Elektronenverteilung mit einem Potenzgesetz $n(p) \sim p^{-2}$ für die Energieabhängigkeit. Die Spektren werden durch die Breite der Verteilung $\delta = \Delta p/p_m = 1.0, 1.5, 1.9$ parametrisiert. Der gemeinsame mittlere Impulsbetrag der Verteilungen ist $<p>= 180mc$ und die Magnetfeldstärke $B = 13.4$ G. Es ist keine Selbstabsorption angenommen worden.

N Elektronen nach

$$\frac{1}{N}\int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} \mathrm{d}\gamma\; n_0\gamma^{-p} = 1 = \begin{cases} \dfrac{n_0}{N(p-1)}\left(\dfrac{1}{\gamma_{min}^{p-1}} - \dfrac{1}{\gamma_{max}^{p-1}}\right) & \text{für} \quad p \neq 1 \\[2ex] \dfrac{n_0}{N}(\log(\gamma_{max}) - \log(\gamma_{min})) & \text{für} \quad p = 1 \end{cases}$$

die Konstante n_0 zu bestimmen. Im Fall $p = 1$ ist es offensichtlich notwendig sowohl eine maximale, als auch eine minimale Elektronenenergie einzuführen, da sonst die Gesamtzahl der beteiligten Elektronen unendlich groß wäre. Ist hingegen $p < 1$, so muß es zumindest eine maximale Elektronenenergie geben, da sonst die Verteilung wiederum nicht normierbar ist.

In vielen beobachteten Spektren läßt sich aber auf eine spektralen Index $p > 1$ schließen. Dies erfordert die Angabe einer minimalen Energie der Elektronen. Die radikalste Annahme ist nun, $n(\gamma)$ für $\gamma < \gamma_{min}$ gleich Null zu setzen : $n(\gamma) \rightarrow n(\gamma)\Theta(\gamma - \gamma_{min})$. Eine solche Annahme ist sicher unphysikalisch, da eine Verteilungsfunktion stetig sein sollte, und eine Modifizierung, die einen glatten Übergang zu $n(\gamma) \rightarrow 0$ für $\gamma \rightarrow 1$ wird notwendig sein. Ist das Quellgebiet räumlich beschränkt, so erfordert die Beschränkung der Zustandsdichte im Phasenraum bereits ein Verschwinden der Verteilung $n(\gamma)$ im

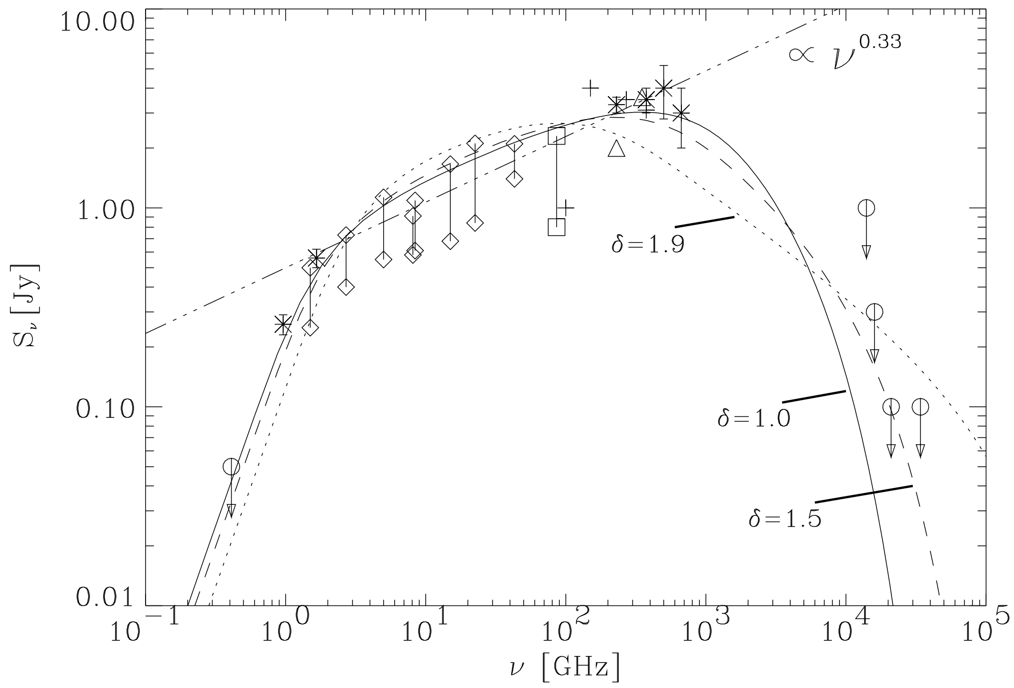

Abbildung 13: Flußdichte S_ν einer isotropen Elektronenverteilung mit einem Potenzgesetz $n(p) \sim p^{-2}$ für die Energieabhängigkeit. Die Spektren werden durch die Breite der Verteilung $\delta = \Delta p/p_m = 1.0, 1.5, 1.9$ parametrisiert. Der gemeinsame mittlere Impulsbetrag der Verteilungen ist $<p>= 180\,mc$ und die Magnetfeldstärke $B = 13.4$ G. Im Gegensatz zu Abb.12 ist die Selbstabsorption im Quellgebiet für die Elektronendichte $n = 4.9 \cdot 10^4$ cm^{-3} und einer Weglänge von $l = 4.4 \cdot 10^{13}$ cm berücksichtigt.

Grenzfall kleiner Energien.

Die in den Abbildungen 11,12 und 13 gezeigten Spektren weichen von der bisherigen Darstellung insofern ab, als nicht ein Potenzgesetz für die Verteilung der Energie sondern des Impulsbetrags $p = \beta\gamma mc$ in der Form

$$n(p) = n_0 p^{-\alpha} \tag{55}$$

angenommen wurde. Die Verteilungen werden charakterisiert durch die Breite der Verteilung

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2(p_{\max} - p_{\min})}{p_{\max} + p_{\min}}$$

sowie dem mittleren Impulsbetrag

$$< p >= \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \mathrm{d}p\; n_0 p^{-\alpha+1} = \frac{n_0}{\alpha - 2}\left(\frac{1}{p_{\min}^{\alpha-2}} - \frac{1}{p_{\max}^{\alpha-2}}\right)$$

Im relativistischen Grenzfall $pc \approx E$ sind die beiden Verteilungen identisch und es ergeben sich die in (54) vorhergesagten Spektren, wie die Abbildung 11 zeigt. Die deutliche

Abweichung von $S_\nu \sim \nu^{-0.5}$ ensprechend $\alpha = 2$ für Frequenzen kleiner als 10 GHz ist sowohl durch den minimalen Impuls $p_{\rm min} = 20mc$, als auch durch die Selbstabsorption in der Quelle bedingt.

Da in den Abbildungen 11,12 und 13 eine Gleichverteilung von magnetischer Energiedichte und kinetischer Energiedichte der relativistischen Elektronen vorausgesetzt ist, wird durch die Angabe des mittleren Impulsbetrags nach (53) die Teilchendichte und somit die Leuchtkraft wesentlich mitbestimmt. Bei den gezeigten Spektren mit einem Index $\alpha = 2$ wird erst bei einer Breite $\delta = \frac{\Delta p}{p} \approx 1.9$ die Form des Spektrums nach (54) erkennbar. Wesentlich schmälere Verteilungen mit $\delta \approx 1$ führen hingegen zu Spektren (Abb. 12) , die stark an die monoenergetische Situation erinnern. Die Dichte der relativistischen Elektronen $n_e \approx 5 \cdot 10^4$ cm^{-3} in Verbindung mit einer Weglänge der Strahlung von $l = 4.42 \cdot 10^{13}$ cm ist durch den Effekt der Selbstabsorption verantwortlich für den Abfall des Spektrums bei Frequenzen von etwa 1 GHz, der durch die Messungen bei 0.41 GHz, 0.96 GHz und 1.66 GHz (Davis et al. 1976) bestätigt wird. Die Selbstabsorption wird vorallem durch Elektronen geringer Energie verursacht, deren relative Anzahl sowohl von der minimalen Energie, als auch vom spektralen Index α abhängt. Die selben Elektronen liefern zusätzlich den Hauptbeitrag zur Emission bei kleinen Frequenzen, so daß der Einfluß des Abschneideimpulses $p_{\rm min}$ auf den steilen Abfall des Spektrums bei kleinen Frequenzen gering bleibt, wie der Abbildung 13 zu entnehmen ist.

5.3 Ein modifiziertes Potenzspektrum

Da Strahlungsverluste das Elektronenspektrum bei großen Impulsen dominieren, schließen wir an das Potenzspektrum einen exponentiellen Abfall der Elektronenverteilung an und fassen beide Bereiche zusammen zu

$$n(p) = N p^{-\alpha}\, e^{-\frac{p}{p_c}}$$

Bei kleinen Impulsen nehmen wir weiterhin einen scharfen 'cut off' der Elektronenverteilung an, dessen Impuls durch den Skalenfaktor x mit dem Übergang in den exponentiellen Abfall bei p_c verbunden wird. Um das Elektronenspektrum auf ein mittleres Elektron zu normieren benötigt man das Integral

$$\int_{xp_c}^{\infty} \mathrm{d}p\, n(p) \quad = \quad p_c^{1-\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-x}\, \mathbf{W}_{\frac{\alpha}{2},\frac{1+\alpha}{2}}(x)$$

mit der Whittakerschen Funktion $\mathbf{W}_{\mu,\nu}$ nach (Abramowitz & Stegun 1972). Die Modifizierung der Elektronenverteilung wirkt sich für positive Indizes, z.B. $\alpha = 2.5$ vorallem auf das Spektrum bei großen Frequenzen derart aus, daß der exponentielle Abfall verzögert wird. Darüber hinaus ist im Vergleich mit Abb. 13 kein Unterschied feststellbar. Der kritische Impuls $p_c = 220\, mc$ erfordert zusammen mit dem mittleren Impuls $<p>= 190\, mc$ ein Spektrum geringer Breite.

Der Fall $\alpha = 0$ beschreibt eine Elektronenverteilung mit vielen Elektronen bei kleinen Impulsen, die zu einem flachen Spektrum führen. Da kritischer Impuls und mittlerer Impuls praktisch gleich sind $p_c \approx <p>= 190\, mc$ liegt das Maximum des Spektrums bei deutlich kleineren Frequenzen.

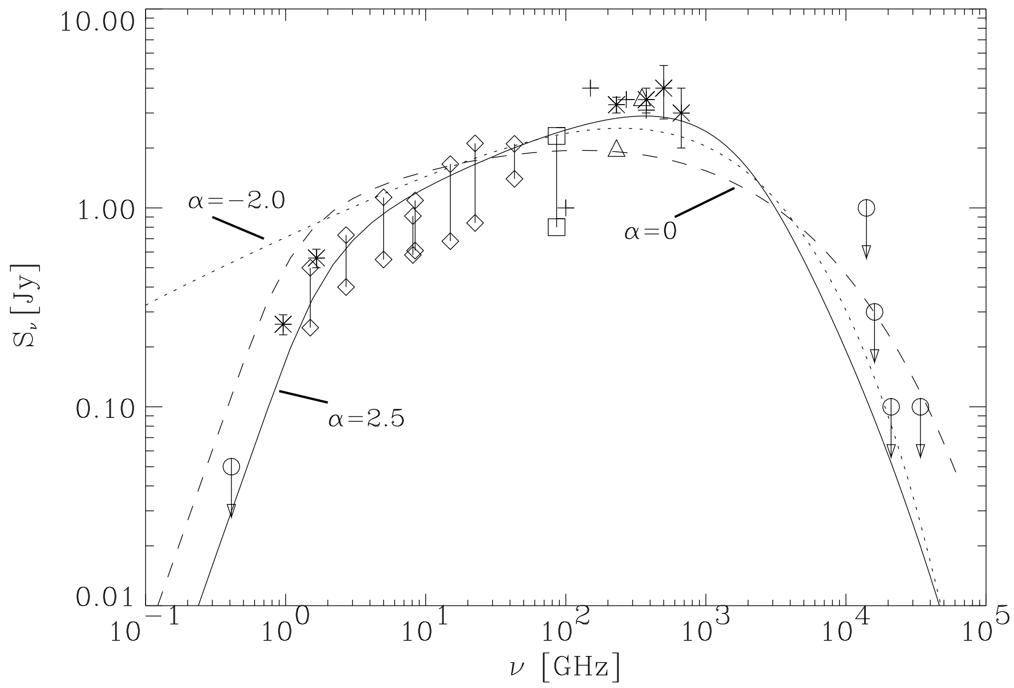

Abbildung 14: Flußdichte S_ν einer isotropen Elektronenverteilung mit einem modifizierten Potenzgesetz $n(p) \sim p^{-\alpha} \exp[-\frac{p}{p_c}]$ für die Impulsabhängigkeit. Die Spektren werden durch den spektralen Index $\alpha = -2, 0, 2.5$ parametrisiert. Der gemeinsame mittlere Impulsbetrag der Verteilungen ist $<p>= 190\,mc$ und die Magnetfeldstärke $B = 13.4$ G. In allen drei Spektren ist die Selbstabsorption in gleicher Weise berücksichtigt, wie im Abschnitt 5.2 (Abb. 11, 13).

Der zuerst exotisch anmutende Fall $\alpha = -2$ ist bei großen Impulsen einer thermischen Verteilung nicht unähnlich, und daher von besonderem Interesse. Auffällig ist die fehlende Selbstabsorption bei kleine Frequenzen und der langsame Abfall zum hohen Photonenenergien. Bei kleinen Frequenzen ist der Absorptionskoeffizient sogar negativ, da der Anstieg der Elektronenverteilung bei kleinen Impulsen $n(p) \sim p^2$ aus der Sicht der Synchrotron-Elektronen eine invertierte Besetzung der möglichen kontinuierlichen Energieniveaus, im Sinne von $n(E - h\nu) - n(E) < 0$ in (58), darstellt, und die induzierte Emmission gegenüber der Absorption überwiegt. Elektronen kleiner Impulse dominieren die Emission bei kleinen Frequenzen von etwa 1 GHz und verhindern so die Selbstabsorption. Die Selbstabsorption ist im Abschnitt 5.7 ausführlicher behandelt.

5.4 Eine Gauß'sche Verteilung

Die ursprünglich untersuchte monoenergetische Elektronenverteilung kann als Grenzfall einer Gauß'schen Verteilung mit verschwindender Breite angesehen werden. Betrachtet man den im allgemeinen wahrscheinlicheren Fall einer endlichen Breite und fordert, daß die Dichte für kleine Impulse verschwindet, so kommen wir zu einer modifizierten

Gauß'schen Verteilung [MGV]:

$$n(p) = n_0 \, p^2 \, \exp\left[-\frac{(p-p_m)^2}{p_c^2}\right]$$

Die Normierungskonstante n_0 erhält man aus dem allgemeineren Integral (Abramowitz & Stegun 1972 [3.462])

$$\int_0^\infty \mathrm{d}p \, p^n \, e^{-(p-x)^2} \;=\; (2i)^{-n} \sqrt{\pi} \, H_n(ix) \qquad \text{für} \;\; n \;\in\; [0,1,2,3,\ldots[$$

Hierin sind $H_n(x)$ die Hermiteschen Polynome von Grad n. Da wir ein quadratisches Verschwinden der Dichte zu kleinen Impulsen annehmen, folgt für die Normierung auf ein Elektron

$$\frac{1}{n_0} = p_c^3 \frac{-1}{4} \sqrt{\pi} \left(4 \left(i \frac{p_m}{p_c}\right)^2 - 2\right) = \frac{p_c \sqrt{\pi}}{2} (2p_m^2 + p_c^2)$$

Das Maximum des Synchrotron-Spektrums wird durch den Schwerpunkt der Elektronenverteilung bestimmt, der sich zu

$$< p > = \; n_0 \int_0^\infty \mathrm{d}p \, p^3 \exp\left[-\frac{(p-p_m)^2}{p_c^2}\right] = p_m \, \left(\frac{2x_c^2+3}{2x_c^2+1}\right)$$

mit dem Verhältnis $x_c = \frac{p_m}{p_c}$, ergibt, so daß man zwei Grenzfälle unterscheiden kann

$$< p > \rightarrow \begin{cases} p_m & \text{für} \quad p_m \gg p_c \\ 3p_m & \text{für} \quad p_m \ll p_c \end{cases}$$

Nehmen wir als Maß für die Breite der Verteilung die Breite der ursprünglichen Gauß-Funktion $n'(p) = \exp\left[-\frac{(p-p_m)^2}{p_c^2}\right]$, so erhält man

$$\frac{\Delta p}{p_m} = \frac{\sqrt{\log(16)}}{x_c} \approx \frac{1.67}{x_c}$$

Demzufolge hängt die Lage des Schwerpunkts, und mit ihm die emittierte Leistung, sowie die kritische Frequenz nur wenig von der relativen Breite ab. Die Form des Spektrums unterhalb der kritischen Frequenz ν_c wird durch die niederenergetischen Elektronen ($p < p_m$) geprägt, deren Verteilung für große relative Breiten nicht mehr richtig durch Angabe eben dieser Breite bestimmt wird, sondern durch die quadratische Abhängigkeit vom Impuls und damit universell für die MGV gegeben ist, wie die Abbildung 15 veranschaulicht.

Die bisherigen Betrachtungen zu Potenz-Verteilungen und der Gauß'schen Verteilung setzen ein homogenes Magnetfeld voraus, das eine Neigung von $\chi = 60^o$ gegen die Blickrichtung des Beobachters aufweist. Die Mittelung über alle Neigungswinkel für eine angenommene Breite von $\delta = \frac{\Delta p}{p} = 1$ ist in Abbildung 16 dargestellt.

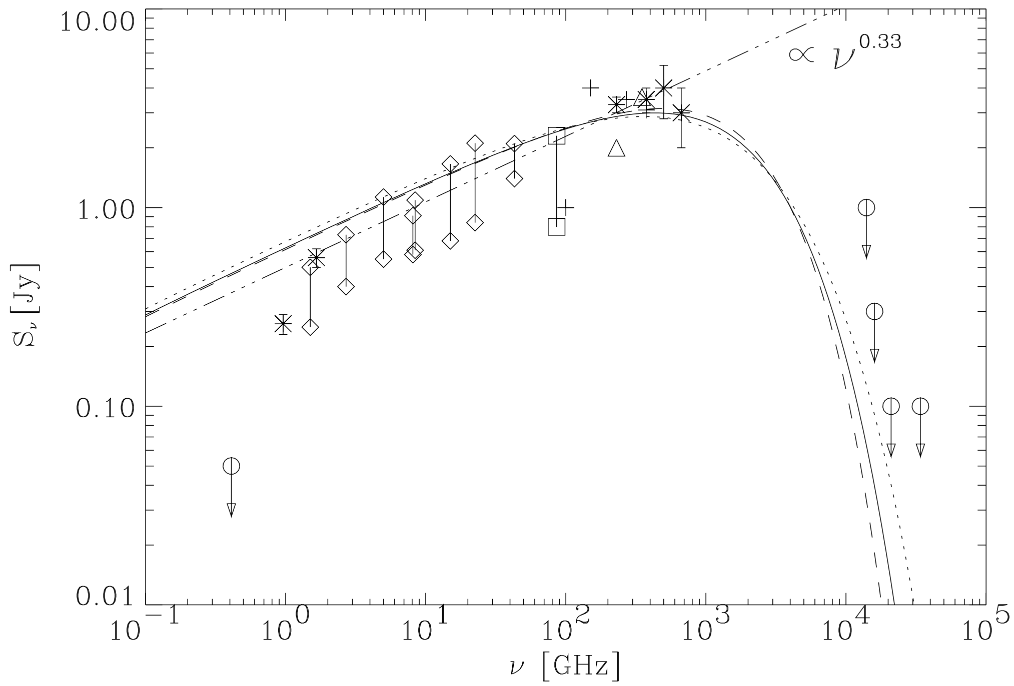

Abbildung 15: Synchrotron-Spektrum einer MGV mit den Breiten $\delta = 1.0$ (durchgezogene Kurve), $\delta = 0.5$ (gestrichelt), sowie $\delta = 10$ (punktiert) in einem Magnetfeld der Stärke $B =$ 13.8G .

5.5 Thermische Elektronen

Im Fall einer thermischen Verteilung der Elektronen können wir für die Verteilungs-Funktion $f(\vec{p})$ den Boltzmann-Faktor verwenden, in dem als Energie die kinetische Energie $(\gamma - 1)\, mc^2$ eingeht. Bei einer isotropen Verteilung schreiben wir für die Dichte pro Impuls

$$n(p) = n_t\, p^2 \exp\left[-\frac{(\gamma - 1)\, mc^2}{kT}\right]$$

Als dimensionslosen Parameter verwenden wir die inverse Temperatur $\epsilon = \frac{mc^2}{kT}$. Zur Normierung müssen wir das Integral über die Dichte auswerten. Dazu substituiert man zuerst den Impuls durch den γ-Faktor, und kann damit wieder ein allgemeineres Integral verwenden (Gradshteyn & Ryzhik 1980 [3.389])

$$\int_u^\infty \mathrm{d}x\, x(x^2 - u^2)^{\nu-1}\, e^{-\epsilon x} = 2^{\nu-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}}\, \epsilon^{\frac{1}{2}-\nu}\, u^{\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)\, K_{\nu+\frac{1}{2}}(u\epsilon)$$

In Fall $u = 1$ und $\nu = \frac{3}{2}$ erhalten wir als Normierungskonstante

$$\frac{1}{n_t} = (mc)^3\, \frac{e^\epsilon}{\epsilon}\, K_2(\epsilon)$$

mit der modifizierten Besselfunktion $K_2(x)$.

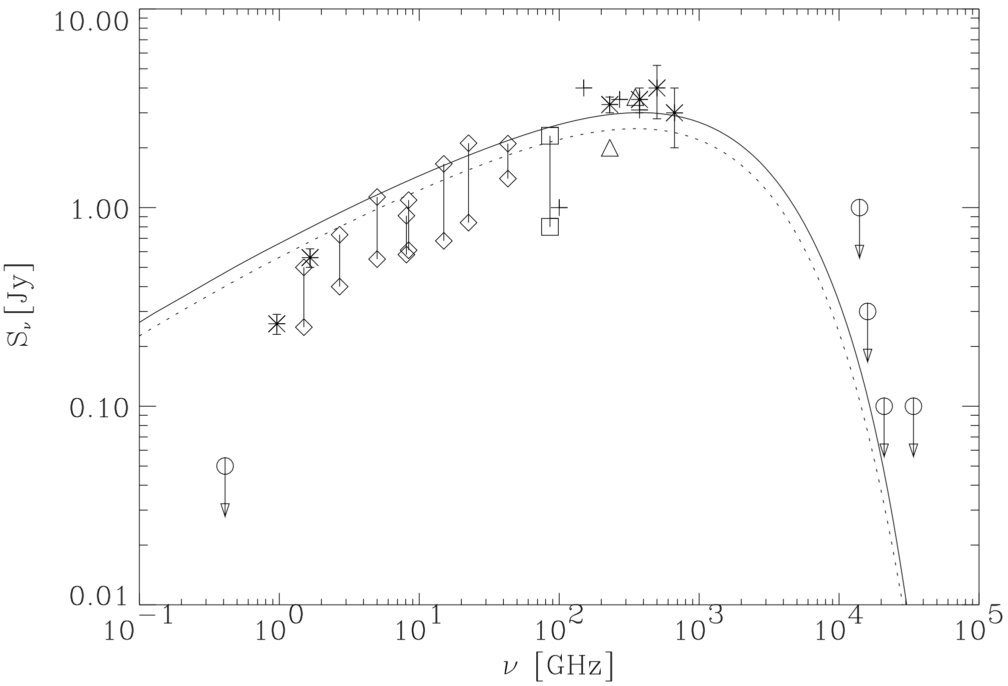

Abbildung 16: Flußdichte S_ν einer völlig isotropen Konstellation mit einer modifizierten Gauß'schen Elektronenverteilung (MGV) einschließlich der Mittelung über den Neigungswinkel der Magnetfeldrichtung. Die Parameter sind der mittlere Impuls $<p>= 240\,mc$, die Feldstärke $B = 13.8$ G (durchgezogen) und $B = 13.0$ G (punktiert) , und die Breite $\delta = 1$.

5.6 Modifizierte Bestimmung der Teilchendichte

Bisher haben wir nur exakte Gleichverteilung zwischen magnetischer und kinetischer Energiedichte (53) angenommen. Im thermischen Fall können wir auch in sinnvoller Weise ein Druckgleichgewicht annehmen. Dazu wollen wir zusätzlich einen Parameter ξ einführen, der den Anteil des Gasdrucks p_g am gesamten Druck p angibt. In einem konsistenten Modell sollten Teilchendichte, Magnetfeld und Temperatur aus der Dynamik abgeleitet werden. Wir wollen hier die Temperatur vorgeben und aus dem Spektrum die übrigen Parameter ableiten. Als einfachsten Fall wollen wir ein ideales Gas annehmen und so Druck und Temperatur mit der Teilchendichte der Elektronen verbinden. Diese Dichte ist mit der Massendichte $\rho = nm_H$ verbunden und mit der Gesamtdichte $n_{ges} = n_H + n_e = 2n_e$ durch die Ladungsneutralität.

$$n(p,T) = \frac{p}{2kT}$$

Der Gasdruck läßt sich durch den magnetischen Druck ersetzen und durch den Parameter ξ skalieren.

$$n_e = 1.441 \cdot 10^5 \frac{\xi}{1-\xi} \left[\frac{B}{10\mathrm{G}}\right]^2 \cdot \left[\frac{T}{10^{11}\mathrm{K}}\right]^{-1} \mathrm{cm}^{-3}$$

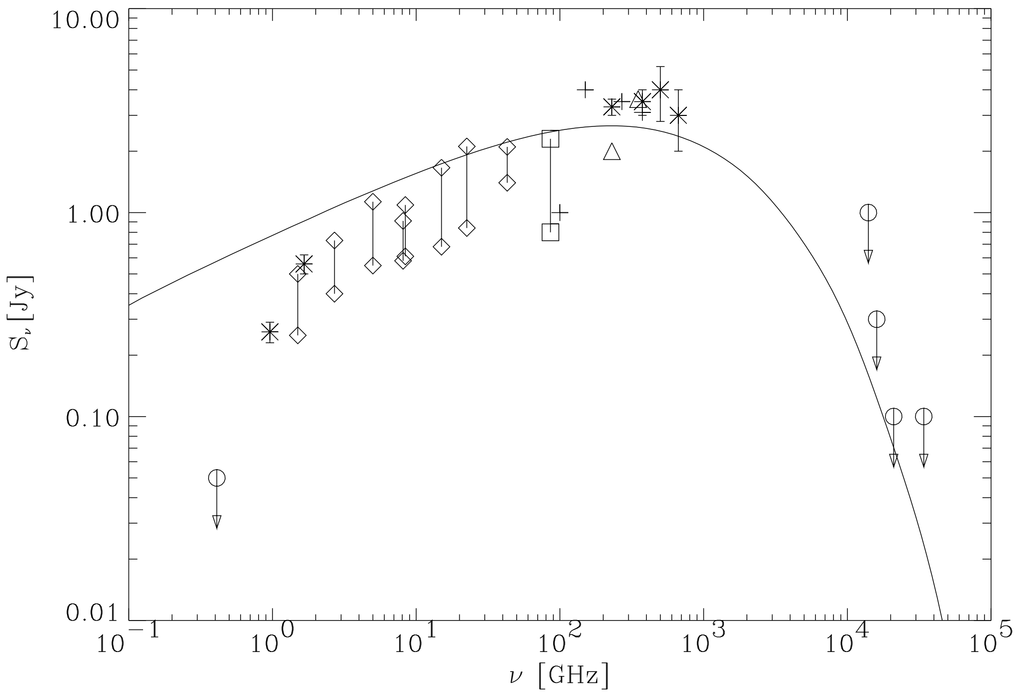

Abbildung 17: Flußdichte S_ν einer thermischen Verteilung von $T = 3.6 \cdot 10^{11}$ K in einem Magnetfeld $B = 13.4$ G . Der mittlere Impuls der Elektronen ist $<p>= 182\,mc$.

Die Werte unterscheidenen sich bei Temperaturen von mehreren 10^{11} K nicht sehr von den bisherigen Werten für die Teilchendichte von circa $5 \cdot 10^4$ cm^{-3} wie sie aus einer Gleichverteilung der Energie folgen.

5.7 Zur Synchrotronselbstabsorption

Die Absorption von Synchrotronstrahlung, und im Speziellen die Selbstabsorption, wurde zuerst von le Roux (1961) im Zusammenhang mit einer unhängigen Darstellung der Synchrotronstrahlung beschrieben. Sein Zugang beruht auf klassischen Betrachtungen der Feldgleichungen (le Roux 1960) und wird hier nicht weiter verfolgt werden. Eine einfache Behandlung von Emission und Absorption in einem Quellgebiet ist dagegen mit Hilfe der Einstein-Koeffizienten möglich (Rybicki & Lightman 1979). Die Koeffizienten selbst stellen Übergangswahrscheinlichkeiten im Gesamtsystem aus geladenen Teilchen und elektromagnetischem Feld dar. Man unterscheidet drei verschiedene Prozesse, die den Strahlungsfluß verändern und sich in einem diskreten Zwei-Niveau-System mit den Einstein-Koeffizienten in Verbindung bringen lassen. Zuerst die spontane Emission, bei der das System ohne Wechselwirkung mit dem bereits vorhandenen Strahlungfeld ein Photon emittiert und vom höherenergetischen Zustand 2 in den Zustand 1 übergeht und welcher der Koeffizient A_{21} zugewiesen wird. Der umgekehrte Prozeß ist die Absorption eines Photons aus dem Strahlungsfeld durch Übergang des Systems von 1 nach 2 . Die Absorption ist protortional zum Strahlungsfluß I und wird durch den Absorptionskoeffizienten $\alpha_\nu = \rho\sigma_\nu$ phänomenologisch beschrieben. Die Absorption ändert die Intensität der Strahlung nach

$$\mathrm{d}I_\nu = -\alpha_\nu I_\nu \,\mathrm{d}s = -\rho\sigma_\nu I_\nu \,\mathrm{d}s \tag{56}$$

und ist frequenzabhängig, was durch die Indizierung angedeutet ist. Der Absorptionskoeffizient ist über die Dichte ρ mit dem Wirkungsquerschnitt eines einzelnen Absorbers σ_ν verbunden. Die entspechende Übergangswahrscheinlichkeit wird durch den Koeffizienten B_{12} charakterisiert. Der Koeffizient soll nur die Eigenschaften des Systems ohne Strahlungsfeld wiedergeben, so daß die Übergangswahrscheinlichkeit gleich $I_\nu B_{12}$ ist. Der dritte mögliche Prozeß ist die induzierte Emission, bei welcher ein Photon des Strahlungsfeldes den Übergang von 2 nach 1 auslöst und zur Emission eines zusätzlichen Photons gleicher Polarisation und Phase führt. Dieser Vorgang ist wieder proportional zum vorhandenen Strahlungsfluß und die Übergangswahrscheinlichkeit ist $I_\nu B_{21}$. Für ein beliebiges System gelten folgende Beziehungen zwischen den Einstein-Koeffizienten (siehe Anhang D).

$$B_{21} = B_{12} \qquad B_{21} = A_{21}\frac{c^2}{4h\nu} \tag{57}$$

Man definiert eine spektrale Emissivität j_ν so, daß die Intensität aufgrund spontaner Emission , d.h. die emittierte Leistung pro Frequenzintervall, Raumwinkel und Volumen des Quellgebiets längs der Strecke ds, sich schreibt als

$$\mathrm{d}I_\nu = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}s = j_\nu\,\mathrm{d}s$$

Im Fall einer isotropen Verteilung der emittierten Energie ist der Beitrag eines spontanen Übergangs in den den Raumwinkel dΩ mit der Energie $h\nu$ gerade

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21}\delta(E_2 - E_1 - h\nu)$$

mit der Dichte n_2 der Zustände im Niveau 2. Die δ-Funktion ist der Spezialfall eines allgemeinen Linienprofils für die hier betrachteten diskreten Synchrotronlinien. Entsprechend gilt für die Absorption $\mathrm{d}I_\nu = -\alpha_\nu I_\nu$ ds und der Absorptionskoeffizient α_ν läßt sich mit den Einsteinkoeffizienten verbinden zu

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})\,\delta(E_2 - E_1 - h\nu)$$

Für ein System mit kontinuierlichen Zuständen ist die Dichte der Zustände im Phasenraum, nach der jeder Zustand das Volumen h^3 einnimmt, zu beachten und man summiert über alle möglichen, diskreten Zustände, die zu Strahlung der Frequenz ν beitragen. Die spontan emittierte Leistung der Frequenz ν ist nun

$$n_2 P(\nu, E_2) = \frac{h\nu}{4\pi}\sum_{E_1} n_2\, A_{21}\delta(E_2 - E_1 - h\nu)$$

Unter Benutzung der rechten Beziehung von (57) kann man die Absorption durch die spontan emittierte Leistung eines Elektrons $P(\nu, E_2)$ ausdrücken.

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\sum_{E_2}(n(E_2 - h\nu) - n(E_2))P(\nu, E_2) \tag{58}$$

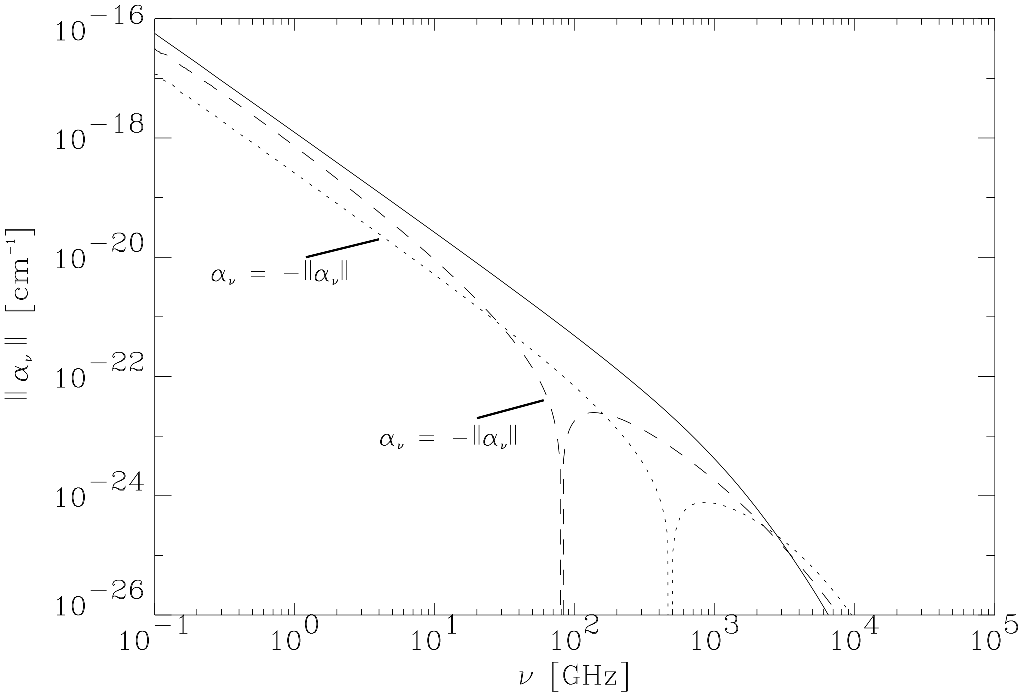

Abbildung 18: Betrag des Absorptionskoeffizienten α als Funktion der Frequenz ν für eine Elektronenverteilung $n(p) \sim p^{-2}$ der Breite $\delta = 1$ entspechend den Werten der Abbildung 13. Zum Vergleich sind der Absorptionskoeffizient einer thermischen Verteilung (Abb. 17) (punktiert) und einer modifizierten Gauß'schen Verteilung (MGV) entsprechend Abbildung 15 aufgetragen. Wie angegeben sind die Koeffizienten negativ und wechseln erst jenseits des markanten Minimums ihr Vorzeichen.

Nutzen wir die Dichte im Phasenraum und gehen von der Summation zur Integration über, so bleibt

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\Omega\;\mathrm{d}p\;p^2\left(f(p_1) - f(p)\right)P(\nu,p) \tag{59}$$

mit $p_1^2 = (E-h\nu)^2c^{-2}-(m_e c)^2$ als Impuls der absorbierenden und $E^2 = (pc)^2-(m_e c^2)^2$ als Energie der stimuliert emittierenden Elektronen. Machen wir an dieser Stelle die Annahme, daß die spontante Emission und die Elektronenverteilung isotrop ist, so nutzen wir

$$\mathrm{d}E N(E) = \mathrm{d}p\;4\pi p^2 f(p)$$

und fordern, daß $h\nu$ viel kleiner als die Energie der Elektronen E ist, um

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\int_0^\infty \mathrm{d}E\;E^2\left(\frac{N(E-h\nu)}{(E-h\nu)^2} - \frac{N(E)}{E^2}\right)\,P(\nu,E)$$

zu erhalten. Entwickelt man den Ausdruck in der Klammer um kleine $h\nu$ bis zur ersten Ordnung, so gelangt man zum Standardresultat

$$\alpha_\nu = -\frac{c^2}{8\pi\nu^2}\int_0^\infty \mathrm{d}E\;E^2\,\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{N(E)}{E^2}\right)\,P(\nu,E) \tag{60}$$

Vernachläßigt wurde hierbei die Richtungsabhänigkeit der Emission $P(\nu, p)$ in der Integraldarstellung (59). Ursache dafür ist, daß die Gleichung (56) nur die Entwicklung der Intensität längs einer Wegstrecke ds angibt und so eine Richtung auszeichnet. Gibt das Magnetfeld, welches die Synchrotronstahlung verursacht lokal eine Richtung vor, so haben wir gesehen, daß auch eine isotrope Elektronenverteilung zu einer anisotropen Emission $P(\nu, p)$ führt, die zusätzlich polarisiert ist. Diese Aspekte sind von Ramaty (1969) einschließlich der Wirkungen von anisotropen Elektronenverteilungen diskutiert worden. Für die Rechungen in dieser Arbeit sind nur die einfache Form (59) verwendet worden. Die Abbildung 18 zeigt den Absorptionskoeffizienten für drei verschiede Verteilungen.
Die Entwicklung der Intensität längs der Sichtlinie in der Quelle unter Berücksichtigung der Absorption ist

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I_\nu}{\alpha_\nu \mathrm{d}s} = -I_\nu + S_\nu$$

mit der sogenannten Quellfunktion $S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$. In einer isotropen und homogenen Quelle kann man längs der Sichtlinie integrieren, und erhält die optische Tiefe $\tau(s)$,

$$\mathrm{d}\tau = \alpha \mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad \tau = \int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s'\ \alpha_\nu(s') = (s - s_0)\alpha_\nu$$

und mit dem integrierenden Faktor e^τ, den Strahlungsfluß

$$I(s) = I(s_0)e^{-\tau} + \int_0^\tau \mathrm{d}\tau'\ e^{-(\tau-\tau')}\, S_\nu(\tau')$$

Da unsere Quellfunktion nicht von der optischen Tiefe abhängen soll, folgt

$$I_\nu = S_\nu(1 - e^{-\tau})$$

wobei wir den Anfangswert $I(s_0) = 0$ gesetzt haben.

5.8 Ein selbstabsorbierender Kern ?

Die Vermutung, im Zentrum der Milchstraße ein schwarzes Loch zu finden, und die Identifizierung von Sgr A* mit diesem Zentrum, lassen die bisherige Annahme eines vollständig homogenen und isotropen Elektronengas in einem homogenen Magentfeld als zu einfach erscheinen. Sofern ein schwarzes Loch tatsächlich den Kern des untersuchten Emissionsgebietes bildet, ist eine radiale Struktur zu erwarten. Zerlegen wir die Quelle in einen Kernbereich hoher Dichte und eine ausgedehnte Hülle, so zerfällt auch das Emissionsspektrum in zwei Komponenten. Nehmen wir die beiden Bereiche als in sich homogen und in der Elektronenverteilung auch isotrop an, so können wir beide Teile wie bisher behandeln und die einzelnen Spektren aufaddieren. Da wir die Elektronendichte durch die Annahmen der Gleichverteilung von kinetischer und magnetischer Energiedichte eliminiert hatten (53), sind unsere Parameter für den Kern die Energie der relativistischen Elektronen, das $B-$Feld und das Volumen des Kerns. Die angestrebte hohe Dichte wird durch ein entsprechend starkes Magnetfeld erreicht, und der beobachtete Abfall des Spektrums im Infraroten, erfordern eine entsprechend niedrige Elektronenenergie. Abhängig von der Form der Elektronenverteilung zeigt der

	Modell A		Modell B	
Komponente	I	II	I	II
B-Feld [G]	7.5	140	12.8	140
$<p>$ in $m_e c$	75	40	182	40
Volumen [10^{41} cm^3]	2.7	$5.9 \cdot 10^{-4}$	2.7	$1.4 \cdot 10^{-4}$
Dichte [10^4 cm^{-3}]	3.7	$2.4 \cdot 10^3$	4.4	$2.4 \cdot 10^3$

Tabelle 1: Physikalische Parameter der Zweikomponenten-Modelle A und B mit gemeinsamer Form der Elektronenverteilung $n(p) \sim p^{-2.5}$ und Breite $\frac{\Delta p}{p} = 1$.

Kernbereich ein stark selbstabsorbiertes Spektrum. Die Frequenzabhängigkeit des Beginns der Selbstabsorption hängt zusätzlich noch vom Volumen des Kerns ab, dessen Größe im optisch dünnen Frequenzbereich die Leuchtkraft ganz wesentlich bestimmt. Wiederum setzt der Abfall zum infraroten Spektralbereich und die gemessenen Flüsse im sub-mm-Bereich die Grenze für die Größe des Kerns.

Die Kombination von starkem Magnetfeld und hoher Teilchendichte in Verbindung mit einer nicht selbstabsorbierenden Elektronenverteilung im Kern und einer zusätzlichen Emission der Hülle führen zu einer starken Überschätzung der gemessenen Flußdichten im klassischen Radiobereich der cm-Wellenlängen, und kann daher ausgeschlossen werden.

Die Emission der Hülle ist demnach verantwortlich für die Form des Spektrums bei kleinen Frequenzen und sollte unterhalb von 1 GHz ebenfalls selbstabsorbiert sein. Als geeignete Elektronenverteilung erweist sich eine schmale $\frac{\Delta p}{p} = 1$ Verteilung in den Impulsen mit einem großen Spektralindex (55) $\alpha = 2.5$.
Als Modell A nehmen wir an, daß allein der Kern die Emission im Sub-mm-Bereich erzeugt. Die Hüllenemission muß entsprechend ein Maximum des Spektrums bei circa 40 GHz aufweisen und die Situation in der Hülle weicht stark von dem bisherigen, vollständig homogenen Modell ab. Das Ergebnis ist in der Abbildung 19 dargestellt. Die zugehörigen Parameter sind in Tabelle 1 angegeben.

Eine zweite Alternative sei als Modell B eigeführt. Die zweite, selbstabsorbierte Komponente soll in diesem Modell nur einen zusätzlichen Beitrag zur Emission im Sub-mm-Bereich erbringen, während die optisch dünne Hülle in allen Spektralbereichen den Hauptbeitrag liefert. Die Forderung, daß die zweite Komponente selbstabsorbiert sein soll, und im gleichen Frequenzbereich ihr Emissionsmaximum erreicht, bedingt die gleichen Parameterwerte für die Magnetfeldstärke und den mittleren Impuls der Elektronen. Die geringeren Beiträge zum Strahlungsfluß werden durch ein kleineres Volumen als im Modell A realisiert. Das resultierende Spektrum aus beiden Komponenten ist in Abbildung 20 gezeigt.

Der Beginn der Selbstabsorption $\tau(\nu) = 1$, der Strahlungsfluß im sub-mm-Bereich und der Abfall zum Infraroten beschränken die möglichen Parameter Magnetfeld, mittlerer Impuls der Elektronen und das Volumen des Kerns so stark, daß für das Volumen eines solchen Kerns eine Obergrenze angegeben werden kann. Die Komponente II des Modells A gibt die charakteristische Größe mit $V = 6 \cdot 10^{37}$ cm^3 an, die einem Radius von

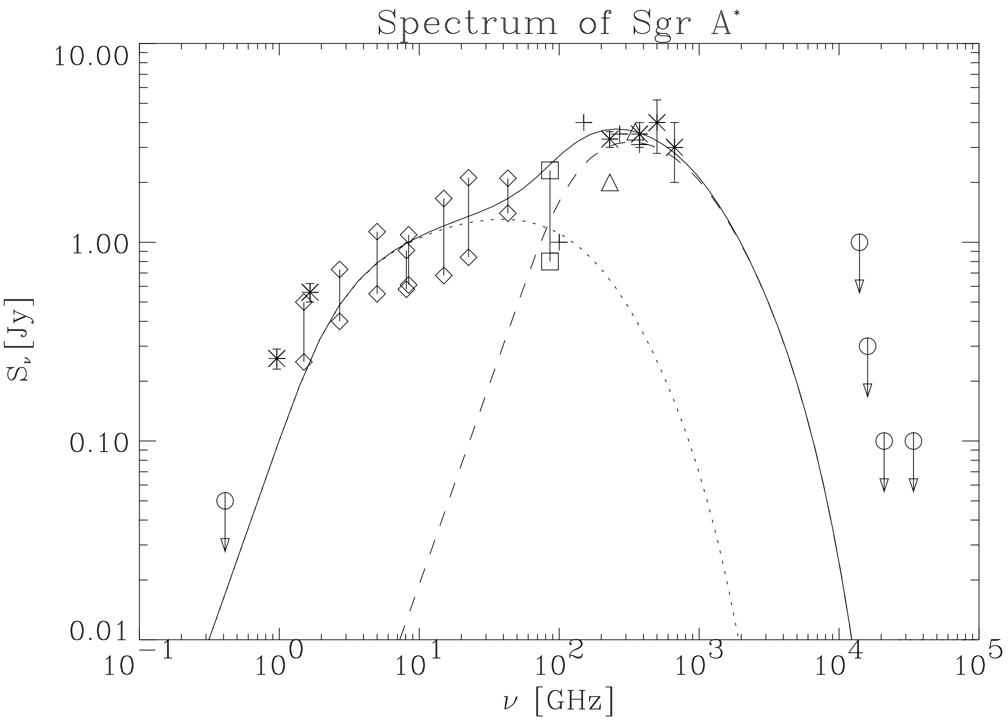

Abbildung 19: Flußdichte S_ν als Funktion der Frequenz ν für ein 2-komponentiges Modell A, bestehend aus zwei Elektronenverteilungen I, II der Form $n(p) = n_0 p^{-2.5}$ und Breite $\frac{\Delta p}{p} = 1$ unterschiedlicher Dichte und mittleren Impulsen (I : $<p>= 75\ mc$, II : $<p>= 40\ mc$)in verschieden starken Magnetfeldern. Die weiteren Parameter sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

$l = 2.4 \cdot 10^{12}$ cm entspricht und ein $\frac{1}{20}$-tel des Radius der Hülle ausmacht. Ein Vergleich mit dem Schwarzschild-Radius eines schwarzen Lochs der Masse $M = 2 \cdot 10^6 M_\odot$

$$R_G = \frac{2GM}{c^2} = 5.9 \cdot 10^{11}\,\mathrm{cm}\,\left[\frac{M}{2 \cdot 10^6\,M_\odot}\right]$$

zeigt, daß ein solcher Kern einen etwa 40-mal größeren Radius hat, und daher nicht ausgeschlossen werden kann.

6 Zusammenfassung und Interpretation

Bereits bei der Beschreibung der Bahn der Elektronen sind wir von einem homogenen Magnetfeld als Ursache der Beschleunigung ausgegangen. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die einzelnen Linien der Synchrotronstrahlung eines Elektrons durch Besselfunktionen $J_m(m\lambda)$ darstellen. Die Emission der Strahlung in Linien folgt aus der Annahme, daß die Bahn der Elektronen eine unendlich fortgesetzte Helix ist und wir Strahlungsverluste vernachlässigen dürfen. Für große Frequenzen existieren gute Näherungen dieser Besselfunktionen, die sich so verstehen lassen, als würde man die Elektronen in nur momentan beschleunigter Bewegung, wobei nur die Beschleunigung

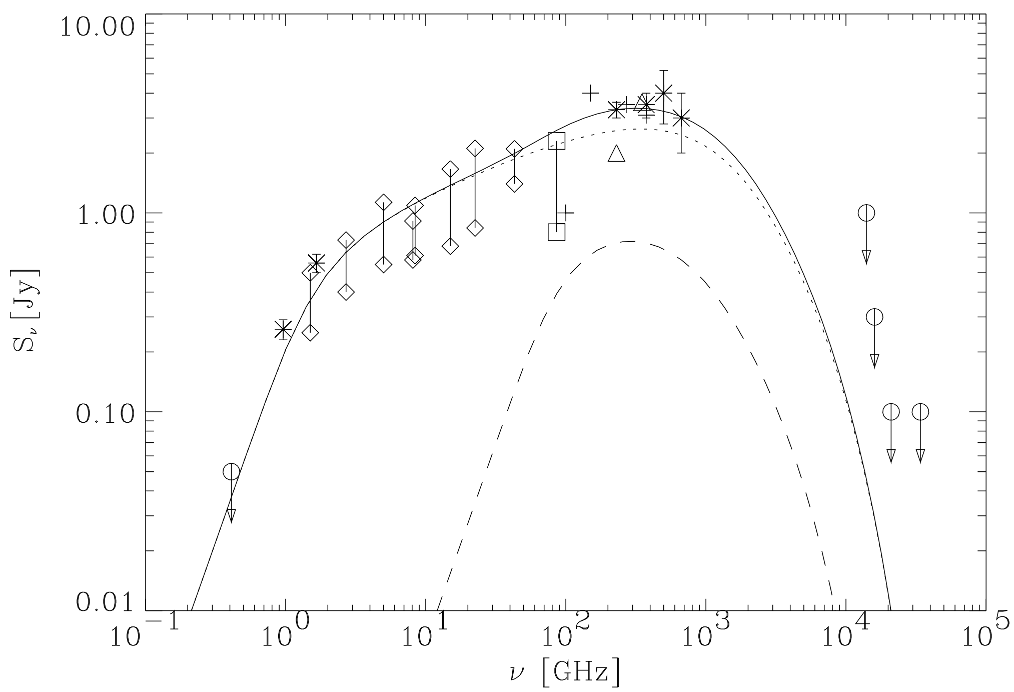

Abbildung 20: Flußdichte S_ν des Modell B eines 2-komponentigen Quellgebiets. Die Emission setzt sich aus einer im gesamten spektalen Bereich dominierenden optisch dünnen Hülle und einer kleinen, selbstabsorbierenden 2-ten Komponente zusammen. Die Parameter sind als Modell B in Tabelle 1 angegeben.

senkrecht zu Geschwindigkeit des Teilchens eine Rolle spielt, betrachten. Die Voraussetzung eines homogenen Magnetfelds wird damit überflüssig.

Für eine isotrope und monoenergetische Elektronenverteilung bestätigen wir die $\nu^{\frac{1}{3}}$-Abhängigkeit der emittierten Leistung im Grenzfall kleiner Frequenzen und einen exponentiellen Abfall jenseits einer kritischen Frequenz ν_c. Die Untersuchung verschiedener Elektronenverteilungen zur Erklärung des Radiospektrums von Sgr A* zeigt, daß eine so starke Annahme, wie die Existenz einer monoenergetischen Verteilung (Duschl & Lesch 1994), nicht notwendig ist. Die Anforderungen an die Verteilung sind ganz wesentlich durch die experimentellen Obergrenzen für den Strahlungsfluß im Infraroten bestimmt, die einen Abfall der Verteilung zu großen Impulsen fordern, der stärker als $n(p) \sim \exp[-\frac{p}{p_c}]$ sein muß. Die Breite der Verteilung darf $\frac{\Delta p}{p} \approx 1$ nicht deutlich übersteigen, um das $\nu^{0.33}$-Verhalten des Spektrums zwischen 1 GHz und 400 GHz zu reproduzieren. Wenn das Absinken des Strahlungsfluß unterhalb von 1 GHz durch Selbstabsorption erklärt werden soll, benötigen wir ein Maximum der Elektronenverteilung bei kleinen Impulsen, wie sie ein Potenzansatz $n(p) \sim p^{-\alpha}$ ($\alpha \approx 2$) bietet. Eine monoenergetische Verteilung, wie auch eine thermische oder gauß'sche Verteilung zeigen keine Selbstabsorption, da das Maximum der Verteilung direkt in den Bereich des exponentiellen Abfalls zu großen Impulsen übergeht und die Anzahl der Elektronen zu kleineren Energien schnell zurück geht.

Eine wichtige Annahme zur eindeutigen Bestimmung der Parameter war die Gleichverteilung zwischen magnetischer Energiedichte und kinetischer Energie der Elektronen bei der Bestimmung der Teilchendichte. Die Lage des Maximums des Spektrums, sowie der Absolutwert des Strahlungsfluß und das Volumen, das wir nach Krichbaum et al. (1994) zu $2.7 \cdot 10^{41}$ cm^3 angenommen haben, bestimmen das Magnetfeld mit $B = 13 \pm 1$ G, den mittlere Impuls $p \approx 190 m_e c$ und die Teilchendichte der relativistischen Elektronen $n_e \approx 4 \cdot 10^4$ cm^{-3} mit kleinen Variationen, je nach gewählter Elektronenverteilung und Anpassung an die Meßwerte. Diese Unterschiede rühren von den verschiedenen Abhängigkeiten der Meßgrößen vom relativistischen γ-Faktor, den wir über unsere Verteilungen mitteln, und dem Magnetfeld her. So ist die Leuchtkraft proprotional zu $(\gamma^2 - 1)B^2$, die kinetische Energie jedoch zu $\propto (\gamma - 1)$ und die kritische Frequenz des Spektrums zu $\gamma^2 B$. Die Möglichkeit im Rahmen dieses einfachen Modells durch Selbstabsorption den Abfall unterhalb von 1 GHz zu erklären, ist eine schönen Eigenschaft, die die Meinung, damit der Wahrheit etwas näher gekommen zu sein, ver stärken.

Einen zusätzlichen Aspekt bietet die Einführung einer weiteren, wesentlich dichteren und kleineren, selbstabsorbierten Komponente, für deren Parameter sich klare Einschränkungen, vorallem für das Volumen $V < 6 \cdot 10^{37}$ cm^3 angeben lassen. Zu bedenken ist, daß die Beobachtungen eine solche zweite Komponente nicht zwingend erfordern, sich mit ihr ein Exzeß im sub-mm-Bereich aber erklären ließe. Außerdem bietet sie die Möglichkeit für die Elektronen der Hülle einen exponentiellen Abfall der Verteilung zu großen Impulsen zuzulassen.

Aufgrund der Annahme, daß die Milchstraße nicht vor anderen Galaxien ausgezeichnet sein sollte (Kosmologisches Prinzip), und der in den 60-er Jahren entwickelten Vorstellung, daß supermassive Schwarze Löcher ($\sim 10^9 M_\odot$) für die emittierten Energien von aktiven galaktischen Kernen (AGN) verantwortlich sind, schlugen D.Lynden-Bell und M.J.Rees im Jahre 1971 die Existenz eines weniger massiven Schwarzen Lochs im Zentrum der Milchstraße vor und erklärten damit die Staubtemperatur im Zentrum. Aus heutiger Sicht genügt die Leuchtkraft des zentralen Sternhaufens, um die beobachtete Leuchtkraft von $0.5 - 2.0 \cdot 10^7 L_\odot$ zu erklären (L.Blitz et al.,1993 und dort zitierte Quellen). Als aktuelle Vorstellung von der physikalischen Struktur von Sgr A* kann die Existenz eines schnell rotierenden (Kerr-)Lochs mit einer Masse $M \leq 2 \cdot 10^6 M_\odot$ Sonnenmassen gelten, das von einer Akkretionsscheibe umgeben ist (H.Falcke et al. ,1993). Die Autoren leiten daraus eine Akkretionsrate von $10^{-8.5} M_\odot/\mathrm{yr} < \dot{M} < 10^{-7} M_\odot/\mathrm{yr}$ und eine Leuchtkraft von $L \simeq 7 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^5 L_\odot$ ab. Die relativistischen Elektronen in unserem Modell zur Erklärung des Radiospektrums, könnten demnach aus der Umgebung dieser Akkretionsscheibe stammen.

Die möglichen Beschleunigungsmechanismen zur Erzeugung der von uns untersuchten Elektronenverteilungen sind hier nicht behandelt und wären Teil eines eigenen Modells. Eine entsprechendes Szenario wurde von Schlickeiser (1984) untersucht und führt auf einen Beitrag $n(p) \propto p^2 e^{-p-p_M}$, den wir im Abschnitt 5.3 als eine mögliche Elektronenverteilung berücksichtigt haben. Der Anteil e^{-p_M} ist nichts anderes als ein konstanter Faktor und unser Argument der Exponentialfunktion läßt sich aus dem Schlickeiserschen Argument durch eine lineare Variablentransformation erhalten.

Wollte man das vorgelegte Modell verbesseren, so wäre eine radiale Struktur im betrachteten Emissionsgebiet zu berücksichtigen, und die zeitliche Entwicklung einer anfänglichen Elektronenverteilung sollte betrachtet werden. Weitere Aspekte, die hier nicht berücksichtigt wurden, sind die Auswirkungen der Anisotropie der Synchrotronstrahlung in homogenen Magnetfelderen auf die Selbstabsorption und die mögliche Polarisation der Strahlung, sofern eine ausgezeichnete Magnetfeldrichtung vorliegt. Die Einführung einer radialen Struktur in der Quelle würde es erforderlich machen den Strahlungstransport ausführlich zu betrachten. Diese Aufgabe bleibt weiteren Arbeiten überlassen.

Ein sehr wichtiges Ergebnis der Beobachtungen ist die Variabilität der Quelle, die wir hier nicht untersucht haben. Ihre Ursachen sollten jedoch nicht im Strahlungsmechanismus, sonderen in der Entwicklung der Elektronenverteilung oder in Effekten der Akkretionsscheibe zu finden sein.

- 'pi' really is in the sky -
John D. Barrow, Theories of Everything

A Verwendete Symbole

α	:	Pitch-Winkel
χ	:	Winkel zwischen Magnetfeld und Beobachtungsrichtung
$\vec{n}$	:	Einheitsvektor in Richtung des Beobachters
ϕ, ψ	:	Azimuth-Winkel
ω	:	Frequenz der Strahlung beim Beobachter
ω_B	:	$\frac{eB}{\gamma m_e c}$ Kreisfrequenz der Bahn
β	:	$\frac{v}{c}$
γ	:	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$
W, P	:	Energie,Leistung
Ω	:	Raumwinkel
R_B	:	Bahnradius $\frac{v \sin\alpha}{\omega_B}$
R	:	Abstand : Elektron - Beobachter
$\vec{g}$	:	$\frac{c^4 R^2}{q^2}\vec{E}$ Entfernungsunabhängig skaliertes elektrisches Feld
η	:	$1-\beta\cos\alpha\cos\chi$
x, y	:	Gedrehte Koordinaten bei der Integration über den Azimuth ϕ, ψ
m	:	Index der Fourierreihe (Fourierkoeff.-Zähler)
λ	:	$\frac{\beta\sin\alpha\sin\chi}{1-\beta\cos\alpha\cos\chi}$
κ	:	$\ln\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}-\sqrt{1-\lambda^2}$
ξ	:	$\beta^{-1}\left(1-\frac{m\omega_B}{\omega}\right)$
L	:	Leuchtkraft
$L_\odot$	=	$3.85\cdot 10^{33}$ ergs^{-1} Leuchtkraft der Sonne
n, n_e	:	Teilchendichte, Dichte der relativistischen Elektronen

B Berechnung des elektrischen Feldes beim Beobachter

Ausgangspunkt sind die retardierten Potentiale

$$\varphi = \left.\frac{q}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}\right|_{ret} \quad , \quad \vec{A} = \left.\frac{q\vec{\beta}}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}\right|_{ret}$$

Aus den Bewegungsgleichungen identifiziert man das el. Feld zu

$$\vec{E} = -\frac{q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \quad \text{und} \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Unter Beachtung der Kettenregel erhält man

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c(1-\frac{\partial t'}{\partial t})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}$$

$$\nabla t' = \nabla(t-\frac{R(t')}{c}) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\nabla t'\right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}$$

Benutzt man dies, um den Gradienten des Potentials φ auszudrücken

$$\nabla\varphi = -\frac{q}{R^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2}((1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})\nabla R + R\nabla(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}))$$

Für den Gradienten des Skalarprodukts gilt nach der Vektoranalysis

$$\nabla(\mathbf{n}\cdot\beta) = (\mathbf{n}\cdot\nabla)\beta + (\beta\cdot\nabla)\mathbf{n} + \mathbf{n}\times(\nabla\times\beta) + \beta\times(\nabla\times\mathbf{n})$$

Zur Auswertung braucht man

$$\partial_i\beta_j = \dot{\beta}_j\partial_i t' = -\frac{\dot{\beta}_j n_i}{c(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}$$

$$\Rightarrow \vec{n}\times(\nabla\times\vec{\beta}) = -\frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})}{c(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})} + \frac{\dot{\vec{\beta}}}{c(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}$$

und

$$\partial_i n_j = \partial_i\frac{r_j-(r_0)_j(t')}{R} = \frac{\delta_{ij}}{R} + \frac{v_j n_i}{cR(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})} - \frac{R_j}{R^2}\frac{n_i}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\beta}\times(\nabla\times\vec{n}) = \frac{\vec{n}\beta^2}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})} - \frac{\vec{\beta}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) = \frac{1}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}\left(-\frac{R}{c}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) + \vec{\beta}(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) + \vec{n}\beta^2\right)$$

womit wir als Ergebnis bekommen

$$\nabla\varphi = -\frac{q}{R^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2}\left(\vec{n} - \vec{\beta} + \frac{\vec{n}}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}\left(\frac{R}{c}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) + \vec{n}\cdot\vec{\beta} - \beta^2\right)\right)$$

Die Ableitung des Vektorpotentials nach der Zeit des Beobachters ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}\partial_t\vec{\beta} - \frac{q\vec{\beta}}{R^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2}(\partial_t(R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}))$$

$$\partial_t(R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}) = c\left(1 - \frac{1}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}\right) + \frac{c\beta^2}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}} - \frac{\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}}}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}$$

Für die Zeitableitung von $\vec{A}$ folgt

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2}\left(\dot{\vec{\beta}} + \frac{c\vec{\beta}}{R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}(\vec{n}\cdot\vec{\beta} - \beta^2 + \frac{R}{c}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}))\right)$$

Diese Ergebnisse kann man zum elektrischen Feld $\vec{E}$ zusammenfassen

$$\begin{aligned}\vec{E} \quad &= \quad -\frac{q}{cR(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}(\dot{\vec{\beta}}(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}) - (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})) \\ &\quad + \frac{q(1-\beta^2)(\vec{n}-\vec{\beta})}{R^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}\end{aligned}$$

Der beschleunigungsabhängige Term ist proportional zu $\propto \frac{1}{R}$, bestimmt die Strahlungsfelder und läßt sich umformen zu

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{cR(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})$$

aus dem man sieht, daß das elektrische Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$ steht und erfreulich transversal ist.

C Integrale

Bei der Auswertung der Synchrotron-Integrale treten häufig Integrale der Form

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^n \, e^{iax^2} \tag{61}$$

auf. Um ihren Wert zu berechnen betrachten wir die analytische Fortsetzung des Integranden und sehen, daß der Integrand keine Pole besitzt, so daß nach dem Cauchyschen Integralsatz das Integral längs eines geschlossenen Weges verschwindet.

$$\begin{aligned}
x &= \eta e^{i\varphi} && (62)\\
I_n + I_n^{(1)} - I_n^{(2)} - I_n^{(3)} &= 0 &&\\
I_n^{(1)} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \, i\eta^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \, \exp[ia\eta^2 \, e^{i2\varphi}] && (63)\\
I_n^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta \, \eta^n e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} \, \exp[ia\eta^2 \, e^{i\frac{\pi}{2}}] && (64)\\
I_n^{(3)} &= \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \, i\eta^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \, \exp[ia\eta^2 \, e^{i2\varphi}] && (65)
\end{aligned}$$

Führen wir in $I_n^{(1)}$ eine Variablen-Transformation $\varphi \to \varphi - \pi$ durch, so folgt :

$$\begin{aligned}
I_n^{(1)} &= \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \, i\eta^{n+1} e^{i(n+1)(\varphi-\pi)} \, \exp[ia\eta^2 \, e^{i2(\varphi-\pi)}] = \\
&= \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \, \eta^{n+1} \, (-1)^{n+1} \, e^{i(n+1)\varphi} \, \exp[ia\eta^2 \, e^{i2\varphi}] = (-1)^{n+1} \, I_n^{(3)}
\end{aligned}$$

Offensichtlich verschwindet für ungerade n das Integral I_n und wir können uns auf gerade n beschränken. Für den Fall $a > 0$ läßt sich $I_n^{(2)}$ direkt angeben :

$$I_n = I_n^{(2)} + 2I_n^{(3)} = e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta \, \eta^n \exp[-a\eta^2] + 2I_n^{(1)} = e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{a^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} + 2I_n^{(1)} \tag{66}$$

Das Integral $I_n^{(1)}$ untersuchten wir bei endlichem η und schreiben

$$\begin{aligned}
I_n^{(1)} &= i\eta^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \, \exp[i(n+1)\varphi + ia\eta^2 e^{2i\varphi}] \approx \\
&\approx i\eta^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \, \exp[i(n+1)\varphi + ia\eta^2(1 + 2i\varphi)] \\
&= \frac{i\eta^{n+1} \exp[ia\eta^2]}{i(n+1) - 2a\eta^2} \left(e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} \, e^{-a\eta^2 \frac{\pi}{4}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Im einfachsten Fall ($n = 0$) und $\eta \to \infty$ verschwindet $I_n^{(1)}$, ansonsten ($n = 2, 4, \ldots$) divergiert es. Entsteht aber das Integral I_n als Näherung von

$$I_n' = \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x^n \, e^{iax^2}$$

mit beschränktem $b < \infty$, so ist auch η beschränkt und im Fall $a \to \infty$ verschwindet $I_n^{(1)}$ wieder für alle n.
Der Fall $a < 0$ wird dadurch behandelt, daß die Drehung des Integrationsweges in der komplexen Zahlenebene in umgekehrter Richtung erfolgt

$$\begin{aligned} x &= \eta\, e^{-i\varphi} \\ \Rightarrow\ \lim_{a\to-\infty} I'_n &= e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta\, \eta^n \exp[a\eta^2] \;=\; e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{|a|^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \end{aligned} \tag{67}$$

D Relationen zwischen Einstein-Koeffizienten

Um eine allgemein gültige Beziehung zwischen den Koeffizienten für spontante Emission A_{21}, induzierte Emission B_{21} und Absorption B_{12} in einem System mit den beiden Energieniveaus 1 und 2 zu erhalten, betrachtet man das quantisierte elektromagnetische Feld in der Besetungszahlbasis. Die Differenz der beiden Energieniveaus sei $h\nu$: $E_2 = E_1 + h\nu$ und der Hamiltion-Operator der Wechselwirkung ist $\hat{H}_{WW} = q \int \mathrm{d}^3x \hat{\jmath} \hat{A}$. Die Übergangswahrscheinlichkeit von 2 nach 1 ist nach gewöhnlicher Störungstheorie in erster Ordnung gegeben durch das Betragsquadrat des Wechelwirkungsmatrixelements $|V_{12}|^2$:

$$\mathrm{d}\mathcal{W} = 2\pi |V_{12}|^2 \delta(E_2 - E_1 - h\nu) \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \; = \; 2\pi |V_{12}|^2 \frac{\nu^2}{hc^3} \mathrm{d}\Omega$$

Um das Matrixelement weiter zu bestimmen betrachtet man den Operator des Viererpotentials in seiner quantisierten Form.

$$\hat{A} \; = \; \sum_{\vec{k},\mu} (\hat{c}_{k,\mu} A_{k,\mu} + \hat{c}^+_{k,\mu} A^*_{k,\mu})$$

Die Erzeugungsoperatoren $\hat{c}^+_{k,\mu}$ und Vernichtungsoperatoren $\hat{c}_{k,\mu}$ genügen den Vertauschungsrelationen $[\hat{c}_{k,\mu}, \hat{c}^+_{k',\mu'}] = \delta_{k,k'}\, \delta_{\mu,\mu}$ und die Vektoren $A_{k,\mu} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{e}^\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ enthalten den Polarisationsvektor $\mathbf{e}^\mu$ und eine ebene Welle.

Die Matrixelemente der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind nur dann von 0 verschieden, wenn sich Anfangs- und Endzustand um $\Delta N_n = 1$ unterscheiden. Wir gebrauchen hier n als Vektor aller Indexzahlen, die den Zustand $|N_n >$ charakterisieren, in dem sich N Photonen befinden. Eine vollständige Angabe des Zustands des elektromagnetischen Feldes, erfordert also die Angabe der Besetzungszahlen N_n für alle möglichen Zustände n. Wir geben aber nur noch die Besetzungszahlen an, die duch die Wirkung der Operatoren verändert werden. Die Martixelemente der $\hat{c}$-Operatoren sind

$$< N_n - 1 | \hat{c}_n | N_n > = < N_n | \hat{c}^+_n | N_n - 1 > = \sqrt{N_n}$$

Befinden sich N_n Photonen im Zustand n, so kann ein Photon absorbiert werden

$$< N_n - 1 | \hat{c}_n | N_n > = \sqrt{N_n}$$

oder eines emittiert werden

$$< N_n + 1 | \hat{c}^+_n | N_n > = \sqrt{N_n + 1}$$

Der Anteil des geladenen Stromes am Übergangsmatrixelement ist beim Wechsel von 1 nach 2 oder umgekehrt immer gleich, da die Wirkung eines speziellen Übergangs auf das Strahlungsfeld von Interesse ist. Da die Zustände in erster Ordnung aus den Zuständen der freien Systeme zusammengesetzt sind, kann der Anteil des Stroms am Betragsquadrat des Matrixelements $| < j_{12} > |^2 \; = \; | < j_{21} > |^2$ absepariert und bei der Bildung von Verhältnissen weggelassen werden. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für Emission und Absorption in eiem gegebenen Strahlungsfeld ist demnach

$$\frac{\mathcal{W}_{(em)}}{\mathcal{W}_{(ab)}} = \frac{\mathcal{W}^{(in)}_{(em)} + \mathcal{W}^{(sp)}_{(em)}}{\mathcal{W}_{(ab)}} = \frac{I_\nu B_{21} + A_{21}}{I_\nu B_{12}} = \frac{N_n + 1}{N_n} \qquad (68)$$

Die Indizes (sp) und (in) sollen zwischen spontaner und induzierter Emission unterscheiden. Die spontane Emission ist nicht abhängig von bereits vorhandenen Photonen und trägt so zur 1 im Zähler bei. Induzierte Emission und Absorption sind somit gleich wahrscheinlich und für die Einstein-B-Koeffizienten gilt

$$g_2 B_{21} = g_1 B_{12}$$

wobei eine mögliche Entartung der Energieniveaus bezüglich des Übergangs in den statistischen Gewichten berücksichtigt werden muß. Um die spontane Emission mit einzubeziehen, drückt man die Besetzungszahl duch die entsprechende Intensität aus. Der Wellenzahlvektor gibt einen Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ vor, in den sich die Photonen ausbreiten. Die Intensität $I_\nu = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega}$ ist gleich der Energie, die pro Zeit und Frequenzintervall durch die Fläche $\mathrm{d}A$ in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ von der Strahlung transportiert wird. Die Energiedichte der Strahlung im Phasenraum ist $\frac{2}{h^3} N_n h\nu$ zu der beide Polarisationsrichtungen beitragen. Schreiben wir das Volumelement im Impulsraum als $\mathrm{d}^3 p = \frac{h^3 \nu^2}{(2\pi c)^3} \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\Omega$ und jenes im Ortsraum als $\mathrm{d}V = c\mathrm{d}t\ \mathrm{d}A$, so kann man für die Intensität

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} N_n$$

angeben. Nutzen wir diese Beziehung, um in (68) die Anzahl der Photonen N_n durch die Intensität auszudrücken, so gelangen wir zu der Relation

$$B_{21} = \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{21}$$

die für jeden einzelnen Übergang gilt, der durch den jeweiligen Anteil des Stroms $< j_{12} >$ oder $< j_{21} >$ beschrieben wird. Tragen mehrere Übergänge zu Strahlung gleicher Frequenz bei, so müssen alle Wahrscheinlichkeiten aufsummiert werden.

E Komplexe Entwicklungen um $z = -iz_0$

Die Größe z_0 ist durch den Sattelpunkt der Funktion $h(z) = -i(z - \lambda \sin z)$ nach (47) unter der Bedingung $0 < \lambda < 1$ gegeben durch

$$\cosh z_0 = \frac{1}{\lambda}$$

und wir wählen z_0 als den Sattelpunkt mit positiven Imaginärteil. Die Enwicklung des Sinus um den Sattelpunkt ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sin z &= -i\sinh z_0 + \cosh z_0 (z+iz_0) + i\frac{\sinh z_0}{2}(z+iz_0)^2 - \\ &- \frac{\cosh z_0}{6}(z+iz_0)^3 - i\frac{\sinh z_0}{24}(z+iz_0)^4 + \dots \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \cosh z_0 + i\sinh z_0 (z+iz_0) - \frac{\cosh z_0}{2}(z+iz_0)^2 - \\ &- i\frac{\sinh z_0}{6}(z+iz_0)^3 + \frac{\cosh z_0}{24}(z+iz_0)^4 + \dots \end{aligned} \tag{70}$$

Weitere notwendige Enwicklungen sind

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \cos z &= (z+iz_0)\lambda \left[-i\sinh z_0 + \frac{\cosh z_0}{2}(z+iz_0) + i\frac{\sinh z_0}{6}(z+iz_0)^2 - \right. \\ &- \left. \frac{\cosh z_0}{24}(z+iz_0)^3 + \dots \right] \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= [h(-iz_0) - h(z)]^{\frac{1}{2}} = (z+iz_0)\sqrt{\lambda} \times \\ &\times \left[\frac{\sinh z_0}{2} + i\frac{\cosh z_0}{6}(z+iz_0) - \frac{\sinh z_0}{24}(z+iz_0)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Als erste Reihenentwicklung einer zusammengesetzten Funktion benötigen wir eine Darstellung von $f(z) = \sin z - \xi \frac{(1-\cos z)^2}{\sin z}$, die sich aus dem oben angegebenen $\sin z$ und

$$\begin{aligned} \frac{(1-\cos z)^2}{\sin z} &= i\frac{(1-\cosh z_0)^2}{\sinh z_0} + \\ &+ \left[2(1-\cosh z_0) + \frac{(1-\cosh z_0)^2 \cosh z_0}{\sinh^2 z_0} \right](z+iz_0) - \\ &- \frac{i}{2}\left[\frac{2}{\sinh z_0} + \frac{(1-\cosh z_0)^2}{\sinh^3 z_0} \right](z+iz_0)^2 - \\ &- \frac{1}{6}\left[\frac{2}{\sinh^2 z_0} + \frac{(1-\cosh z_0)^2 \cosh z_0}{\sinh^4 z_0} \right](z+iz_0)^3 + \dots \end{aligned} \tag{72}$$

zusammensetzen läßt. Eine etwas allgemeinere Formel für die Potenzreihenentwicklung von $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta}$ aus (48) erhalten wir, wenn f, g Funktionen von z und a, b Konstanten sind und wir die zusammengesetzte Funktion

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2+f}}{b+g} &= \frac{a}{b}\left[1 + \left(\frac{f'}{2a} - \frac{g'}{b} \right)(z+iz_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{2a} - \frac{f'^2}{4}\frac{a-1}{a^3} + \frac{2g'^2}{b^2} - \frac{g''}{b} - \frac{f'g'}{ab} \right)(z+iz_0)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

entwickeln. Dabei beziehen sich die Ableitungen jeweils auf den Wert an der Stelle $z = -iz_0$.

Literatur

[AS] Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.), 1972, Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications. New York

[BB] Balick B., Brown R. L., 1974, ApJ 194, 265

[B] Blitz L., Binney J., Lo K.Y., Bally J., Ho P.T.P.,1993, Nat 361, 417

[BS] Bronstein I. N., Semendjajew K.A., 1989, Taschenbuch der Mathematik. Harri Deutsch, Thun

[CH] Courant R., Hilbert D., 1968, Methoden der mathematischen Physik I. Springer, Berlin

[DWB] Davis R. D., Walsh D., Booth R. S., 1976, MNRAS 177, 319

[DL] Duschl W.J.,Lesch H., 1994, A&A 286, 431

[EG] Eckart A., Genzel R., Krabbe A. et al., 1992, Nat 355, 526

[E] Erdelyi A., 1956, Asymptotic Expansions. Dover Publications, New York

[F] Falcke H., Biermann P. L., Duschl W. J., Mezger P. G., 1993, A&A 270, 102

[G] Gezari D., 1992, Mid-infrared emission from the galactic center. In: Blitz L. (ed.) The Center, Bulge, and Disk of the Milky Way. Kluwer, Dordrecht, p.23

[GR] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., 1980,Table of integrals, series and products. Academic Press, New York

[H] Harris D. E., Zeissig G. A., Lovelace R. V., 1970, A&A 8, 98

[J] Jackson J.D., 1962, Classical electrodynamics. Wiley & Sons, New York

[JJ] Jeffreys H., Jeffreys B.S., 1962, Methods of Mathematical Physics. University Press, Cambridge

[K93] Krichbaum T. P., et al., 1993, A&A 274, L37

[K94] Krichbaum T. P., et. al., 1994, mm-VLBI: Jets in the Vicinity of Galaxy-Cores. In: Courvoisier, T.J.-L., Blecha, A. (eds.) Proc. IAU Symp. 159, Multi-Wavelength Continuum Emission of AGN. Kluver, Dordrecht, p.187

[LAS] Lacy J. H., Achtermann J. M., Serabyn E., 1991, ApJ 380, L71

[LL91] Landau L.D., Lifschitz E.M., 1991, Lehrbuch der theoretischen Physik Band 4 : Quantenelektrodynamik. Akademie-Verlag, Berlin

[LL92] Landau L.D., Lifschitz E.M., 1992, Lehrbuch der theoretischen Physik Band 2: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin

[lR] le Roux R., 1960, Ann. Astrophys., 23, 1010

[lR] le Roux R., 1961, Ann. Astrophys., 24, 71

[Lo] Lo K. Y., Cohen M. H., Readhead A. S. C., Backer D. C., 1981, ApJ 249, 504

[LBR] Lynden-Bell D., Rees M. J., 1971, MNRAS 152, 461

[M] Marcaide J. M., et al., 1992, A&A 258, 295

[R] Ramaty R., 1969, ApJ, 158, 753

[RL] Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979, Radiative processes in astrophysics. Wiley & Sons, New York

[Sl] Schlickeiser R., 1984, A&A 136, 227

[S] Schwinger J., 1949, Phys. Rev. 95, 1912

[Wa] atson G. N., 1944, Theory of Bessel Funktions. University Press, Cambridge

[W] Westfold K. C., 1959, ApJ 130, 241

[WH] Wild J. P., Hill E. R., 1971, Aust. J. Phys, 24, 43

[WB] Wright M. C., Backer D. C., 1993, ApJ 417, 560

[ZE] Zhao J.H., Ekers R.D.,Goss W.M., Lo K.Y., Narayan R., 1989, Long term variations of the compact radio source Sgr A* at the galactic center. In: Morris M. (ed.) Proc. IAU Symp. 136, The center of the galaxy. Kluver, Dordrecht,p.535

[ZML] Zylka R., Mezger P. G., Lesch H., 1992, A&A 261, 119

[ZM] Zylka R., Mezger P. G., Ward-Thompson D., Duschl W.J., Lesch H., 1995, A&A, in press

Mein Dank gilt

vorallem Priv.-Doz. Wolfgang Duschl, der die Möglichkeit bot, dieses Thema zu bearbeiten, und bei Problemen und Fragen stets zu helfen wußte. Bei ihm fand ich stets Interesse für meine Arbeit und er ließ mir auch den Freiraum, möglicherweise falsche Ansätze zu verfolgen.

Danken möchte ich Herrn Prof. Ulmschneider für die Zweitkorrektur, und Herrn Prof. Tscharnuter für gute Ratschläge und die Unterstützung der Teilnahme an einem Workshop in Bonn.

Wesentlichen Anteil am Zustandekommen dieser Arbeit hatten Rainer Kürschner und Michael Däther durch ihre fachkundige Betreuung der Rechnersysteme und ihre Hilfe bei entsprechenden Fragen. Für die ruhige Arbeitsatmosphere in unserem kleinen Zimmer sorgte Jörg Schneider, der auch als Bibliotheksbeauftragter oft helfen konnte.

Mitschuldig an dieser Arbeit sind Antje Kohnle und Knut Debus, die mein Interesse an der Astronomie weckten, als auch Joachim Brand, mit dem ich viele Diskusionen, nicht nur über Physik, führte.

Als Letzten und Wichtigsten möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir durch ihre finanzielle Unterstützung dieses Studium ermöglichten und es auch kritisch verfolgten.

Erklärung :

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den