INAUGURAL - DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen

Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Dipl.-Phys. Thomas Beckert

aus Pegnitz/Obf.

Tag der mündlichen Prüfung : 11.11.1998

Advektionsdominierte Akkretion in schwach aktiven galaktischen Kernen

Gutachter : Prof. Dr. Wolfgang Duschl
Prof. Dr. Immo Appenzeller

Zusammenfassung

Die Radiostrahlung von schwach aktiven galaktischen Kernen zeigt neben möglichen kollimierten Jetstrukturen in deren Ursprung kompakte Radioquellen mit invertierten Spektren. Am Beispiel der Radioquelle Sgr A* im Galaktischen Zentrum wird gezeigt, daß sowohl optisch dünne Synchrotronstrahlung von hochenergetischen Elektronen, als auch optisch dicke Synchrotronstrahlung thermischer Elektronen in advektionsdominierten Akkretionsströmungen dieses Phänomen erklären können.

Anhand der Radio- und Infrarotstrahlung der Kerne von M81 und NGC1068 wird kurz gezeigt, daß das optisch dünne Modell nicht auf das Galaktische Zentrum beschränkt ist.

Alternativ dazu wird die advektionsdominierte Akkretion in ein Schwarzes Loch diskutiert. Die Akkretion kann in der Nähe des Horizonts nur in allgemein relativistischer Formulierung betrachtet werden. Dazu wird das thermische Gleichgewicht in Akkretionsströmungen untersucht. Die hydrodynamischen Gleichungen für rotationssymmetrische Strömungen mit turbulenter Viskosität in der Umgebung eines Schwarzen Lochs werden diskutiert und in einer Näherung für die radiale Struktur der Akkretionsströmung das lokale thermodynamische Gleichgewicht für ein Zwei-Temperatur-Plasma bestimmt. Aus dem Gleichgewicht von viskoser Heizung, Strahlungskühlung und Energieadvektion wird die Synchrotron- und Bremsstrahlungsemission der Stömung abgeleitet und mit den Beobachtungen von Sgr A* verglichen.

Die gefundenen advektionsdominierten Akkretionsmoden bietet eine Erklärung für die Unterscheidung von aktiven und inaktiven galaktischen Kernen, ohne viele Übergangsobjekte vorherzusagen.

Abstract

The radio emission of weakly active galactic nulei is in most cases composed of extended emission from radiojets and a compact radio core with an inverted spectrum. Optically thin synchrotron emission of high-energy electrons is considered as one possible explanation and is applied to the galactic center source Sgr A* and to the radio and infrared emission form the cores of M81 and NGC1068.

An alternative explanation is given in terms of optically thick synchrotron emission of an advection dominated accretion flow into a supermassive black hole. The general relativistic description of viscous accretion flows close to the horizon of a black hole is discussed. The thermal balance given by viscous heating, radiation cooling and energy advection for a two-temperature plasma is solved using an approximate treatment of the radial structure of the flow. The resulting synchrotron and free-free emission is compared with the spectrum of Sgr A*.

The advection dominated accretion mode is considered as an explanation for the distinction between active and inactive galactic nuclei. Only a few intermediate objects are suggested.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Unter dem Oberbegriff **Aktive Galaktische Kerne** (AGN) faßt man heute eine ganze Reihe von verschiedenartigen Phänomenen in den Zentren von Galaxien zusammen, deren Interpretation auf der Energiefreisetzung in Akkretionsprozessen beruht. Dabei wird gravitative Bindungsenergie von Materie in der Umgebung eines kompakten, massiven Zentralobjekts in thermische, kinetische und magnetische Energie umgesetzt. Diese Energie kann als Strahlung den Beobachter erreichen oder Materieausflüße treiben, die als kollimierte Jets in einer Vielzahl von aktiven Galaxien gefunden werden. Über die Art des Zentralobjekts besteht kein begründeter Zweifel mehr, seit der Massendichte durch kinematische Untersuchungen von Sternen oder Maserregionen einiger Galaxienkerne, so etwa für NGC4258, eine Untergrenze von $10^{11}\mathrm{M}_\odot\ \mathrm{pc}^{-3}$ in einem Radius kleiner 0.13pc (Miyoshi et al. 1995) gesetzt werden konnte. Die Stoßzeit in einem Cluster aus Neutronensternen dieser Dichte ist geringer als 10^8 Jahre, so daß zumindest als Endprodukt, wenn nicht schon von Anfang an, ein Schwarzes Loch als einzige Erklärung der Massenkonzentration übrigbleibt. Die Masse dieser Schwarzen Löcher in AGN's kann zwischen wenigen 10^6 in unserem Galaktischen Zentrum bis zu 10^{10} Sonnenmassen im Fall des Kerns von M87, der Zentralgalaxie des Virgohaufens, variieren.

In vielen AGN's wird die Strahlung aus der unmittelbaren Umgebung des Schwarzen Lochs nicht direkt beobachtet. Die UV-Stahlung des Innenbereichs einer optisch dicken Akkretionsscheibe wird zur Ionisierung der Broad Line Region (BLR) und der Narrow Line Region (NLR) beitragen und sowohl im Optischen Kontinuum als auch in den Emissionslinien dieser Regionen erscheinen. Die langwellige Emission der Zentralregion wird durch Staub und Frei-Frei-Absorption im Radio- und Infrarotbereich reprozessiert. Auch die beobachtete Röntgenstrahlung wird in vielen Fällen als reflektierte Strahlung einer nicht direkt sichtbaren Zentralquelle interpretiert. Die Reflektion sollte dabei an einem zirkumnuklearen Torus stattfinden oder durch Irradiation einer konvexen Akkretionsscheibe entstehen.

Die aus diesen Modellvorstellungen abgeleitete optische Tiefe in den einzelnen Spektralbereichen umgerechnet auf entsprechende Werte im Visuellen ergibt ein sehr verwirrendes Bild. Die Werte unterscheiden sich bei einzelnen Objekten um bis zu 20 mag, wobei Infrarotmessungen geringe und die Interpretation der Röntgendaten die größten optischen Tiefen nahelegen. Dies erfordert als Erklärung entweder ungewöhnlich hohe Metallhäufigkeiten oder eine räumliche Trennung der Emissionsgebiete je nach Spektralbereich, so daß die zentrale Röntgenemission stärker absorbiert wird als weiter außen lokalisierte, kühlere Bereiche. Eine weitere Erklärung werden wir verfolgen, nach der das zugrundeliegende Strahlungsspektrum der Akkretionsströmung sehr verschieden von bisherigen Akkretionsmodellen ist.

Die Akkretionsscheibe selbst ist durch abbildende Beobachtungsmethoden nicht auflösbar und ihre Eigenschaften können daher nur durch Untersuchungen der spektralen Verteilung des Strahlungflusses dieser Objekte abgeleitet werden. Hochauflösende VLBI-Beobachtungen, wie in Abbildung 1.1 anhand des Kerns von NGC1068 gezeigt, beeinflussen unsere Vorstellung von

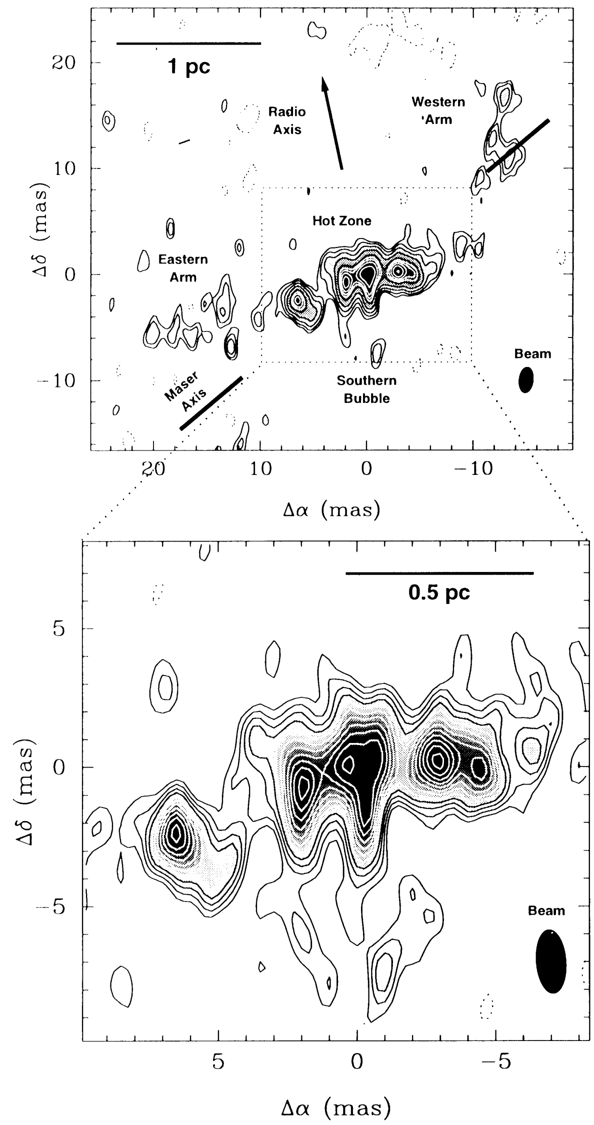

Abbildung 1.1: Das aktuelle Bild von den Zentralbereichen aktiver galaktischer Kerne wird durch hochauflösende VLBI-Beoabachtungen wesentlich geprägt. Am vermuteten Ort des Schwarzen Lochs finden sich dabei kompakte Radioquellen wie hier am Beispiel NGC1068 gezeigt. (aus: Gallimore, Baum & O'Dea, 1997)

der unmittelbaren Umgebung des Schwarzen Lochs. Sichtbar sind mehrere Emissionsgebiete in einer möglicherweise in sich verkippten Akkretionsscheibe auf der Längenskala eines Parsec (pc). Die innere Scheibe scheint senkrecht auf der Richtung der Radiojets zu stehen und hat einen kompakten Kern. Derartige kompakte Radioquellen sind typisch für die Kerne auch schwach aktiver galaktischer Zentralregionen und sie besitzen meist ein invertiertes Radiospektrum, das sie von den Jetkomponenten abhebt.

Das Energiereservoir für die Emission vom Radio- bis in den γ-Bereich wird in der gravitativen Bindungsenergie der akkretierten Materie in der Nähe des zentralen Schwarze Lochs gesehen. Die Akkretionsströmung wird diese in thermische und weiter in Strahlungsenergie umwandeln.

In dieser Arbeit wird die Synchrotronemission des schwächsten untersuchten aktiven galaktischen Kerns, dem unserer eigenen Galaxie, diskutiert. Die Erzeugung der notwendigen hochenergetischen Elektronen in heißen Plasmen kurz aufgezeigt und die Radioquelle Sgr A^* in unserem Galaktischen Zentrum mit der Emission der Kerne von M81 und NGC1068 verglichen. In einem weiteren Kapitel wird die Beschreibung relativistischer Akkretionsscheiben mit viskosem Drehimpulstransport dargelegt. Darin wollen wir die ADAF-Hypothese untersuchen, nach der Akkretionsprozesse bei kleinen Massenflußraten in der Form advektionsdominierter Strömungen (ADAF) realisiert werden können. In Newtonscher Näherung werden wir die selbstähnlichen Lösungen für optisch dünne Akkretionsströmungen mit Energieadvektion genauer untersuchen und die vertikale Struktur geometrisch dicker Strömungen diskutieren.

Die selbstähnlichen Lösungen dienen im folgenden als Basis um das thermische Gleichgewicht in diesen Akkretionsmodellen zu bestimmen und mit den optisch dicken Scheiben zu vergleichen. Die relativistischen Aspekte dieser Modelle werden gesondert behandelt und die Probleme unserer Herangehensweise kurz aufgezeigt.

Als Abschluß legen wir dar, in welcher Weise die gefundenen advektionsdominierten Akretionsströmungen die Klassifikation in aktive und inaktive galaktische Kerne unterstützt. Dazu wird die ADAF-Hypothese erweitert, indem wir hinzufügen, daß advektionsdominierte Akkretion immer auftritt, sobald sie möglich ist.

Kapitel 2

Die Radioquelle Sgr A*

2.1 Beobachtungen bilden die Basis

Das Galaktische Zentrum unserer Galaxie in der Konstellation Sagittarius ist seit den Anfängen der Radioastronomie als starke Radioquelle bekannt. Anfang der 70er Jahre wurde von Balick & Brown (1974) die Radioquelle Sgr A* identifiziert und mit dem Zentrum der Milchstraße in Verbindung gebracht, nachdem Lynden-Bell & Rees (1971) eine solche Quelle in Analogie zu anderen aktiven galaktischen Zentren vorhergesagt hatten. Das Radiospektrum ist von 1 bis 1000 GHz beobachtet und auf Variabilität untersucht worden. Das Spektrum ist in der Abbildung 2.1 gezeigt, wobei Einzelmessungen mit den angegebenen Fehlern dargestellt sind, sowie die gemessenen Schwankungsbreiten im Strahlungsfluß durch Symbole mit Kreisen an beiden Enden, falls mehrere Messungen bekannt sind. Im Infraroten jenseits von 1000 GHz existieren bisher nur Obergrenzen für den Fluß von Sgr A* und sind entsprechend eingetragen. Die Beobachtungen sind im Übersichtsartikel von Mezger, Duschl & Zylka (1996) diskutiert worden. Neuere simultane Messungen bei einer Reihe von Frequenzen (Falke et al. 1998) zeigen einen Exzess im sub-mm Bereich bei circa 300 GHz. Allerdings ist nicht klar, ob gleichzeitig beobachtete Strahlung auch gleichzeitig ausgesandt wurde, da interstellare Szintilationen sowohl die gemessene Ausdehnung der Quelle ($d \propto \lambda^2$), als auch den beobachtbaren Strahlungsfluß verändern. Eine zeitlich variable Anisotropie der im interstellaren Medium (ISM) um die Quelle gestreuten Strahlung läßt den Fluß auf einer Zeitskala variieren, die durch die Bewegung im ISM gegeben ist (bis zu einigen 100 km s^{-1}). Darüber hinaus wird die Quelle selbst wenigstens auf der Kühlungszeitskala der vermuteten, Synchrotronstrahlung emittierenden, relativistischen Elektronen variabel sein. Die gemessene Ausdehnung der Quelle sollte bei immer kleineren Wellenlängen nicht mehr von der Szintilation, sondern durch die intrinsische Größe der emittierenden Region bestimmt sein. Entsprechende Abweichungen vom λ^2-Verhalten sind inzwischen bei 215 Ghz (Krichbaum et al. 1998) durch VLBI-Beobachtungen nachgewiesen worden und legen einen Radius bei dieser Frequenz von etwa $1.5 \cdot 10^{13}$ cm nahe.

In einer früheren Arbeit (Beckert, Duschl ,Mezger & Zylka 1996) konnten wir aus der Modellierung des Radiospektrums durch optisch dünne Synchrotronstrahlung und der nicht gemessenen Strahlung bei Frequenzen kleiner als 1 GHz eine Obergrenze für die Wasserstoffsäulendichte von $N_H = 2.2\ 10^{21}$ cm^{-2} ableiten. In Verbindung mit einer solaren Metallhäufigkeit läßt sich so die photoelektrische Absorption (Morrison & McCammon 1983) bestimmen und ein intrinsischer Fluß im ROSAT-Band (0.8 - 2.5 keV) ermitteln. Die gemessenen (niedrigen) und so korrigierten Werte von ROSAT (Predehl & Trümper 1994) sowie des *Einstein*-Sateliten (Watson et al. 1981) und von ART-P (nicht korrigierte Flüsse) sind im Spektrum (Abb. 2.4) mit den EGRET-Daten im γ-Bereich dargestellt. Die in einer weiteren Arbeit (Beckert & Duschl 1997) beschriebene Modellierung, die in allen gezeigen Spektren mit erscheint, soll nun kurz zusammengefaßt werden.

2.2 Strahlungsmechanismen und Modellierung

Zur Interpretation des gemessenen Strahlungsflusses von Sgr A*, wie er im vorangegangenen Kapitel beschrieben wurde, sind drei Strahlungsmechanismen interessant. Das Radiospektrum kann vernünftigerweise nur durch Synchrotronstrahlung beschrieben werden, da die zugeordneten Helligkeitstemperaturen (die Temperatur eines Schwarzen Körpers derselben Ausdehnung, welcher den gleichen Strahlungsfluß erzeugen würde) 10^{12} K übersteigen und eine thermische Emission eines solchen Objekts im Infraroten nicht zu übersehen wäre. Die Emission im Röntgenbereich kann entweder durch optisch dünne thermische Bremsstrahlung von einigen 10^8 K beschrieben werden, durch invers-compton-gestreute Photonen der Synchrotronquelle oder eines heißen thermischen Strahlers mit Elektronen von $10^9 - 10^{10}$ K, wie sie in advektions-dominierten Akkretionsmodellen vorhergesagt werden (Narayan et al., 1998). In diesem Fall wäre die Radioquelle durch selbst-absorbierte Synchrotronstrahlung dominiert und der spektrale Verlauf durch die magnetische Induktion, Elektrontemperatur und Dichtestruktur in der Quelle bestimmt. Alternativ dazu kann die Synchrotronquelle auch optisch dünn sein. In dieser von uns untersuchten Situation bestimmen die mittlere Energie und Breite der Energieverteilung der Elektronen sowie die Stärke des Magnetfelds allein das Spektrum, während die Quellgröße und Dichte den absoluten Strahlungsfluß und das Einsetzen der Selbstabsorption in der Quelle (hier bei etwa 1 GHz) bestimmt. Aufgrund der geringen Teilchen- und Photonendichten ist die Invers-Compton-Strahlung unbedeutend. Die geforderten großen mittleren Energien der relativistischen Elektronen von bis zu 250 MeV führen mit den Protonen der weniger energiereichen Komponente, die für die Röntgenstrahlung verantwortlich ist, zu einem erheblichen Bremsstrahlungsfluß, der bis in den γ-Bereich reicht, wie in Abb. 2.4 gezeigt.

2.2.1 Ein einfaches Modell

Die erste Annäherung an eine optisch dünne Synchrotronquelle ist, eine Kugel mit homogener Dichte und Energieverteilung der relativistischen Elektronen anzunehmen, die von einem Magnetfeld durchsetzt ist, welches in Energie-Äquipartition mit der Energiedichte der Elektronen steht und über die gesamte Quelle gemittelt als isotrop erscheint. Die Emissivität für Synchrotronstrahlung läßt sich nach einer etwas längeren Rechnung (Beckert & Duschl 1997) durch

$$\begin{aligned} j_\nu(\Omega) &= n(r)\frac{4\pi^2 q^2 \nu}{c}\int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2 \sum_m \frac{\beta\, f_e(\alpha_m, p)}{|\cos\theta|} \times \\ & \left[\left(\sin\alpha_m\, J'_m(m\psi)\right)^2 + \left(g_1\, J_m(m\psi)\right)^2\right] \end{aligned} \tag{2.1}$$

darstellen. Hierbei ist $f_e(\alpha, p)$ die Verteilung der Elektronen nach Impuls p und Pitch-Winkel α sowie $n(r)$ ihre räumliche Dichte. Als Parameter dieser Darstellung treten der Winkel α_m

$$\cos\alpha_m = \frac{1 - \frac{m\nu_s}{\nu}}{\beta\cos\theta} \quad , \tag{2.2}$$

der Polarwinkel der Emission relativ zum Magnetfeld θ, die Gyrationsfrequenz des Elektrons ν_s, sowie die Kombinationen

$$\psi = \frac{\beta\sin\alpha_m\sin\theta}{\xi} \qquad \xi = 1 - \beta\cos\alpha_m\cos\theta \tag{2.3}$$

und

$$g_1 = \left(\frac{\beta\cos\alpha_m - \cos\theta}{\beta\sin\theta}\right) \tag{2.4}$$

auf. Mit J_m und J'_m sind Besselfunktionen und die Ableitungen nach ihrem Argument gemeint. Der Strahlungsfluß in einen Raumwinkelbereich Ω einer so beschriebenen Quelle mit Radius R

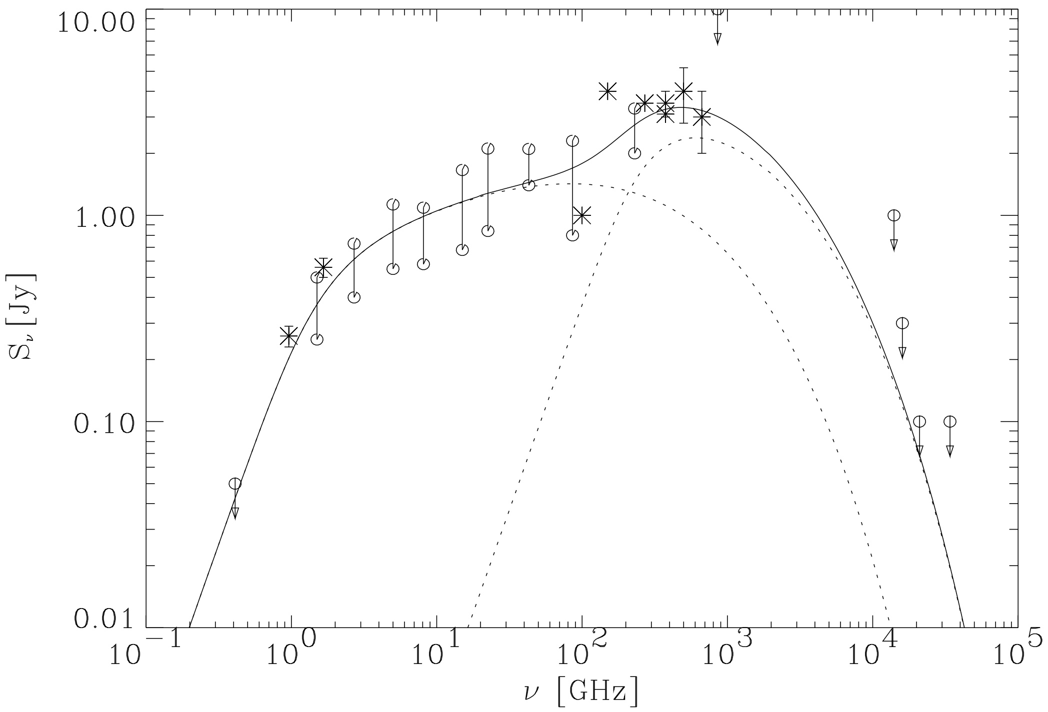

Abbildung 2.1: Das Spektrum eines Kern-Hüllen Modells für Sgr A*. Kern und Hülle sind als in sich homogen angenommen und es besteht keine Wechselwirkung zwischen den Komponenten. Modellparameter sind in Tabelle 2.1 für die ausgedehnte Hülle als Komponente I und den selbstabsorbierten Kern als Komp.II angegeben. Die Spektren der einzelnen Komponenten sind jeweils als punktierte Linien gezeigt.

ergibt sich dann bis zu ersten Ordnung in der optischen Tiefe $\tau_\nu = \alpha_\nu R$ für den Selbstabsoptionskoeffizienten α_ν als

$$F_\nu = \frac{4\pi}{3} R^3 j_\nu(\Omega) \left(1 - \frac{3}{4}\tau_\nu\right) \qquad . \tag{2.5}$$

Die Bremsstrahlung im nicht-relativistischen Fall wird im Abschnitt über die Umgebung von Sgr A* (2.5) im Detail behandelt. Sie ist für die Modellierung des Röntgenspektrums maßgebend. Die Bremsstrahlung relativistischer Elektronen bestimmen wir entsprechend der Beschreibung von Blumenthal & Gould (1970).

Der Strahlungsfluß von im inversen Compotonprozeß gestreuten Photonen läßt sich ebenfalls nach Blumenthal & Gould (1970) für eine isotrope Impulsverteilung der Elektronen $n_e(\gamma)$ und eine spektrale Photonendichte $n_s(\nu_s)$ als Doppelintegral darstellen:

$$F_\nu = \frac{3}{16\pi} \sigma_T c h \nu \int \mathrm{d}\gamma \; n_e(\gamma) \int \mathrm{d}\nu_s n_s(\nu_s) f(x) \qquad . \tag{2.6}$$

Der Zusammenhang zwischen der Energie der Photonen ν_s vor und nach der Streuung ν sowie der Energie des beteiligten Elektrons $\gamma m c^2$ wird durch die Funktion

$$f(x) = 2x \ln(x) + x + 1 - 2x^2 \qquad x = \frac{\nu}{4\nu_s \gamma^2}$$

hergestellt. Als anfängliches Photonenspektrum nehmen wir die Synchrotronphotonen, wie sie aus der Modellierung des Radiospektrums folgen. Die optische Tiefe für den inversen Compton-

Tabelle 2.1: Parameter des Zwei-Komponenten-Modells für Sgr A*

Komp.	$\langle E[\mathrm{MeV}]\rangle$	B [G]	R [10^{13} cm]	n [$10^4\mathrm{cm}^{-3}$]
I	155	2.0	5.5	0.064
II	41.4	75	0.13	300

Prozeß ist sehr gering, so daß wir zum einen keine Rückwirkung auf das Radiospektrum erwarten und zum anderen nur Einfachstreuung annehmen können.

Da sich im stationären Zustand die Energieverteilung der Elektronen durch ein Potenzgesetz bei kleinen Energien und einen exponentiellen Abfall jenseits einer charakteristischen Energie annähern läßt (Jauch 1998), verwenden wir in unserem bevorzugten Modell eine relativistische thermische Verteilung $f(p) \sim p^2 \exp[-\gamma/\theta_e]$ mit der dimensionslosen Temperatur $\theta_e = k_B T/m_e c^2$. Da ein homogenes Modell mit dieser Verteilung allerdings mit den Flußobergrenzen im Infraroten in Konflikt gerät und in der Akkretionsströmung um ein Schwarzes Loch herum eine in sich homogene Quellregion eine sehr grobe Näherung ist, gehen wir zu einem Zwei-Komponenten-Modell mit einem selbst-absorbierten Kern und einer weitestgehend optisch dünnen, ausgedehnten Hülle über. Die beste damit erreichbare Annäherung an das Radiospektrum ist in der Abbildung 2.1 gezeigt. Die physikalischen Parameter des Zwei-Komponenten-Ansatzes sind in der Tabelle 2.1 zusammengestellt. Bemerkenswert ist die Energieinversion, nach der die Elektronen in dem kompakten Kern (Komponente II) deutlich energieärmer als in der Hülle (I) sind. Vergleicht man dieses Spektrum mit den oben zitierten Messungen bei 215 GHz, so ist in unserem Modell der Fluß der beiden Komponenten bei dieser Frequenz etwa gleich groß, die Ausdehnung des Kerns deutlich kleiner und die der Hülle größer als die gemessene. So bezieht sich—der interferometrisch bestimmte—Radius auf eine gaussförmige räumliche Verteilung des detektierten Strahlungsflusses und damit nur auf eine kompakte Komponente, so daß die ausgedehnte Hülle nicht berücksichtigt werden kann. Entsprechend ermitteln die Autoren auch einen Fluß der kompakten Komponente von $2 \pm .2$ Jy, der von dem Gesamtfluß von $3.1 \pm .1$ Jy abweicht und ordnen die Differenz einer ausgedehnten Komponente zu, die eben unsere Hülle sein könnte. Trotzdem sehen wir in unserem Modell nur einen ersten Schritt auf eine radiale Struktur der Quellregion hin.

2.2.2 Die kompakten Radioquellen in M81 und NGC1068

Die Radioquelle Sgr A* des Galaktischen Zentrums ist zwar durch viele Messungen gut untersucht, aber als typisch für kompakte Radioquellen in galaktischen Zentren, vor allem aktiven Zentren, kann sie nicht gelten, da ihr Strahlungsfluß für uns nicht beobachtbar wäre, wenn sie in einer typischen Spiralgalaxien wie M81 sitzen würde. Das Entfernungsverhältnis von 3.5 Mpc für M81 zu 8.5 kpc zu Sgr A* führt zu einer Reduzierung des Strahlungsflusses um $5.9\,10^{-6}$ und damit auf ein nicht mehr nachweisbares Niveau. Trotzdem findet sich in M81 eine Radioquelle im Kern, die ein invertiertes Spektrum ($S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ mit $\alpha < 0$) zeigt (Reuter & Lesch, 1996) und mit der Hypothese, daß die Radiostrahlung optisch dünn ist und von quasi-monoenergetischen Elektronen herrührt, beschrieben werden kann. Das Radiospektrum und die Anpassung unseres Modells sind in Abbildung 2.2 gezeigt. Die daraus bestimmten Quellparameter sind in Tabelle 2.2 zu finden. Da die Quelle auch bei sehr kleinen Frequenzen nicht selbstabsorbiert erscheint, ist das abgeleitete Magnetfeld recht schwach und die Quelle selbst sehr groß. Das Magnetfeld mit der mittleren Energie zusammen bestimmen den Abfall des Spektrums zu großen Frequenzen hin und die benötigten Elektronenenergien unterscheiden sich von denen im Galaktischen Zentrum um weniger als einen Faktor 2. So ist es vor allem die Quellgröße, die es uns erlaubt

Tabelle 2.2: Die Hypothese der optisch dünnen Synchrotronstrahlung quasi-monoenergetischer Elektronen angewandt auf die Kerne von M81 und NGC1068 führt zu den hier angegebenen physikalischen Parametern.

Galaxie	B [G]	r [10^{16} cm]	n [cm^{-3}]	$\langle E\rangle$
M81	0.25	1.19	6.2	252.6 MeV
NGC1068	11	0.2	$1.1\ 10^3$	2.7 GeV

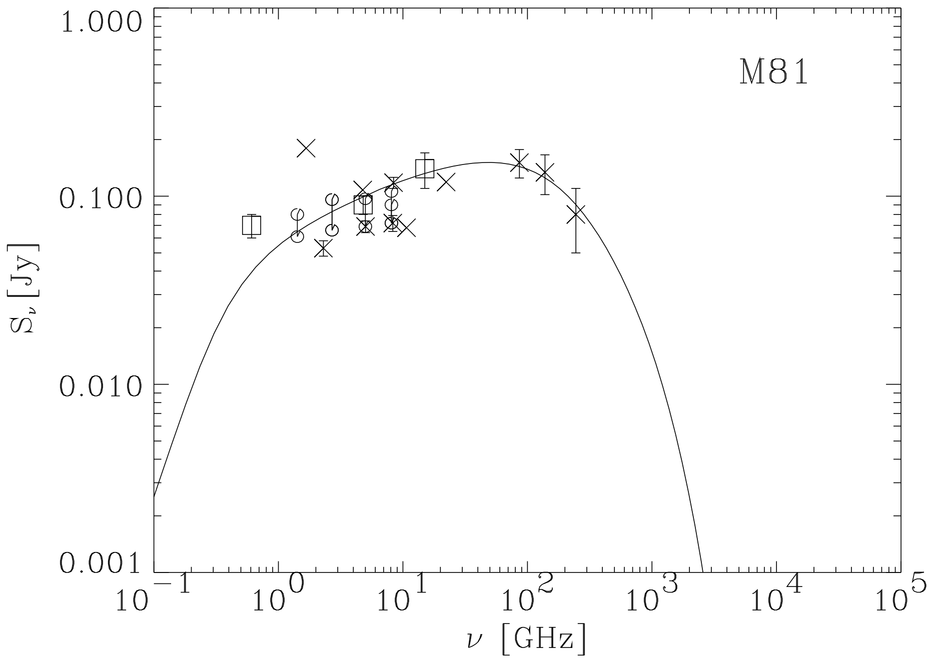

Abbildung 2.2: Radiospektrum des Kerns der *grand design* Spiralgalaxie M81. Auch dieses Spektrum kann mit quasi-monoenergetischen Elektronen und optisch dünner Synchrotronemission erklärt werden, wie das Modellspektrum zeigt. Die Parameter sind in Tabelle 2.2 angegeben.

einen Fluß von ~ 0.1 Jy zu messen. Sowohl unsere Galaxie als auch M81 sind Spiralgalaxien, die nicht als aktive Galaxien klassifiziert werden. Die Emission in anderen— besonders den infraroten und visuellen—Spektralbereichen wird durch HII-Regionen bestimmt und ihre Zentralbereiche als HII-Kerne oder LINER (low-ionization-emission-region) bezeichnet, je nachdem, ob das ionisierende Spektrum stellaren Urprungs ist, wie im ersten Fall, oder nicht.

Demgegenüber werden die kompakten Radioquellen in aktiven galaktischen Kernen mit dem Urprung von Jets in Verbindung gebracht. Radioemission in AGN's stammt häufig von Jets und zeigt positive Spektralindizes von $\alpha = 0.5$ bis $\alpha = 2$, wie sie von Potenzverteilungen der Elektronen in der Energie erzeugt werden. Zwar ist die Kühlungszeit der Elektronen deutlich kürzer als die Laufzeit des Jets, demzufolge sie im Jet selbst, zum Beispiel in Schockfronten, beschleunigt werden müssen, aber dennoch bildet sich kein Pile-up wie in einer quasi-monoenergetischen Verteilung aus. Die Ursprungsregion des Jet ist dagegen meist eine kompakte Radioquelle mit invertiertem Spektrum $\alpha \sim 0\ldots-0.7$ und wird durch die radiale Struktur einer optisch dicken Synchrotronquelle erklärt. Die radiale Struktur sollte durch die Akkretionsströmung in ein supermassives Schwarzes Loch bestimmt sein, wie wir sie in den advektionsdominierten Akkretionsströmungen (ADAF : advection-dominated accretion flow) im Kapitel

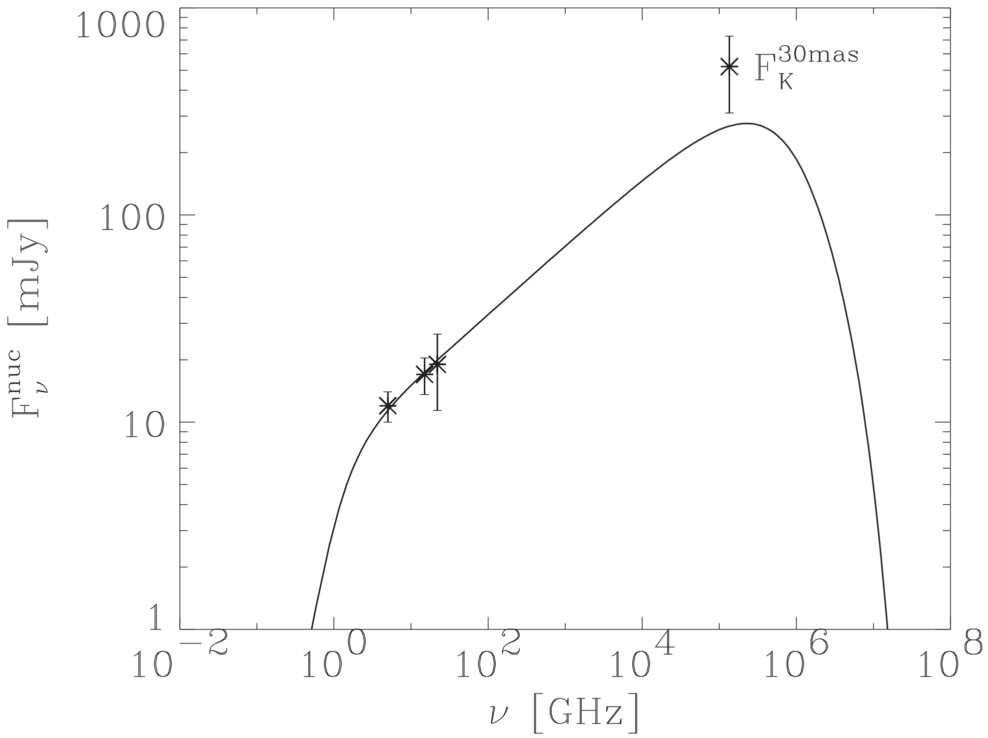

Abbildung 2.3: Das Spektrum des kompakten Kerns der Seyfert 2 Galaxie NGC 1068 vom Radiobereich bis zum K-Band (2.2 μm). Die Abbildung entstammt Wittkowski et al. (1998).

3 beschreiben werden. Allerdings erscheint das dort gefunden Synchrotronspektrum zu steil für viele Quelle mit flachem Spektralverlauf. Ein Paradebeispiel für einen aktiven Kern bietet die Seyfert-2 Galaxie NGC1068, die ein invertiertes Radiospektrum und einen Jet auf der kpc-Skala besitzt. Infrarotbeobachtungen zeigen eine Staubkomponente, die als Torus interpretiert, die Region der breiten Emissionslinien (BLR) nahe dem vermuteten schwarzen Loch verdeckt. Breite Emissionslinien werden dagegen im polarisierten Streulicht innerhalb eines Konus entlang der Jetachsen in einiger Entferung vom eigentlichen Kern gesehen. Neuere Speckle-Beobachtungen im K-Band (Wittkowski et al. 1998) zeigen dagegen eine kompakte Infrarotquelle von 2 pc Radius (angenommene Entfernung 15 Mpc), die entweder dieser Torus oder der Streuhalo einer kompakteren Zentralquelle ist. Auch hier läßt sich das Spektrum vom Radio- bis in den Infrarotbereich durch optisch dünne Synchrotronstrahlung wie bei Sgr A* und dem Kern von M81 erklären. Der gemessene Fluß im K-Band enthält sowohl diffuse Staubstrahlung, als auch eine kompakte Komponente und das Modellspektrum muß daher unter dem Meßwert bleiben, allerdings kann unsere Hypothese praktisch den gesamten Strahlungsfluß mit der kompakten Radioquelle in Verbindung bringen. Entsprechend der Subtraktion der diffusen Strahlung sind die angegebenen Werte in Tabelle 2.2 unsicher, eindeutig ist hingegen, daß die mittlere Energie der Elektronen um einen Faktor 10 größer als in den nicht aktiven Kernen ist, wogegen Radius und Magnetfeld weniger von den Werten der nicht aktiven Kerne abweichen.

2.3 Spekulationen über Beschleunigungsmechanismen

Die Modellierung des Radiospektrums, wie sie in 2.2.1 vorgenommen wurde, kann zwar die spektrale Verteilung der Emission beschreiben, nicht aber das Energiereservoir für die benötigten relativistischen Elektronen bezeichnen. Advektionsdominierte Akkretionsscheiben, wie sie von Narayan & Yi (1994) vorgeschlagen und von Narayan et al. (1998) zur Beschreibung des

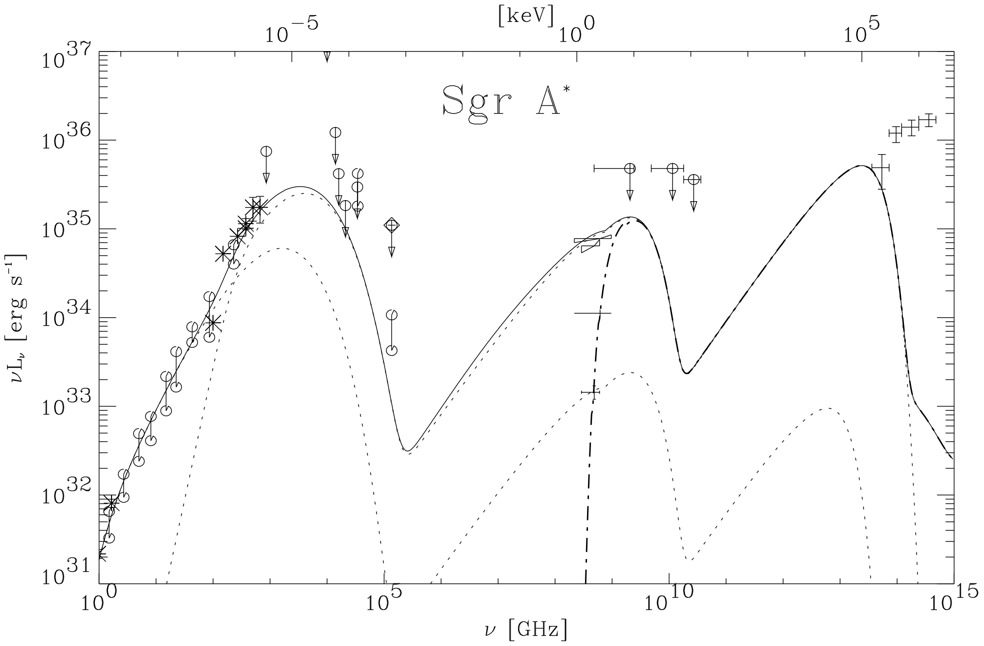

Abbildung 2.4: Kombiniertes Spektrum der Quelle Sgr A* im Galaktischen Zentrum. Neben den Radiodaten, sind Infrarotwerte und Messungen mit den Satelliten ROSAT, *Einstein*, GINGA und GRO angegeben. Die verschiedenen Komponenten des Modellspektrums sind im Text beschrieben.

Spektrums von Sgr A* verwendet wurden, können zwar die Emission im sub-mm Bereich der Synchrotronemmision thermischer Elektronen zuordnen, nicht aber die Emission zwischen 1 und 200 GHz erklären. Mahadevan (1998) hat daher vorgeschlagen, die zusätzliche Radioemission als optisch dünne Synchrotronstrahlung zu deuten, deren Elektronenverteilung — im Gegensatz zu unserer Modellierung—ein Potenzgesetz beschreibt und deren Ursprung im Zerfall geladener Pionen liegt, die selbst in Proton-Proton-Stößen erzeugt werden. Die nötigen Energien für die Pion-Produktion sind dann vorhanden, wenn man annimmt, daß alle Protonen selbst in einer nichtthermischen potenzgesetzmäßigen Verteilung vorliegen, da die Thermalisierungszeitskala für Protonen geringer ist, als die Akkretionszeitskala in advektionsdominierten Strömungen.

Eine weitere Möglichkeit ist die Entstehung eines Pile-up (Jauch 1998) in der Elektronenverteilung bei sehr hohen Energien, falls nichtthermische Elektronen sich in einem Gleichgewicht zwischen Strahlungskühlung und Nachbeschleunigung an Stoßwellen innerhalb eines turbulenten Plasmas befinden. Dieses Modell kann die Entstehung einer quasi-monoenergetischen Verteilung beschreiben, wie sie unserem optisch dünnen Synchrotronmodell entspricht. Es ist aber noch zu klären, wie die nichtthermische Phase der Elektronen mit relativistischen Energien entsteht. Möglicherweise kann der oben erwähnte Pionenzerfall die Elektronen bereitstellen, aber wir wollen hier die Injektion relativistischer Elektronen durch magnetische Rekonnektion in einer einfachen Näherung untersuchen.

2.3.1 Magnetische Rekonnektion

In aktiven galaktischen Kernen wird vom Radio- bis in den γ-Bereich Variabilität auf der Zeitskala von weniger als einem Tag bei einer Gesamtleuchtkraft von bis zu 10^{46} erg s^{-1} beobachtet. Kurzzeitige Ausbrüche in kleineren Systemen wie der Sonne werden als Flares beobachtet, in denen hochenergetische Teilchen mit begleitender Röntgen- und Radiostrahlung erzeugt werden. Ebenso diskutiert man als Ursache für kurzzeitige Phänomene in Systemen mit Akkretionsscheiben Flares in einer hypothetischen Korona der Scheibe. Die Basis dieser Phänomene wird in der Teilchenbeschleunigung in elektrischen Feldern gesehen, die nur in Konfigurationen mit anormaler Leitfähigkeit, während der Rekonnektion von magnetischen Feldlinien auftreten. In allen anderen astrophysikalischen Situationen ist die Leitfähigkeit des Plasmas sehr hoch und die Geschwindigkeiten nicht relativistisch, so daß elektrische Felder keine Rolle spielen.

Wir werden uns bei dieser Diskussion an der Arbeit von Lesch & Pohl (1992) orientieren, die magnetische Rekonnektion in Akkretionsscheiben von AGN's betrachtet haben. Zugrunde liegt dieser das Sweet-Parker-Modell für die Rekonnektion in einer Schicht der Dicke l und der Länge L senkrecht zur Magnetfeldrichtung. In diese Schicht wird Plasma und magnetische Energie mit einer Geschwindigkeit u von beiden Seiten hineintransportiert und Plasma wird entlang der Schicht mit Alfven-Geschwindigkeit v_A herausgedrückt, so daß die Massenerhaltung bei konstanter Dichte $lv_A = Lu$ erfordert. Das hineintransportierte Magnetfeld muß in der Mitte der Schicht verschwinden und erzeugt einen Strom J, da die Magnetfeldrichtungen auf beiden Seiten der Schicht als entgegengesetzt angenommen werden. Aus der Induktionsgleichung folgt so die Abschätzung

$$\frac{B}{l} = \frac{4\pi}{c} J$$

für den Strom, der durch das Ohmsche Gesetz und anormale Leitfähigkeit das elektrische Feld erzeugt, in dem Elektronen auf relativistische Energien beschleunigt werden. Dabei wird in die Schicht eine magnetische Energiedichte mit der Geschwindigkeit u

$$\frac{B^2}{8\pi} u = \frac{J^2}{\sigma} l$$

hineingeführt, die dort dissipiert wird. Aufgrund der Massenerhaltung bekommt man

$$\frac{B^2}{8\pi}\frac{v_A}{L} = \frac{J^2}{\sigma} \tag{2.7}$$

mit der Leitfähigkeit σ, die durch die Elektronen-Plasma-Frequenz und eine Stoßfrequenz dargestellt werden kann

$$\sigma = \frac{\omega_e^2}{4\pi\nu_{\mathrm{coll.}}} \qquad \omega_e^2 = \frac{4\pi n_e q^2}{m_e} \qquad . \tag{2.8}$$

Der Strom ist durch die Drift der Elektronen im inhomogenen Magnetfeld mit der Geschwindigkeit v_D zu $J = n_e q v_D$ gegeben. In Abhängigkeit von Stoßfrequenz und Drift wird die Länge der Schicht durch

$$L = 9.56\,10^{36} \frac{B^3}{n_e^{3/2}\nu_{\mathrm{coll.}} v_D^2} \quad \mathrm{cm} \tag{2.9}$$

bestimmt, wobei die Dichte in cm^{-3}, die Frequenz in Hz, die Geschwindigkeit in cm s^{-1} und das Magnetfeld in Gauss zu messen ist.

Die Beschleunigung der Elektronen beruht auf einem run-away-Effekt, in dem die Stoßfrequenz für energiereiche Elektronen mit der Energie stark abnimmt und sie ohne Abbremsung im elektrischen Feld beschleunigt werden. Dieses Feld entsteht eben bei der Dissipation des Stroms durch Stöße im thermischen Plasma. Bestenfalls erreicht man so

$$\gamma m_e c^2 = qEL \qquad ,$$

wobei wir das E-Feld aus

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

Tabelle 2.3: Aus der Rekonnektions-Hypothese folgen diese Parameter des Zwei-Komponenten-Modells für Sgr A*

Komp.	γ	B [G]	L [cm]	n_e [cm^{-3}]	n_r/n_e	n_a/n_e
I	303	2.0	$1.7\,10^{10}$	$9.3\,10^{3}$	0.07	0.11
II	81	75	$1.2\,10^{8}$	$3.1\,10^{7}$	0.096	0.11

durch Integration über die Fläche erhalten, die durch die Gyrationsbahn eines Elektrons im Magnetfeld aufgespannt wird. Die Bahn hat einen Radius

$$r_g = \frac{mv}{qB} \qquad t_{\mathrm{Rec}} = \frac{r_g}{u}$$

aus dem wir die relevante Rekonnektionszeit t_{Rec} abschätzen und so

$$E \approx \frac{u}{2c} B \tag{2.10}$$

erhalten. Das elektrische Feld ist auch durch das Ohmsche Gesetz an den Strom gebunden, wodurch wir die Transportgeschwindigkeit u als $u = cJ/(\sigma B)$ bestimmen und durch (2.8) und den Strom als Drift der Elektronen

$$u = \frac{m_e c}{qB} v_D \nu_{\mathrm{coll}} = 5.686\,10^{-8} \frac{v_D \nu_{\mathrm{coll}}}{B} \,\mathrm{cm\ s}^{-1} \tag{2.11}$$

bekommen. Wenn wir die Leitfähigkeit in $u = cJ/(\sigma B)$ aus (2.7) bestimmen und in (2.10) einsetzen, so finden wir die mögliche Energie der relativistischen Elektronen durch

$$\gamma = \frac{B^2}{16\pi n_e m_e c^2} \sqrt{\frac{B^2}{4\pi n_e m_i v_D^2}} \tag{2.12}$$

gegeben. Machen wir nun die Annahme, daß die Driftgeschwindigkeit gerade der thermischen Geschwindigkeit der Elektronen im Plasma entspricht und setzen

$$n_e m_i \frac{v_D^2}{2} \approx \frac{3}{2} n_e k_B T_i \qquad ,$$

dann können wir die Elektronendichte des Hintergrundplasmas, aus dem heraus die Elektronen beschleunigt werden, durch

$$n_e = 4.84\,10^{7} \frac{B^2}{\gamma^{2/3} T_i^{1/3}} \quad \mathrm{cm}^{-3} \tag{2.13}$$

mit der Temperatur des Plasmas und der Energie der beschleunigten Elektronen verbinden. Nehmen wir weiter an, daß die Elektronen aus einem Plasma von 10^8 Kelvin kommen, die wir in den äußeren, kühleren Bereichen von ADAF's finden, ergeben sich die Dichten der Elektronen für das Zwei-Komponenten-Modell für Sgr A* wie in der Tabelle 2.3, zusammen mit dem Dichtekontrast zu den relativistischen Elektronen n_r, angegeben. Die Beschleunigung als solche ist unabhängig von der Art der anormalen Leitfähigkeit. Sie ist jedoch notwendig, da die Länge der Rekonnektionsschicht nicht beliebig groß sein kann. Auch sind geometrisch einfache Konfigurationen in Plasmen meist instabil und so erwarten wir, daß Instabilitäten in der Rekonnektionsschicht zur Anregung von Plasmaschwingungen führen, an denen Elektronen gestreut werden und so die Leitfähigkeit verringern. Lesch & Pohl (1992) betrachten unter andern LHI (lower-hybrid-instabilities), die zu einer rein B-Feld abhängigen Stoßfrequenz

$$\nu_{\rm coll} \approx \omega_{LH} = 4\,10^5 B \quad {\rm Hz}$$

führen. Aus (2.9) läßt sich dann die Länge der Schicht ableiten:

$$L = 3.8\,10^{23}\frac{B^2}{n_e^{3/2}T_i}\ {\rm cm} \qquad . \tag{2.14}$$

Da mit der Leitfähigkeit der gesamte Beschleunigungsvorgang festgelegt ist, kann die Dichte der beschleunigten Elektronen n_a in der Schicht abgeleitet werden. Sie folgt aus $n_a\gamma m_e c^3 = v_A B^2/(8\pi)$ und wir finden

$$n_a = 3.55\,10^6\frac{B^3}{\gamma\sqrt{n_e}} \quad {\rm cm}^{-3} \qquad . \tag{2.15}$$

Die Werte, die sich für die beiden Komponenten unseres Modells ergeben, sind ebenfalls in Tabelle 2.3 enthalten.

Die Parameter unseres Modells haben eine vernünftige Ordnung, wonach die Dichte der beschleunigten Elektronen in der Schicht nur 10% der Dichte des Hintergrundplasmas ausmacht, aber größer als die benötigte Dichte in unserem Synchrotronmodell ist, so daß eine Verdünnung des relativistischen Elektronengases durch Diffussion in der Quellregion und Strahlungskühlung vor der Wiederbeschleunigung möglich ist. Außerdem ist die Ausdehnung der Rekonnektionsschicht deutlich kleiner als die Quellgröße, die aus der Selbstabsorption der Synchrotronstrahlung bestimmt ist.

Das Hintergrundplasma selbst wird Bremsstrahlung emittieren, die innerhalb der Quelle optisch dünn ist, aber durch photoelektrische Absorption im umgebenden Material entsprechend einer Wasserstoffsäulendichte von $N_H = 2.2\,10^{21}$ cm^{-2} abgeschwächt wird. Die Dichte unseres, für die Beschleunigung durch magnetische Rekonnektion benötigten, thermischen Plasmas reicht nicht aus, um die gemessenen Flußdichten bei $4.5\,10^{17}$ Hz (ROSAT-Band) zu erklären. Das in der Abbildung 2.4 gezeigte Spektrum geht davon aus, daß die Dichte des thermischen Plasmas in den beiden Komponenten um einen Faktor $4\,10^4$ größer ist, als die Dichte der relativistischen Elektronen. Zwar ist durch die Beobachtung bei einer angenommen Temperatur von 10^8 K nur das Integral $\int {\rm d}V\, n_e^2$ des Dichtequadrats über die Quellregion bestimmt, aber auch eine radiale Struktur mit einem dichteren Kern ist nicht mit den Werten aus der Rekonnektion in Übereinstimmung zu bringen. Eine erhöhte Dichte und auch größere Temperaturen, wie sie in advektionsdominierten Akkretionsströmungen zu finden sind, reduzieren die erreichbare Energie der beschleunigten Elektronen. Wenn wir davon ausgehen, daß die Röntgenstrahlung von dem selben Plasma emittiert wird, in dem die Rekonnektion stattfindet, so ergibt sich, daß die Rekonnektion einen Mechanismus anbietet, der Elektronen aus der thermischen Verteilung heraus in ein relativistisches, nicht-thermisches Regime bringen kann; die Energie der Elektronen ist dann durch ein Gleichgewicht aus Nachbeschleunigung während der Streuung an Schockwellen (Fermi-Beschleunigung) und Strahlungskühlung, sowie Injektion aus der magnetischen Rekonnektion in die relativistische Phase und Verluste durch Diffusion aus der Quellregion bestimmt (Jauch 1998).

Mit der höheren Dichte folgt ein zusätzlicher Bremsstrahlungsfluß der relativistischen Elektronen durch Streuung an Protonen des Hintergrundplasmas. Mit den so bestimmten Dichten folgt ein um $n_r/n_e\sqrt{T_i/T_r} \approx 10^{-6}$ geringerer Fluß, der aber konstant bis zu 10^2 MeV reicht.

2.4 Die Umgebung von Sagittarius A*

Außer der herausragenden Quelle Sgr A* wird die Radiostrahlung vom Galaktischen Zentrum im Bereich der innersten 10 pc durch eine diffuse Bremsstrahlungskomponente und in den 'Radioarcs' durch Synchrotronstrahlung bestimmt. Die Bremsstrahlung stammt von ca. 6000 bis 8000 K heißem Gas des ionisierten Interstellaren Mediums (ISM). Dieses wird von massereichen Sternen ionisiert, die sich vorwiegend in den dichten Kernen von Molekülwolken bilden. Massereiche, junge O- und B-Sterne emittieren relativ viele Photonen im Lyman-Kontinuum (Lyc : $\lambda \leq 912\,\text{Å}$), deren Energie vom ISM absorbiert wird und als Bremsstrahlung, Frei-Gebunden-Strahlung und in der nachfolgenden Kaskade von Übergängen zwischen gebundenen Zuständen wieder abgestrahlt wird, da angeregte Zustände schneller zerfallen als wieder ionisiert werden. In dichten Regionen werden so alle Lyc-Photonen in der Kaskade in Ly-α Photonen umgewandelt, die wiederum vom Staub, der für gewöhnlich HII Regionen umgibt, absorbiert werden und deren Energie als thermische Strahlung im Infraroten emittiert wird. Die Staubtemperaturen liegen im Normalfall bei circa 400 K.

Die Emission einer HII Region setzt sich so aus der zusätzlich staubabsorbierten Strahlung der Sterne auf der langwelligen Seite der Lyman-Kante, der thermischen Emission des Staubs und der Bremsstrahlung sowie den Frei-Gebunden und Gebunden-Gebunden-Übergängen im ISM zusammen

$$S_\nu(\text{HII}) = S_{\text{ff}+} + S_{\text{dust}} + S_* \qquad , \tag{2.16}$$

wobei wir mit ff+ die Strahlung der Gaskomponente des ISM kennzeichnen. Die drei Strahlungskomponenten sind durch drei Temperaturen charakterisiert :

$$S_{\text{ff}+} = B_\nu(T_\text{e})(1 - \text{e}^{-\tau_{\nu,\text{ff}+}}) \tag{2.17}$$

$$S_{\text{dust}} = B_\nu(T_{\text{dust}})(1 - \text{e}^{-\tau_{\nu,\text{dust}}}) \tag{2.18}$$

$$S_* = \sum_i n_i B_\nu(T_{\text{eff},i}) \pi R_i^2 \tag{2.19}$$

mit der Planck-Funktion $B_\nu = 2h\nu^3 c^{-2} / (\exp[h\nu/kT] - 1)$ und der Elektronentemperatur T_e der ionisierten Gaskomponenten in der HII Region. Typische Effektivtemperaturen von massereichen Sternen sind $T_{\text{eff}} \leq 5\,10^4$ K, und für den Spektraltyp i sei ihre Säulendichte mit n_i und die Radien der Sternen mit R_i bezeichnet.

Im Fall des Galaktischen Zentrums beträgt die visuelle Extinktion 31 mag und Beobachtungen sind nur bei Radio- und NIR-Frequenzen bis etwa $3 \cdot 10^{14}$ Hz möglich. Das Infrarot-Spektrum zwischen 10^{11} und 10^{14} Hz wird durch thermischen Staub mit einer Leuchtkraft von $L = 10^8 L_\odot$ bestimmt. Die optisch dünne Bremsstrahlung kann zwischen $5 \cdot 10^9$ und 10^{11} Hz beobachtet werden, während kühle Sterne die Emission im NIR dominieren.

Im Folgenden wollen wir den Beitrag der Bremsstrahlung und Frei-Gebunden-Strahlung im Infraroten und NIR quantitativ bestimmen und sowohl das Spektrum sowie die Leuchtkraft dieser Komponente im Detail betrachten.

2.5 Bremsstrahlung

Bremsstrahlung wird bei der Streuung von Elektronen an Ionen durch die auftretende Beschleunigung erzeugt. Die Emissivität kann in semiklassischer Weise nach der Methode von Kramers und Wentzel berechnet werden, die sich naturgemäß von dem exakten, quantenmechanischen Resultat unterscheidet. Diese Abweichung wird durch den Gauntfaktor als dem Verhältnis von

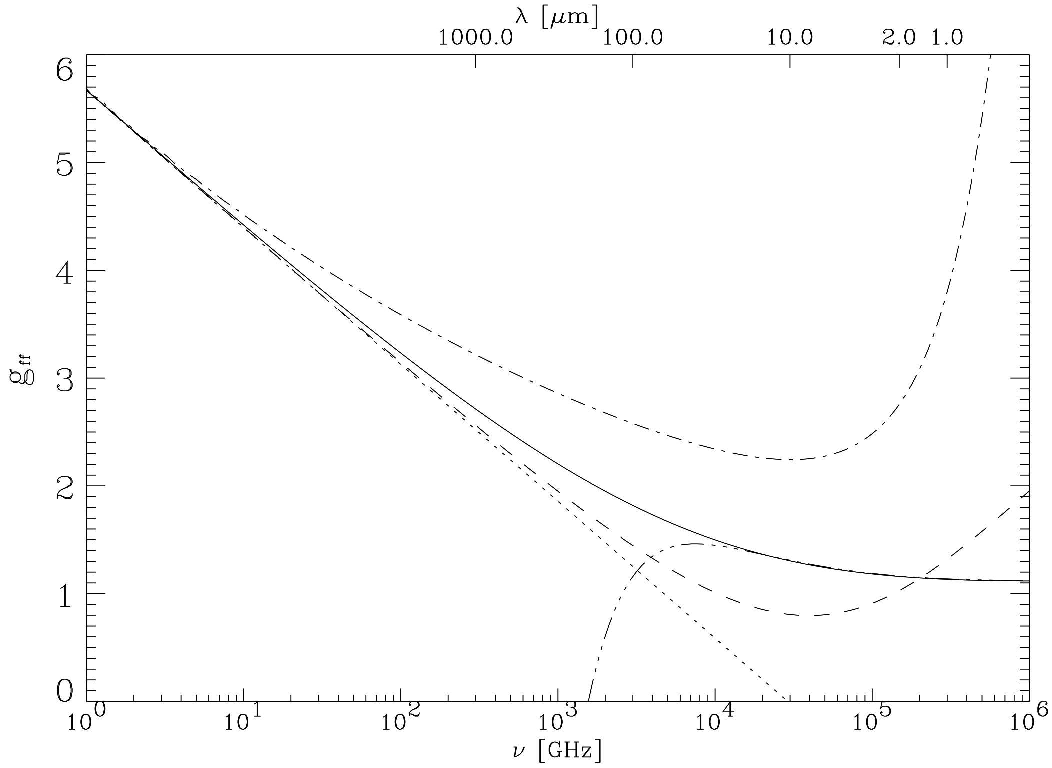

Abbildung 2.5: Der Gauntfaktor g_{ff} für Bremsstrahlung nach Gl. 2.24 und 2.22. Die Berechnung wurde entsprechend der Beschreibung im Text vorgenommen. Die Elektronentemperatur für diese Auswertung ist $T = 7\,10^3$ K, ein typischer Wert für HII Regionen. Die punktierte Linie entspricht der klassischen Näherung von Oster (1961). Das gestrichen gezeichnete Spektrum folgt aus der Gl. 2.30 und die Näherung für kleine Elektronenenergien von Menzel & Pekeris (1935) ist strich-dreifachpunktiert dargestellt. Die Fit-Formel von Altenhoff et al. (1960) ist als strich-punktierte Kurve hinzugefügt.

q.m. und semiklassischem Ergebnis beschrieben. Für Radiobeobachtungen ist der Gauntfaktor im Limes kleiner Frequenzen ausreichend bestimmt, während im Infraroten der Gauntfaktor sowohl von diesem Grenzfall, als auch von der Näherung von Menzel und Pekeris (1935) abweicht.

Die optische Tiefe zur Bestimmung des Spektrums nach Gl.2.17 ist in der Rayleigh-Jeans-Näherung durch

$$\tau_{\nu,\mathrm{ff+}} = 3.014\,10^{16}\left(\frac{\nu}{\mathrm{Hz}}\right)^{-2}\left(\frac{T_\mathrm{e}}{\mathrm{K}}\right)^{-1.5}\left(\frac{E}{\mathrm{pc\,cm^{-6}}}\right) g_{\mathrm{ff+}} \tag{2.20}$$

gegeben mit dem Emissionsmaß $E = \int n_\mathrm{e}^2 \mathrm{d}l$ und dem Gauntfaktor $g_{\mathrm{ff+}}$ für Bremsstrahlung und Frei-Gebunden-Übergänge, der im thermischen Gleichgewicht über eine Maxwellsche Verteilung gemittelt wurde. Näherungen dafür in gewissen Regionen der (T_e, ν)-Ebene wurden von Brussaard & van de Hulst (1962), Oster (1961) und Karzas & Latter (1962) zusammengestellt und ausgewertet.

2.5.1 Exakte Behandlung der Bremsstrahlung

Der gundlegende Prozeß ist die Emission eines Photons bei der Streuung eines leichten geladenen Teilchens (e^-) an einem schweren Teilchen (p) mit umgekehrten Ladungsvorzeichen, so daß eine attraktive Kraft wirksam ist. Der Wirkungsquerschnitt für die Emission eines Photons ist durch

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{ff}} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}}\alpha^3 Z_1^2 Z_2^2 \left(\frac{\hbar}{mv}\right)^2 g(\eta_\mathrm{i}, \eta_\mathrm{f})\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} \tag{2.21}$$

gegeben mit dem bereits vorgestellten Gauntfaktor g für den Elementarprozeß. Wir verstehen α als die Feistrukturkonstante, Z_2 als die Ladung des Ions, von dem wir annehmen, daß es wasserstoffartig ist, also ohne gebundene Elektronen, m der Masse und v der klassischen Geschwindigkeit des Elektrons. Grant (1958) konnte den Gauntfaktor durch die Verwendung von Coulomb-Wellenfunktionen für Anfangs- und Endzustände des Elektrons in der Form

$$g(\eta_\mathrm{i}, \eta_\mathrm{f}) = \frac{\eta_\mathrm{i}\eta_\mathrm{f}}{|\eta_\mathrm{i} - \eta_\mathrm{f}|}\frac{\sqrt{3}\pi\,|\Delta(i\eta_\mathrm{i}, i\eta_\mathrm{f})|}{(\exp[2\pi\eta_\mathrm{f}] - 1)(1 - \exp[-2\pi\eta_\mathrm{i}])} \tag{2.22}$$

mit der komplexen Funktion

$$\begin{aligned}&\Delta(i\eta_\mathrm{i}, i\eta_\mathrm{f}) = \\ &(F(1 - i\eta_\mathrm{i}, -i\eta_\mathrm{f}, 1, z))^2 - (F(1 - i\eta_\mathrm{f}, -i\eta_\mathrm{i}, 1, z))^2\end{aligned} \tag{2.23}$$

durch Hypergeometrische Funktionen darstellen. Die Parameter dieser Darstellung sind $\eta_\mathrm{i}, \eta_\mathrm{f}$

$$\eta_{\mathrm{f,i}} = \alpha Z_1 Z_2 \frac{c}{v_{\mathrm{f,i}}} \qquad z = -4\frac{\eta_\mathrm{i}\eta_\mathrm{f}}{\xi^2} \qquad \xi = \eta_\mathrm{f} - \eta_\mathrm{i} \quad .$$

und mit den klassischen Geschwindigkeiten $v_{\mathrm{f,i}}$ für End- (f) und Anfangszustände (i) verknüpft. Wir werden diesen Gauntfaktor in der numerischen Behandlung verwenden.

2.5.2 Thermisch gemittelte Gauntfaktoren

In vielen astrophysikalischen Anwendungen kann man annehmen, daß die Elektronen durch eine thermische Verteilung der Temperatur T_e beschrieben werden. Das Maxwellsche Mittel des Gauntfaktors für Bremsstrahlung ist

$$g_{\mathrm{ff}} = \int_0^\infty g(\eta_\mathrm{i}, \eta_\mathrm{f}) \exp(-y)\ \mathrm{d}y \tag{2.24}$$

mit der dimensionslosen Energie der Elektronen nach der Streuung skaliert durch die mittlere Elektronenenergie$\langle\mathcal{E}\rangle$

$$y = \left(mv_{\mathrm{i}}^2/2 - h\nu\right) / \langle\mathcal{E}\rangle \qquad .$$

Die Frequenzabhängigkeit des Gauntfaktors entsteht, da nur Elektronen mit einer Mindestenergie $h\nu$ zur Emissivität beitragen. Die Bremsstrahlungsemissivität erhalten wir so als

$$\epsilon_\nu = n_e n_i \int_{v_0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_{ff}}{\mathrm{d}\nu}\right) \frac{h\nu}{4\pi} v_{\mathrm{i}}\, f(v_{\mathrm{i}})\, \mathrm{d}v_{\mathrm{i}}$$

und mit dem Wirkungsquerschnitt aus Gl.2.21 ergibt sich

$$\epsilon_\nu = n_e n_i \frac{8}{3}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{e^6 Z_i^2}{(mc^2)^{3/2}} (kT)^{-1/2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} g_{\mathrm{ff}} \qquad . \tag{2.25}$$

Die entsprechende optische Tiefe für thermische Elektronen ist

$$\tau_{\mathrm{ff}} = \frac{4}{3}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} r_e^3 \frac{Z_i^2 m^{3/2} c^5}{(kT)^{1/2}\; h\nu^3} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) g_{\mathrm{ff}} E$$

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{ff}} &= 1.13725 \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) g_{\mathrm{ff}} \\ &\times \left[\frac{T}{1\mathrm{K}}\right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\nu}{\mathrm{GHz}}\right]^{-3} \left[\frac{E}{\mathrm{pc\,cm^{-6}}}\right] \qquad . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Im Rayleigh-Jeans-Limes erhalten wir den Beitrag

$$\tau_{\mathrm{ff}} = \frac{4}{3}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} r_e^3 Z_i^2 \left(\frac{mc^2}{kT}\right)^{3/2} \frac{c^2}{\nu^2}\, g_{\mathrm{ff}}\, E$$

der Bremsstrahlung ($g_{\mathrm{ff+}} = g_{\mathrm{ff}} + g_{\mathrm{fb}}$) zur optischen Tiefe aus Gl.2.20.

2.5.3 Numerische Methode

Die Hypergeometrischen Funktionen in Gl.2.23 enthalten negative Argumente z deren Betrag für die meisten interessierende Frequenzen $h\nu \ll \mathcal{E}_f < \mathcal{E}_i$ sehr groß ist. Durch eine lineare Transformation (z.B. Abramowitz & Stegun 1972) erhalten wir Argumente im Einheitskreis der komplexen Ebene:

$$\begin{aligned} & F(a,b,1,z) = \\ & \frac{\Gamma(-(1\pm i\xi))}{\Gamma(b)\Gamma(1-a)}(-z)^{-a} F(a,a,2\pm i\xi, 1/z) \\ - & \frac{\Gamma(1\pm i\xi)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}(-z)^{-b} F(b,b,\mp i\xi,1/z) \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$a = 1 - i\eta_{\mathrm{i,f}} \qquad b = -i\eta_{\mathrm{f,i}} \tag{2.28}$$

und eine Darstellung, die für die numerische Auswertung geeignet ist. Die komplexe Funktion Δ aus Gl. 2.23 werten wir durch die hypergeometrische Reihe für $F(a,b,c,z)$ aus. Die numerische Reihenkonvergenz ist für

$$|z| < z_{\mathrm{c}} = \min\left(0.1\left|c(ab)^{-1}\right|, 0.1\right)$$

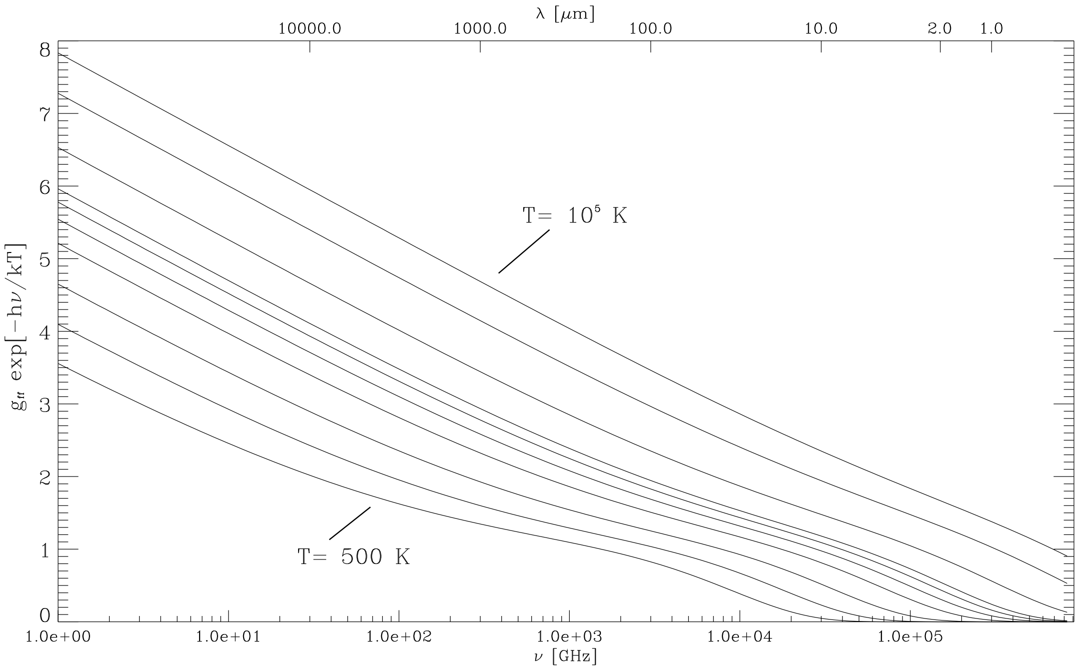

Abbildung 2.6: Bremsstrahlungsspektren $\epsilon_\nu \propto g_{\rm ff} \exp[-h\nu/(kT)]$ für verschiedene Elektronentemperaturen $T[{\rm K}] = \{5\,10^2, 10^3, 2\,10^3, 4\,10^3, 6\,10^3, 8\,10^3, 10^4, 5\,10^4, 10^5\}$.

gut und ausreichend für große Frequenzen, die aber das thermische Mittel nicht dominieren. Wenn $|z| > z_c$ gilt, nehmen wir $\exp[i \arg(z)] z_{\rm c}$ als Argument der Hypergeometrischen Reihe und als Startwert zur Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung durch ein Burlisch-Stör-Verfahren. Um numerische Fehler zu minimieren verwenden wir die Transformation Gl. 2.27 sofern $-z$ größer als 0.5 wird. Für betragsmäßig sehr große Argumente $|z|$ benutzen wir die Näherung Gl. 2.30, die noch abzuleiten ist, um die Anzahl der Integrationsschritte und die sukzessive auftretenden Fehler klein zu halten. Dieses Schema liefert den Integranden für das thermische Mittel Gl. 2.24, das wir an einem inneren Punkt $y_0 = 1$ aufteilen

$$\begin{aligned} g_{\rm ff} \quad = \quad & \int_0^{y_0} g(\eta_{\rm i}(y), \eta_{\rm f}(y)) \exp(-y) \ {\rm d}y \, + \\ & \int_0^{1/y_0} g(\eta_{\rm i}(1/y), \eta_{\rm f}(1/y)) \frac{\exp(y)}{y^2} \ {\rm d}y \end{aligned} \tag{2.29}$$

und über eine Mittelwertsregel integrieren. Alle Gauntfaktoren dieses Abschnitts sind so berechnet, sofern nicht anders vermerkt. Die Abbildung 2.5 zeigt für $T_e = 7000$ K den Vergleich unserer Methode mit den Grenzfällen sehr großer und sehr kleiner Frequenzen. Für alle untersuchten Temperaturen finden wir ein Frequenzintervall in dem beide Näherungen um mehr als 10% abweichende Werte liefern. Wir haben unsere Methode für eine breites Frequenzspektrum und einen weiten Temperaturbereich benutzt und die Spektren in Abbildung 2.6 erhalten.

2.5.4 Der Grenzfall kleiner Frequenz

Für Messungen im Radiobereich gilt, daß im Allgemeinen die Energie der emittierten Photonen viel kleiner ist, als die Energie der Elektronen nach der Streuung $\mathcal{E}_f$. Wir führen daher eine neue Variable ein

$$x = \frac{h\nu}{\mathcal{E}_f}$$

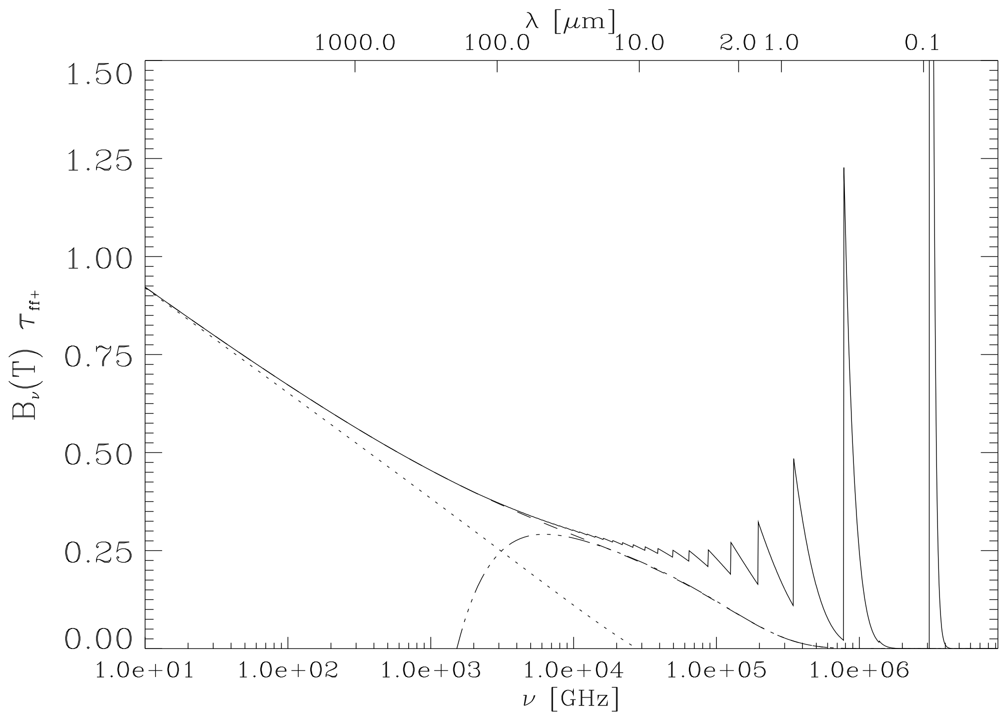

Abbildung 2.7: Das Spektrum optisch dünner Emission eines Wasserstoffgases aus Bremsstrahlung und Rekombinationen bei $T_e = 7\,10^3$ K . Der Strahlungsfluß wurde auf 1 bei 5 Ghz normiert. Die punktierte Linie stellt die Näherung von Oster (1961) für die Bremsstrahlung dar.

und untersuchen den Limes $x \to 0$. Entsprechend divergiert das Argument

$$z = -4\frac{\sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2} \to -\infty \qquad ,$$

so daß die hypergeometrische Reihe für die Auswertung von Gl.2.27 verwendbar ist. Entwickelt man $\Delta(\eta_i, \eta_f)$ bis zur ersten Ordnung in x, so finden wir für den Gauntfaktor $g(\eta_{\mathrm{i}}, \eta_{\mathrm{f}})$ in diesem Grenzfall

$$g(\eta_{\mathrm{i}}, \eta_{\mathrm{f}}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left|\gamma - \log(4/x) + \Re\left(\Psi(i\eta_f)\right)\right| \qquad , \tag{2.30}$$

ein von Oster (1963) abgeleitetes Ergebnis, das sich bei uns für den Spezialfall $h\nu \ll \mathcal{E}_f$ ergibt. Für kleine Elektronenergien $\eta_{\mathrm{f}} \to 0$ können wir den Realteil der Digamma-Funktion $\Psi(i\eta_{\mathrm{f}})$, näherungweise gleich $-\gamma = 0.5772...$ setzen und finden das klassische Resultat

$$g(\eta_{\mathrm{i}}, \eta_{\mathrm{f}}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \log(4/x) \qquad . \tag{2.31}$$

Für die Temperaturen in HII Regionen und Frequenzen $\nu \leq 10^{13}$ Hz läßt sich Gl. 2.31 mit ausreichender Genauigkeit im thermischen Mittel nutzen um, die Näherung

$$g_{\mathrm{ff}} = \ln\left[4.955\,10^6\,(\nu/\mathrm{Hz})^{-1}\right] + 1.5\ln(T_{\mathrm{e}}) \quad , \tag{2.32}$$

die von Oster (1961, 1970) angegeben wurde zu erhalten, die vielfach verwendet wird. Für die Auswertung von Radiobeobachtungen wird oft die Fit-Formel von Altenhoff et al. (1960) verwendet und als Formal für die optische Tiefe ergibt sie

$$\tau_{\mathrm{c}} = 7.94\,10^{16} a(\nu, T_{\mathrm{e}}) \left(\frac{T_{\mathrm{e}}}{\mathrm{K}}\right)^{-1.35} \left(\frac{\nu}{\mathrm{Hz}}\right)^{-2.1} \left(\frac{E}{\mathrm{pc\,cm^{-6}}}\right) \quad . \tag{2.33}$$

Der Korrekturfaktor $a(\nu, T_\mathrm{e})$ ist in Mezger & Henderson (1967) für die relevanten Frequenzen tabelliert. Wir haben die Näherungen von Oster und Altenhoff et al. in der Abbildung 2.5 ebenfalls dargestellt.

2.6 Rekombinationsstrahlung

Das Kontinuum der Emission von HII Regionen im NIR wird zu einem beträchtlichen Teil durch Frei-Gebunden Übergänge erzeugt. Der Wirkungsquerschnitt σ_bf für die Absorption eines Photons durch Wasserstoff oder wasserstoffartige Ionen ist nach Karzas & Latter (1962)

$$\sigma_{bf} = \frac{512\pi^7 m e^{10} Z^4}{3\sqrt{3} c\omega^3 h^6 n^5} g(\omega, n, l, Z) \tag{2.34}$$

mit einem neuen Gauntfaktor $g(\omega, n, l, Z)$, der von den Quantenzahlen für radialen und Drehimpuls abhängt. Emission und Absorption sind in diesem Fall durch die Milne Beziehung

$$\frac{\sigma_{fb}}{\sigma_{bf}} = \frac{2(h\nu)^2}{(mc^2)(mv^2)} \frac{g_n}{g_e g_+} \tag{2.35}$$

miteinander verbunden, so daß man für die Emissivität durch thermische Mittelung

$$\epsilon_{(n,\nu)} \mathrm{d}\nu = N_e N_i \frac{A}{(kT)^{3/2}} \frac{\bar{g}}{n^3} \exp\left[-\frac{h\nu}{kT} + \frac{\chi}{n^2 kT}\right] \mathrm{d}\nu \tag{2.36}$$

$$A = \frac{16\sqrt{2\pi} Z^2 e^6 \sqrt{m}}{3\sqrt{3} m^2 c^3} \chi \qquad \chi = \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{h^2}$$

für Emission bei der Frequenz ν durch Übergänge aus dem Kontinuum in Zustände mit der radialen Quantenzahl n erhält. Die gesamte Emissivität für alle Rekombinationen folgt als Summe über alle Übergänge zu Zuständen mit Ionisationsenergien χ/n^2, die kleiner als die Photonenenergie sind. Die Emissivität durch Rekombinationen für wasserstoffartige Ionen der Ladung Z ist demnach

$$\epsilon_\nu = \sum_{n \geq k}^{\infty} \epsilon_{(n,\nu)} \qquad k = \sqrt{\chi/h\nu} \quad . \tag{2.37}$$

Eine einfache Näherung zur Berechnung der Summe in Gl. 2.37 wurde von Brussaard & van de Hulst (1962) angegeben. Das kombinierte Emissionsspektrum von Bremsstrahlung und Rekombinationsstrahlung von Wasserstoff ist in Abbildung 2.7 gezeigt. Die Emission im nahen Infraroten (NIR) wird durch die Rekombination dominiert, während Rekombinationen bei Radiowellenlängen keine Rolle spielen.

2.7 Linienemission und Energetische Betrachtungen

In HII Regionen werden nahezu alle Elektronen, die durch Frei-Gebunden-Übergänge eingefangen werden, eine Kaskade von Rekombinationen zu energetisch immer niedrigeren Quantenniveaus durchlaufen. Sie emittieren dabei Rekombinationslinienstrahlung vom optischen Bereich (z.B. Hα Emission) bis zu Linien im Radiospektrum, so zum Beispiel die vielfach untersuchte H92α Linie. Genaue Gauntfaktoren für Übergänge zwischen gebundenen Zuständen sind in Storey & Hummer (1995) als Funktion von Dichte und Temperatur zu finden. Die Lyman-Kontinuum-Photonen, welche die HII Region heizen, werden vom Gas absorbiert und im Falle des thermischen Gleichgewicht im Gas in einem Kreislauf von Ionisation und Rekombination in den Grundzustand von neutralem Wasserstoff gespeichert, so daß die Kühlung des reinen

Wasserstoffgases nur durch Rekombination in Quantenzustände $n > 1$ erfolgen kann und nach Rubin (1968) die Balance

$$N_{\rm Lyc} = \int {\rm d}V \; n_e n_i (\beta_{\rm tot} - \beta_1) \tag{2.38}$$

erfüllt ist. Die Größen β_n sind Ratenkoeffizienten der Rekombination in Quantenzustände mit Quantenzahl n und entsprechend $\beta_{\rm tot}$ die Rate für die Summe über alle Rekombinationen. Die Differenz $\beta_{\rm tot} - \beta_1$ entnehmen wir Seaton (1959)

$$\beta_{\rm tot} - \beta_1 = 4.10\,10^{-10} T^{-0.8} {\rm cm}^3 {\rm s}^{-1} \qquad , \tag{2.39}$$

die für Temperaturen kleiner $2 \cdot 10^4$K auf wenige Prozent genau ist.

Für eine typische OB-Assoziation variiert die mittlere Energie der Lyc-Photonen zwischen $1.72 h\nu_\alpha$ für B0 Sterne und $2.41 h\nu_\alpha$ für O4 Sterne mit einem Mittelwert von $2.30 h\nu_\alpha$ nach Mezger, Smith & Churchwell (1974). Die Einheit $h\nu_\alpha$ ist hier die Energie der Lyman-α-Photonen. Demnach wird die HII Region mit einer Leuchtkraft

$$\begin{aligned} L_{\star,\lambda<91.2{\rm nm}} &= 3.76\,10^{-11} N_{\rm Lyc} \\ &= 1.29\,10^{-23} V n_e^2 \left[\frac{T_e}{7\,10^3{\rm K}}\right]^{-0.8} {\rm erg\ s}^{-1} \end{aligned} \tag{2.40}$$

geheizt, wobei Dichten und Volumen in cm^{-3} bzw. cm^3 zu messen sind.

Die Wasserstoffkühlung durch Rekombination ergibt sich durch Integration der Gl. 2.36 für $n = 1$ über alle Frequenzen. Das Resultat ist nach (Cooper 1966)

$$L_{{\rm fb},n=1} = 4.50\,10^{-22} V n_e^2 T^{-0.5} \langle g_{\rm fb} \rangle \,{\rm erg\ s}^{-1} \tag{2.41}$$

mit dem gemittelten Gauntfaktor

$$\langle g_{\rm fb} \rangle = e^\xi \int_\xi^\infty {\rm d}u \; g_{\rm fb} \; e^{-u} \qquad \xi = \frac{\chi}{n^2 kT}$$

für Frei-Gebunden-Übergänge. Bei einer Temperatur von $7 \cdot 10^3$K hat dieser den Wert $\langle g_{\rm fb} \rangle = 0.855$. Die Leuchtkraft für Rekombinationen in Quantenniveaus $n > 1$, welche die Kühlung durch den Wasserstoff ausmacht, erhält man daraus zu

$$L_{{\rm fb},n>1} = (\zeta(3) - 1) \, \frac{\langle g_{\rm fb} \rangle_{n>1}}{\langle \bar{g} \rangle} L_{{\rm fb},n=1} \tag{2.42}$$

und beträgt gerade 25% der Leuchtkraft $L_{{\rm fb},n=1}$ bei der angenommenen Temperatur von $T = 7\,10^3$K. Für den Fall, daß Bremsstrahlung und Rekombinationsstrahlung von Wasserstoff die Heizung nach Gl. 2.40 ausgleichen sollten, müßte das Gas eine Temperatur von $4 \cdot 10^4$K annehmen, die der Temperatur der heizenden Sterne gleichkommt. Diese Bestimmung leidet daran, daß die Ratenkoeffizienten in Gl. 2.39 bei dieser Temperatur nur in unzureichender Genauigkeit in der Literatur verfügbar sind. Einen weiteren Beitrag zur Kühlung liefern Linienübergänge während der Rekombination bis zum Grundzustand. In einem Fall A (Menzel 1935) nimmt man an, daß die Emission in den Lyman-Linien optisch dünn ist. Dies ist allerdings in den seltensten Situationen der Fall und im sogenannten Fall B muß angenommen werden, daß die Lyman-Linien Emission optisch dick ist. Schätzen wir trotzdem die Linienleuchtkraft durch die Emission in den Lyman-Linien ab, so erhalten wir

$$L_{\rm bb} = 1.63\,10^{-11} N_{\rm Lyc} \,{\rm erg\ s}^{-1} \qquad .$$

Die Summe aller bisher betrachteten Kühlungsprozesse ergibt

$$L = L_{{\rm fb},n>1} + L_{\rm bb} + L_{\rm ff} = 0.53 L_{\star,\lambda<91.2{\rm nm}} \tag{2.43}$$

und ist viel zu klein, als daß sie die Temperaturen in HII Regionen erklären könnte. Zusätzliche Kühlung kommt durch stark dichte- und temperaturabhängige, stoßangeregte Übergänge in den schwereren Elementen. Die Emission erfolgt hier in meist verbotenen elektrischen Quadrupol- oder magnetischen Dipolübergängen.

2.8 Anwendung im Galaktischen Zentrum

Als Nuklearen 'Bulge' unserer Galaxie bezeichnet man den Zentralbereich mit $R \leq 300$pc, der $\sim 10\%$ der Sternmasse sowie des Interstellaren Mediums (ISM) und auch der Lyman-Kontinuum Leuchtkraft der gesamten Galaxie enthält. Das ISM besteht aus kompakten Molekülwolken, die in ein heißes, ionisiertes Zwischenwolkengas eingebettet sind. Die Sternpopulation besteht aus einer Mischung von massearmen Population II Sternen, die den Hauptteil der Masse stellen, und einer wesentlich jüngeren Population I aus massereichen und leuchtkräftigen Sternen, die für die Lyc-Photonen verantwortlich sind. Die zahlreichen Sterne der Population II dominieren im Galaktischen Bulge die Emission im NIR, im Gegensatz zu HII Regionen, in denen der Staub im nahen Infraroten das Spektrum bestimmt. Bremsstrahlung des interstellaren Gases bestimmt nur im Radiobereich den Strahlungsfluß und konkuriert bei sehr langen Wellenlängen mit der diffusen Synchrotronemission des Galaktischen Zentrums. Auch Rekombinationsstrahlung des ISM leistet im Galaktischen Zentrum keinen wesentlichen Beitrag zum Infrarotfluß.

Kapitel 3

Optisch dünne Akkretionsscheiben

3.1 Vom Ungenügen bisheriger Scheiben-Modelle

Die Theorie der Akkretionsscheiben wurde in ihren Grundzügen am Anfang der 70er Jahre entwickelt und ist in Frank, King & Raine (1992) dargestellt. Dabei wurde fast immer davon ausgegangen, daß die Materie in der Scheibe mit der Keplerschen Kreisbahngeschwindigkeit rotiert und benachbarte Ringe nur über viskose Reibung miteinander gekoppelt sind. Die Reibung führt zu einer Drehimpulsumverteilung, bei der Materie nach Innen diffundiert und dabei Drehimpuls verliert, welcher von Materie, die nach Außen diffundiert, aufgenommen wird (Pringle 1981). In Doppelsternsystemen wird dieser Drehimpuls dann vom Außenrand der Scheibe auf den Begleiter übertragen und führt zu einer Vergrößerung des Abstands. In aktiven galaktischen Kernen wird nicht die gesamte einstömenden Materie akkretiert. Die lokal erzeugte Wärme wird dabei auch lokal abgestrahlt und die Heizrate $Q^+ = 9/8\ \nu\Sigma\Omega_K^2$ ist gleich der Kühlung $Q^- = \sigma T_{\rm eff}^4$. Im stationären Fall besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Heizrate und Massenakkretionsrate, so daß die gesamte Leuchtkraft der Scheibe direkt proportional zur Akkretionsrate ist. Im Standardmodell nimmt man weiter an, daß die Scheibe optisch dick ist und lokal wie ein schwarzer Körper strahlt. Für das Zentrum unserer Galaxie mit der Quelle Sgr A* folgt so eine Massenakkretionsrate von $\dot{M} = 10^{-11}$ aus den Obergrenzen des gemessenen Strahlungsflußes bei $\lambda = 8.7\mu$m. Dieser Wert steht im Widerspruch zu allen kinematischen Abschätzungen für die Massenakkretion. Untersuchungen der Molekülwolken bei $R = 10\ldots 100$pc lassen auf einen Wert von 10^{-2} Sonnenmassen pro Jahr schließen (von Linden, Duschl & Biermann 1993), von dem allerdings nicht alles im Zentrum ankommen muß, und auch die Akkretion aus den Sternwinden der massiven Sterne des zentralen Sternhaufens führt zu einer Untergrenze von 10^{-4} M$_\odot$/Jahr (Coker & Melia 1997). Einen Ausweg aus diesem Dilemma bieten optisch dünne Akkretionsscheiben, die ihre Wärme als Bremsstrahlung, möglicherweise Synchrotronstrahlung und invers Compton-gestreute, ehemals weiche Photonen abstrahlen. Derartige Akkretionsscheiben wurden von Shapiro, Lightman & Eardley untersucht, haben sich aber als thermisch instabil erwiesen und scheiden für stationäre Betrachtungen damit aus. Ein Ausweg wurde bereits von Ichimaru (1977) diskutiert, aber seine Bedeutung wurde erst von Narayan & Yi (1994) erkannt. Optisch dünne Akkretionsströmungen sind dann stabil, wenn in der Scheibe radialer Energietransport durch Advektion erlaubt ist und die thermische Instabilität nicht in einem *Run-away*-Effekt die Scheibe zerstört, sondern eine Erhöhung der Temperatur zwar zu einer geringeren Strahlungskühlung, aber auch zu einem verstärkten radialen Energietransport führt, der als lokale Kühlung betrachtet werden muß. Die Frage ob diese theoretischen Überlegungen reale Systeme in aktiven galaktischen Kernen beschreibt, wollen wir als ADAF-Hypothese ansehen und in diesem Kapitel genauer untersuchen.

3.2 Relativistische Hydrodynamik

Akkretion auf Schwarze Löcher ist ein genuines Problem der allgemein relativistischen Hydrodynamik oder Magnetohydrodynamik. Deren Formulierung ist keineswegs so gut fundiert, wie die nicht-relativistische Hydrodynamik, die sich als speziell abgeschlossene Momentenentwicklung aus der klassischen Statistischen Mechanik ableiten läßt. Ausgangspunkt für uns ist die relativistische Verallgemeinerung der vier Erhaltungsgleichungen für Energie und Impuls in der Form

$$T^{ij}_{;j} = F^i \qquad , \tag{3.1}$$

in der wir eine äußere Kraftdichte F^i angenommen haben. In der Behandlung der relativistischen Hydrodynamik müssen wir uns für eine bestimmte Signatur der Metrik entscheiden und wir wählen $\{-|+|+|+\}$. Für eine ideale Flüssigkeit ohne Wärmeleitung und Viskosität schreibt sich der Energie-Impuls-Spannungstensor T^{ij} als

$$T^{ij} = \tilde{\rho}\frac{V^i V^j}{c^2} + pg^{ij} \tag{3.2}$$

, wobei $\mathbf{g}$ die Metrik des Raums und $\mathbf{V}$ die Vierergeschwindigkeit der Strömung ist, die wir beschreiben wollen. In dieser Form haben wir einen isotropen Druck abgespalten und eine Energiedichte $\tilde{\rho}$ verwendet, die sich aus Ruheenergie ρ_o und spezifischer Enthalpie h zusammensetzt nach

$$\tilde{\rho} = \rho_0 \left(1 + \frac{h}{c^2}\right) \qquad .$$

Für nicht ideale Flüssigkeiten müssen wir einen viskosen Anteil des Energie-Spannungs-Tensors berücksichtigen. Dieser soll proportional zur räumlichen Variation der Geschwindigkeit sein. In einer pseudo-Riemannschen Raum-Zeit, finden wir diese Größe durch Projektion auf den Unterraum orthogonal zur Vierergeschwindigkeit. Diese Projektion liefert der Projektor $\mathbf{P}$ der durch

$$V_i P^{ij} = 0 \qquad \Rightarrow \quad P^{ij} = g^{ij} + c^{-2} V^i V^j \tag{3.3}$$

in seiner symmetrischen Form definiert ist. Eigenschaften des Projektors werden im Rahmen der relativistischen Hydrodynamik bei Mihalas & Mihalas (1984) und Sexl & Urbantke (1995) diskutiert. Unsere Behandlung der Hydrodynamik folgt weitestgehend der Arbeit von Mihalas & Mihalas. Der viskose Energie-Impuls-Tensor ist dabei proportional zum symmetrischen Scherungstensor

$$D^{ij} = \frac{1}{2}\left(V^i_{;k}P^{kj} + V^j_{;k}P^{ki}\right) - \frac{1}{3}\tilde{\theta}P^{ij} \qquad , \tag{3.4}$$

von dem wir den Anteil proportional zur Expansion $\tilde{\theta} = V^i_{;i}$ der Flüssigkeit abgezogen haben. Diesen Beitrag werden wir als Volumen-Viskosität, auch 2.-te Viskosiät genannt, wieder addieren und erhalten

$$T^{ij}_{\text{vis}} = -2\mu D^{ij} - \zeta\tilde{\theta}P^{ij} \tag{3.5}$$

mit den kinetmatischen Viskositäten μ und ζ, die in Laborgasen aufgrund der Isotropie der Verteilungsfunktion der Teilchen und des Raumes als Skalare erscheinen. In Akkretionsströmungen sind beide Annahmen nicht gerechtfertigt. Zwei Gründe für eine Anisotropie erscheinen uns relevant. Zum einen kann in optisch dünnen Gasen die freie Weglänge für Elemente, seien es elementare Teilchen oder Gaselemente, größer werden als charakteristische Längen von Temperatur- und Dichtegradienten $(\nabla T)/T, \ (\nabla\rho)/\rho$, als auch größer als der Krümmungsradius der Gravitation des Schwarzen Lochs, so daß die Wechselwirkung, die zu einem viskosen Impulstransport führt zum einen richtungsabhängig ist und zum anderen auch nicht mehr lokal behandelt werden kann.

Der zweite Grund ist, daß die mikroskopische Viskosität, wie sie in Laborexperimenten gemessen wird, in Akkretionsströmungen keine Rolle spielt; sie ist viel zu klein, um einen nennenswerten Impulstransport in einer Hubblezeit zu verursachen. Die Viskosität soll vielmehr eine effektive Viskosität sein, die den Drehimpuls durch hydrodynamische oder Plasma-Turbulenz beschreibt. Dabei sind Akkretionsströmungen im klassischen Fall supersonische Scherströmungen [$r\Omega > c_s$], so daß die freie Weglänge für Turbulenzelemente (eddies) in radialer Richtung geringer sein wird als in meridionaler oder azimuthaler Richtung. Allerdings ist gerade die radiale freie Weglänge für den Drehimpulstransport und somit für die Akkretion als solche verantwortlich, wenn man Wechselwirkungen durch magnetische Spannungen vernachlässigt.

Darüber hinaus führt der Ansatz (3.5) zu einer Diffusionsgleichung für den Impulstransport, die intrinsisch akausal ist, was jeder relativistischen Beschreibung spottet. Trotzdem werden wir wider besseren Wissens diese Formulierung verwenden, wenn wir uns auf stationäre Stömungen spezialisieren. Für zeitabhängige Untersuchungen muß eine dezidiert kausale Beschreibung gewählt werden (siehe Peitz 1997, Doktorarbeit).

Neben den baryozentrischen Bewegungen des Gases und den inneren Spannungen liefert auch der Wärmefluß einen Beitrag zum Energie-Impulstensor, für den wir den üblichen Ansatz

$$T^{ij}_{\text{heat}} = c^{-2}\left(Q^i V^j + V^i Q^j\right)$$

mit dem Vierer-Wärmefluß $\mathbf{Q}$ folgen, welcher der Bedingung $V^i Q_i = 0$ genügen muß.

Wir wollen nun die dynamischen Gleichungen in Analogie zur klassischen Hydrodynamik formulieren. Die entsprechende Energie-Gleichung erhalten wir durch Projektion von (3.1) auf die Vierergeschwindigkeit des Gases. Führen wir die konvektive Ableitung für einen beliebigen Vektor oder Skalar $\mathbf{B}$

$$\frac{\mathrm{D}B^i}{\mathrm{D}\tau} = B^i{}_{;j}V^j$$

ein, so nimmt die Energie-Gleichung eine fast schon vertraute Gestalt

$$\frac{\mathrm{D}(\rho_0 c^2 + \epsilon)}{\mathrm{D}\tau} + \tilde{\theta}(\rho_0 c^2 + \epsilon + p) = 2\mu V_i D^{ij}_{\;;j} - \zeta\tilde{\theta}^2 + Q^i{}_{;j} - \frac{V_i}{c^2}\frac{\mathrm{D}Q^i}{\mathrm{D}\tau} \tag{3.6}$$

an. Die Erhaltung der Baryonenzahl liefert eine weitere zentrale Gleichung die wir in der Form

$$\left(\rho_0 V^i\right)_{;i} = 0 \tag{3.7}$$

schreiben. Wir haben dabei alle Reaktion vernachlässigt, welche die Ruhemasse der Teilchen im System bei gleicher Baryonenzahl, wie etwa Paarerzeugung von e^+-e^- Paaren, verändert. Mit ihrer Hilfe erhält man die endgültige Form der Energie-Gleichung

$$\rho_0 T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}\tau} = 2\mu D_{ij}D^{ij} + \zeta\tilde{\theta}^2 - Q^i{}_{;i} - c^{-2}Q_i A^i \tag{3.8}$$

Wir haben sie hier als Gleichung für die spezifische Entropie angegeben, die nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik sich schreiben läßt als

$$T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}\tau} = \frac{\mathrm{D}\epsilon}{\mathrm{D}\tau} + p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)$$

Die Anteile des Spannungstensors (D^{ij}) in der Energie- und den Impulsgleichungen sind in der angegebenen Form zwar kompakt, aber schwer zu handhaben. Unter Ausnutzung von Projektor-Eigenschaften finden wir folgende Darstellung des inneren Produkts in niedrigster Ordnung in c^{-2}

$$D^{ij}D^{(0)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(V^{k;l}V_{k;l} + V^k_{;l}V^l_{;k}\right) - \frac{1}{3}\tilde{\theta}^2 \quad . \tag{3.9}$$

Dies ist die Form, in der er in der klassischen Hydrodynamik erscheint und die wir in der Energie-Gleichung (3.8) benötigen. Die nächst höhere Ordnung zur viskosen Umsetzung von kinetischer in thermische Energie ist

$$D^{ij}D^{(1)}_{ij} = \frac{1}{2c^2}A^iA_i + c^{-2}V^i_{;j}A^jV_i - \frac{2}{3c^2}\tilde{\theta}A^iV_i \tag{3.10}$$

und der letzte Beitrag zur exakten Form ist

$$D^{ij}D^{(2)}_{ij} = \frac{1}{2c^4}(AiV_i)^2 \qquad . \tag{3.11}$$

Die einfachste Beschreibung des Wärmeflusses nach Eckart (siehe Meixner & Reik 1959) folgt aus der Analogie zum klassischen Fourier'schen Gesetz $Q_{\text{klass.}} = -\kappa\nabla T$ in der verallgemeinerten Gestalt

$$Q^i = -\kappa P^{ij}\left(T_{,j} + c^{-2}TA_j\right) \qquad , \tag{3.12}$$

die der Bedingung $V_iQ^i = 0$ durch die Einführung des Projektors genügt und die einen zusätzlichen beschleunigungsabhängigen Strom durch das Auftreten der Vierer-Beschleunigung $A^i = V^i_{;k}V^k$ enthält. Definiert man den Laplace-Operator in diesem Zusammenhang als $\Delta T = g^{ij}T_{;ij}$ und ordnen die Terme nach Potenzen von c^{-2}, so folgt für die Divergenz des Wärmestroms

$$Q^i{}_{;i} = Q^i\frac{\kappa_{,i}}{\kappa} - \kappa\left(\Delta T + c^{-2}\left\{(\tilde{\theta}V^j + A^j)T_{,j} + (TA^i)_{;i} + T_{ij}V^iV^j\right\} + c^{-4}T(A^iV_i)^2\right) \qquad . \tag{3.13}$$

Der beschleunigungsabhängige Beitrag des Wärmestroms enthält nur Terme von erster oder höherer Ordnung in c^{-2} und liefert in der nicht-relativistischen Näherung keinen Beitrag

$$c^{-2}Q^iA_i = -\frac{\kappa}{c^2}\left(A^jT_{,j} + c^{-2}\left\{TA^iA_i + T_{,i}A_jV^jV^i\right\} + c^{-4}T(A_iV^i)^2\right) \qquad .$$

Wir erhalten vier weitere Gleichungen dadurch, daß wir (3.1) orthogonal zur Bewegung der Flüssigkeit mit **P** projezieren. Durch direkte Rechnung erhalten wir

$$\left(\tilde{\rho} - \frac{\zeta\tilde{\theta}}{c^2}\right)\frac{\mathrm{D}V^i}{\mathrm{D}\tau} + P^{ij}\left(p - \zeta\tilde{\theta}\right)_{,j} - 2P^i_j\left(\mu D^{jk}\right)_{;k} + c^{-2}W^i = F^i \tag{3.14}$$

In den wir den Anteil des Wärmestroms zur Impulsbilanz zu **W** zusammengefaßt haben. **W** läßt sich durch

$$W^i = Q^i\tilde{\theta} + \frac{\mathrm{D}Q^i}{\mathrm{D}\tau} + Q^kV^i_{;k} - \frac{V^i}{c^2}Q_j\frac{\mathrm{D}V^j}{\mathrm{D}\tau}$$

ausdrücken. Der Wärmestrom liefert nur Beiträge erster und höherer Ordnung in c^{-2}. Im nicht-relativistischen, klassischen Grenzfall beeinflußt der Wärmestrom die Impulsbilanz demnach nicht. Durch die zusätzliche Aufstellung der Energie-Gleichung scheint es, als hätten wir die Anzahl der Gleichungen von fünf aus sechs erhöht. Dies ist nicht der Fall, da die vier Impulsgleichungen (3.14) durch die Projektion in den 3D-Unterraum senkrecht zu V^i voneinander nicht unabhängig sind. Die Vierer-Divergenz des thermodynamischen Stroms mit dem klassischen Ansatz $\mathcal{D} = \mu D^{ij}$ hat keine vergleichbar einfache Darstellung. Wir finden

$$P^i_j\left(\mu D^{jk}\right)_{;k} = D^{ik}\mu_{,k} + \mu\, P^i_jD^{jk}_{;k}$$

$$P^i_jD^{jk}_{;k} = \frac{1}{2}\left(P^i_jV^j_{;kl}P^{kl} - V^jR_{jl}P^{li}\right) + \frac{1}{c^2}V^i_{;k}\frac{\mathrm{D}V^k}{\mathrm{D}\tau} + \frac{1}{6}\left(\tilde{\theta}_{,k}P^{ki} - \frac{1}{c^2}\tilde{\theta}\frac{\mathrm{D}V^i}{\mathrm{D}\tau}\right) \qquad .$$

Wir haben bei dieser Darstellung den Ricci-Tensor R_{jl} verwendet, der lokal mit dem Energie-Impuls-Tensor T_{jl} aus Gl. (3.1) über die Einsteinschen Feldgleichungen zusammenhängt. Bei der Diskussion der Akkretion in ein Schwarzes Loch wird die Masse der Akkretionsscheibe selbst vernachlässigt werden können und wir verwenden näherungsweise eine Vakuum-Lösung der Feldgleichungen für eine Punktmasse. Es sind dies die Schwarzschild- oder Kerr-Lösungen. In diesem Fall verschwinden alle Komponenten des Ricci-Tensors im Außenraum, und damit im Bereich der Akkretionsscheibe. Eine vergleichbare Aufspaltung ist bei Segiun (1975) zu finden.

3.3 Ideale Gasströmungen um Schwarze Löcher

Zur Beschreibung der Strömung in der Umgebung rotierender schwarzer Löcher müssen wir die zentrale Rolle der Gravitation als treibende Kraft der Akkretion durch die Metrik in unseren Gleichungen berücksichtigen. Sollte die Masse des Gases in der Akkretionsströmung nicht klein sein gegenüber der Masse des Zentralobjekts, das ein Schwarzes Loch oder ein Neutronenstern sein kann, so müssen zur Beschreibung der gravitativen Wechselwirkungen simultan die Einsteinschen Feldgleichungen zur Beschreibung des Gravitationsfeldes gelöst werden.Während für Zentralobjekte mit größeren Radien die Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie gegenüber der Newtonschen Näherung eine untergeordnete Rolle spielen und die Eigengravitation der Gasscheibe relevant ist, wenn die Massen in der Scheibe $2\pi r^2 \Sigma \frac{h}{r} \approx M$ ungefähr gleich der Zentralmasse ist, wobei h die halbe Dicke der Scheibe angibt, was für große Radien der Fall sein kann. Der Einfluß der Eigengravitation der Akkretionsströmung auf die Raumkrümmung sollte in der direkten Umgebung des Lochs keine Bedeutung haben und wird im folgenden vernachlässigt. Dies gibt uns die Möglichkeit, die Metrik als gegeben zu betrachten. Für rotierende Löcher ohne elektrische Ladung existiert die Kerr-Lösung der Feldgleichungen, die wir in der Boyer-Lindquit Darstellung

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta}{r_a^2}(\mathrm{d}t - a\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\sin^2\vartheta}{r_a^2}\Big((r^2+a^2)\,\mathrm{d}\phi - a\,\mathrm{d}t\Big)^2 + \frac{r_a^2}{\Delta}\,\mathrm{d}r^2 + r_a^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 \quad (3.15)$$

$$r_a^2 = r^2 + a^2\cos^2\vartheta \qquad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

angeben können. Die Masse wird hier in Längen des halben Schwarzschild-Radius $M = \frac{G\mathcal{M}}{c^2}$ gemessen, wobei $\mathcal{M}$ der Masse der Materie entspricht, aus der das Schwarze Loch entstanden ist, wenn es nicht primordial vorhanden war. Der Parameter a ist der spezifische Drehimpuls des Lochs, für den die obere Schranke $a^2 \leq M^2$ existiert und dessen Vorzeichen den Drehsinn des Lochs angibt. Das Loch rotiert um die Achse $\vartheta = 0$ in die $a\,\mathrm{d}\phi$ Richtung.

3.3.1 Schwarzschild-Metrik

Die Schwarzschild-Metrik ist ein Spezialfall der Kerr-Metrik in dem Sinn, daß die Metrik im Grenzfall $a \to 0$ in die von Karl Schwarzschild 1917 angegebene Form

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega$$

übergeht. Der metrische Tensor läßt sich so in Diagonalform angeben und die Metrik ist im Außenraum $r > 2M$ stationär. Wir werden im weiteren nur axialsymmetrische Akkretionsströmungen betrachten, so daß die Symmetrie in ϕ nicht gebrochen wird. Zusätzlich wird die Strömung spiegelsymmetrisch bezüglich der $\vartheta = \pi/2$-Ebene sein.

3.3.2 Masse in der Scheibe

Als Symmetrieebene der Akkretionsscheibe wählen wir die durch $\theta = \pi/2$ bestimmte Ebene. Wir betrachen den Raum - im Sinne einer 3+1 Aufspaltung der Raum-Zeit - als Untermannigfaltigkeit, auf der eine Metrik

$$\mathrm{d}\sigma = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega$$

induziert wird. Die Masse in der Scheibe erhalten wir als Integral der Massendichte über diesen Raum. Wie in der Standardtheorie der Akkretionsscheiben können wir so eine Flächendichte Σ definieren durch

$$\Sigma = r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, \rho$$

so, daß die Masse in der Scheibe zwischen den Radien $r_2 > r_1 > 2M$ als Integral über den Radius zu ermitteln ist

$$M_{disk} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} r\Sigma \qquad .$$

Der Integrand ist im allgemeinen am Horizont divergent, aber das Integral existiert auch für $r_1 \to 2M$, sofern die Flächendichte am Horizont einen endlichen Wert hat. Nehmen wir eine Entwicklung von

$$r\Sigma = 2M\Sigma_0 + \Sigma_1 (1 - \frac{2M}{r}) r + \mathcal{O}((1 - \frac{2M}{r}))^2)$$

vor, so liefert nur der erste Term einen divergenten Beitrag zum Integranden und wir können diesen abschätzen durch

$$\int_{2M}^{r_2} \mathrm{d}r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} 2M\Sigma_0 \quad \leq \quad r_2^2 \Sigma_0 \sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}} \qquad .$$

Die Masse der Scheibe und die radiale Strömung geben Anlaß zu einem Massenfluß in das Schwarze Loch. Der Fluß ρV^i ist ein divergenzfreies Vektorfeld aufgrund der Kontinuitätsgleichung und sein Integral über raumartige Hyperflächen σ ist eine Erhaltungsgröße (Teilchenzahl). Dieser Fluß soll uns zur Definition der Akkretionsrate $\dot{M}$ dienen.

Der Massenfluß ρV^i ist eine lokale Größe und die Akkretionsrate sehen wir als das Integral des Massenflußes über eine Sphäre mit Radius $r = r_1$ an. Die Masse, die in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ durch die Sphäre geflossen ist, bekommen wir als

$$\mathcal{M}_{\text{Disk}} = - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}} \, \oint_{r=r_1} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, r^2 \sin\theta \, \rho v_r \qquad .$$

Eine vorläufige Definition der Massenakkretionsrate erhalten wir demnach für eine axialsymmetrische Scheibe als

$$\dot{\mathcal{M}}_{\text{Disk}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}_{\text{Disk}}}{\mathrm{d}t} = -2\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \, \rho v_r \qquad . \tag{3.16}$$

3.3.3 Kontinuitätsgleichung in der Schwarzschild-Geometrie

Wenn die Scheibe bezüglich der $\theta = \pi/2$-Ebene symmetrisch ist, so können wir die meridionale Winkelgeschwindigkeit der Akkretionsströmung als $v_\theta \sin\theta$ definieren, ohne Singularitäten in $v_\theta(r, \theta)$ erwarten zu müssen. Die Stationarität und Axialsymmetrie der Scheibe führt dann zu einer Kontinuitätsgleichung der Form

$$r^{-2} \partial_r \left(r^2 v_r \rho \right) + \sin^{-1}\theta \; \partial_\theta \left(\sin\theta v_\theta \rho \right) = 0 \qquad .$$

Diese Gleichung kann man mit $r^2 \sin\theta$ multiplizieren und über θ integrieren so, daß der zweite Term verschwindet und es bleibt

$$\partial_r \left(r^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \ \sin\theta \, v_r \rho \right) = 0 \qquad .$$

Nehmen wir an, daß die Radial-Geschwindigkeit separabel ist nach $v_r = v_{rr}(r) v_{r\theta}(\theta)$ und entwickeln wir den normierten, winkelabhängigen Anteil um die Symmetrieebene der Scheibe

$$v_{r\theta}(\theta) \approx 1 + \frac{(\frac{\pi}{2} - \theta)^2}{2} \, \partial_\theta^2 v_{r\theta}\Big|_{\pi/2}$$

so finden wir bis zur 2.-ten Ordnung in θ eine Kontinuitätsgleichung

$$\partial_r \left(r v_{rr} \Sigma \right) = 0 \qquad , \tag{3.17}$$

wie sie in der Theorie dünner Scheiben verwendet wird. Wir sehen sofort, daß die Massenakkretionsrate aus (3.16) keine Konstante der Scheibe sein kann, sondern definieren jetzt die Akkretionsrate als

$$\dot{M} = -2\pi r^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \ \rho v_r \qquad , \tag{3.18}$$

die nur im asymptotisch flachen Grenzfall $r \to \infty$ mit $\dot{\mathcal{M}}_{\mathrm{Disk}}$ übereinstimmt.

3.3.4 Dynamik einer Idealen Gasströmung

Um typische Eigenschaften viskoser Akkretionsströmungen von allgemein relativistischen Effekten zu trennen, sollen hier einige Aspekte idealer Gasströmungen um Schwarze Löcher betrachtet werden. Viskosität und Wärmeleitung können dabei vernachlässigt werden und die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich zu

$$\tilde{\rho} \frac{\mathrm{D}V^i}{\mathrm{D}\tau} + P^{ij} p_{,j} = 0 \qquad , \tag{3.19}$$

die sich durch das Auftreten des Druckgradienten von den Geodätengleichungen für Testteilchen unterscheiden.

Eigenzeit-Koordinatenzeit

Als erstes wollen wir die Rotverschiebung betrachten, die sich aus der ursprünglichen Energiegleichung

$$\begin{aligned} & \gamma \left(v_r \frac{\partial_r p}{\rho c^2} + \dot\theta \frac{\partial_\theta p}{\rho c^2} \right) \quad + \\ \left(1 + \frac{h}{c^2} \right) & \left(v_r \, \partial_r \gamma + \dot\theta \, \partial_\theta \gamma + v_r \gamma \, \frac{2M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \right) \quad = \quad 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ergibt. Bei konstantem Druck und unter Vernachlässigung der meridionalen Bewegung folgt direkt die Beziehung

$$\partial_r \gamma = -\frac{2M}{r^2 - 2Mr} \gamma \qquad ,$$

die integriert werden kann und den Zusammenhang zwischen Koordinatenzeit t und Eigenzeit τ in der Strömung liefert:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \qquad . \tag{3.21}$$

Die Integrationskonstante E ist die Energie, die ein Beobachter im Unendlichen einem Testteilchen an seinem Ort zusprechen würde. Die Koordinatenzeit kann als Eigenzeit eines im Unendlichen postierten Beobachters interpretiert werden und die Relation besagt, daß Eigenzeit-Intervalle in der Nähe des Horizonts für den außenstehenden Beobachter gestreckt erscheinen und am Horizont unendlich lang dauern. Daraus folgt, daß frei fallende Testteilchen in endlicher Eigenzeit die Singularität bei $r = 0$ erreichen können, während es einem außenstehenden Beobacher so erscheint, als würden diese den Horizont nie erreichen. Es bleibt festzuhalten, daß die Beziehung (3.21) nur für frei fallende Testteilchen gilt und $\gamma - 1$ gerade die kinetische Energie ist. Leistet der radiale Druckgradient einen wesentlichen Beitrag, so ergibt sich

$$\partial_r(\ln\gamma) = -\frac{2M}{r^2 - 2Mr} - \frac{\partial_r p}{\rho(c^2 + h)} \qquad .$$

Wenn wir annehmen, daß der Druckgradient nicht negativ unendlich wird oder die Dichte am Horizont verschwindet, so bleibt die eben diskutierte Relation zwischen Koordinatenzeit und Eigenzeit qualitativ erhalten.

Schätzen wir den Druckgradienten durch die Druckskalenlänge $l_p^{-1} = |\partial_r p|/p$ ab und setzen $p/\rho = c_s^2$ gleich der isothermen Schallgeschwindigkeit, so sehen wir, daß der Druck die Energie γ nur dann wesentlich modifiziert, wenn

$$l_p < \frac{r}{2M}\frac{r - 2M}{\frac{c^2}{c_s^2} + \frac{c_P}{c_P - c_V}}$$

erfüllt ist. In genügend großer Entfernung vom Horizont und im Fall kleiner Schallgeschwindigkeit bedeutet dies, daß die Druckskalenlänge kleiner als $r(r/2M)(c_s^2/c^2)$ sein muß, oder daß die thermische Energie mit der potentiellen Energie vergleichbar ist, wenn die Druckskalenlänge von gleicher Größe wie der Radius ist. Im relativistischen Grenzfall $c_P/(c_P - c_V) = 4$ und $c_s \approx c$ sehen wir, daß die Skalenlänge im Bereich der letzten stabilen Kreisbahn bei $r = 6M$ kleiner oder gleich dem halben Abstand zum Horizont sein muß, um eine Rolle für die Entwicklung der kinetischen Energie zu spielen.

Rotverschiebung

Werden Teilchen der Energie $E_{\rm loc}$ am Radius r emittiert und können sich frei zu einem Empfänger im Unendlichen bewegen, so erfahren sie eine gravitative Rotverschiebung. Die lokal gemessene Energie $E_{\rm loc}$ bezieht sich dabei auf Beobachter, die im Schwarzschild-Koordinatensystem ruhen. Aus dem Skalarprodukt der Vierer-Impulse $p_j p^j = m^2 c^4$ findet man aufgetrennt nach räumlichen und zeitlichen Komponenten

$$(E_0/c)^2 = p_t^2 g_{tt} - \sigma_{kl} p^k p^l \qquad .$$

Die Energie eines ruhenden Systems ist danach für außenstehende Beobachter gravitativ rotverschoben um

$$E_0 = E_{\rm loc}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \qquad ,$$

wobei die Energie $E_{\rm loc}$ die 0-Komponente des Vierer-Impulses am Ort der Emission ist. Für freie Teilchen (auch Photonen), die mit der Energie $E_{\rm loc}$ emittiert werden, finden wir im Unendlichen die Energie E_0 und es ergibt sich daraus die Rotverschiebung z

$$z + 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 = \frac{E_0}{E_{\rm loc}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \qquad (3.22)$$

Die Koordinatenzeit Δt, die verstreicht, während sich ein freies Teilchen dem Horizont nähert, wird asymptotisch unendlich groß, ebenso die Rotverschiebung der Photonen, die Informationen über das fallende Teilchen zum Beobachter tragen.

Radiale Bewegung

Für mitbewegte Beobachter lautet die radiale Gleichung

$$\left(\frac{Mc^2}{r^2} - \left(1-\frac{3M}{r}\right) r(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\Omega^2) + \dot\theta\partial_\theta v_r + v_r\partial_r v_r\right)\left(1+\frac{h}{c^2}\right) + \frac{v_r\dot\theta}{\rho c^2}\partial_\theta p + \frac{c^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)+v_r^2}{\rho c^2}\partial_r p = 0 \tag{3.23}$$

In dem Fall, daß Druckgradienten keine Rolle spielen, verliert die radiale Impuls-Gleichung den Bezug zur Energie-Gleichung und man erhält eine rein dynamische Beziehung

$$\frac{Mc^2}{r^2} - \left(1-\frac{3M}{r}\right) r(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\Omega^2) + \dot\theta\partial_\theta v_r + v_r\partial_r v_r = 0 \quad .$$

Nehmen wir weiter an, daß die Bewegung in einer Ebene θ =const. abläuft ($\theta = \pi/2$ ist die natürliche Wahl), so erhalten wir die radiale Bewegungsgleichung für Testteilchen nach

$$\partial_r(v_r^2) + \frac{2Mc^2}{r^2} - \frac{2L^2}{r^3}\left(1-\frac{3M}{r}\right) = 0 \quad ,$$

die integriert werden kann mit einer Integrationskonstanten, die wir als $E^2 - c^2$ wählen, um in Übereinstimmung mit Chandrasekhar (1983) Kap. 19 zu bleiben. Damit kann ein Pseudo-Potential $\mathcal{V}$ eingeführt werden, so daß die radiale Gleichung

$$\begin{aligned} v_r^2 &= E^2 - \mathcal{V}^2 \\ \mathcal{V}^2 &= c^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2M^2}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

bekannt erscheint. Den Drehimpuls haben wir in natürlichen Einheiten $L = lMc$ skaliert. Eine ausführliche Diskussion der Bewegung von Testteilchen findet sich zum Beispiel in Chandrasekhar (1983).

Rayleigh - Kriterium

Die Frage inwieweit stabil rotierende Konfigurationen existieren können, wird durch das Rayleigh-Kriterium beantwortet, das von Abramowicz und Prasanna (1990) für nicht rotierende Schwarze Löcher angegeben wurde. Wir wollen aus Gl. (3.23) dieses Kriterium wiederfinden und ein besseres Verständnis der beteiligten Kräfte gewinnen. Für stabile Rotation ($v_r = 0$) von Testteilchen ($h = 0, \partial_r p = 0$) in der Scheibenebene ($\theta = \pi/2$) unter dem Einfluß einer äußeren Kraft, die nur vom Ort abhängt $F(r)$, gilt nach (3.23)

$$F(r) + \left(1-\frac{3M}{r}\right)\frac{l^2}{r^3} - \frac{Mc^2}{r^2} = 0 \quad .$$

Die von uns gewählte Beschreibung ist äquivalent zur 'optical reference geometry' von Abramowicz & Prasanna (1990), da die Projektion der Erhaltungsgleichungen, die auch zur vorliegenden Form der radialen Gleichung führt, dem instant korotierenden System entspricht. Durch Vergleich können wir demnach unseren Term

$$\mathcal{C}(r, l^2) = \left(1-\frac{3M}{r}\right)\frac{l^2}{r^3}$$

als Zentrifugalkraft interpretieren und finden dementsprechend die Richtungsumkehrung am Radius $r = 3M$, des Radius für geschlossene, kreisförmige Photonenbahnen. Das Stabilitätskriterium folgt für Auslenkungen $r \to r_1 = r + \Delta r$ bei konstantem Drehimpuls. Vergleicht man die Kräfte für ausgelenkte Teilchen am Ort r_1 mit nicht gestörten Teilchen am selben Radius, ergibt sich eine Kraftdifferenz

$$\Delta F = -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial l^2} \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}r} \Delta r \qquad .$$

Da eine stabile Konfiguration vorliegt, sofern die Kraftdifferenz rücktreibend ist $\Delta F\ \Delta r < 0$, folgt

$$\left(1 - \frac{3M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}r} > 0 \qquad .$$

Demnach sind Drehimpulsverteilungen stabil, wenn

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}r} &> 0 \qquad && r > 3M \\ \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}r} &< 0 \qquad && r < 3M \end{aligned} \tag{3.25}$$

erfüllt ist.

Transsonisches Verhalten der Akkretion

Die radiale Impulsgleichung (3.23) zwingt die Akkretionsströmung durch einen Schallpunkt, bevor sie den Horizont erreicht. Dazu vernachlässigen wir alle meridionalen Komponenten der Geschwindigkeit und ersetzen den radialen Druckgradienten durch

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{a_s^2 \rho}{r^2 v_r}\left(\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r}\right) + \frac{a_s^2 \rho}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad ,$$

wobei wir von der Kontinuitätsgleichung $r^2 \rho v_r$ =const. Gebrauch gemacht und eine Schallgeschwindigkeit $a_s = p/\rho$ eingeführt haben. Damit läßt sich eine Gleichung für die radiale Beschleunigung finden, der man den transsonischen Charakter direkt ansieht :

$$D\ v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = N \tag{3.26}$$

$$D = 1 - \frac{a_s^2}{v_r^2} \frac{c^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + v_r^2}{c^2 + (1+\kappa) a_s^2} \tag{3.27}$$

$$N = -\frac{Mc^2}{r^2} + \left(1 - \frac{3M}{r}\right) r \Omega^2 \sin^2\theta + a_s^2 \frac{c^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + v_r^2}{c^2 + (1+\kappa) a_s^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right) \tag{3.28}$$

Entscheidend für den transsonischen Charakter ist dabei ein Nulldurchgang von D der sich unvermeidlich ergibt, sofern die radiale Geschwindigkeit in großer Entfernung vom Horizont kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist. Dies ist für dünnen Scheiben sicher erfüllt. Damit finden wir

$$r \gg 2M \qquad D = 1 - \frac{a_s^2}{v_r^2} \qquad < 0 \tag{3.29}$$

$$r = 2M \qquad D = 1 - \frac{a_s^2}{c^2 + (1+\kappa) a_s^2} \qquad > 0 \qquad . \tag{3.30}$$

Die innere Energie haben wir zu $\epsilon = \kappa a_s^2$ angenommen. Sofern die spezifische Enthalpie h gegenüber der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann, erhalten wir das gleiche Ergebnis wie Liang & Thompson (1980). Bemerkenswert ist, daß diese Aussage unabhängig von innerer Energie, Schallgeschwindigkeit und radialer Geschwindigkeit am Horizont ist.

Drehimpuls-Erhaltung

Die Gleichung für die azimutale Bewegung entspricht der Drehimpulsgleichung in der Scheibentheorie. Sie erscheint ohne jeden Bezug zur speziellen Geometrie eines Schwarzschild-Lochs als

$$\left(\frac{\dot\theta}{\sin^2\theta}\partial_\theta(\sin^2\theta\Omega)+\frac{v_r}{r^2}\partial_r(r^2\Omega)\right)\left(1+\frac{h}{c^2}\right) \quad + \qquad \frac{\Omega}{\rho c^2}\left(\dot\theta\partial_\theta p+v_r\partial_r p\right) \;=\; 0 \qquad . \tag{3.31}$$

Der Einfluß der vertikalen Struktur der Scheibe auf die Drehimpulsstruktur findet sich in der partiellen Ableitung des Druck nach dem Polarwinkel. Diese Kopplung verschwindet allerdings, falls die Akkretionsströmung keine meridionale Komponente besitzt. Die Näherung verschwindender Druckgradienten koppelt auch hier die Drehimpulsgleichung von der Energie-Gleichung ab und es bleibt

$$\dot\theta\partial_\theta(r^2\sin^2\theta\Omega)+v_r\partial_r(r^2\sin^2\theta\Omega)=0 \qquad .$$

Unter der Annahme, daß die meridionale Bewegung längs θ vernachlässigbar ist, so finden wir, daß der Drehimpuls $L=r^2\sin^2\theta\Omega$ erhalten bleibt

$$v_r\partial_r(L)=0 \qquad .$$

Andererseits kann die Strömung druckunterstützt sein, wenn der radiale Druckgradient groß ist. Die Druckunterstützung modifiziert die Drehimpulserhaltung zu

$$\frac{v_r}{r^2}\partial_r(r^2\Omega)+\frac{\Omega v_r}{\rho c^2}\partial_r p=0 \qquad . \tag{3.32}$$

Ersetzen wir die Ableitungen von Drehimpuls und Druck durch eine charakteristische Länge l_L, l_p und identifizieren p/ρ mit der Schallgeschwindigkeit

$$\frac{r}{2-\frac{r}{l_p}\left(\frac{c_s}{c}\right)^2}=l_L \qquad ,$$

so bleibt festzustellen, daß die Druckunterstüzung nur bei einer Variation von l_p/c_s^2 wichtig ist und die Skalenlänge des Drehimpuls verändert.

Vertikale Struktur

Es bleibt als dritte dynamische Gleichung die vertikale (polare) Struktur, die durch

$$\frac{\dot\theta}{\rho c^2}\left(v_r\partial_r p+\dot\theta\partial_\theta p\right)+\left(\rho r^2\right)^{-1}\partial_\theta p+\left(1+\frac{h}{c^2}\right)\left(\frac{v_r}{r^2}\partial_r(r^2\dot\theta)+\dot\theta\partial_\theta\dot\theta-\sin\theta\,\cos\theta\,\Omega^2\right)=0 \tag{3.33}$$

gegeben ist. Die vertikale Struktur der Scheibe wird durch den Druckgradienten im Gleichgewicht mit einem Drehimpulsterm bestimmt. In wiederholter Analogie zu dünnen Scheiben vernachlässigen wir $\dot\theta\approx 0$ und bekommen

$$\frac{\partial_\theta p}{\rho}=(1+h/c^2)\sin\theta\,\cos\theta\,r^2\Omega^2 \qquad . \tag{3.34}$$

Um einen ersten Eindruck der vertikalen Struktur zu erhalten, nehmen wir an, daß Temperatur und Schallgeschwindigkeit bei konstantem Radius selbst konstant sind. In diesem Fall kann die Gleichung für die Dichte direkt integriert werden und ergibt

$$\rho(\theta)=\rho_0\exp\left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\left(\frac{r\Omega}{c_s}\right)^2\left(1+\frac{\epsilon}{c^2}+\left(\frac{c_s}{c}\right)^2\right)\right] \qquad . \tag{3.35}$$

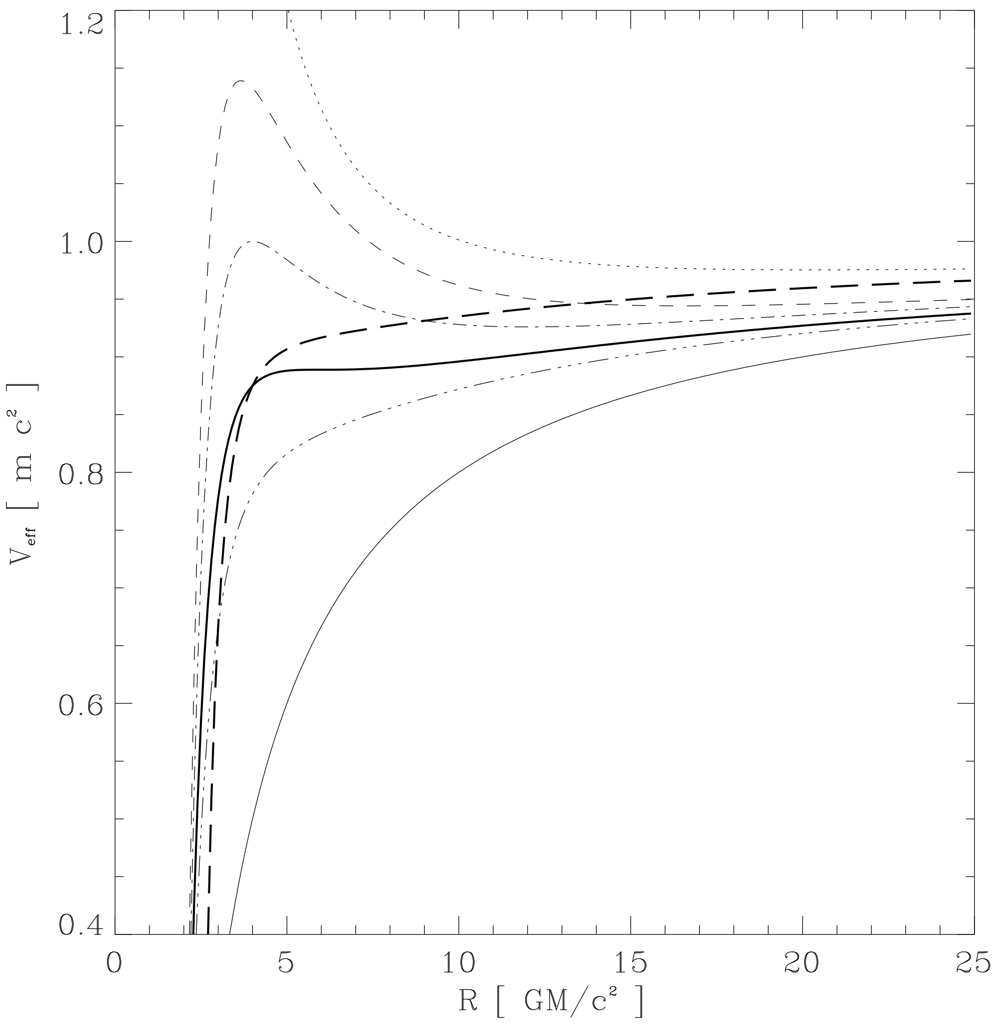

Abbildung 3.1: Das effektive Potential $\mathcal{V}$ für Testteilchen in der Nähe eines nicht rotierenden Schwarzen Lochs. Die einfach durchgezogene Linie ist das Potential ohne Drehimpuls. Für $l = 4.5$ (gestrichen), $l = 4$ (strich-punktiert), $l = 3.464$ (dick durchgezogen) und $l = 3$ (strich- 3×punktiert) ist das effektive Potential dargestellt. Zum Vergleich ist für $l = 4.5$ die Newtonsche Näherung gezeigt (punktierte Linie) und das effektive Pseudo-Potential $\mathcal{V} = GM/(r - r_s) + l^2GM^2/(2r^2)$ für $l = 3.464$. Die Newtonsche Form hat für $l < 3.464$ eine nicht vorhandene Drehimpulsbarriere und das Pseudo-Potential überschätzt das tatsächliche Potential am Radius der marginal stabilen Bahn $l = 3.464$, $R = 6GM/c^2$ um 4.5%.

Daraus folgt als Kriterium für dünne Standard-Scheiben, daß Scheiben dünn sind, wenn die Schallgeschwindigkeit viel kleiner als die azimutale Geschwindigkeit ist. Gleichzeitig ist zu erkennen, daß ein relativistisches Gas ($\epsilon \sim c^2, c_s \approx c$) nicht zu einer dickeren Scheibe führt, sonderen dieser Tendenz entgegen wirkt. Außerdem wird klar, daß die Dichte an der Symmetrieachse $\theta = 0$ —zumindest in dieser Näherung— nicht verschwindet.

3.3.5 Die Entropiegleichung der Scheibe

Für eine idelale Flüssigkeit ist die Aussage der Entropie-Gleichung sehr einfach:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = 0 \qquad .$$

Im folgenden wollen wir Erweiterungen betrachten, die eine nicht verschwindende Viskosität oder thermische Leitfähigkeit hervorrufen. In einfacher Weise werden zusätzliche Quellen und Senken für die innere Energie der Scheibe zu betrachten sein. Die allgemeine Gleichung für die Entropie ist demnach

$$\rho T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = q^+ - q^- \qquad , \tag{3.36}$$

wobei q^+ eine lokale Heizungsrate und q^- eine Kühlrate darstellt.

Thermodynamische Relationen

Die Diskussion soll die Bedeutung der im folgenden verwendeten Größen klarstellen und lehnt sich an die Darstellung von Cox und Giuli (1968) in *Principles of Stellar Structure* an. Wir gehen von einer Zustandsgleichung $P(T, \rho)$ aus und definieren die Temperatur- und Dichte-Exponenten der Zustandsgleichung nach

$$\chi_T = \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right|_\rho \qquad \chi_\rho = \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_T \qquad , \tag{3.37}$$

sowie die adiabatischen Exponenten

$$\Gamma_1 = \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_{\mathrm{ad.}} \qquad \Gamma_2 = \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right|_{\mathrm{ad.}} \qquad \Gamma_3 - 1 = \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right|_{\mathrm{ad.}} \qquad , \tag{3.38}$$

die alle voneinander nicht unabhängig sind. Die Zustandsgleichung selbst kann so als

$$\mathrm{d}\ln P = \chi_T \mathrm{d}\ln T + \chi_\rho \mathrm{d}\ln \rho$$

formuliert werden. Für ein ideales Gas gilt der Spezialfall

$$\chi_\rho = \chi_T = 1 \qquad \Gamma_{1,2,3} = \gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

und für Schwarzkörperstrahlung in gleicher Weise wie für ein ideales relativistisches Gas

$$\chi_\rho = 0 \qquad \chi_T = 4 \qquad \Gamma_{1,2,3} = \frac{4}{3} \qquad .$$

Mit den Definitionen der adiabatischen Exponenten und dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik läßt sich die spezifische Wärme mit Γ_3 ganz allgemein verbinden zu

$$c_V = \frac{p}{\rho T} \frac{\chi_T}{\Gamma_3 - 1} \qquad .$$

Da die Entropie-Änderung $\mathrm{d}S$ ein totales Differential ist, kann man die partielle Ableitung der Entropie nach der Dichte bei konstanter Temperatur durch

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \rho}\right|_T = -\chi_T \frac{p}{\rho^2}$$

ausdrücken. Damit erhalten wir die totale Zeitableitung der Entropie, wie sie in der nicht-relativistischen Version der Energiegleichung (3.8) und (3.36) auftritt, als Ableitungen von Temperatur und Flächendichte

$$\rho_o T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = c_V \left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tau} - (\Gamma_3 - 1) T \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}\tau}\right] \qquad . \tag{3.39}$$

Strahlung

Die grundlegende Größe für die Beschreibung von Strahlung auf einer makroskopischen Skala ist die monochromatische Intensität I_ν, die als die Energie definiert ist, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche $\mathrm{d}\sigma$ mit der Normalen $\vec{n}$ in den Raumwinkel $\mathrm{d}\omega$ um die Richtung $\vec{n}'$ von der Strahlung transportiert wird:

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\omega \mathrm{d}t \mathrm{d}\sigma \cos\theta \qquad .$$

Der Winkel θ ist der Winkel zwischen den beiden Normalen $\vec{n}$ der Fläche und $\vec{n}'$ der Strahlung. Die Intensität ist eine skalare Funktion des Ortes, der Zeit und der beiden Richtungen,sowie der Frequenz

$$I_\nu = I_\nu(\vec{r}, t, \vec{n}, \vec{n}', \nu) \qquad .$$

Der Gesamtfluß als Integral von $I_\nu \cos\theta \mathrm{d}\omega$ über die Einheitssphäre ist ein Skalar und noch von der Orientierung der Fläche $\mathrm{d}\sigma$ abhängig. Der Strahlungsfluß-Vektor definiert sich daher durch

$$\vec{F}_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \vec{n}' \mathrm{d}\omega \qquad ,$$

dessen Projektion auf die Normale $\vec{n}$ der Fläche den Gesamtfluß durch diese Fläche angibt. Die Energiedichte der Strahlung in einem möglicherweise dispersiven Medium ergibt sich durch die Geschwindigkeit mit der Energie durch die Strahlung längs der Normalen $\vec{n}$ zur Fläche transportiert wird. Die Geschwindigkeit des Energietransports ist die Gruppen-Geschwindigkeit $v_g = 2\pi \frac{\partial \nu}{\partial k}$ der Strahlung, deren Projektion auf $\vec{n}$ gerade $v_g \cos\theta$ ist. Der Weg $\mathrm{d}l$ längs $\vec{n}$ entspricht gerade dem differentiellen Volumen $\mathrm{d}V$ und es läßt sich schreiben

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = v_g \cos\theta \qquad ,$$

womit wir aus der Definition der Intensität die Energiedichte der Strahlung

$$u_\nu = \frac{\mathrm{d}E_\nu}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{v_g} \int_{4\pi} I_\nu \mathrm{d}\omega = \frac{4\pi}{v_g} J_\nu$$

erhalten. Damit haben wir gleich die mittlere Intensität J_ν eingeführt, als Mittel der Intensität über alle Raumwinkel.

Neben der Energiedichte spielt auch der Strahlungsdruck, d.h. der Impulstransport durch die Strahlung für die Dynamik von Akkretionsscheiben möglicherweise eine große Rolle. Der Impuls von 'Quasi-Photonen' in einem dispersiven Medium ist $p = \frac{h\nu}{v_p}$ wobei v_p die Phasen-Geschwindigkeit ist, die bei vorhandener Dispersion von der Gruppengeschwindigkeit abweichen kann. Durch die Intensität wird die Anzahl von Photonen gegeben, die durch die Fläche

$\mathrm{d}\sigma$ dringen. Ihr Impuls senkrecht zur Fläche erfordert eine weitere Projektion auf $\vec{n}$. Der Strahlungsdruck ergibt sich durch Integration über alle Raumwinkel

$$p_{r,\nu} = \frac{1}{v_p} \int_{4\pi} I_\nu \cos^2 \theta \mathrm{d}\omega \qquad .$$

Dieser Druck hängt immer noch von der Orientierung der Fläche $\mathrm{d}\sigma$ ab. Der Druck auf eine Fläche ist die Normalkomponente einer Kraft auf diese Fläche. Die Kraft selbst folgt wiederum durch Kontraktion der Spannung mit der Normalen und wir definieren den Druck-Tensor durch

$$\mathbf{P} = \frac{1}{v_p} \int_{4\pi} I_\nu \vec{n}' \otimes \vec{n}' \mathrm{d}\omega_{n'} \qquad .$$

Der Druck auf die Fläche folgt aus dem Drucktensor nach

$$p(n) = \vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{n} \qquad ,$$

dessen Mittelwert über alle Orientierungen gerade durch die Spur des Drucktensors

$$\bar{p} = \frac{1}{3} \mathrm{Sp} \mathbf{P}$$

gegeben ist. Der Druck hängt mit der Energiedichte im Fall eines isotropen Strahlungsfelds nach

$$p_{r,\nu} = \frac{v_g}{3 v_p} u_\nu$$

zusammen. Für nicht isotrope Strahlung ist diese Beziehung für den mittleren Druck trotzdem richtig.

Schwarzkörper-Strahlung

Die Energiedichte der Schwarzkörperstrahlung im Vakuum ist gegeben durch

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T)$$

mit der Planck-Funktion

$$B_\nu(T) = 2h\nu^3 c^{-2} \left(\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1 \right)^{-1} \qquad .$$

Die über alle Frequenzen integrierte Energiedichte ist

$$u = aT^4 \qquad a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3}$$

und der Strahlungsdruck ist

$$p = \frac{a}{3} T^4 \qquad ,$$

da die Strahlung im thermischen Gleichgewicht mit Materie der Temperatur T isotrop ist.

Zustandsgleichung

Für Akkretionsströmungen ohne Magnetfeld und einem Ein-Temperatur-Plasma kann die ideale Gasgleichung

$$p = p_{\mathrm{Gas}} + p_{\mathrm{Rad}} = \rho \frac{k_B}{\mu m_H} T + \frac{a}{3} T^4 \tag{3.40}$$

mit dem Strahlungsdruck zum Gesamtdruck zusammengefaßt werden Zur Charakterisierung des Verhältnisses von Gasdruck zu Strahlungsdruck dient uns der Parameter

$$\zeta = \frac{p_{\mathrm{gas}}}{p} \qquad ,$$

der in der Literatur üblicherweise mit β bezeichnet wird. Die thermodynamischen Koeffizienten, die uns interessieren sind

$$\chi_T = 4 - 3\zeta \qquad \Gamma_3 - 1 = \frac{\chi_T(\gamma_{\mathrm{Gas}} - 1)}{12(1-\zeta)(\gamma_{\mathrm{Gas}} - 1) + \zeta} \qquad ,$$

wobei γ_{Gas} das Verhältnis der spezifischen Wärme des Gases ist. Die spezifische Wärme c_V skalieren wir auf den Wert $\frac{k_B}{\mu m_H}$ des Gases und bekommen

$$c_V = \frac{k_B}{\mu m_H} \tilde{c_V} \qquad \tilde{c_V} = \frac{1}{\gamma_{\mathrm{Gas}} - 1} + 12 \frac{1-\zeta}{\zeta} \qquad .$$

3.3.6 Mittelungsprozesse

Die Struktur stationärer, axialsymmetrischer Akkretionsscheiben wird durch partielle Differentialgleichungen in den unabhängigen Variablen r, z oder r, θ mit $z = r\cos\theta$ beschrieben. Eine numerische Behandlung des Problems ist sehr aufwendig und es existieren andere Zugänge, die auf die zu erwartende Struktur Bezug nehmen. Der erste Ansatz benutzt eine Entwicklung aller pysikalisch relevanten Größen nach Ordnungen von z/r und geht von einer dünnen Scheibe aus. Die nullte Ordnung dieser Entwicklung führt zur Theorie dünner Scheiben, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen in der Variable r beschrieben werden. Dabei entkoppeln vertikale und radiale Struktur und können getrennt behandelt werden. Dies ist die von Shakura & Sunyaev (1973) gewählte Beschreibung. Abramowicz, Calvani & Nobili (1980) konnten zeigen, daß eine Entwicklung bis zu Termen 1-ter Ordnung zu einem nicht abgeschlossenen System von Differentialgleichungen führt und daß eine Entwicklung bis zur zweiten Ordnung eine konsistente Beschreibung liefert. Dieser Ansatz ist als *slim disk* in die Literatur eingegangen.

Wir wollen die vertikale und radiale Struktur auf andere Weise in Beziehung setzen. Dazu gehen wir davon aus, daß eine Entwicklung der physikalischen Größen nach z/r nicht notwendigerweise konvergiert und für dicke Scheiben Beiträge höherer Ordnung wesentlich sind. Wir wollen annehmen, daß ein Separationsansatz möglich ist und alle Größen als Produkt von Funktionen dargestellt werden können, die nur noch von r oder θ abhängen. Als Beispiel dient uns die Dichte, für die wir $\rho(r,\theta) = \rho(r)\hat{\rho}(\theta)$ schreiben. Dabei soll $\hat{\rho}(\theta)$ dimensionslos und in der Zentralebene auf 1 normiert sein. Das Gleiche soll für alle anderen Größen gelten und führt dazu, daß Mittelungs-Integrale über θ von Variablen, die nicht von θ abhängen, direkt durch die entsprechene Funktion von r gegeben sind. Ist dies für die radiale Geschwindigkeit der Fall, so gilt

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, v_r = v_r(r) \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, \hat{v}_r(\theta) = v_r(r) \qquad .$$

Mitteln wir in der angegebenen Weise die Strukturgleichungen (3.23), (3.31) und(3.33), so wird die vertikale (polare) Gleichung aus Symmetriegründen trivial erfüllt. Um die Schreibweise der übrigen Gleichungen zu vereinfachen führen wir Mittelungsoperatoren (Integral-Operatoren) ein:

$$\mathrm{O}_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, k(\theta)\, \hat{x}(\theta) \tag{3.41}$$

$$\mathrm{O}_2(x) = \mathrm{O}_1(x) + \frac{\epsilon(r)}{c^2}\mathrm{O}_1(\epsilon x) + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\mathrm{O}_1(px/\rho) \quad . \tag{3.42}$$

Der Operator $\mathrm{O}_1(x)$ liefert eine einfache Zahl, während $\mathrm{O}_2(x)$ mit der Energie im mitbewegten System gewichtet und eine Funktion von r ergibt. Wir haben zusätzlich einen Kern $k(\theta)$ eingeführt, dessen Integral über θ auf 1 normiert sein soll. Es könnte dies die entsprechend normierte Dichte sein, oder eine andere Gewichtungsfunktion, um die Bedeutung der Beiträge in der Scheibenebene und außerhalb zu bewerten. Wenden wir dieses Verfahren auf die radiale Gl. (3.23) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} v_r\partial_r v_r A_1 + \dot{\theta} v_r A_2 + \frac{Mc^2}{r^2}A_3 - r\left(\dot{\theta}^2 A_4 + \Omega^2 A_5\right) &+ \\ +\frac{\partial_r p}{\rho}\left(A_{6a} + \frac{v_r^2}{c^2}A_{6b}\right) + \frac{p}{\rho c^2} v_r \dot{\theta} A_7 &= 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{O}_2(v_r^2) \\ A_2 &= \mathrm{O}_2(\dot{\theta}\,\partial_\theta\, v_r) \\ A_3 &= \mathrm{O}_2(1) \\ A_4 &= \left(1 - \frac{3M}{r}\right)\mathrm{O}_2(\dot{\theta}^2) \\ A_5 &= \left(1 - \frac{3M}{r}\right)\mathrm{O}_2(\sin^2\theta\,\Omega^2) \\ A_{6a} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{O}_1(p\,\rho^{-1}) \\ A_{6b} &= \mathrm{O}_1(v_r^2\, p\,\rho^{-1}) \\ A_7 &= \mathrm{O}_1(v_r\,\dot{\theta}\,\rho^{-1}\,\partial_\theta p) \end{aligned}$$

und endsprechend für die Drehimpulsgleichung

$$\frac{v_r}{r^2}\partial_r(r^2\Omega)B_1 + \dot{\theta}\,\Omega\, B_2 + \frac{\Omega}{\rho c^2}\left(v_r\,\partial_r p\, B_3 + \dot{\theta}\, p\, B_4\right) = 0 \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \mathrm{O}_2\left(\frac{\partial_\theta(\sin^2\theta\Omega)}{\sin^2\theta}\right) \\ B_2 &= \mathrm{O}_2(v_r\,\Omega) \\ B_3 &= \mathrm{O}_1(v_r\,\rho^{-1}\,\Omega\, p) \\ B_4 &= \mathrm{O}_1(\dot{\theta}\,\Omega\,\rho^{-1}\,\partial_\theta p) \quad . \end{aligned}$$

Um die Bedeutung der einzelnen Terme in den beiden Gleichungen (3.43) und (3.44) zu bewerten, betrachten wir den nicht-relativistischen Grenzfall und ordnen nach c^{-2}. Die radiale Gleichung zeigt, daß der rein gravitative Term $A_3\ Mc^2/r^2$ durch einen beschleunigungsabhängigen Term (makroskopische Geschwindigkeit oder Schallgeschwindigkeit) ausgeglichen werden muß, falls der radiale Abstand von der Singularität nicht mehr klein gegen den Gravitationsradius M ist und die Geschwindigkeit selbst in die Größe der Lichtgeschwindigkeit kommen muß.

Für die Beschreibung einer Scheibe ist nicht zu erwarten, daß die meridionale Geschwindigkeit $r\dot{\theta}$ groß wird. Wir können drei Grenzfälle unterscheiden.

Als erstes wollen wir sehen, daß ein Druckgradient nicht in der Lage ist, die Gravitationskraft aufzuwiegen. Dazu nehmen wir an, daß alle anderen Geschwindigkeiten klein gegen c sind und vernachlässigt werden können. Da A_{6a} am Horizont verschwindet, ist unmittelbar klar, daß der Druckgradient eine Scheibe oder auch eine Sphäre am Horizont nicht stabilisieren kann. Dies kann aber bereits vorher auftreten, wie wir für eine Polytrope $p = K\rho^{1+1/n}$ zeigen wollen. Den Dichtegradienten drücken wir durch eine charakteristische Länge ℓ aus und für die innere Energie nehmen wir $\epsilon = (\kappa - 1)c_s^2$ an. Wenn der Druckgradient dominiert, wird ein sphärisches Gebilde entstehen und es läßt sich annehmen, daß die Mittelungsprozesse $\mathrm{O}_1(x)$ für $x = (\epsilon,\ p\rho^{-1})$ jeweils einen Faktor 1 liefern. Damit haben wir

$$\frac{M}{r}\frac{\ell}{r}c^2\left(1+\kappa\frac{c_s^2}{c^2}\right) = (1+n^{-1})c_s^2\left(1-\frac{2M}{r}\right) \qquad ,$$

aus dem wir ersehen, daß für

$$\frac{\kappa\ell n}{1+n} > 0 \qquad r_c = M\left(1+\sqrt{1+\frac{\kappa n}{1+n}\frac{\ell}{M}}\right)$$

am Radius $r_c > 2M$ die Schallgeschwindigkeit unendlich groß werden müßte.

Können wir alle Geschwindigkeiten mit Ausnahme der radialen Geschwindigkeit vernachlässigen und verwenden wieder eine charakteristische Länge ℓ für den Gradienten so finden wir mit $\ell \sim r$ und $A_1 \sim A_3$

$$\frac{v_r^2}{c^2} = \frac{M}{r}\frac{\ell}{r}\frac{A_3}{A_1} \qquad ,$$

daß Terme der Ordnung v_r^2/c^2 ebenso wichtig sind wie Terme mit M/r.

Gleiches können wir für die azimutale Geschwindigkeit durchführen und sehen

$$\frac{M}{r} = \frac{A_5}{A_3}\frac{v_\phi^2}{c^2}$$

aus der Form von A_5, daß innerhalb von $r \leq 3M$ die zentrifugalen Terme keine Unterstützung mehr liefern, wie wir es als Umkehr der Zentrifugalkraft im Kap. 3.3.4 und in Abramowicz & Prasanna (1990) bereits gefunden haben. Terme der Ordnung $p/\rho c^2$, v_r^2/c^2, $r^2\Omega^2/c^2$ und M/r müssen diesen Betrachtungen nach gleich behandelt werden, sofern keine weiteren Kräfte hinzukommen.

3.4 Radiale Schallwellen

Die Beschreibung von Schallwellen erfordert eine zeitabhängige Betrachtung der Strömung, in der sich Schallwellen als Störungen ausbreiten können. Wir wollen nur radiale Störungen in rotierenden Konfigurationen betrachten und vernachlässigen die meridionalen Abhängigkeiten und meridionalen Bewegungen. Die azimutale Winkelgeschwindigkeit soll nur vom Radius abhängen und für Druck, Dichte und radiale Geschwindigkeit nehmen wir an, daß die Störungen zeitabhängig sind. Die entsprechende Kontinuitätsgleichung für die Dichte der Baryonen lautet

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2 v_r\rho\right) + \frac{v_g}{c\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(v_r v_g^{-2}\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}v_r\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\right)\right) = 0 \qquad .$$

Für die radiale Impulsgleichung folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{Mc^2}{r^2} - \left(1 - \frac{3M}{r}\right) r \sin^2\theta\, \Omega^2 + v_r \left(\frac{\partial}{\partial r} v_r\right)\right) \left(1 + \frac{h}{c^2}\right) + \\ + \frac{c^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + v_r^2}{\rho c^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} p\right) + \\ + \frac{v_g}{c\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \left(\frac{v_r}{\rho c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} p\right) + \left(1 + \frac{h}{c^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} v_r\right)\right) &= 0 \qquad . \qquad (3.45)\end{aligned}$$

Die entsprechende Drehimpulsgleichung ist

$$\left(\frac{v_r}{r^2} \partial_r (r^2 \Omega)\right) \left(1 + \frac{h}{c^2}\right) + \frac{v_r \Omega}{\rho c^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} p\right) + \frac{v_g \Omega}{\rho c^3 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} p\right) = 0 \qquad . \qquad (3.46)$$

In der Nähe des Horizonts finden wir, daß sich keine Störungen in der Koordinatenzeit t ausbreiten können, da die Drehimpulsgleichung

$$r \to 2M \;\Rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial t} \;\to\; 0$$

erzwingt und damit aus der Impuls- und Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} \;\to\; 0 \;\Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial t} \;\to\; 0 \;\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \;\to\; 0$$

folgt. Um diese Sichtweise eines außen stehenden Beobachters zu vermeiden, gehen wir zur Eigenzeit eines freifallenden Testteilchens mit $E = 1$ nach Gl. (3.21) über und ersetzen (1 - $2M/r$) dt durch dτ. In erster Ordnung in den gestörten Variablen finden wir für die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \rho \hat{v_r}\right) + v_r \rho \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\hat{\rho}}{\rho}\right) + \left[\frac{v_r \rho}{v_g c} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{v_r}\right) + \frac{v_g}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\rho}\right)\right] = 0 \qquad . \qquad (3.47)$$

Im klassischen Grenzfall $c \to \infty$ folgt eine vertraute Form der zeitabhängigen Kontinuitätsgleichung

$$v_r \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\hat{v}_r}{v_r}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{\rho}}{\rho}\right) = 0 \qquad . \qquad (3.48)$$

Die Impulsgleichungen enthalten Ableitungen des Drucks nach dem Radius die wir über eine Zustandsgleichung $p = p(\rho, s)$ ausdrücken. Die Störung des Drucks ist im Prinzip eine Funktion von vier Variablen $\hat{p} = \hat{p}(\rho(r), s(r), \hat{\rho}(r,t), \hat{s}(r,t))$. Wir wollen nur adiabatische Schallwellen betrachten und setzen $\hat{s} = 0$, $\frac{\partial \hat{p}}{\partial s} = 0$. Außerdem wollen wir annehmen, daß die Druckstörung nur von der Dichtestörung abhängt und erhalten so

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} &= \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}} \hat{p}\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{\rho}\right) \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}} \hat{p}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}\right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} p\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \rho\right) + \left(\frac{\partial}{\partial s} p\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} s\right) \qquad .\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Kontinuitäts- und Drehimpulsgleichung in den ungestörten Größen ergibt sich

$$r^2 \rho v_r \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \Omega\right) \left[\frac{\hat{\rho}}{\rho} \left(1 + \frac{h}{c^2}\right) + \frac{\hat{h}}{c^2}\right] + \frac{r^4 \Omega}{c^2} \left[\frac{v_g}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{p}\right) + v_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{p}\right)\right] \qquad (3.49)$$

$$= \frac{\hat{v}_r}{v_r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^4 \eta \left(\frac{\partial}{\partial r} \Omega\right)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} r^4 \hat{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \Omega\right)\right) \qquad . \qquad (3.50)$$

Der klassische Grenzfall zeigt, daß radiale akustische Wellen nur möglich sind, wenn benachbarte Ringe über viskose Reibung miteinander verbunden sind. In diesem Fall gilt

$$r^2\rho v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\left(\frac{\hat{v}_r}{v_r}+\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial r}r^4\hat{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right) \qquad . \tag{3.51}$$

Im relativistischen Fall finden wir auch dann radiale Schallwellen, wenn die Viskosität vernachlässigbar ist. Dabei wird die Störung des Drehimpulstransports durch Variation der Druckterme nach

$$r^2\rho v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\left[\frac{\hat{\rho}}{\rho}\left(1+\frac{h}{c^2}\right)+\frac{\hat{h}}{c^2}\right]+\frac{r^4\Omega}{c^2}\left[\frac{v_g}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{p}\right)+v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{p}\right)\right]=0$$

ausgeglichen. Gl.(3.49) und Gl.(3.47) lassen sich verwenden, um für die radiale Impulsgleichung in erster Ordnung in den Störungen

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{Mc^2}{r^2}-\left(1-\frac{3M}{r}\right)r\sin^2\theta\Omega^2-\frac{v_r^2}{r^2\rho}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\rho\right)-\right.\\
&\left.\frac{c^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)+v_r^2}{r^2\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\right]\frac{\hat{h}}{c^2}-\left(1+\frac{h}{c^2}\right)v_r^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)-v_r\frac{v_g}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)\\
&-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{v_g}{c\rho v_r}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{p}\right)+\left(1+\frac{h}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_r^2}{v_g^2}\right)\frac{v_g}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{v}_r\right)\\
&-2v_r\hat{v}_r\left\{\left(1+\frac{h}{c^2}\right)\left[\frac{1}{r^2\rho}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\rho\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{r^2\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\right]+\frac{1}{r^4\Omega\rho v_r}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^4\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right)\right\}\\
&+\frac{c^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)+v_r^2}{r^4\Omega\rho v_r}\left[\left(\frac{\hat{\rho}}{\rho}+\frac{\hat{v}_r}{v_r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r^4\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial r}r^4\hat{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right)\right]=0 \qquad .
\end{aligned}$$

zu erhalten. Wir können wieder zum klassischen Grenzfall übergehen, indem wir die entsprechende klassische Drehimpulsgleichung verwenden oder wir gehen von Gl. (3.45) aus und bekommen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}_r\right)+2\hat{v}_r\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)+v_r^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\hat{v}_r}{v_r}\right)=\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{p}\right)+\frac{\hat{\rho}}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial r}p\right)\right]$$

Bemerkenswert ist, daß sich im relativistischen Fall die radiale Ableitung des Drucks der stationären Lösung eliminieren läßt, während dies im klassischen Grenzfall nicht möglich ist.

3.4.1 Sekulare Instabilität

Im klassischen Grenzfall läßt sich die Kontinuitätsgl. (3.48) und die Drehimpulsgl. (3.51) zu einer Diffussionsgleichung für die Dichtestörung kombinieren :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left(r^2\rho v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\right)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}r^4\hat{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right]\right\} \qquad . \tag{3.52}$$

Ersetzen wir die kinematische durch die dynamische Viskosität $\eta=\nu\rho$ und benutzen die stationäre Kontinuitätsgleichung so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\hat{\nu}}{\nu}+\frac{\hat{\rho}}{\rho}-\frac{r^2\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)}{v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\hat{\nu}}{\nu}+\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)\right] \qquad .$$

Bei Vernachlässigung der Störungen der dynamischen Viskosität erhalten wir eine modifizierte Diffusionsgleichung mit negativen Diffusionskoeffizienten, sofern

$$\left.\begin{array}{rcl}\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right) & < & 0\\ \left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right) & > & 0\\ v_r & < & 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\hat\rho}{\rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^2\nu\left|\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right|}{|v_r|\left|\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right|}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\hat\rho}{\rho}\right) - \frac{\hat\rho}{\rho}\right] \quad . \tag{3.53}$$

Der negative Diffusionskoeffizient führt zu einem exponentiellen Wachstum kleiner Störungen, wie Lightman & Eardley 1974 erkannten und den Namen sekulare Instabilität gaben.

3.5 Impulstransport

3.5.1 Viskoser Drehimpulstransport

Wir betrachten den Einfluß der Viskosität als bestimmend für die Struktur der Akkretionsströmung, da sie zum Austausch von Drehimpuls als auch radialem Impuls zwischen innernen und äußeren Teilen der Scheibe führt. In diesem Abschnitt betrachten wir die Impulsumverteilung durch viskose Reibung in einer stationären, axialsymmetrischen Scheibe um ein Schwarzschild-Loch unter Vernachlässigung polarer Bewegung $\dot\theta = 0$ und konstanter azimutaler Geschwindigkeit bei einem festen Radius $\partial_\theta\Omega = 0$. Die dadurch erzeugten Kräfte erscheinen in Gl. (3.14) als projezierte Divergenz des Spannungstensors. Wir wollen als erstes die Drehimpuls-Umverteilung diskutieren und finden für die $\phi-$Komponente der viskosen Kraft

$$2P^\phi_j\left(\mu D^{jk}\right)_{;k} = f^{(1)}_\phi + c^{-2}\sum_{j=2}^{5} f^{(j)}_\phi + f^{(6)}_\phi + f^{(14)}_\phi \tag{3.54}$$

$$+c^{-4}\left(f^{(7)}_\phi + f^{(8)}_\phi\right) + (cv_g)^{-2}\sum_{j=9}^{12} f^{(j)}_\phi + f^{(13)}_\phi \quad . \tag{3.55}$$

Die einzelnen Beiträge werden nach Potenzen von c^{-2} geordnet. Die Geschwindigkeit v_g ist ist in (3.70) definiert und tritt nur quadratisch auf. Im nicht-relativistischen Grenzfall $c \to \infty$ gilt $v_g^2 \sim c^2$, wonach in der Entwicklung v_g und c gleich behandelt werden müssen.

$$f^{(1)}_\phi = \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta r^4\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right) - \frac{2M}{r^4}\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta r^{7/2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Omega}{\sqrt{r}}\right)\right) \tag{3.56}$$

$$f^{(2)}_\phi = -\Omega\left(4\eta\Omega^2\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{r}\left(\Omega^2\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\eta\right) + \eta\left(\frac{\partial}{\partial r}r\Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\right)\right) \tag{3.57}$$

$$f^{(3)}_\phi = v_r\left\{v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right) + \frac{\Omega}{3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\right) + 2\frac{v_r}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\right)\right]\right\} \tag{3.58}$$

$$f^{(4)}_\phi = \eta\left\{\frac{7}{3}\frac{v_r}{r^3}\left(\frac{\partial}{\partial r}r\Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2 v_r\right) + r^2\Omega\left[v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r^3}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right)^2\right]\right\} \tag{3.59}$$

$$f^{(5)}_\phi = \Omega\frac{M\sin^2\theta}{r^2}\left(3\Omega^2\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\eta\right) + 2\frac{\eta}{\sqrt{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^{3/2}\Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\right) \tag{3.60}$$

$$f^{(6)}_\phi = -\eta\frac{\Omega^3\sin^2\theta}{v_g^2}\left(\frac{rv_r}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right) + \frac{M}{r}\right)^2 \tag{3.61}$$

$$f^{(7)}_\phi = 2\eta\Omega^5 Mr\sin^4\theta - \eta\Omega^3\sin^2\theta\left(r^2\Omega^2 + 4v_r^2\right) \tag{3.62}$$

$$f^{(8)}_\phi = \eta v_r\Omega\sin^2\theta\left(2\Omega\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right) - \left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\frac{v_r}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^4\Omega\right)\right) \tag{3.63}$$

$$
\begin{aligned}
f_\phi^{(9)} &= \eta\Omega^3 r^2 \sin^4\theta \left(\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right) + \frac{v_r^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r\Omega\right)^2\right) && (3.64)\\
f_\phi^{(10)} &= -2\eta\Omega^4 r^2 \sin^4\theta \frac{v_r}{c^2} r \left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial r}r\Omega\right) - 2\frac{M}{\sqrt{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r}\Omega\right)\right) && (3.65)\\
f_\phi^{(11)} &= \eta\Omega^3 M r \sin^4\theta \frac{v_r^2}{c^2}\left(\Omega^2 - 2\Omega r\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right) - 2r^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)^2\right) && (3.66)\\
f_\phi^{(12)} &= \eta\Omega^5 r^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{2M}{r} - 2\sin^2\theta \frac{M^2}{r^2}\right) && (3.67)\\
f_\phi^{(13)} &= \eta \frac{\Omega^7 \sin^6\theta r^3 M}{c^4 v_g^2}\left(2 - \frac{5M}{r}\right) && (3.68)\\
f_\phi^{(14)} &= \frac{\Omega^3 \sin\theta\cos\theta}{c^2}\left(-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\right) + 2\eta\frac{v_r}{v_g^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)\right) && (3.69)\\
&\quad -\eta\frac{\Omega(c^2+\Omega^2 r^2\sin^2\theta)}{r^2c^2v_g^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)^2 \\
v_g &= \sqrt{(c^2+\Omega^2r^2\sin^2\theta)\left(1-\frac{2M}{r}\right)+v_r^2} \quad . && (3.70)
\end{aligned}
$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall wird nur $f_\phi^{(1)}$ eine Rolle spielen. Dieser Beitrag kann auf die klassische Form vereinfacht werden, wenn der Abstand von der Singularität bei $r = 0$ groß gegen den Gravitationsradius $M = GM_{\mathrm{BH}}c^{-2}$ ist. In diesem Fall reduziert sich die viskose Kraft auf

$$
f_\phi^{(1)} \approx \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^4\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\right) \quad ,
$$

die in der rein Newtonschen Behandlung der Akkretion verwendet wird. In der Näherung dünner, nicht-relativistischer Scheiben ohne Druckgradienten findet sich so die Drehimpulsgleichung

$$
\Sigma v_r r \partial_r(r^2\Omega) = \partial_r\left(r^3\nu\Sigma\partial_r\Omega\right) \quad ,
$$

in der wir über den Polarwinkel integriert haben. Für stationäre Akkretion ist $\Sigma v_r r = \dot{M}/(2\pi)$ unabhängig vom Radius und kann zu

$$
\nu\Sigma r^3\partial_r\Omega - \nu_1\Sigma_1 r_1^3\partial_r\Omega\Big|_1 = \frac{\dot{M}}{2\pi}(l - l_1)
$$

integrieren werden mit dem spezifischen Drehimpuls $l = r^2\Omega$. Bei Standardakkretion auf Körper mit einer definierten Oberfläche wie Weißen Zwergen oder Neutronensternen wird es einen Radius geben, an dem die Scherung der Strömung verschwindet. Dieser Radius befindet sich für gewöhnlich in der Randschicht zum Stern und man setzt den Radius $r_1 = r_\star$. Damit erhält man folgende Drehimpulsgleichung

$$
\partial_r\Omega = \frac{v_r}{\nu}\left(\Omega - \Omega_1\frac{r_\star^2}{r^2}\right) \quad ,
$$

die in großen Entfernungen vom Stern und einfach zu

$$
\partial_r\Omega = \frac{v_r}{\nu}\Omega
$$

wird. Bei Akkretion in Schwarze Löcher tritt ein entscheidender Unterschied auf.

Viskoser Drehimpulstransport am Horizont

Abramowicz und Prasanna (1990) konnten durch einfache Überlegungen zeigen, daß viskose Drehmomente an einer Fläche auf mikroskopischer Ebene verschwinden müssen, wenn der mikroskopische Teilchenfluß nur in einer Richtung durch die Fläche führt und keine Teilchen die Fläche in der Gegenrichtung überqueren können. In diesem Fall ist der Drehimpulstransport nur advektiv nach

$$\dot{J} = \dot{M}_+ j_+ - \dot{M}_- j_- = \dot{M} j + Q \qquad ,$$

wobei der Gesamtmassenfluß als Differenz $\dot{M} = \dot{M}_+ - \dot{M}_-$ der einzelnen Massenflüsse gegeben ist. Der spezifische Drehimpuls j ist der advektierte Anteil, so daß

$$Q = \dot{M}_+(j_+ - j) - \dot{M}_-(j_- - j)$$

der viskose Anteil des Impulstransports ist. Dieser Anteil verschwindet, falls der Massenfluß nur in eine Richtung geht $M_- = 0$ womit $j_+ = j$ und $Q = 0$. Diese Situation ist am Horizont des Schwarzen Lochs gegeben und wir erwarten

$$P^i_j \left(\mu D^{jk}\right)_{;k} = 0$$

bei $r = 2M$. Allgemein können wir die Scherung nach

$$D^{jk} = \frac{1}{2}\left(P^{jm} P^{kn} \left(v_{m;n} + v_{n;m}\right)\right)$$

darstellen. Die Vierer-Geschwindigkeit zerlegen wir nach den Killing-Vektoren $t_i = (\partial_t)_i$ und $k_i = (\partial_\phi)_i$ und einem radialen Anteil

$$v_i = \gamma(r) t_i + f(r)(\hat{e}_r)_i + g(r) k_i$$

und finden mit Hilfe der Killing-Gleichung

$$v_{m;n} + v_{n;m} = \gamma_{,n} t_m + \gamma_{,m} t_n + g_{,n} k_m + g_{,m} k_n + (f(\hat{e}_r)_m)_{;n} + (f(\hat{e}_r)_n)_{;m} \qquad .$$

Für die $(r)(\phi)$-Komponente finden wir so

$$P^\phi_j \left(\mu D^{jr}\right)_{;r} = P^\phi_j \left(\frac{\mu}{2} P^{jm} P^{rn} \left(\gamma_{,n} t_m + \gamma_{,m} t_n + g_{,n} k_m + g_{,m} k_n + f_{mn}\right)\right)_{;r}$$

mit dem diagonalen Tensor

$$f_{mn} = (f(\hat{e}_r)_m)_{;n} + (f(\hat{e}_r)_n)_{;m} \qquad .$$

Für den Spezialfall, daß die Vierer-Geschwindigkeit sich als eine Linearkombination der beiden Killing-Vektoren ($f(r) = 0$) darstellen läßt, treten vier Terme auf

$$P^\phi_j \left(\mu D^{jk}\right)_{;k} = P^\phi_j \left(\frac{\mu}{2} \left(\left(P^{jt} P^{kr} + P^{jr} P^{kt}\right) \partial_r \gamma + \left(P^{j\phi} P^{kr} + P^{jr} P^{k\phi}\right) \partial_r g\right)\right)_{;k} \qquad ,$$

die alle am Horizont verschwinden, da $P^{jr} = g^{jr}$ und $g^{ji}_{;k} = 0$. Die Metrik ist diagonal $g^{jr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \delta^j_r$ und $g^{rr} \to 0$ verschwindet am Horizont. Die Funktionen g und γ dürfen auch nicht vom Polarwinkel θ abhängen, selbst wenn die meridionale Geschwindigkeit am Horizont verschwindet. Offensichtlich ist die Annahme, daß die radiale Geschwindigkeit vernachlässigt werden kann, unrealistisch und wir können nicht folgern, daß die Formulierung des viskosen Energie-Impulstensors die Kausalität am Horizont gewährleistet. Vielmehr ist

$$\left(\mu D^{jk}\right)_{;k} = f v^j$$

zu fordern.

3.5.2 Radiale Bremse

Der wichtigste Effekt der Viskosität in Akkretionsscheiben ist sicherlich der Drehimpulstransport von Innen nach Außen bei Erfüllung des Rayleigh-Kriteriums. Darüber hinaus bewirkt sie bereits in nicht-relativistischer Näherung eine Bremsung der Akkretion. Die radiale Komponente der viskosen Kraftdichte, die auf der rechten Seite von Gl. (3.23) erscheint, lautet

$$\begin{aligned} 2P^r_j\left(\mu D^{jk}\right)_{;k} &= f_r^{(1)} + c^{-2}\left(f_r^{(2)} + f_r^{(3)}\right) + v_g^{-2}\left(f_r^{(4)} + f_r^{(5)}\right) + f_r^{(6)} + f_r^{(7)} \\ &\quad + c^{-4} f_r^{(8)} + (cv_g)^{-2}\left(f_r^{(9)} + f_r^{(10)}\right) + 2c^{-4}v_g^{-2}\sum_{j=11}^{13} f_r^{(j)} \end{aligned} \tag{3.71}$$

mit den einzelnen Beiträgen

$$\begin{aligned} f_r^{(1)} &= \frac{4}{3}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\right)\frac{v_r}{r}\right)\right. \\ &\quad \left. +\eta\left(2-3\frac{M}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$f_r^{(2)} = \frac{4}{3}v_r\left(v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}r\eta\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right) + \eta\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\right) - \eta\frac{v_r^2}{r^2}\right) \tag{3.73}$$

$$f_r^{(3)} = -2\eta v_r\Omega^2 - 2\left(1-\frac{3M}{r}\right)r\sin^2\theta\, v_r^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta v_r^{2/3}\Omega^2\right) \tag{3.74}$$

$$f_r^{(4)} = -\eta v_r\sin^2\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{v_r^2}{c^2}\right)^2 \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} f_r^{(5)} &= -\eta v_r\Omega^2\sin^2\theta\left(\left(1-\frac{3M}{r}\right)\left(2\left(2-\frac{5M}{r}\right)+\frac{11\left(1-\frac{2M}{r}\right)}{6}\right)\right. \\ &\quad \left. -\frac{1+\frac{M}{r}}{6}\right) \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$f_r^{(6)} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)\right)}{r^2} + \eta\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right) - \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\eta v_r\right)\frac{\Omega^2\sin\theta\,\cos\theta}{c^2} \tag{3.77}$$

$$f_r^{(7)} = -\eta\frac{v_r}{r^2v_g^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)^2\left(1+\frac{\Omega^2r^2\sin^2\theta}{c^2}\right) + 2\eta\sin\theta\cos\theta\frac{v_r^2\Omega^2}{c^2v_g^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right) \tag{3.78}$$

$$f_r^{(8)} = 2\eta r\sin^2\theta\,\Omega v_r^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\Omega\right) \tag{3.79}$$

$$f_r^{(9)} = -2\eta\Omega^2Mr\sin^2\theta\, v_r^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right) + \frac{46}{3}\eta v_rMr\sin^4\theta\,\Omega^4\left(1-\frac{3M}{r}\right) \tag{3.80}$$

$$f_r^{(10)} = -\eta v_r\sin^2\theta\,\Omega^2\left(v_r^2+\Omega^2r^2\sin^2\theta\right)\left(6\left(1-\frac{3M}{r}\right)-\frac{1}{3}\right) \tag{3.81}$$

$$f_r^{(11)} = \eta v_r^4\Omega^3\sin^4\theta\frac{M}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^3\Omega}{v_r}\right) \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned} f_r^{(12)} &= -\eta v_r\Omega^3r^3\sin^4\theta\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(v_r\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}r\Omega\right)\right. \\ &\quad \left. -\frac{r\Omega}{2}\left(\frac{v_r^2}{r^2}-\Omega^2\right)\right) \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$f_r^{(13)} = -\eta v_r\Omega^2r^2\sin^2\theta\left(\frac{v_r^2}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)^2+\Omega^2\right)\right. \tag{3.84}$$

$$-2r^2\Omega^4\sin^4\theta\frac{M}{r}\left(1-\frac{4M}{9r}\right)\Bigg)$$

aufgelistet nach Ordnungen von c^{-2}. Für den Fall, daß die Akkretionsgeschwindigkeit nicht vom Polarwinkel abhängt, kommt die vertikale Struktur nur in erster Ordnung von c^{-2} in differentieller Art zum Tragen. Dabei bestimmt allein die Ableitung der kinematischen Viskosität nach dem Polarwinkel, ob dieser Beitrag sich beschleunigend oder bremsend auf die Akkretion auswirkt.

$$f_r^{(6)}+f_r^{(7)}=-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\right)v_r\frac{\Omega^2\sin\theta\ \cos\theta}{c^2} \qquad .$$

Dieser Beitrag ist positiv, wenn in einem vernünftigen Fall die Viskosität mit der Höhe abnimmt. Im nicht-relativistischen Grenzfall $c\to\infty$ führt nur der Term $f_r^{(1)}$ zu einer viskosen Kraft, die den radialen Einfall bremsen wird. In großen Entfernungen $r\gg M$ vom Horizont kann die Reibungskraft durch

$$f_r^{(1)}\approx\frac{4}{3r}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}rv_r\right)\right)-\frac{2v_r}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}r\eta\right)\right]$$

genähert werden. In einem einfach integrierten Modell wird die kinematische Viskosität durch die dynamische und die Flächendichte nach

$$\int \mathrm{d}\theta\ \eta=\nu\frac{\Sigma}{r}$$

ausgedrückt und die resultierende Beschleunigung ist

$$\frac{F}{\Sigma}=\frac{1}{\Sigma}\frac{4}{3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\nu\Sigma}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rv_r\right)\right)-\frac{2v_r}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\nu\Sigma\right)\right] \qquad . \tag{3.85}$$

Dies entspricht nicht dem Resultat von Papaloizou & Stanley (1986), da in deren Form der Faktor $4/3$ nur vor dem ersten Term steht, hier aber für beide Summanden gilt.

3.5.3 Druck durch Scherung

Obwohl wir annehmen, daß keine Geschwindigkeitskomponenten entlang des Polarwinkels auftreten, erzeugen die Scherung und eine Winkelabhängigkeit der kinematischen Viskosität einen Druck, der im Gleichgewicht mit dem Gasdruck stehen sollte. Die entsprechenden Terme lauten:

$$2P^\theta_j\left(\mu D^{jk}\right)_{;k}=f_\theta^{(1)}+f_\theta^{(2)} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned} f_\theta^{(1)} &= -\frac{2}{3r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right)+\frac{\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\right)}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)+\frac{\eta}{3r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}v_r\right) && (3.87)\\ &\quad+\frac{8\eta}{3r^3}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)\\ f_\theta^{(2)} &= -\frac{\Omega\sin\theta\cos\theta}{3c^2}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\Omega+3\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\right)v_r\Omega\right. && (3.88)\\ &\quad\left.+12\eta v_r r^{-5/3}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^{5/3}\Omega\right)\right) \qquad . \end{aligned}$$

Hierbei stellt $f_\theta^{(1)}$ den nicht-relativistischen Anteil dar, während $f_\theta^{(2)}$ nur Terme proportional zu c^{-2} enthält. Im Abschnitt 3.3.6 haben wir festgestellt, daß eine Integration der vertikalen Gleichung zum trivialen Ergebnis führt, nachdem keine vertikale Gesamtkraft auftritt. Führen wir dieselbe Integration mit $f_\theta^{(1)}, f_\theta^{(2)}$ durch, so verschwinden auch die viskosen Kräfte, sofern η und v_r symmetrisch bezüglich der Scheibenebene $\theta = \pi/2$ sind. Falls außerdem die Winkelgeschwindigkeit Ω mit dem Polarwinkel variieren sollte, führen die angegebenen integrierten Terme nicht zu einer Gesamtkraft, wenn auch Ω symmetrisch ist. Dies bedeutet nicht, daß die Scheibe bezüglich eines 'warp' oder 'tilt' stabil ist, da in einem solchen Fall die Symmetrie verloren geht.

Für eine einfache Näherung vernachlässigen wir die relativistischen Terme und die vertikale Abhängigkeit der Akkretionsgeschwindigkeit v_r. Als einziger Term bleibt dann

$$2P_j^\theta \left(\mu D^{jk}\right)_{;k} = -\frac{2}{3r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right)$$

übrig. Nimmt der Betrag der Akkretionsgeschwindigkeit $|v_r|$ schwächer als linear mit dem Radius zu und die kinematische Viskosität zur Scheibenmitte hin ebenfalls zu, so ist dieser Beitrag negativ. Ergänzen wir Gl. (3.34) um diesen Beitrag, so ergibt sich

$$\frac{\partial_\theta p}{\rho} = (1 + h/c^2)\sin\theta\ \cos\theta\, r^2\Omega^2 - \frac{2}{3r\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r}{r}\right) \tag{3.89}$$

und wir sehen, daß die viskose Kraft die Scheibe aufblähen wird.

3.6 Heizung durch viskose Reibung

Einer der möglichen Heizungsmechanismen ist direkt mit dem Drehimpuls-Transport verbunden. Durch viskose Scherkräfte wird Drehimpuls umverteilt und kinetische in innere Energie umgewandelt. Der entsprechende Beitrag zur Heizrate in Gl. (3.36) ist durch (3.9)-(3.11) gegeben. Für die viskose Heizung nehmen wir wie in Kap. 3.5 an, daß die Projektion der Geschwindigkeit auf dθ (Einheitsvektor) vernachlässigt werden kann und die azimutale Geschwindigkeit nicht vom Polarwinkel θ abhängt. Weiterhin benutzen wir die Scheibensymmetrien für stationäre Akkretion. Die Terme (3.9)-(3.11) können wir in anderer Weise anordnen:

$$\begin{aligned}
q_r^+ &= \frac{4}{3}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r}\right)\right)^2 && (3.90)\\
q_{\mathrm{vis}}^{+(1)} &= r^2\sin^2\theta\frac{c^2}{v_g^2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{v_r^2}{c^2}\right)-\frac{v_r\Omega}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}v_r\right)\right)^2 && (3.91)\\
q_{\mathrm{vis}}^{+(2)} &= 2\,\Omega r\sin^2\theta\left(\frac{c}{v_g}\right)^2\left(\frac{M}{r}-\left(\frac{\Omega r\sin\theta}{c}\right)^2\left(1-\frac{3\,M}{r}\right)\right)\\
&\quad\left(\left(1-\frac{2\,M}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega\right)+\frac{v_r}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega v_r\right)\right) && (3.92)\\
q_{\mathrm{vis}}^{+(3)} &= \frac{(c\Omega\sin\theta)^2}{v_g^2}\left(\frac{M}{r}-\left(\frac{\Omega r\sin\theta}{c}\right)^2\left(1-\frac{3\,M}{r}\right)\right)^2 && (3.93)\\
q_\theta^+ &= \frac{c^2}{v_g^2}\left(\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)-\frac{v_r\Omega^2 r\sin(\theta)\cos(\theta)}{c^2}\right)^2\right. && (3.94)\\
&\quad\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right)^2\left(\frac{\Omega\sin\theta}{c}\right)^2\right)\\
q_{\mathrm{rel}}^{+(1)} &= \frac{(\Omega r\sin\theta)^4}{(cv_g)^2}\left(\Omega^2\cos^2\theta\left(1-\frac{2\,M}{r}\right)\right. && (3.95)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +4\,\frac{v_r^2}{\Omega r^2}\left(1-\frac{3\,M}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\Omega r\right)\Bigg) \\
q_{\rm rel}^{+(2)} \quad &= \quad \frac{4}{v_g^2}\,v_r^3\Omega\sin^2\theta\left(1-\frac{2\,M}{r}+\frac{v_r^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Omega r}{v_r}\right) \qquad (3.96)
\end{aligned}
$$

$$
q_{\rm vis}^{+} = \eta\left(q_r^+ + q_{\rm vis}^{+(1)} + q_{\rm vis}^{+(2)} + q_{\rm vis}^{+(3)} + q_\theta^+ + q_{\rm rel}^{+(1)} + q_{\rm rel}^{+(2)}\right) \quad . \qquad (3.97)
$$

Den nicht-relativistischen Grenzfall erhalten wir, wenn wir die Heizrate im Grenzfall $c \to \infty$ betrachten. Dabei verschwinden die beiden relativistischen Heizterme $q_{\rm rel}^+$ und eine Entwicklung der übrigen Terme in c^{-2} liefert in 0-ter Ordnung

$$
\begin{aligned}
q_{\rm vis}^{+} \quad &= \quad \eta\left[\frac{4}{3}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial_\theta\, v_r}{r}\right)^2\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\right. \\
&+ \quad \left.\sin^2\theta\left(\left(1-\frac{2\,M}{r}\right)r\partial_r\Omega + \frac{\Omega}{1-\frac{2M}{r}}\frac{M}{r}\right)^2\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) \qquad (3.98)
\end{aligned}
$$

eine Form für die Heizrate, die am Horizont divergent ist. Dies war bei der exakten Heizrate nach Gl. (3.97) nicht der Fall, solange die radiale Geschwindigkeit am Horizont nicht verschwindet. Dies zeigt, daß (3.98) in der Nähe des Horizonts keine gute Näherung ist. Für große Entfernungen $r \gg M$ finden wir hingegen die Newtonsche Form für die angenommenen Symmetrien

$$
q_{\rm vis}^{+} = \eta\left[\frac{4}{3}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial_\theta\, v_r}{r}\right)^2 + \sin^2\theta\,(r\partial_r\Omega)^2\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad . \qquad (3.99)
$$

3.7 Wärmefluß

Im klassischen Fall beschreibt man den Wärmefluß in der Diffusionsnäherung durch

$$
q_{\;heat} = -\kappa\nabla T
$$

mit der thermischen Leitfähigkeit nach Spitzer (1962)

$$
\kappa = 18\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\frac{k\,(kT)^{5/2}}{m_e^{1/2}e^4\ln\Lambda} \qquad ,
$$

die den Coulomb-Logarithmus

$$
\ln\Lambda = \ln\left(1.24\;10^4\frac{T^{3/2}}{n_e}\sqrt{\frac{4.2\;10^5}{T}}\right)
$$

enthält mitsamt einer Korrektur für große Temperaturen. Allgemeiner ist die thermische Leitfähigkeit der Elektronen durch

$$
\kappa = \frac{n_e k_B T}{m_e \nu}
$$

gegeben, wobei n_e die Teilchendichte und ν die Stoßfrequenz ist, die den mittleren freien Weg der Elektronen begrenzt. Dies sind im oben angenommenen Fall Elektron-Elektron-Stöße. Für optisch dünne Akkretionsscheiben wird sich zeigen, daß die so ermittelte freie Weglänge größer als die Längenskala des Temperaturgradienten $l_T = \frac{|\nabla T|}{T} \approx r$ werden kann, wodurch ein saturierter Wärmestrom

$$
q_{\rm heat} = 5\phi_s\rho c_s^3
$$

auftritt, in dem die innere Energie balistisch mit der mittleren thermischen Geschwindigkeit transportiert wird. Dies stellt bei einer genaueren Untersuchung eine nicht lokale Wechselwirkung dar und eine lokale Beschreibung wie in der Diffusionsnäherung ist nicht mehr möglich.

Allerdings kann die freie Weglänge der Elektronen auch durch Streuung und Plasmawellen limitiert werden. Dies sind zum einen elektromagnetische Wellen, falls kein hinreichend starkes Hintergrund-Magnetfeld existiert, das diese Wellen unterdrücken kann. Das Kriterium hierfür ist, daß das Plasma-$\beta = 8\pi n_e k_B T B^{-2}$ viel größer als 1 ist. In diesem Fall kann die thermische Leitfähigkeit nach Ramani & Laval (1978) um einen Faktor $\epsilon = (c/l_T \omega_P)^{1/3}$ unterdrückt werden. In unseren Akkretionsströmungen wird β allerdings ungefähr eins sein. Für solche Situationen sind uns keinen adäquaten Beschreibungen bekannt. Levinson & Eichler (1992) haben für große Plasma-β und Hintergrund-Magnetfelder ebenfalls eine Unterdrückung der Leitfähigkeit um mehrere Größenordnungen gefunden und für kleine Plasma-β vorgeschlagen das 'whistler'-Wellen mit der Gyrationsfrequenz der Elektronen ω_e die Quelle für Streuungen der Elektronen sein können. Wir verwenden daher die Unterdrückung von Ramani & Laval mit ω_e als charakteristische Stoßfrequenz.

3.8 Scheiben im Newtonschen Potential einer Punktmasse

3.8.1 Standard-Scheiben und selbstähnliche Lösungen

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf eine axialsymmetrische Strömung in der (r, ϕ)-Ebene und betrachten nur die vertikal integrierten Größen. Diese Beschreibung ist gut für dünne Scheiben $H(r) \ll r$, aber auch akzeptabel für 'slim disks', sofern wir für die vertikale Struktur ein hydrostatisches Gleichgewicht annehmen dürfen und die kinematischen Variablen v_ϕ, v_r nicht stark von der Höhe z über der Symmetrie-Ebene abhängen. Wir wollen hier die zeitabhängigen Gleichungen angeben, so daß sie für eine spätere Stabilitätsuntersuchung zur Verfügung stehen. Die Massenerhaltung schreibt sich in vertikal integrierter Form als

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r \Sigma}{\partial r} \qquad . \tag{3.100}$$

Die radiale Impulsgleichung enthält das effektive Potential $\left(\Omega^2 - \Omega_K^2\right) r$ sowie die Scher- F_η und 'bulk'-Viskosität F_ξ. Der Druck ist wie die Dichte in vertikal integrierter Form zu sehen:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \Omega^2 r - \frac{GM}{r^2} - \frac{1}{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial r} + F_\eta + F_\xi \qquad . \tag{3.101}$$

Die Drehimpuls-Gleichung ist im zeitabhängigen Fall eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich im stationären Zustand direkt integrieren läßt. Von der Divergenz des Scherungstensors in (3.14) bleibt unter den gemachten Annahmen nur die $r - \phi$-Komponente als einziger Term erhalten

$$r\Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{v_r \Sigma}{r}\frac{\partial \left(r^2 \Omega\right)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \left(\eta r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{\partial r} \qquad , \tag{3.102}$$

den wir mit der dynamischen Viskosität $\eta = \nu \Sigma$ formulieren und der für den Drehimpuls-Transport sorgt. In der Entropie-Gleichung werden konsistent nur die Terme der viskosen Heizung verwendet, die auch in den Impulsgleichungen auftreten:

$$\Sigma T \frac{\partial s}{\partial t} + \Sigma v_r T \frac{\partial s}{\partial r} = Q^+ - Q^- \tag{3.103}$$

$$Q^+ = \eta \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 + Q_r^+ \qquad .$$

Fragen wir nach der radialen Struktur einer stationären Scheibe und vernächlässigen die radiale viskose Kraft, sowie ihren Beitrag zur Heizrate, so reduzieren sich die Gleichungen (3.100-3.103) zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. In den skalierten Variablen des vorigen Abschnitts erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\beta\sqrt{s}\Sigma = \frac{\dot{M}}{2\pi r_g c} \tag{3.104}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s} - \frac{3g}{2s} = -\frac{c r_g}{\nu}\frac{\beta}{s^{\frac{1}{2}}}\left(g - g_0\sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) \tag{3.105}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} - \frac{\beta}{2s} - \frac{g^2-1}{\beta s} = -\frac{s}{\beta c^2}\left(-\Sigma\left(\frac{\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}}{\beta} + \frac{1}{2s}\right)\frac{\partial P}{\partial \Sigma} + \frac{\partial P}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right) \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned} c_V\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= -(\Gamma_3 - 1)c_V T\left(\frac{\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}}{\beta} + \frac{1}{2s}\right) \\ &\quad -\frac{(1-f)c^3 r_g \beta}{\nu s^{\frac{3}{2}}}\left(g - g_0\sqrt{\frac{s_0}{s}}\right)^2 \quad . \end{aligned} \tag{3.107}$$

Hierbei haben wir die Drehimpulsgleichung integriert unter der Annahme, daß es einen Radius $r_0 = s_0 r_g$ gibt, an dem die Scherung der Strömung verschwindet. Der spezifische Drehimpuls an diesem Radius ist $\Omega_0 = g_0\, c\, r_g^{-1}\, s_0^{-3/2}$. Das Gleichungssystem ist nicht abgeschlossen, da wir noch eine Zustandsgleichung $P(\Sigma, T)$ angeben müssen und die Viskosität unklar ist. Für die Viskosität verwenden wir die α-Beschreibung nach Shakura & Sunyaev (1973)

$$\nu = \alpha c_s^2 \Omega_K^{-1} \quad ,$$

in der wir die übliche Beschreibung der Längenskala H als Höhe der Scheibe im Rahmen einer Ein-Zonen-Näherung für die vertikale Struktur durch $H = \frac{c_s}{\Omega_K}$ ersetzt haben. Die Zustandsgleichung soll die eines idealen Gases und einem Beitrag der Schwarkörper-Strahlung nach (3.40) sein. Den Druckanteil des idealen Gases wollen wir konstant halten, so daß sich der Druck als

$$P = \frac{\Sigma c_s^2}{\zeta}$$

schreibt und wir die isotherme Schallgeschwindigkeit verwenden.

Das Gleichungssystem hat eine einfache Lösung, falls $g_0\sqrt{\frac{s_0}{s}} \approx 0$ vernachlässigt werden kann. Dies ist möglich, wenn wir Lösungen betrachten, die weit von Innenrand entfernt sind oder an einem beliebigen Radius die Relation

$$\alpha\frac{c_s^2}{c^2} \approx -\frac{\beta}{3\pi s}$$

erfüllt ist und der spezifische Drehimpuls proportional zum Keplerschen Drehimpuls ist. In diesem Fall existiert eine selbst-ähnliche Lösung, für die die radialen Ableitungen von β und g verschwinden und die nur die logarithmische radiale Ableitung der Flächendichte zu

$$\frac{1}{\Sigma}\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2s}$$

festlegt, sonst aber keine weiteren Abhängigkeiten von Σ aufweist. Aus der Drehimpulsgleichung können wir in diesem Fall direkt die Schallgeschwindigkeit ableiten

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{2}{3\alpha s}\beta(\tilde{c_V}, \Gamma_3, f, \alpha)$$

und den Druckgradienten $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}$ sofort auf die bekannte Schallgeschwindigkeit zurückführen. Die azimutale Winkelgeschwindigkeit hängt mit α, Γ und f über β nach

$$g = \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha\zeta} - \frac{\beta^2}{2}}$$

zusammen. Die radiale Akkretionsgeschwindigkeit ist eindeutig bestimmt durch

$$\beta = -\frac{1}{\alpha\zeta} - \frac{2\tilde{c_V}(3-\Gamma_3) - \sqrt{2\left(9\alpha(1-f)\right)^2 + \left(2\tilde{c_V}(3-\Gamma_3) + \frac{9}{\zeta}(1-f)\right)^2}}{\alpha(1-f)} \quad . \tag{3.108}$$

3.8.2 Scheiben mit Advektion und radialer viskoser Kraft

Die Lösungen der Scheiben-Gleichungen mit Advektion im obigen Abschnitt sind die von Narayan & Yi (1994) angegebenen selbstähnlichen Lösungen. Sie vernachlässigen die viskosen Terme in der radialen Impulsgleichung, wie es in der Diskussion dünner Scheiben üblich ist, weil die radialen Geschwindigkeiten und ihre Änderung klein gegen effektive potentielle Kraft und Druckunterstützung sind. Die Lösungen in diesem Fall Gl.(3.108) und Bild 3.2 für β zeigen, daß dies nicht mehr zutreffend ist. Wir wollen hier die Bedeutung dieser radialen viskosen Kraft aufzeigen. Ihre axialsymmetrische Form nach Papaloizou und Stanley (1986) kann als

$$F_\eta = \frac{2}{\Sigma}\left(\frac{2}{3}\frac{\partial\left(\frac{\eta}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)$$

$$F_\xi = \frac{1}{\Sigma}\left(\frac{\xi}{r}\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}\right)$$

geschrieben werden kann. Die Entropie-Gleichung wird konsistent um die zusätzlichen viskosen Heizungsterme erweitert

$$Q^+ = \eta\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)^2 + \frac{12}{9}\eta\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 - v_r\frac{\partial\left(\frac{v_r}{r}\right)}{\partial r}\right] + \xi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}\right]^2 \quad .$$

Da der Charakter des Beitrags der zweiten Zähigkeit ζ in dem Beitrag der dynamischen Viskosität η bereits enthalten ist, werden wir die zweite Zähigkeit nicht weiter berücksichtigen, da die Eddie-Viskosität naturgemäß nur größenordnungsmäßig angegeben werden kann. Mit der Definition der isothermen Schallgeschwindigkeit $\zeta P = c_s^2\Sigma$ und der Zustandsgleichung (3.40), sowie der Viskositätsbeschreibung wird das Gleichungssystem wieder vollständig. Auch unter dem Einfluß der zusätzlichen radialen viskosen Kraft läßt sich eine stationäre, selbstähnliche Lösung der Scheiben-Gleichungen angeben. Dafür wollen wir eine noch nicht bestimmte radiale Abhängigkeit der dynamischen Eddie-Viskosität $\eta = \eta_0 s^d$ annehmen. Es zeigt sich, daß nur für $d = 0$ selbstähnliche Lösungen mit der gleichen Schallgeschwindigkeit existieren

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha s}$$

wie im Fall ohne radiale viskose Kraft und der relativen Winkelgeschwindigkeit $g = \Omega/\Omega_K$, die in Abhängigkeit von der radialen Geschwindigkeit als

$$g = \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha\zeta} - \frac{7}{6}\beta^2} \tag{3.109}$$

angegeben werden kann, wenn wir eine α-Parametrisierung der Viskosität verwenden. Die Schallgeschwindigkeit c_s folgt aus der Viskositätsbeschreibung und der Integration der Drehimpulsgleichung. Da die Drehimpulsgleichung keine weiteren viskosen Terme enthält bewahrt die Schallgeschwindigkeit die gleiche Form, aber die radiale Geschwindikeit wird durch die radiale viskose Kraft verändert. Die Bedeutung des Druckgradienten kann direkt verglichen werden mit der Abweichung von der Keplerschen Rotation nach

$$-\frac{1}{\Sigma}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{c^2}{r_g}\frac{\beta}{\alpha s^2} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{\Sigma}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}}{\left(\Omega^2 - \Omega_K^2\right) r} = \frac{1}{1 - \frac{7}{6}\alpha\beta\zeta} \quad .$$

In gleicher Weise können wir die radiale viskose Kraft betrachten und erhalten

$$F_\eta = \frac{2\beta^2}{3s^2}\frac{c^2}{r_g} \Rightarrow \frac{F_\eta}{\left(\Omega^2 - \Omega_K^2\right) r} = \frac{4\alpha\beta\zeta}{6 - 7\alpha\beta\zeta} \quad .$$

Demnach ist das Verhältnis von viskoser Kraft und Druck-Kraft gerade $\frac{2}{3}\alpha\beta$ und die Scheiben sind um so mehr durch den Druck unterstützt, je kleiner die radiale Geschwindigkeit ist, während die Druckunterstützung und die Zentrifugalkraft gleich stark sind. Im Fall großer radialer Geschwindigkeiten nimmt die Bremsung des radialen Einfalls durch die viskose Kraft relativ zum Druck zu und gleichzeitig nimmt die Bedeutung der Zentrifugalkraft ab, da die Rotation der Scheibe langsamer wird. Wir interpretieren die Schallgeschwindigkeit als isotherme Schallgeschwindigkeit in einem idealen Gas und erhalten für die radiale Geschwindigkeit in Einheiten der lokalen Keplerschen Rotationsgeschwindigkeit

$$\beta = -\frac{27}{7\alpha\zeta} - 6\tilde{c_V}\frac{3 - \Gamma_3}{7\alpha(1 - f)} + \frac{3}{7}\sqrt{42 + \frac{\left(2\tilde{c_V}(3 - \Gamma_3) + \frac{9}{\zeta}(1 - f)\right)^2}{\alpha^2(1 - f)^2}} \quad .$$

Dabei ist $\tilde{c_V}$ die spezifische Wärme in Einheiten von $k_B(\mu m_H)^{-1}$. Aus der Gl. 3.109 folgt, daß nur für bestimmte Parameter f, α, Γ_3 eine selbstähnliche Lösung existiert. Das Kriterium für die Existenz ist

$$\frac{28\alpha(1 - f)}{\sqrt{42\left(\left(\tilde{c_V}(3 - \Gamma_3)\right)^2 + 4\tilde{c_V}(3 - \Gamma_3)\frac{(1 - f)}{\zeta}\right)}} < 1 \quad .$$

3.8.3 Die dynamischen Gleichungen für dicke Scheiben

Die Diskussion advektionsdominierter Akkretionsscheiben (ADAF) hat gezeigt, daß die Scheiben geometrisch nicht mehr dünn sind und die radiale Akkretionsgeschwindigkeit mit der Rotationsgeschwindigkeit vergleichbar wird. Die hydrodynamischen Gleichungen dicker Scheiben wurden von Paczynsky und Wiita (1980) für kleine radiale und poloidale Geschwindigkeiten untersucht, die sich als Erweiterung der Gleichungen für dünne Scheiben angeben lassen, da advektive Terme entfallen. Eine ähnliche Darstellung in sphärischer Geometrie findet sich bei Begelman und Meier (1982).

Die ADAF unterscheiden sich von den bisher diskutierten Scheiben dadurch, daß die radiale Geschwindigkeit nicht mehr klein ist. Die selbstähnliche Lösung der Gleichungen zeigt, daß die relative Höhe der Scheibe nicht vom Radius abhängt, so daß die Strömung bei großen Abständen von der Zentralebene auch eine vertikale Geschwindigkeitskomponente haben muß. Um Scherungen der Strömung in der $r - z$-Ebene zu vermeiden, nehmen wir an, daß der Betrag der Geschwindigkeit in der $r - z$-Ebene nur vom Abstand zum Zentrum $\tilde{r} = r\sqrt{1 + h^2}$

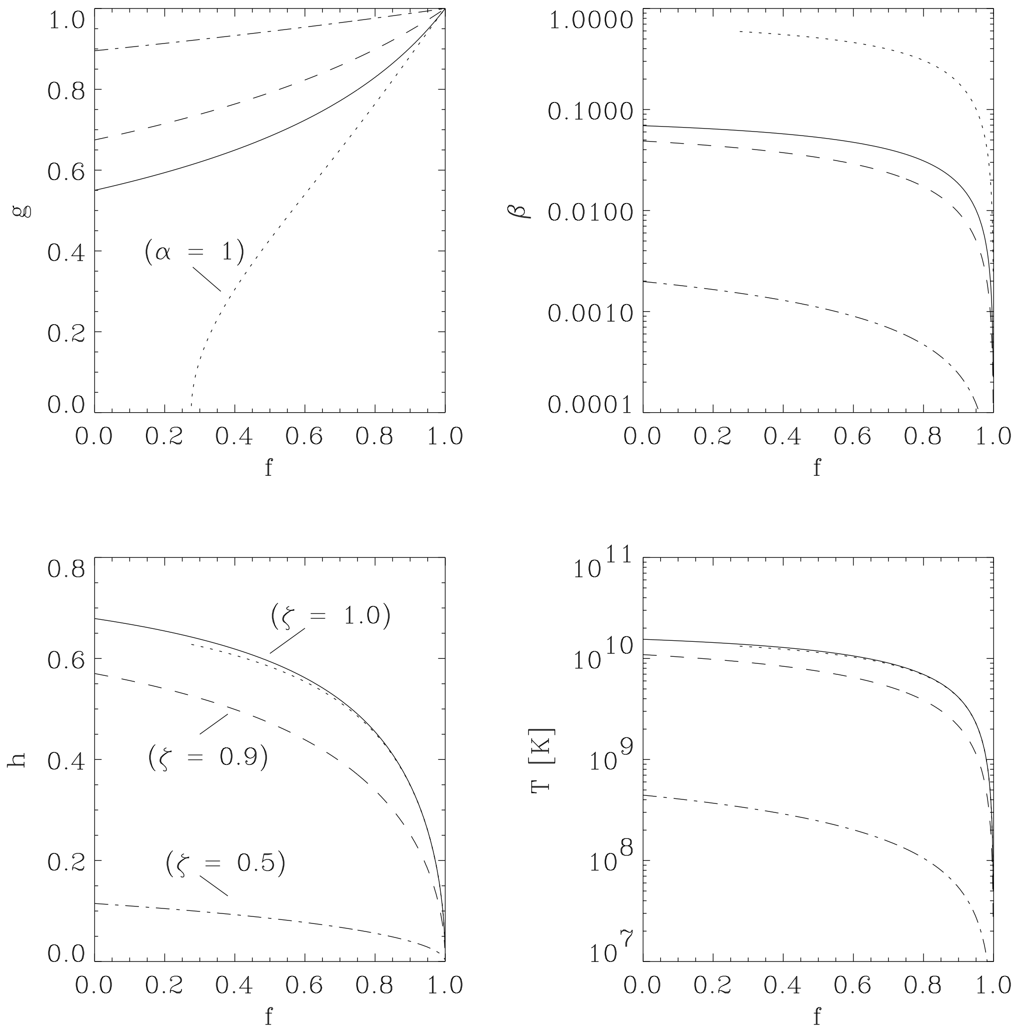

Abbildung 3.2: Die selbstähnlichen Lösungen der Scheiben-Gleichungen mit Advektion im Newtonschen Potential und radialer viskoser Kraft. Für die Darstellung wurden die Parameter $\alpha = 0.1$ bzw. $\alpha = 1.0$ und für den Anteil des Gasdrucks $\zeta = 1, 0.9, 0.5$ gewählt. Die Temperatur ist bei $r = 100$ Schwarzschildradien angegeben. Die Lösung mit $\alpha = 1$ ist für $\zeta = 1.0$ gerechnet (punktierte Kurven) und bricht bei $f = 0.276$ ab, da bei stärkerer Advektion keine Lösung existiert.

abhängt und so auf Kugelschalen konstant ist. Damit erhalten wir für den kinematischen Anteil der Impuls-Gleichungen die folgende Form

$$v_r\partial_r v_r + v_z\partial_z v_r = \frac{c^2\beta^2(\tilde{r})}{r_G s^2\,(1+h^2)^{\frac{5}{2}}}\left[(1+2h^2)\frac{\partial\ln\beta(\tilde{r})}{\partial\ln\tilde{r}} - \frac{1}{2} - 2h^2\right] \tag{3.110}$$

$$v_r\partial_r v_z + v_z\partial_z v_z = \frac{c^2\beta^2(\tilde{r})h}{r_G s^2\,(1+h^2)^{\frac{5}{2}}}\left[(1+2h^2)\frac{\partial\ln\beta(\tilde{r})}{\partial\ln\tilde{r}} + \frac{1}{2} - h^2\right] \quad . \tag{3.111}$$

Für selbstähnliche Lösungen der Scheiben-Gleichungen werden wir wieder $\beta(\tilde{r})$ als konstant annehmen. Damit ergibt sich für die entspechenden Terme

$$v_r\partial_r v_r + v_z\partial_z v_r = -\frac{c^2\beta^2}{r_G s^2\,(1+h^2)^{\frac{5}{2}}}\left[\frac{1}{2} + 2h^2\right] \tag{3.112}$$

$$v_r\partial_r v_z + v_z\partial_z v_z = \frac{c^2\beta^2(\tilde{r})h}{r_G s^2\,(1+h^2)^{\frac{5}{2}}}\left[\frac{1}{2} - h^2\right] \quad . \tag{3.113}$$

Für die selbstähnliche Struktur kann der radiale kinematische Anteil direkt vertikal integriert werden und es bleibt

$$\int_0^\infty r_G s \mathrm{d}h\; v_r\partial_r v_r + v_z\partial_z v_r = -\frac{c^2\beta^2}{s} \quad . \tag{3.114}$$

3.8.4 Annäherung an die vertikale Struktur

Der Einfluß der Advektion auf die radiale Struktur hat zu einer Scheibe mit nicht mehr vernachlässigbarem radialen Geschwindigkeitsfeld geführt. Gleichzeitig nähert sich die effektive Temperatur asymptotisch der Virialtemperatur. Dadurch ist die Skalenhöhe H der Scheibe und die Schallgeschwindigkeit c_s erheblich größer geworden. Alle drei Effekte können nicht ohne Auswirkung auf die vertikale Struktur und damit auf das bebobachtbare Spektrum der Akkretionsscheibe bleiben. Betrachtungen zur turbulent erzeugten Viskosität (Kato 1996) zeigen, daß die dynamische Viskosität und damit der α-Parameter in vertikaler Richtung nicht sehr stark variieren und so die dissipativ erzeugte Wärme nicht von der Höhe abhängen sollte. Damit ist die Annahme berechtigt, daß die Akkretionsgeschwindigkeit $v = \left\langle\sqrt{v_r^2+v_z^2}\right\rangle$ nur vom Abstand zum Zentralobjekt abhängt. Wir wollen die Akkretionsgeschwindigkeit als die radiale Geschwindigkeit in den vertikal gemittelten Gleichungen interpretieren und durch die selbstähnliche Lösung $v = \beta\sqrt{GMr^{-1}}$ als gegeben ansehen. Die mittleren Geschwindigkeiten sind dann $v_r = -v\sqrt{1+h^2}^{-1}$ und $v_z = -vh\sqrt{1+h^2}^{-1}$, die das Impulsgleichgewicht in vertikaler Richtung beeinflussen und im stationären Fall zu einem advektiven Term

$$(\vec{v}\cdot\nabla)v_z = -\frac{v^2}{2r}\frac{h}{1+h^2}\frac{r+r_s}{r-r_s} \tag{3.115}$$

führen. Die vertikale Kraftdichte der Gravitation des Zentralobjekts wollen wir mit dem Pseudopotential $\Phi = -GM(\sqrt{r^2+z^2}-r_s)^{-1}$ bestimmen und erhalten

$$-\partial_z\Phi = -\frac{GM}{r^2}\frac{h}{\sqrt{1+h^2}\left(\sqrt{1+h^2}-\frac{r_s}{r}\right)^2} \quad . \tag{3.116}$$

Als gasdynamische Gleichung bleibt

$$\frac{\partial p}{\rho\partial z} = -\frac{GM}{r^2}\frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\left(\left(\sqrt{1+h^2}-\frac{r_s}{r}\right)^{-2} - \frac{\beta^2\,(1+\frac{r_s}{r})}{2\sqrt{1+h^2}\,(1-\frac{r_s}{r})^3}\right) \tag{3.117}$$

zu lösen.

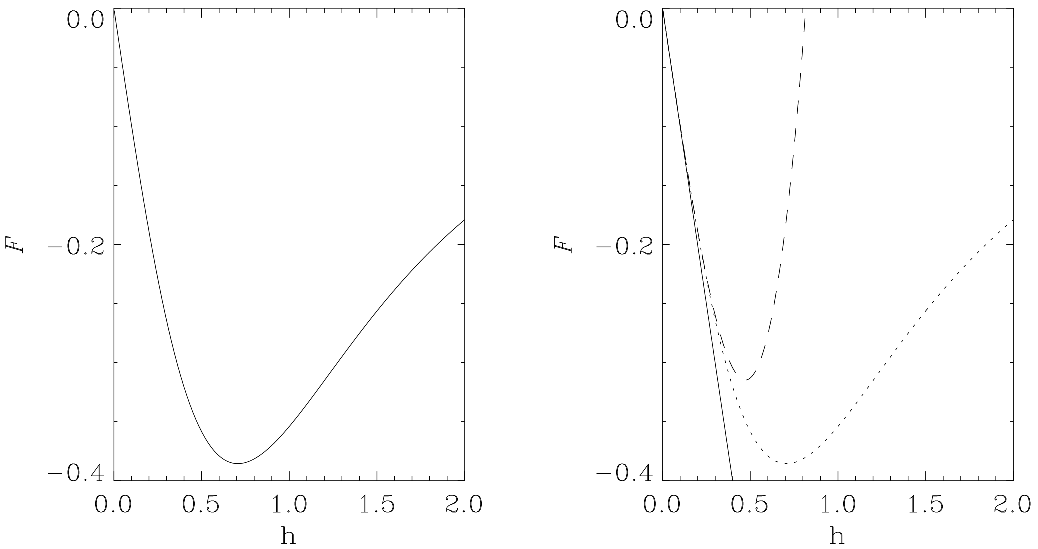

Abbildung 3.3: Die Kraftdichte in Einheiten $\left[GMr^{-2}\right]$ für die exakte Form des Potential in großer Entfernung vom Schwarzschild-Radius $r \gg r_s$ links weicht für dicke Scheiben deutlich von den beiden Näherungen ab. Die lineare Näherung ist durchgezogen gezeichnet, die kubische Näherung ist durch die gestrichene Linie gezeigt.

Wie gut ist die quadratische Näherung für das Potential ?

Sie ist ausreichend für dünne Akkretionsscheiben mit $H/r \ll 1$ aber für $h > 0.2$ weicht die Kraftdichte deutlich von der üblichen Näherung $-\partial_z\Phi = -GMhr^{-2}$ ab. Dies wird in Abb. 3.3 deutlich. Der Unterschied zwischen der Näherung des Potentials $\sim -z$ und der exakten Form bleibt auch in der vertikalen Dichteverteilung erhalten. Für eine isotherme Vertikale Struktur erhalten wir den in Abb. 3.4 gezeigten Dichteverlauf. Im Fall des hydrostatischen Gleichgewichts ($\beta = 0$ in Gl. 3.117) und in großer Entfernung vom Schwarzschildradius kann man die vertikale Struktur durch Integration formal als Integralgleichung

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -\frac{GM}{r(r^2+z^2)}\left(z^2 - r\sqrt{r^2+z^2} + r^2\right) \tag{3.118}$$

angeben. Ist das hydrostatische Gleichgewicht in der Weise gestört, wie es durch (3.117) angegeben ist, bleibt das Integral der rechten Seite immer noch analytisch lösbar und es ergibt sich

$$\int_0^h \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -\frac{GM}{r(1+h^2)}\left((1+h^2)(1-\beta^2\ln(1+h^2)) - \sqrt{1+h^2}\right) \quad . \tag{3.119}$$

Die vertikale Struktur dicker Scheiben wird dadurch kompliziert, daß die vertikale Abhängigkeit der Akkretionsgeschwindigkeit $-\beta(\tilde{r})v_K$ mit der Höhe variiert und ihr lokaler Wert, wie auch die Ableitung im kinematischen Anteil der Impulsgleichung (3.111) auftreten.

Für eine Polytrope Vertikalstruktur läßt sich die Gl.3.119 direkt auflösen. Der Verlauf von $\rho(h)$ und $p(h)$ bzw. $T(h)$ hängt nur noch vom Polytropenindex und der Zentraltemperatur ab. Die Konstante in der polytropen Zustandsgleichung legen wir in der Zentralebene fest. Die Temperatur soll hier die Ionentemperatur sein und das Gas einen Anteil $\zeta = P_{\mathrm{Gas}}/P$ zum Gesamtdruck P beitragen. Die Konstante ist so bestimmt durch

$$K = c^2\frac{\tilde{\theta}}{\zeta\rho^{\gamma-1}} \tag{3.120}$$

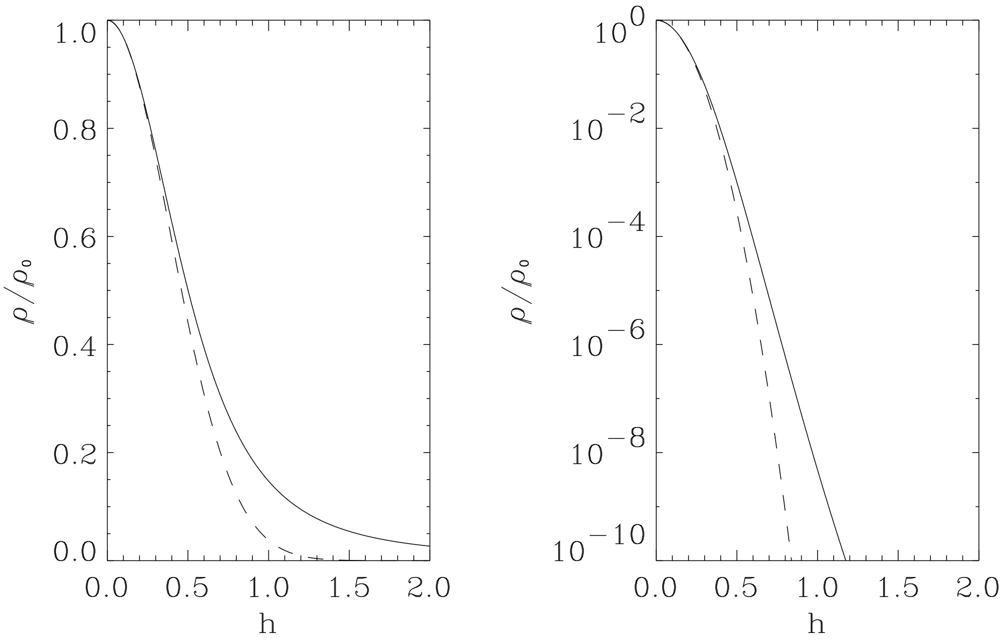

Abbildung 3.4: Vertikale Dichteverteilung für eine isotheme vertikale Struktur. Die exakte Darstellung des Potentials (durchgezogene Linien) führen bei großen Höhen zu deutlich höherer Dichte als durch die lineare Näherung (unterbrochene Linien) zu erwarten war. Die linke Darstellung ist für eine advektions-dominierte Scheibe bei $r = 100$ Schwarzschildradiien und einer Temperatur von $T = 5 \cdot 10^9$K gerechnet. Die rechte Darstellung ist am selben Radius für eine 10-mal niedrigere Temperatur $T = 1 \cdot 10^8$K gerechnet.

mit der dimensionslosen Temperatur $\tilde{\theta} = \frac{k_B T_i}{\mu m_H}$. Die Dichte folgt so zu

$$\rho(h) = \rho_c \left[1 + \frac{\zeta}{\tilde{\tilde{\theta}}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad . \tag{3.121}$$

Bei 100 Schwarzschildradien liegt die Temperatur für geringe Advektion $f \sim 0.95$ noch deutlich unter der Virialtemperatur und wir nehmen eine Zentraltemperatur von $T_0 = 5 \cdot 10^9$ K an, um die entsprechende vertikale Struktur zu bestimmen. Erreicht die Dichteverteilung bei einer Höhe h_t den Wert Null, so nehmen wir für eine größere Höhe die Dichte ebenfalls als Null an, obwohl die formale Lösung auch negative Werte für die Dichte zuläßt. Die Flächendichte $\Sigma(h) = 2\int_0^h \mathrm{d}\tilde{h}\rho(\tilde{h})$ strebt unabhängig von dem gewählten Polytopenexponenten demselben Grenzwert zu, der nur noch von der Zentraltemperatur und der Zentraldichte abhängt.

Eine alternative Interpretation der vertikal integrierten Geschwindigkeit bietet sich an, wenn man das Geschwindigkeitsfeld in der $r-z$-Ebene der Akkretion als rotationssymmetrisch ansieht. Die übliche Betrachtung des hydrostatischen Gleichgewichts wird im Fall dicker Scheiben durch eine Impulsbilanz ersetzt, die einen advektiven Term enthält, der in analoger Weise in der radialen Impulsgleichung auftritt. Sehen wir die vertikale Integration, die immer durch die Dichte gewichtet ist, als Integration über den Polarwinkel an, so läßt sich die integrierte Geschwindigkeit als Funktion des Abstands vom Zentralobjekt $\sqrt{r^2 + z^2}$ verstehen und nicht als Funktion von r. Deshalb verwenden wir im weiteren Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) und nehmen ein hydrostatisches Gleichgewicht in θ-(polar)-Richtung an.

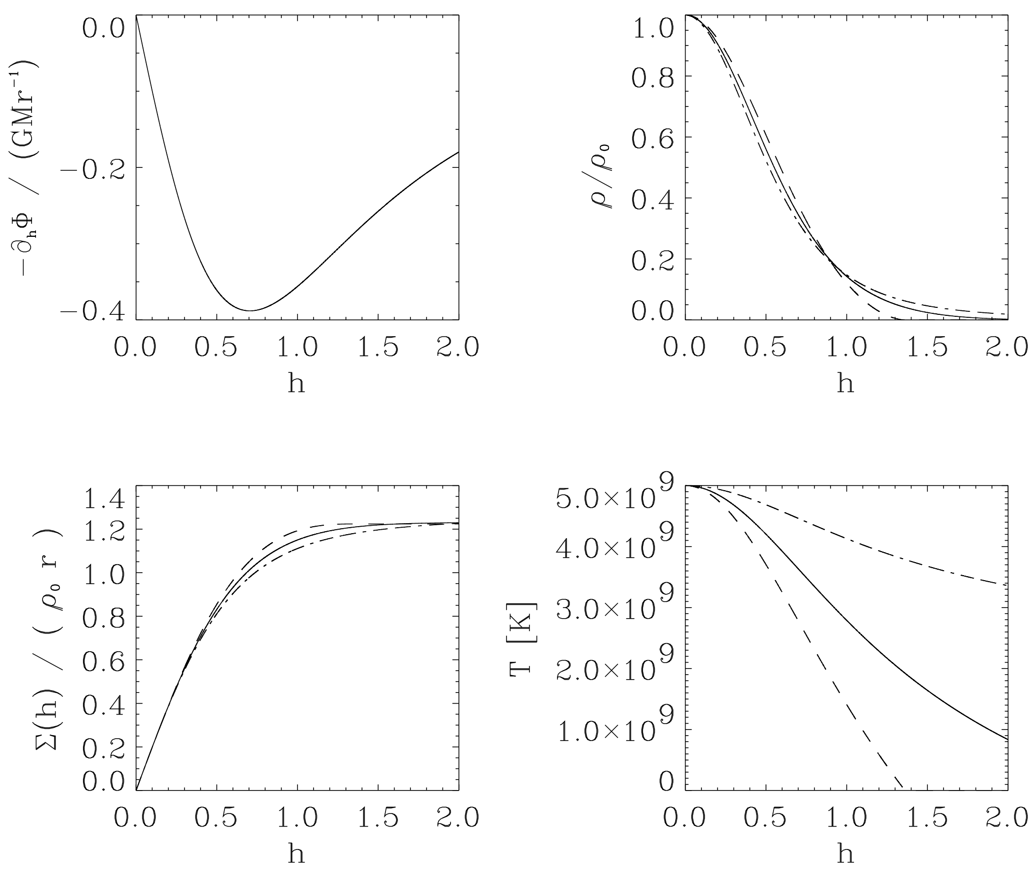

Abbildung 3.5: Vertikale Struktur einer advektionsbestimmten Scheibe bei $r = 100$ Schwarzschildradiien und einer Temperatur von $T = 5 \cdot 10^9$K mit polytroper Zustandsgleichung. Der Exponent der Polytropengleichung ist $\gamma = 1.1$ (strich-punktiert) $\gamma = 1.3$ (durchgezogen) $\gamma = 1.6$ (gestrichelte Linie).

3.9 Dicke Scheiben mit radialer und vertikaler Strömung

3.9.1 Massenerhaltung

Das Geschwindigkeitsfeld ist nun dreidimensional $(v_r(r,z), v_z(r,z), v_\varphi(r,z))$ wobei alle Geschwindigkeiten sowohl mit dem Radius als auch mit der Höhe über der Zentralebene variieren können. Im stationären Fall mit φ-Symmetrie schreibt sich die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form als

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r\rho)}{\partial r} + \frac{\partial(v_z\rho)}{\partial z} = 0 \qquad .$$

Integrieren wir den Massenstrom $\vec{v}\rho$ über die Fläche zwischen zwei in -z-Richtung nach $\pm\infty$ ausgedehnten Zylinderflächen, so verschwindet der Beitrag von den Deckflächen bei $z = \pm\infty$ und es bleibt die Massenakkretionsrate

$$\dot{M} = -2\pi r \langle v_r \rangle \Sigma \tag{3.122}$$

mit der Flächendichte Σ und der mittleren radialen Geschwindigkeit nach

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \rho(r,z) \tag{3.123}$$

$$\langle v_r \rangle = \Sigma^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z v_r(r,z)\rho(r,z) \quad . \tag{3.124}$$

Die mittlere radiale Geschwindigkeit ist offensichtlich von der vertikalen Struktur der Scheibe abhängig.

3.9.2 Impulsgleichungen

Wir wollen zuerst die Drehimpulsgleichung betrachten, die gegenüber der Situation in dünnen Scheiben durch die mögliche Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit von der Höhe ergänzt werden muß. Sie erhält die Form

$$\frac{v_r}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\Omega(r,z)\right)}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Omega(r,z)}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial\left(\eta(r,z) r^3 \frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial \eta(r,z)\frac{\partial \Omega(r,z)}{\partial z}}{\partial z}\right] \quad . \tag{3.125}$$

Die radiale Impulsgleichung wird erweitert zu

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{v_r}{\partial z} - r\Omega^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + f_\eta + f_\xi \quad . \tag{3.126}$$

Die zusätzlich von der Zähigkeit herrührenden Kräfte sind

$$\begin{aligned}
f_\eta &= f_{\eta 1} + f_{\eta 2} + f_{\eta 3} && (3.127)\\
f_{\eta 1} &= \frac{2}{\rho}\left[\frac{2}{3}\frac{\partial \frac{\eta}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r}}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right] && (3.128)\\
f_{\eta 2} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right)}{\partial z} && (3.129)\\
f_{\eta 3} &= -\frac{2}{3\rho}\frac{\partial\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)}{\partial r} && (3.130)\\
f_\xi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\xi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right)}{\partial r} \quad . && (3.131)
\end{aligned}$$

Für dünne Scheiben verschwindet die vertikale Geschwindigkeit und es sollte ein hydrostatisches Gleichgewicht in z-Richtung herrschen. Dies können wir im Fall dicker Scheiben nicht mehr erwarten. Nehmen wir an, daß die Druckskalenhöhe der Scheibe H in vertikaler Richtung mit dem radialen Abstand vom Zentralobjekt vergleichbar wird, so wird ein Gaselement am Ort (r,H) mit der gleichen Geschwindigkeit in vertikaler Richtung bewegt, wie es in radialer Richtung akkretiert wird. Advektive Terme können somit in der vertikalen Impulsgleichung ebensowenig vernachlässigt werden, wie im radialen Fall. Die Impulsgleichung für die vertikale Struktur ist daher

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + f_{\eta z} + f_{\xi z} \quad . \tag{3.132}$$

Entscheidend für die Struktur der Scheibe ist wieder der radiale Entropie-Transport, der nun durch zusätzliche Heizungsterme erweitert werden muß zu

$$c_V\left[\rho\left(v_r\frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) - (\Gamma_3 - 1)T\left(v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right] = q^+ - q^- \tag{3.133}$$

mit dem Heizungsterm

$$
\begin{aligned}
q_\xi^+ &= \xi\left(\frac{\partial_r(rv_r)}{r}+\partial_z v_z\right)^2 && (3.134)\\
q_{\eta 1}^+ &= \eta\, r^2\left[(\partial_r\Omega)^2+(\partial_z\Omega)^2\right] && (3.135)\\
q_{\eta 2}^+ &= \eta\,(\partial_z v_r+\partial_r v_z)^2 && (3.136)\\
q_{\eta 3}^+ &= \frac{4}{3}\eta\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2-v_r\frac{\partial\left(\frac{v_r}{r}\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \quad . && (3.137)
\end{aligned}
$$

3.9.3 Vertikal integrierte Gleichungen

Von den Impulsgleichungen ist zu erwarten, daß sie an jedem Punkt der Strömung erfüllt sind. Allerdings wird eine simultane Lösung der gekoppelten partiellen Differentialgleichungen nicht unser Ziel sein, sondern wir wollen auf einem iterativen Weg das Geschwindigkeitsfeld vorgeben und eine vertikale Scheibenstruktur bestimmen und so eine vertikale Mittelung der Variablen explizit ermöglichen und in den radialen Gleichungen verwenden. Die radiale Impulsgleichung, die Drehimpulsgleichung sowie die Bilanzgleichung der Entropie wird so keine $z-$Abhängigkeiten mehr aufweisen und nur in einem globalen, d.h. integrierten Sinn erfüllt sein. Nach Ausführung dieser Mittelungen entsteht die globale radiale Impulsgleichung

$$
\left\langle v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right\rangle+\left\langle v_z\frac{v_r}{\partial z}\right\rangle-r\left\langle\Omega^2\right\rangle=-\frac{1}{\Sigma}\left\langle\frac{\partial p}{\partial r}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\rangle+F_\xi+F_\eta \quad . \tag{3.138}
$$

Um die Stabilität der selbstähnlichen Lösung zu untersuchen, zerlegen wir die Scheiben-Variablen Σ, v_r, Ω, c_s in ihren selbstähnlichen Anteil und eine kleine Störung der Wellenzahl k und Frequenz ω, deren Amplitude auch komplex sein kann, um mögliche Phasenverschiebungen zu berücksichtigen. Die Zerlegung der tatsächlichen Flächendichte $\tilde\Sigma$ in den selbstähnlichen Anteil Σ und die Störung ist dann

$$
\tilde\Sigma=\Sigma+\hat\Sigma e^{i(\omega t-kr)} \quad .
$$

Eine Aufspaltung in gleicher Weise nehmen wir auch für die anderen Variablen an. Behalten wir nur die linearen Terme in den Erhaltungsgleichungen, so bekommen wir für die Störung aus der Kontinuitätsgleichung

$$
i\omega\hat\Sigma-ik\left(v_r\hat\Sigma+\Sigma\hat v_r\right)+\frac{1}{2r}\left(\Sigma\hat v_r+3v_r\hat\Sigma\right)=0 \quad .
$$

Um den Druckgradienten in der Impulsgleichung aufzulösen, nehmen wir wieder eine Zustandsgleichung der Form $\tilde P=\tilde\Sigma\tilde c_s^2$ an und zerlegen die Schallgeschwindigkeit formal nach

$$
\tilde c_s^2=c_s^2+\hat c_s^2 e^{i(\omega t-kr)} \quad .
$$

Die azimutale Winkelgeschwindigkeit soll ebenfalls gestört sein können mit

$$
\tilde\Omega=\Omega+\hat\Omega\exp[i(\omega t-kr)] \quad ,
$$

so daß wir aus der linearisierten Impulsgleichung

$$
i\omega\hat v_r-\frac{\beta v_K}{r}\left(\frac{1}{2}-ikr\right)\hat v_r=2g\Omega_K\hat\Omega r+\frac{\hat c_s}{r}\left(\frac{1}{2}+ikr\right)-\frac{c_s^2}{\Sigma r}\left(\frac{1}{2}-ikr\right)\hat\Sigma
$$

erhalten. Die Drehimpulsgleichung liefert :

$$\begin{aligned} &(i\omega r\Sigma + v_r\Sigma\,(2-ikr))\,\hat{\Omega} + \tfrac{g}{2}\Omega_K\left(\Sigma\hat{v}_r + v_r\hat{\Sigma}\right) = \\ -\tfrac{3\alpha g}{2r}&\left[(2-ikr)\left(\Sigma\hat{c}_s^2 + c_s^2\hat{\Sigma}\right) - \tfrac{1}{2}\Sigma\hat{c}_s^2 - c_s^2\hat{\Sigma}\right] - \alpha\tfrac{c_s^2}{v_K}\Sigma\hat{\Omega}\left(ikr + k^2r^2\right) \qquad . \end{aligned}$$

Die Entropie-Gleichung hat folgende linearisierte Gestalt

$$\begin{aligned} &(\Gamma-1)i\omega\hat{c}_s^2 - \frac{c_s^2}{r}\left((\Gamma-2)+ikr\right)\hat{v}_r + \frac{\beta v_K}{r}\left(ikr - \frac{1}{2}\right)\hat{c}_s^2 \\ =\ &\frac{3}{2}\alpha(1-f)g\left(\frac{3}{2}g\Omega_K\hat{c}_s^2 + 2c_s^2\hat{\Omega}ikr\right) \qquad . \end{aligned} \tag{3.139}$$

3.10 Annäherung an die Relativistische Akkretion

Neben den selbstähnlichen Lösungen für nichtrelativistische Akkretion mit Newtonschem Potential existieren keine analytischen Lösungen im relativischen Fall. Gammie & Popham (1998) haben die Differentialgleichungen für Akkretion in der Kerr-Metrik aufgestellt und stationäre, globale Lösungen transsonischer Akkretion für poloidal integrierte Strömungen in nicht rotierende Schwarze Löcher vorgestellt. Igumenschev et al. (1997) haben die 2-D (radial-vertikalen) Gleichungen mit vereinfachter Thermodynamik gelöst, ohne daraus Aussagen über beobachtbare Effekte auf das Emissionsspektrum ableiten zu können. Ebenso haben Peitz & Appel (1997) die r-ϕ Komponente des relativistischen Spannungstensors untersucht und in der Kerr-Metrik Lösungen polytroper transsonischer Akkretionsströmungen angeben können, die weiteren Komponenten des Spannungstensors, wie im Fall dünner Scheiben, aber vernachlässigt und keine Folgerungen für die Beobachtung gezogen.

Unsere Vorgehensweise soll hier eine andere sein, in dem Sinn, daß wir die Differentialgleichungen für relativistische Akkretion, wie wir sie im Kapitel 3.3 aufgestellt haben, nur sehr näherungweise lösen, indem wir die radialen Gradienten, z.B.

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln r}\frac{\rho}{r}$$

in logarithmische Grandienten umschreiben und diese durch die Werte der selbstähnlichen Lösung des nichtrelativistischen Falls ersetzen. Gleichzeitig vernachlässigen wir poloidale Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes und verwenden poloidal integrierte Gleichungen. Weiterhin erlauben wir die Entstehung eines Zwei-Temperatur-Plasmas aus heißen Ionen und kühleren Elektronen und eine magnetische Komponente im Gesamtdruck der Strömung, deren Entwicklung und großräumige Struktur wir nicht betrachten wollen, sondern nur durch einen vorgegeben Plasma-β-Parameter $\beta = P_{\rm mag}/P_{\rm ges}$ berücksichtigen und daraus auch die magnetische Induktion erhalten, die für die Synchrotronkühlung und die Limitierung der Wärmeleitung wichtig ist.

Das Hauptproblem bleibt die Beschreibung der dynamischen Viskosität ν, die wir zum einen nach Shakura & Sunyaev (1973) als $\nu = \alpha c_s^2\Omega_K^{-1}$ für vertikal gemittelte Scheiben durch den Druck in der Zentralebene ausdrücken können, zum anderen verwenden wir die β-Parametrisierung von Duschl, Strittmatter & Biermann (bei ApJ eingereicht) in der Form $\nu = \beta v_\phi r$. β ist hier die inverse kritische Reynoldszahl $\beta = \mathcal{R}_{\rm crit}^{-1}$ der Strömung. Beide Beschreibungen gehen von einer Darstellung als Produkt aus charakteristischer Geschwindigkeit und einer freien Weglänge aus. In der Nähe des Horizonts kann in beiden Formen die angenommene freie Weglänge größer als der Abstand zum Horizont werden, so daß gerade der Impulsaustausch in radialer Richtung, der für den Drehimpulstransport sorgt, überschätzt wird. Wir nehmen daher die Viskosität als beschränkt durch den Abstand zu Horizont an und bekommen :

$$\nu = \begin{cases} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \alpha c_s^2 \Omega_K^{-1} \\ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \beta v_\phi r \end{cases} \quad . \tag{3.140}$$

Da wir nur stationäre Strömungen betrachten werden, ist eine weitere kausale Behandlung der thermodynamischen Ströme, wie sie Peitz & Appel (1997) vorgeschlagen haben, und zu denen auch die viskose Spannung $\tau_{r\phi} = \nu\rho D_{r\phi}$ zählt, hier nicht notwendig. Sie wäre bei einer genauen Kenntnis der dynamischen Viskosität angezeigt. Aus demselben Grund werden wir nicht die vollständige Beschreibung des Spannungstensors zugrunde legen, sondern uns auf die, in nichtrelativistischer Beschreibung auftretenden Terme beschränken.

3.10.1 Die Scheibengleichungen

Die Dynamik der viskosen Akkretion in Schwarze Löcher wird durch eine axialsymmetrische Strömung gut angenähert. Wir wollen auch die poloidale Komponente der Geschwindigkeit vernachlässigen und annehmen, daß die Radialgeschwindigkeit v_r nicht vom Polarwinkel abhängt. Unter Beschränkung auf stationäre Akkretion erhalten wir für die Kontinuitätsgleichung die klassische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r) = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = -2\pi r v_r \Sigma \quad , \tag{3.141}$$

die den konstanten Massenfluß mit Radialgeschwindigkeit (Komponente der 4-er Geschwindigkeit) und Flächendichte verbindet. Für den Drehimpulstransport verwenden wir die nichtrelativistische Formulierung des r-ϕ-Anteils im Spannungstensor, weil uns die vollständige Formulierung wie in Abschnitt 3.5 zu kompliziert in der Handhabung ist und bei der Unsicherheit in der Darstellung der Viskosität den Aufwand nicht lohnt. Allerdings ersetzen wir die meßbare Winkelgeschwindigkeit durch die entsprechende ϕ-Komponente der 4er- Geschwindigkeit und erhalten

$$-\frac{\dot{M}}{2\pi}\left(\left(1 + \frac{h}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega) + \frac{r^2\Omega}{\Sigma c^2}\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma r^3 \frac{\partial}{\partial r}\Omega\right) \tag{3.142}$$

mit dem poloidal integrierten Druck P. Als dritte dynamische Gleichung bleibt die radiale Impulsbalance mit der r-r-Komponente der Scherviskosität nach (3.85) :

$$\left(\frac{Mc^2}{r^2} - \left(1 - \frac{3M}{r}\right) r\Omega^2 + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\left(1 + \frac{h}{c^2}\right) + \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{v_r^2}{c^2}}{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial r}$$
$$= \frac{4}{3\Sigma}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\nu\Sigma}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r v_r\right)\right) - \frac{2v_r}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\nu\Sigma\right)\right] \quad . \tag{3.143}$$

Da wir advektionsdominierte Akkretion betrachten wollen, ist das thermische Gleichgewicht von entscheidender Bedeutung. Es soll dies für Ionen und Elektronen getrennt analysiert werden. Dabei verstehen wir unter thermischem Gleichgewicht, daß sich Heiz- und Kühlprozesse für Ionen und Elektronen getrennt aufheben. Es findet also keine Aufheizung oder Abkühlung der Strömung an einem Punkt (r, θ, ϕ) statt. Mitbewegte Beobachter, die akkretiert werden, stellen aber sehr wohl eine Aufheizung oder Abkühlung einzelner Spezies während der Annäherung an das Schwarze Loch fest.

Die Heizung soll nur durch viskose Reibung erfolgen, die konsistent mit dem viskosen Impulstransport sein muß und demnach durch

$$Q^+_{\text{vis}} = \nu\Sigma r^2 \left[\frac{4}{3}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r}\right)\right)^2 + (\partial_r\Omega)^2\right] \tag{3.144}$$

in poloidal integrierter Form vorliegt. Wir nehmen an, daß nur ein Bruchteil $\delta = m_e/(m_e+m_i)$ der Heizrate auf die Elektronen entfällt, während vorwiegend die Ionen mit $(1-\delta)Q^+_{\text{vis}}$ geheizt werden. Die Strahlungskühlung der Ionen können wir vernachlässigen und nur den Energieübertrag auf die Elektronen durch Coulomb-Stöße betrachten. Die entsprechende Kühlrate ist nach Stepney & Guilbert (1983) durch

$$Q^-_{ie} = \frac{3\zeta m_e}{2m_i^3}\frac{\Sigma^2}{2H}\sigma_T c k_B (T_i - T_e) f(\theta_e, \theta_i) \ln\Lambda \tag{3.145}$$

mit der durch relativistische Effekte bestimmten Funktion $f(\theta_e, \theta_i)$

$$f(\theta_e, \theta_i) = \frac{\frac{2(\theta_e+\theta_i)^2+1}{\theta_e+\theta_i}K_1(x) + 2K_0(x)}{K_2(\theta_e^{-1})K_2(\theta_i^{-1})}$$

$$x = \frac{\theta_e+\theta_i}{\theta_e\theta_i} \qquad \theta_e = \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \quad \theta_i = \frac{k_B T_i}{m_i c^2}$$

gegeben. Die Kühlung der Ionen ist ein weiterer Heizprozeß der Elektronen $Q^+_{ei} = Q^-_{ie}$. In Standardscheiben erfolgt die Kühlung der Elektronen durch thermische Strahlung $Q^- = \sigma T^4_{\text{eff}}$, kann aber im optisch dünnen Fall sehr viel kleiner sein. Als detaillierte Strahlungsprozesse beziehen wir Elektron-Ion-Bremsstrahlung, sowie Elektron-Elektron-Bremsstrahlung, Synchrotron- und Invers-Compton-Strahlung mit ein. Die Strahlungsarten sind im Kapitel 2.2.1 und in Beckert & Duschl (1997) mit Näherungen für die Synchrotronstrahlung beschrieben. Die Synchrotronstrahlung ist in den meisten ADAF-Fällen optisch dick und wird in diesen Fällen auch getrennt als solche behandelt. Ansonsten ergibt sich die optisch dünne Kühlung aus $Q^-_e = Q_{\text{Sync}} + Q_{\text{Brems}} + Q_{\text{Comp}}$ und der Übergang zum optisch dicken Fall wird durch

$$Q^- = \frac{\sigma T^4_{\text{eff}}}{1 - \frac{\sigma T_e^4}{Q^-}} \tag{3.146}$$

beschrieben, wobei die Effektivtemperatur mit der Elektronentemperatur in der Zentralebene aus der Ein-Zonen-Diffusionsnäherung durch

$$\frac{4}{3}\left(T_e^4 - T^4_{\text{eff}}\right) = \tau T^4_{\text{eff}} \tag{3.147}$$

verbunden ist. Für optische dünne Akkretionsströmungen $\tau = \alpha H$ sind effektive und elektronische Temperatur gleich und die Kühlung ist gerade $Q^- = Q^-_e$ durch die Emissivität der einzelnen Strahlungsprozesse integriert über die poloidale Dichte der Strömung $Q = 4\pi j H$ mit $H = \Sigma/(2\rho)$ gegeben. Die Dicke der Strömung H bestimmt sich aus dem hydrostatischen Gleichgewicht in poloidaler Richtung. Für optisch dünne, poloidal isotherme Scheiben bestimmen wir die Höhe aus

$$H = r\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \exp\left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\left(\frac{r\Omega}{c_s}\right)^2\left(1+\frac{h}{c^2}\right)\right] \quad , \tag{3.148}$$

wobei die Schallgeschwindigkeit proportional zur Temperatur und somit konstant ist und als Näherung für $p/\rho = c_s^2$ steht. Im Fall dünner Scheiben, die optisch dick und nicht isotherm sind, ist die azimutale Geschwindigkeit gerade die Keplersche Kreisbahn-Geschwindigkeit $r\Omega = r\Omega_K = \sqrt{GM/r}$ und die Dicke der Scheibe ist wieder in einer Ein-Zonen-Näherung durch $H = c_s\Omega_K^{-1}$ bestimmt. Die Enthalpie $h = \epsilon + p/\rho$ als Summe aus spezifischer innerer Energie und Schallgeschwindigkeit sowie der Druck werden durch die Zustandsgleichung miteinander verbunden

$$p_{\text{Ges}} = p_i + p_e + p_{\text{Rad}} + p_{\text{Mag}} \quad ,$$

in der wir den magnetischen Anteil durch konstantes Plasma-β skalieren und den Strahlungsdruck durch

$$p_{\mathrm{Rad}} = \frac{aT_e^4}{3\left(1 - \frac{aT_e^4}{\tau Q^-/c}\right)} \tag{3.149}$$

ausdrücken. Für Elektronen und Ionen verwenden wir die ideale Gasgleichung und benutzen die spezifische innere Energie in einer Darstellung von Chandrasekhar (1939)

$$\epsilon_e = c^2 \left(\frac{3K_2(\theta_e^{-1}) + K_1(\theta_e^{-1})}{4K_2(\theta_e^{-1})} - 1 \right) \tag{3.150}$$

für Ionen und wie hier angegeben für Elektronen. Allerdings werden Ionen in ADAF's nicht wirklich relativistisch ($\theta_i < 1$).

Als weiteren Beitrag in der Energiebilanz nehmen wir die Divergenz des Wärmestroms aus Abschnitt 3.7 hinzu. Wir haben dort die Wärmeleitfähigkeit der Elektronen diskutiert. In einem Zwei-Temperatur-Plasma kann der Temperaturgradient der Elektronen von dem der Ionen sehr verschieden sein und wir betrachten die ionische Wärmeleitung getrennt mit einem um einen Faktor $\sqrt{m_e/m_i}$ kleineren Leitfähigkeitskoeffizienten

$$Q_{\mathrm{heat},i} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{m_e}{m_i}\kappa\frac{\partial T_i}{\partial r}\right) \quad .$$

Als eigentlich wichtiger Effekt in advektionsdominierten Akkretionsströmungen tritt die Advektion der inneren Energie auf, wie wir sie in (3.39) aufgestellt haben. Die advektive Kühlung oder Heizung ist für Ionen und Elektronen jeweils getrennt zu betrachten

$$Q_{\mathrm{adv}} = \Sigma v_r c_V \left[\frac{\partial T}{\partial r} - (\Gamma_3 - 1)\frac{T}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right] \quad , \tag{3.151}$$

wobei die Gewichtung der Spezies in der spezifischen Wärme versteckt ist durch

$$c_{V,e} = \zeta m_e/(\zeta m_e + m_i)c_V \qquad \text{und} \qquad c_{V,i} = m_i/(\zeta m_e + m_i)c_V \quad .$$

Die Überhäufigkeit der Elektronen ist durch ζ parametrisiert und größer 1, wenn Ionen mehrfach ionisiert sind und nach der Anzahl mehr Elektronen als Ionen vorhanden sind. Wir haben diesen Parameter schon öfter verwendet. Wir erhalten damit zwei Energiegleichungen, die durch Coulomb-Stöße gekoppelt sind :

$$Q_{\mathrm{adv},i} = (1-\delta)Q_{\mathrm{vis}}^+ - Q_{ie}^- - Q_{\mathrm{heat},i} \tag{3.152}$$

$$Q_{\mathrm{adv},e} = \delta Q_{\mathrm{vis}}^+ + Q_{ie}^- - Q_{\mathrm{heat},e} - Q^- \quad . \tag{3.153}$$

In der Gesamtbilanz fällt die Kopplung durch Stöße weg und sie lautet

$$Q_{\mathrm{adv}} = Q_{\mathrm{vis}}^+ - Q_{\mathrm{heat}} - Q^- \quad , \tag{3.154}$$

wie man sie für ein Ein-Temperatur-Plasma benutzen kann, wenn nicht nach elektronischer und ionischer Komponente unterschieden werden muß.

3.10.2 Numerisches Vorgehen

Die im vorangegangenen Abschnitt aufgestellten Gleichungen sind für zeitunabhängige Akkretionsströmungen gewöhnliche Differentialgleichungen. Allerdings sind die Quellterme (die Kühlung) aufwendig zu berechnen und erschweren die Integration der Differntialgleichungen.

Stattdessen gehen wir von den selbstähnlichen Lösungen im Newtonschen Fall ohne spezifizierte Kühlung aus und ersetzen die auftretenden Differentiale durch die logarithmischen Ableitungen, wie am Anfang von 3.10 beschrieben. Die verwendeten Näherungen sind :

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = -\frac{3}{2}\frac{\rho}{r} \tag{3.155}$$

$$\frac{\partial P}{\Sigma\partial r} = -\frac{5}{2}\frac{c_s^2}{r} \tag{3.156}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\frac{3}{2}\frac{\Omega}{r} \tag{3.157}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma r^3\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = -\frac{3}{4}\nu\Sigma r\Omega \tag{3.158}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{v_r}{r} \tag{3.159}$$

$$\frac{\partial\nu\Sigma}{\partial r} = 0 \tag{3.160}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} = -1\frac{T_i}{r} \tag{3.161}$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{T_e}{r} \quad . \tag{3.162}$$

Die Näherung für den Gradienten der Elektronentemperatur T_e ist nicht durch die selbstähnliche Lösung, sondern durch die gefundenen Lösungen selbst inspiriert, da die Ausbildung des Zwei-Temperatur-Plasmas gerade darauf beruht, daß die Elektronen kälter als die Ionen sind und der Temperaturgradient nicht so steil sein kann. Diese schlechte Näherung ist nicht sehr problematisch, da die Energie-Advektion der Elektronen durch ihre kleinere Masse und ihre erwarteten geringeren Temperaturen entsprechend unbedeutend ist und die Wärmeleitung sich als sekundärer Effekt im Prozentbereich der Gesamtadvektion erweist.

Dieses Vorgehen macht aus den Gleichungen des vorigen Abschnitts rein algebraische Gleichungen, die durch ein Newton-Raphson-Verfahren gelöst werden können. Es werden im allgemeinen drei Lösungen gefunden, die der optisch dicken Standardscheibe, den optisch dünnen Scheiben nach Shapiro, Lightman & Eardley (1976) ohne nennenswerte Advektion und den advektionsdominierten Strömungen (ADAF) entsprechen.

Die so gefundenen thermischen Gleichgewichte aus Heiz- und Kühlprozessen für eine vorgegebene radiale Struktur, wie sie durch die logarithmischen Ableitungen vorgegeben ist, wird nun als Ausgangspunkt für einen Iterationsprozeß gewählt, in dem die radialen Gradienten aus den gefundenen Lösungen und den Vorgaben für einen festen Radius r_j berechnet werden durch

$$\left(\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln r}\right)_i\Bigg|_{r_j} = \frac{1}{1+K}\left(\left(\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln r}\right)_{i-1}\Bigg|_{r_j} + K\left(\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln r}\right)_{th}\Bigg|_{r_j}\right) \tag{3.163}$$

mit dem Iterationsparameter K, den wir aus Stabilitätsgründen klein wählen müssen. $K = 0.05$ hat sich dabei als praktikabel erwiesen. Da wir Gradienten aus den durch den Index th gekennzeichneten Lösungen nur als *up-stream*-Gradienten ermitteln, koppeln wir die so gefundenen Gradienten für den nächsten Iterationsschritt mit radial benachbarten Gradienten durch

$$\left(\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln r}\right)_i\Bigg|_{r_j} = \frac{1}{2+\kappa}\left(\left(\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln r}\right)_i\Bigg|_{r_{j-1}} + \kappa\left(\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln r}\right)_i\Bigg|_{r_j} + \left(\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln r}\right)_i\Bigg|_{r_{j+1}}\right) \quad , \tag{3.164}$$

wobei wir die Bedeutung der lokalen Lösung durch $\kappa = 3$ hervorheben. Diese Iteration führen wir nicht nur für die Elektronentemperatur durch, sondern auch für alle anderen auftretenden Gradienten. Es zeigt sich, daß außerhalb des radialen Schallpunkt die Iteration zu vernünftigen

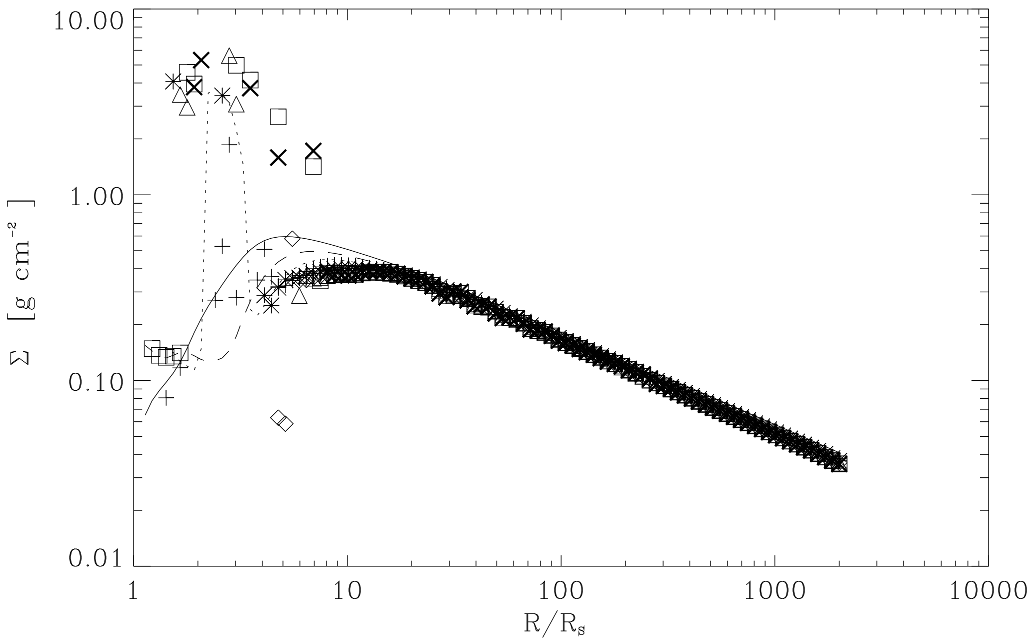

Abbildung 3.6: Iterationsversuch der radialen Struktur für Akkretion auf ein $M = 10^9 M_\odot$ Schwarzes Loch mit $1M_\odot$ pro Jahr. Gewählt wurden ein Viskostätsparameter $\beta = 0.1$ und Plasma-$\beta = 0.1$. Durchgezogen ist das thermische Gleichgewicht für eine selbstähnliche Struktur. Es folgen die nächsten Iterationen als gestrichene und punktierte Linien und dann die einzelnen ermittelten thermischen Gleichgewichte als Quadrate, Kreuze, Sterne, Dreiecke, gekippte Kreuze und Rauten.

Ergenissen führt, während innerhalb die Iteration mit $K = 0.3$ unwahrscheinliche Sprünge in den lokalen thermischen Gleichgewichten produziert. Für eine Zentralmasse $M = 10^9 M_\odot$ und eine Akkretionsrate von $\dot{M} = 1M_\odot$ pro Jahr ist in Abb. 3.6 ein Beispiel gezeigt. Aufgetragen ist die Flächendichte für verschiedene Iterationsschritte. Bis in die Nähe des Schallpunktes bei $4R_S$ konvergiert die Lösung mit leichten Wellen bei $30R_S$. Der supersonische Teil kann dagegen nicht überzeugen.

3.10.3 Resultate

Lokale Lösungen für die Newtonsche Näherung

In einem ersten Schritt haben wir für eine selbstähnliche radiale Dynamik das lokale thermische Gleichgewicht ermittelt. Dabei wurde die Wärmeleitung vernachlässigt und entsprechend der nicht-relativistischen Formulierung der Druckgradient in der Drehimpulsgleichung weggelassen, wodurch die Gl. (3.142) integrieren werden kann, die eine Randbedingung einführt, welche wir durch $\frac{\partial\Omega}{\partial r} = 0$ am Horizont realisieren. Damit erhalten wir

$$\frac{\dot{M}}{3\pi}\mathcal{F} = \nu\Sigma \qquad \mathcal{F} = 1 - \sqrt{\frac{R_S}{R}} \qquad .$$

In der radialen Gleichung verschwindet weiterhin die Umkehr der Drehimpulsunterstützung $(1 - 3M/r)r\Omega^2 \to r\Omega^2$ die Akkretion auf schwarze Löcher auszeichnet. Die Enthalpie kann in den dynamischen Gleichungen vernachlässigt werden.

Wir finden drei bekannte Lösungsklassen, die sich in einem $\dot{M}$-Σ Diagramm (Abb. 3.7) diskutieren lassen. Wir betrachten dazu die möglichen Lösungen bei einem festen Radius $R =$

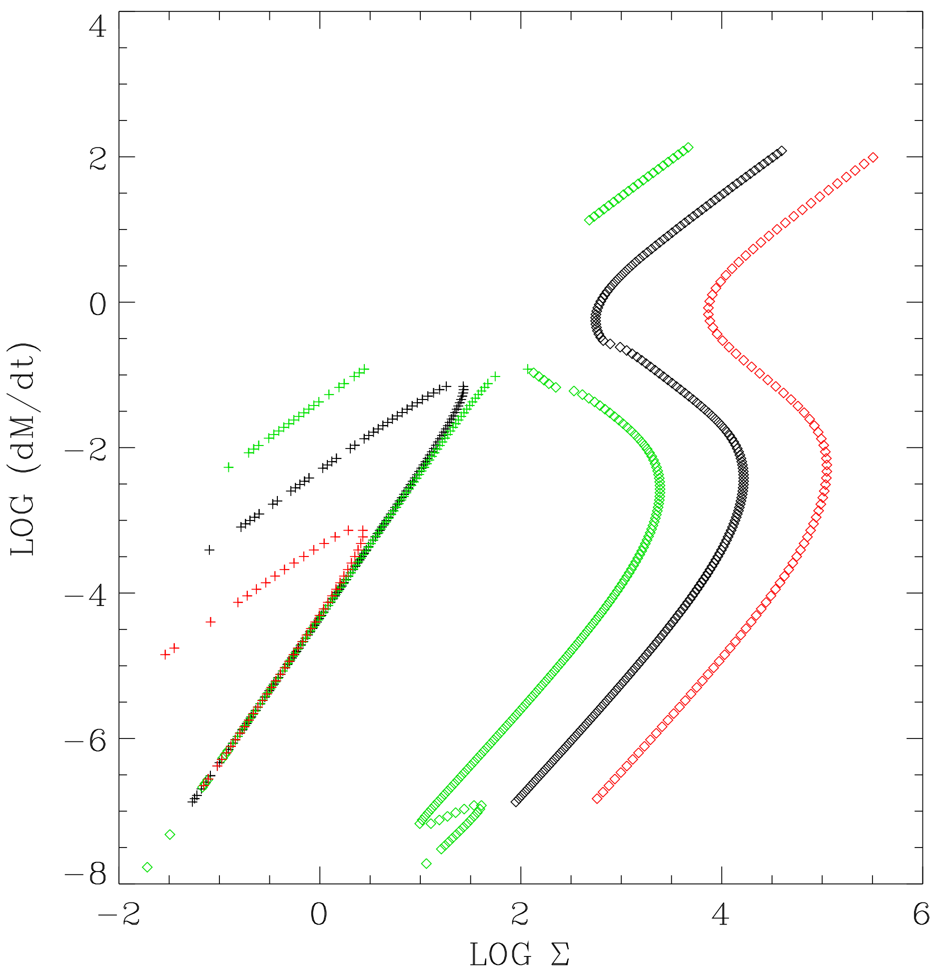

Abbildung 3.7: $\dot{M}$-Σ-Relation für Standard-Scheiben und *slim disks* sowie instabilen, optisch dünnen Scheiben und ADAF's bei einem festen Radius $R = 20M$. Die Viskosität wird von $\alpha = 0.01$(rot) über $\alpha = 0.1$(schwarz) bis $\alpha = 1$(grün) variiert, wobei die Flächendichte für optisch dicke Lösungen abnimmt und die maximale Akkretionsrate für ADAF's zunimmt.

$20M = 10R_S$ für verschiedene lokale Akkretionsraten. Bei hohen Flächendichten finden wir optisch dicke $\tau > 1$ geometrisch dünne Standard-Akkretionsscheiben. Für $\alpha = 1$ bemerken wir bei einer Massenakkretionrate von 10^{-7} ein scharfes S im $\dot{m}$-Σ-Verlauf, das mit der Dissoziation des Wasserstoff $H_2 \to 2H$ zusammenhängt und zu einer bekannten Instabilität führt, die für Zwerg-Nova-Ausbrüche verantwortlich gemacht wird. Die beiden anderen, optisch dicken Scheiben entsprechen Viskositätsparametern von $\alpha = 0.1$ und $\alpha = 0.01$, die beide eine durchgehende, große S-Kurve zwischen $\dot{m} = 10^{-4}$ bis 10^{-1} zeigen. Der untere Abschnitt ist dabei durch den Gasdruck dominiert $p = p_{\rm Gas}$ und die optische Tiefe wird durch Elektronenstreuung und Frei-Frei-Absorption verursacht. Dieser Teil ist dynamisch stabil, wohingegen der sich anschließende, durch Strahlungsdruck dominierte Abschnitt $p = p_R = \frac{a}{3c}T^4$ bei Akkretionsraten $\dot{m} > 10^{-3}$ einen negativen Gradienten

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Sigma} < 0$$

aufweist und sekular instabil ist. Ob diese Instabilität der Ursprung advektionsdominierter Strömungen in diesem inneren Bereich der Akkretion ist, kann hier nicht untersucht werden. An den instabilen Teil schließt sich ein sekular stabiler Abschnitt $\dot{m} > 1$ an, der zwar ebenfalls durch den Strahlungsdruck dominiert ist, aber lokal durch Advektion gekühlt wird. Dies stabilisiert die Akkretionsscheibe, macht sie geometrisch dicker, erhöht aber die Temperatur nur unwesentlich, da die viskose Heizungleistung nicht durch Abstrahlung augeglichen wird, sondern in Photonen und Gas in der radialen Bewegung gefangen bleibt und bis auf das Zentralobjekt akkretiert wird. Diese *slim disks* wurden von Abramowicz et al. (1988) erstmals untersucht. Die Ursache der Advektion unterscheidet sich in diesen Scheiben von —den noch zu besprechenden— advektionsdominierten Scheiben (ADAF's), dadurch, daß die erzeugte Wärme nicht abgestrahlt werden kann, weil die Energie nicht innerhalb der Akkretionszeit

$$t_{\rm Akk} = \frac{2\pi r^2 \Sigma}{\dot{M}}$$

durch die optisch dicke Scheibe diffundieren und von der Oberfläche bei $\tau = 2/3$ abgestrahlt werden kann. *Slim disks* treten bei Akkretionsraten jenseits der Eddington-Rate

$$\dot{M}_{\rm Edd} \approx \frac{L_{\rm Edd} 3R_S}{2\eta GM} \qquad L_{\rm Edd} = \frac{4\pi GM m_p c}{\sigma_T}$$

auf, die davon ausgeht, daß ein Teil η der gesamten Energie bis zu einem inneren Radius (hier $3R_S$) abgestrahlt werden muß und der Strahlungsdruck dieser Leuchtkraft die Akkretion in radialer Richtung nicht aufhalten darf. Wir werden des öfteren die Massenakkretionsrate in Einheiten dieser Eddington-Rate angeben und sie mit $\dot{m}$ bezeichnen. Die wesentliche Annahme ist hier, daß dieser Bruchteil η nicht von der Akkretionsrate selbst abhängen soll. Gerade dies ist bei Scheiben mit Advektion nicht der Fall. Vielmehr reduziert die Advektion die Effizienz η bevor die Eddington-Leuchtkraft $L_{\rm Edd}$ erreicht wird.

Optisch dünnen Gleichgewichtskonfigurationen bei gleicher Massenakkretionsrate unterscheiden sich deutlich von optisch dicken Scheiben durch viel kleineren Flächendichten. Wir finden die Lösungen von Shapiro, Lightman & Eardley (1976) [(SLE)] die keine Advektion zeigen und auch nicht von der Viskosität abhängen. Sie sind thermisch instabil, in dem Sinn, daß eine Störung in der Temperatur der Elektronen zu einer Erhöhung (oder Erniedrigung) des Drucks und so über das hydrostatische Gleichgewicht zu einer geringeren (höheren) Dichte und über die dominierende Bremsstrahlungskühlung zu einer geringern (größeren) Kühlrate und damit zu einer positiven Rückkopplung auf die Elektronentemperatur führt. Die Störung wird so verstärkt und das thermische Gleichgewicht ist instabil.

Während diese instabilen Lösungen eine quadratische Abhängigkeit der Akkretionsrate von der Flächendichte aufweisen, zeigen advektionsdominierte Lösungen (ADAF's) einen linearen Zusammenhang $\Sigma \sim \dot{M}$. Diese existieren bei noch kleineren Flächendichten und stoßen bei einem $\dot{M}_c$ auf die instabile Scheibenlösung. Ursache der Advektion ist wieder die Ineffizienz der Kühlung, aber jetzt aufgrund der geringen Dichte und der daher geringen Photonendichte, die entweichen und kühlen könnte.

Advektionsdominierte Strömungen können solange auftreten, wie die Strahlungskühlung geringer als die viskose Heizung ist. Da die Heizung für ADAF's wie r^{-3} nach außen hin abfällt und bei großen Radien die Bremsstrahlung über Synchrotron- und Compton-Kühlung gewinnt, ergibt sich ein maximaler Radius für ADAF's Lösungen, da die Kühlrate nur wie $r^{-2.5}$ nach außen kleiner wird :

$$r_{\max} = 1.3 \cdot 10^6 \alpha^4 \dot{m}^{-2} r_S \qquad . \tag{3.165}$$

Damit läßt sich auch eine maximale Akkretionsrate angeben

$$\dot{m} = 6.5 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\alpha}{10^{-2}}\right]^2 \sqrt{3r_S/r_{\max}} \qquad ,$$

für die der maximale Radius mir dem Radius der marginal stabilen Kreisbahn übereinstimmt. Zu beachten ist, daß bei hohen Temperaturen im inneren Bereich mit wachsender Akkretionsrate die Synchrotronleuchtkraft überproportional ansteigt und damit auch innen die Bedingung für ADAF's nicht mehr erfüllt sein kann, nach der die Kühlung schwächer als die Heizung sein muß. Weiterhin finden wir in Abbildung 3.7, daß bei $\alpha = 1$ die Flächendichte der optisch dünnen wie der optisch dicken Akkretionsmoden bei $\dot{m} \approx 10^{-1}$ vergleichbar wird und wir keine thermischen Gleichgewichte ermitteln konnten. Erst bei sehr hohen Massenakkretionsraten zeigen sich wieder optisch dicke *slim disks*, die dort ihre Verwandschaft mit ADAF's demonstrieren, da sie als Fortsetzung der entspechenden ADAF's bei $\dot{m} = 10^{-2}, \Sigma = 1$ g cm^{-2} zu hohen Raten und Dichten hin anzusehen sind. Der Übergang zwischen optisch dünnen und optisch dicken Modellen mit Advektion wird nicht gelingen, da die Kühlung gerade bei diesem Übergang effektiv sein muß. Wir können daher die Darstellung von Chen et al. (1995) nicht nachvollziehen, die einen kontinuierlichen Übergang zwischen ADAF's und *slim disks* zeigt.

Sowohl die instabilen als auch die ADAF- Lösungen bilden ein Zwei-Temperatur-Plasma, bei dem die Elektronentemperatur kleiner als die Ionentemperatur ist. Die Temperaturdifferenz ist bei ADAF's aufgrund der geringeren Dichte größer und auch die Ionentemperatur ist absolut größer als im instabilen Fall, da die Energie, die nicht abgestrahlt wird, vornehmlich in den Ionen gespeichert bleibt und ihre Temperatur nahezu die Virialtemperatur erreicht. In Analogie zu Abb. 3.7 ist in 3.8 die Abhängigkeit der Ionen- wie der Elektronen-Temperatur mit der Akkretionsrate gezeigt. Die beiden höheren Temperaturen gehören zur ADAF-Lösung, die fast nicht unterscheidbaren Kurven zur Lösung von Shapiro, Lightman & Eardley (1976) . In Abbildung 3.9 haben wir noch die radiale Abhänigkeit des thermischen Gleichgewichts bei fester Massenakkretionsrate dargestellt. Innerhalb von 10 Schwarzschild-Radien wird das Gleichgewicht durch relativistische Effekte verändert werden.

Relativistische Gleichgewichte

Wir wollen nun die relativistische Akkretion numerisch in gleicher Weise behandeln und die Unterschiede zum nicht-relativistischen Fall diskutieren. Dazu wurde wieder das thermische Gleichgewicht untersucht, bei vorgegebener radialer Struktur durch die Annahme der selbstähnlichen logarithmischen Gradienten. Zusätzlich zu den rein relativistischen Termen haben wir eine Wärmeleitung, wie in Abschnitt 3.7 beschrieben, berücksichtigt. Der wichtige neue Beitrag wird allerdings durch den Druck in der Drehimpulsgleichung (3.142) verursacht. Er verhindert,

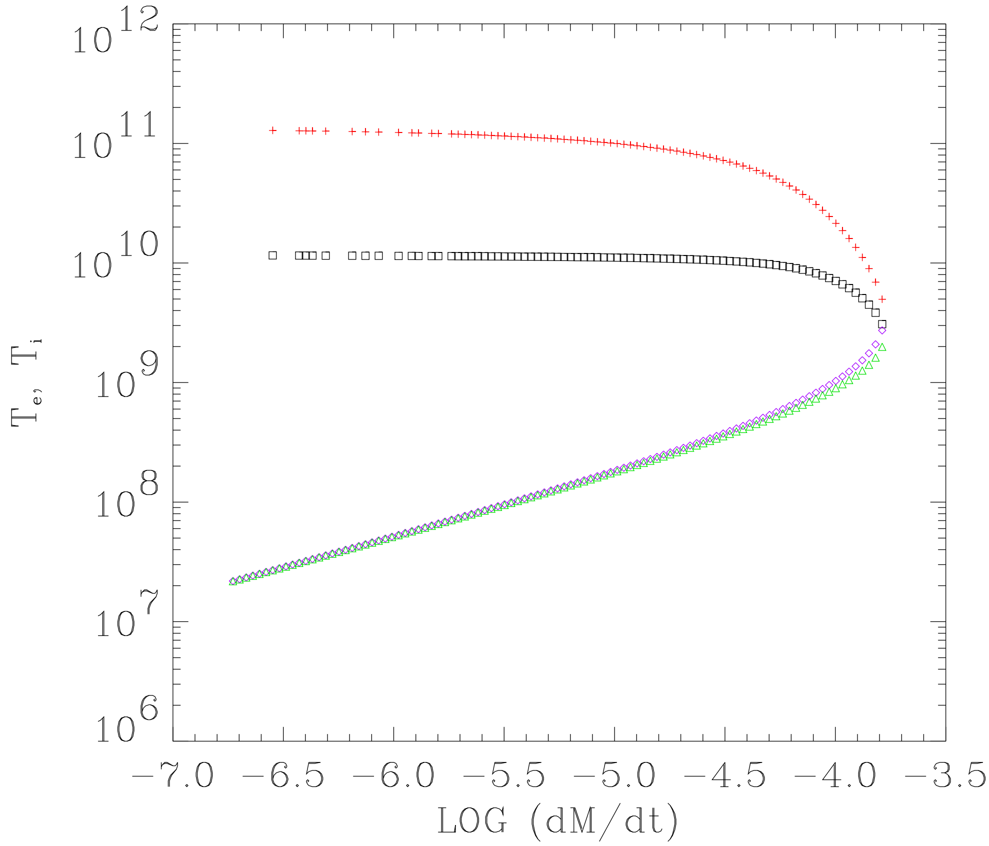

Abbildung 3.8: Elektronen- und Ionentemperaturen für ADAF's und SLE-Scheiben bei festem Radius $R = 20M$. ADAF-Temperaturen erreichen bei kleinen Akkretionsraten fast konstante Werte, während die Temperaturen in SLE-Scheiben mit abnehmender Massenflußrate ebenfalls abnehmen. Wenn der maximale ADAF-Radius aus Gl. 3.165 den Radius der Darstellung erreicht, fallen ADAF und SLE-Lösung zusammen.

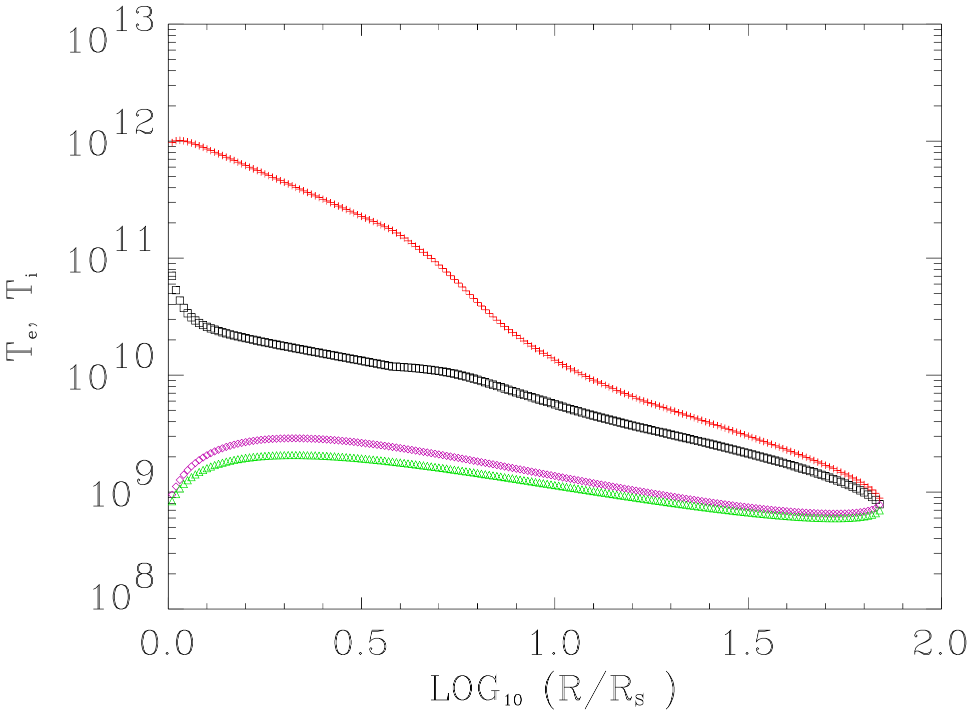

Abbildung 3.9: Temperaturverlauf thermischer Gleichgewichtskonfigurationen für ADAF's (Ionen[rot]- und Elektronentemperatur[schwarz] : oberen beiden Kurven) und instabile SLE-Scheiben (untere beiden Kurven: Ionen[rot], Elektronen [grün]) bei $7\,10^{-5}\,M_{\odot}$ pro Jahr auf ein $2.6\,10^{6}$ $M_{\odot}$ Objekt (Masse von Sgr A*) und $\alpha\ =\ 0.01$. Die Elektronentemperaturen sind jeweils kleiner als die Temperatur der Ionen.

daß diese Gleichung trivial integriert werden kann und erlöst uns von der Integrationskonstanten, die notwendigerweise über die Randbedingung am Horizont Auskunft gegeben hätte, die wir aber nicht setzen wollen, da eine Rückwirkung von Geschehnissen am Horizont die Akkretion nicht beeinflussen darf. Damit ist $\nu\Sigma$ und auch die radiale Beschleunigung nicht mehr durch die Drehimpulserhaltung festgelegt, wie wir es für die Akkretion innerhalb der marginal stabilen Kreisbahn bei $R = 6M$ erwarten. Dies erlaubt es zudem, das Verschwinden der Drehimpulsbarriere im effektiven Potential (3.24) auszugleichen und Akkretionslösungen zu finden, die über die Photonenkreisbahn bei $R = 3M$ hinaus bis zum Horizont bei $R = 2M$ reichen. In den Abbildungen 3.10 bis 3.12 sind wesentlichen Eigenschaften der relativistischen Lösungen veranschaulicht. Wir können sie so zusammenfassen: Die Ionentemperatur steigt kontinuierlich zu kleineren Radien hin an und erreicht ein schmales Plateau bei $4.5\,10^{11}$ Kelvin zwischen der marginal stabilen Bahn und dem Horizont für die untersuchten Massen der Schwarzen Löcher von 10^6 bis 10^9 Sonnenmassen. Diese Eigenschaft ist auch unabhängig von der Massenakkretionsrate. Die Elektronen erreichen Temperaturen bis $2\,10^{10}$ K im Radiusbereich zwischen 5 und 15 Schwarzschild-Radien. Höhere Werte werden nicht erreicht (Abb. 3.11 und 3.12), weil die Synchrotronleuchtkraft lokal die Leuchtkraft einer Standard-Scheibe an diesem Ort überschreitet und die ADAF-Lösung zusammenbricht, da Heizung und Kühlung sich aufheben und keine Energie-Advektion mehr möglich ist. Dies tritt bei $\dot{m} \approx 10^{-2}$ auf und spielt keine Rolle bei kleineren Raten, siehe Abb. 3.10 und 3.13. Dabei bleiben die Elektronen aufgrund der geringeren Dichte und schwächeren Kopplung an die Ionen kühler und ihre Temperatur fällt früher zu kleineren Radien ab und verhindert, nahe dem Horizont thermische Gleichgewichte mit den von uns vorgegebenen Gradienten zu finden (Abb. 3.13). Bei der numerischen Integration der stationären Gleichungen tritt gewöhnlich ein Schallpunktproblem auf, da dort die Koeffizienten der Differentialgleichung singulär werden. Wir haben dieses Problem durch die lokale Behandlung umgangen und sehen in der radialen Mach-Zahl keine Probleme, außer in Abb. 3.12. Die Iteration unserer Lösungen, wie oben beschrieben, zeigt, daß wir das Problem nicht gelöst, sondern nur aufgeschoben haben.

Ein wesentlicher Punkt ist die Betrachtung der Bernoulli-Zahl

$$Be = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\left[-\frac{GM}{r} + c^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \left(1-\frac{2M}{r}\right)v_r^2 + \xi(r\Omega)^2 + h\right] \quad . \tag{3.166}$$

welche die spezifische Ruheenergie, die kinetische Energie mit einem geometrischen Faktor aus $V_iV^i = c^2$ und eine Korrektur ξ durch Mittelung über die Dichteverteilung in θ enthält. Weiter tritt die Enthalpie $h = \epsilon + p/\rho$ aus innerer Energie und einem Druckterm auf, der in der Lage ist auch ruhendes, kaltes Material aus der Tiefe des Potentials heraus zu drücken. Um Energie aus dem Potential herauszubringen berücksichtigen wir noch eine gravitative Rotverschiebung für alle Energieformen. Die Bernoulli-Zahl wird durch Kühlungsprozesse verringert, weshalb die Standard-Scheibe im nicht-relativistischen Bereich kleinere Werte für Be als die advektionsdominierte Strömung annimmt. Das Ansteigen der Bernoulli-Zahl im Innenbereich signalisiert, daß Energie aus noch nicht in der Bernoulli-Zahl enthaltenen Prozessen (z.B. Wärmeleitung oder Blandford-Znajek-Prozeß) zugeführt wird. Im Gegensatz zu Narayan & Yi (1995) finden wir keine Bernoulli-Zahlen größer c^2 für unsere Lösungen. Entscheidend dafür ist der Druckbeitrag in radialer wie azimutaler Gleichung, der die kinetische Energie erheblich ausbremst. Dies ist besonders zwischen marginal stabiler Bahn bei $R = 6M$ und $R = 3M$ zu bemerken. Die Standard-Lösung verfügt nicht über die Druckunterstüzung und versucht dies durch schnellere Rotation auszugleichen. Sie verliert diesen Wettbewerb naturgemäß an der Photonenkreisbahn, an der sich die Wirkung des Drehimpulses in der radialen Impulsbilanz umkehrt. Dies ist in Abb. 3.13 gut zu erkennen. Dabei wird ihre kinetische Energie so groß, daß ihre Bernoulli-Zahl größer als c^2 wird. Die ADAF-Lösung behält Be kleiner c^2 für alle Radien bis zum Horizont. Diese Diskussion erscheint problematisch, da gerade der innere, supersonische Bereich im Ite-

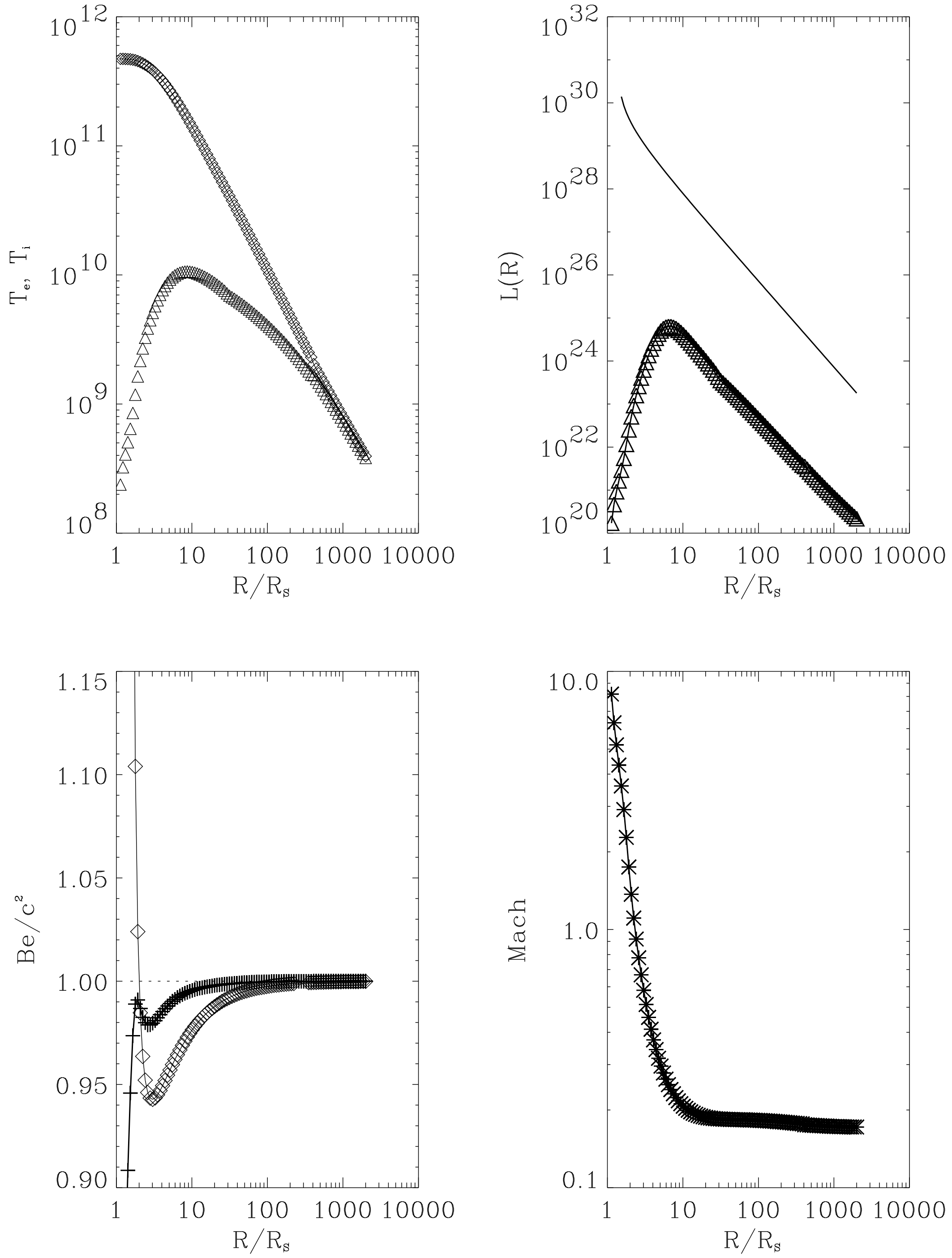

Abbildung 3.10: Radialer Verlauf von Temperatur (Ionen : Rauten, Elektronen : Dreiecke) und Leuchtkraft der Schale am Radius R sowie Bernoulli-Zahl und Mach-Zahl der Lösung. Die Standardleuchtkraft und die Bernoulli-Zahl der optisch dicken Lösung (Rauten) sind zum Vergleich hinzugefügt.

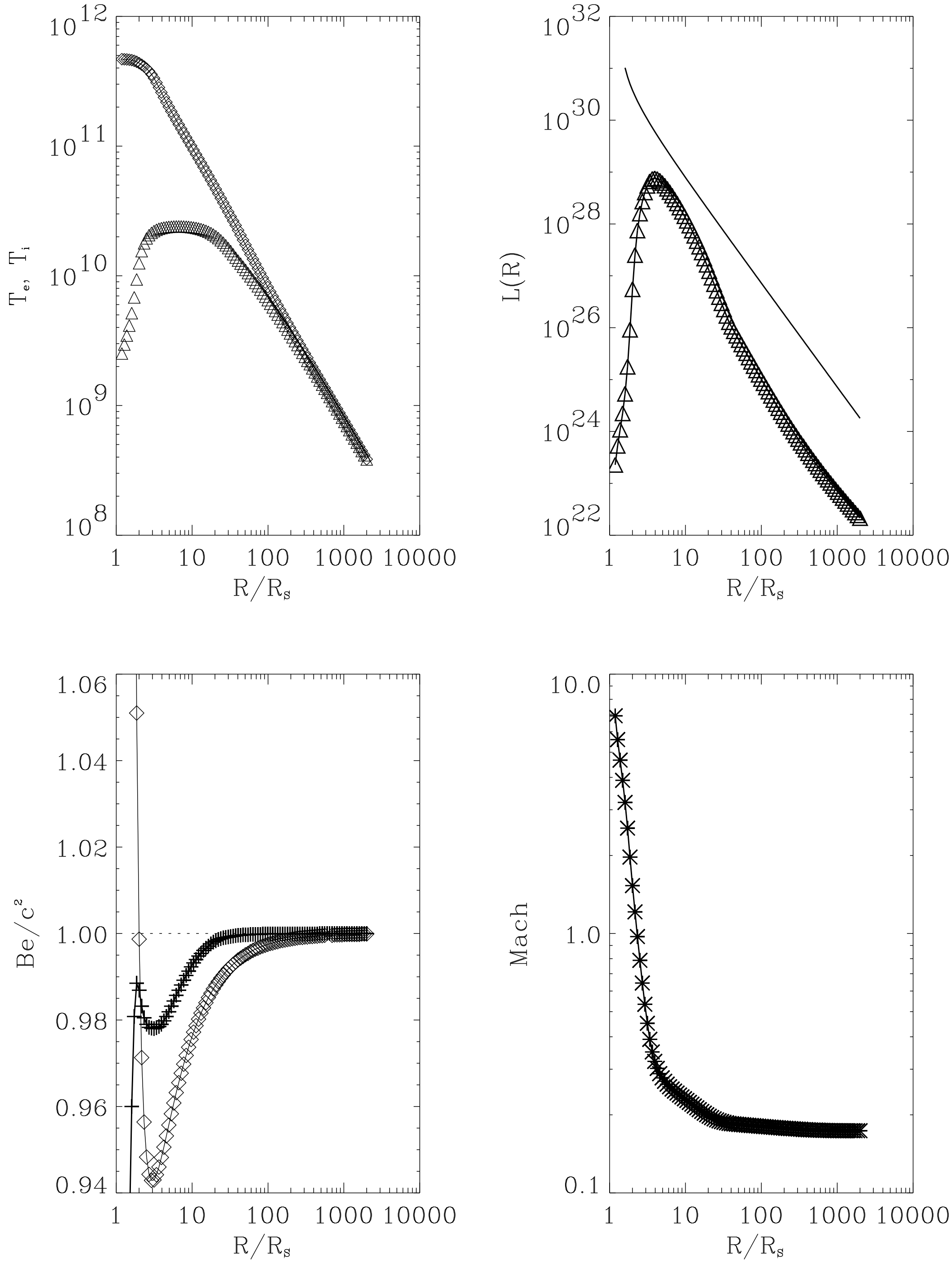

Abbildung 3.11: Radiale Struktur der ADAF-Lösung für $\dot{M} = 10^{-2}\ M_\odot$/Jahr in ein $10^8\ M_\odot$ Schwarzes Loch. Gezeigt sind Ionen- und Elektronentemperatur, Leuchtkraft der Strömung am Radius R, sowie die Bernoullizahl der Standard- (Rauten) und der ADAF-Lösung (Kreuze). Die radiale Machzahl zeigt einen Schallpunkt zwischen 2 und 3 Schwarzschild-Radien.

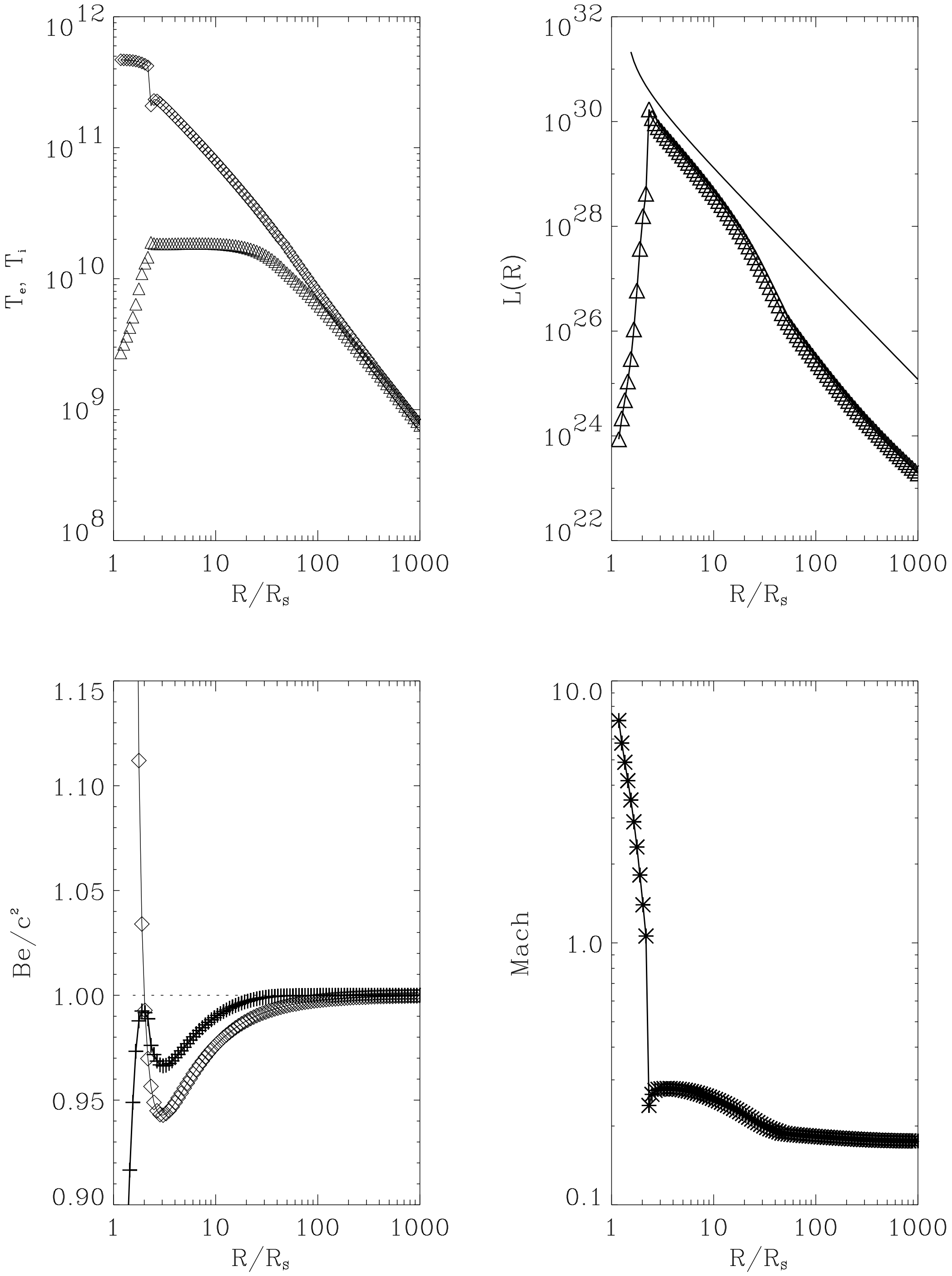

Abbildung 3.12: Radiale Struktur der ADAF-Lösung für $\dot{M} = 5\,10^{-4}\ M_\odot$/Jahr bei Akkretion auf ein SchwarzesLoch von $2.6\,10^6 M_\odot$.

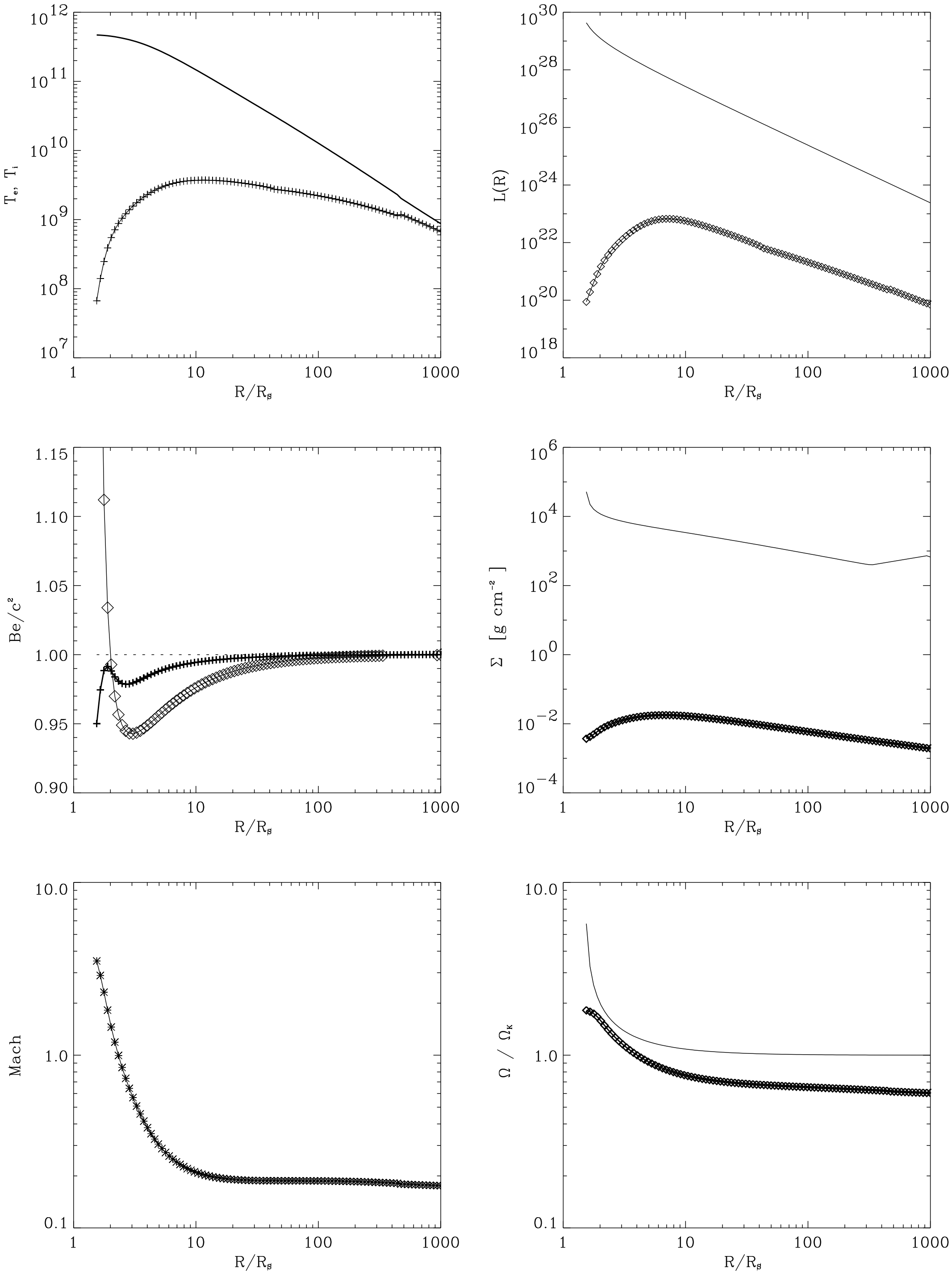

Abbildung 3.13: Temperatur für Elektronen (einzelne Symbole) und Ionen sowie die Leuchtkraft von Standardscheibe (dünne Linie) und ADAF-Lösung als Funktion des Radius, sowie die Bernoulli-Zahl, die für Standardscheiben ganz nahe dem Horizont positiv wird und für ADAF-Lösung immer negativ bleibt. Außerdem die Flächendichte (Symbole: ADAF) und die Machzahl der ADAF sowie die Rotationsgeschwindigkeit relativ zu Ω_K für Newtonsches Potential (Symbole : ADAF). Akkretion in ein 2.6 10^6 $M_\odot$ Schwarzes Loch mit 10^{-5} Sonnemassen pro Jahr.

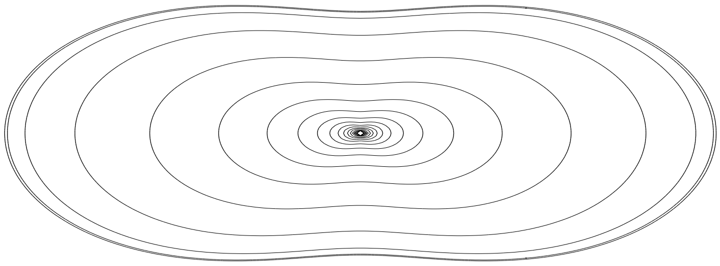

Abbildung 3.14: Dichtekonturen einer in poloidaler Richtung isothermen ADAF-Konfiguration. Die azimutale Machzahl ist 1.5. Die Konturniveaus wachsen kubisch mit der Dichte. Die radiale Struktur entspricht einer vollständig selbstähnlichen Lösung.

rationsprozeß nicht stabil erscheint. Trotzdem wird nur eine Akkretion mit $Be < c^2$ Beachtung finden können, da anderenfalls das eigentlich zu akkretierende Material mit einer Energie nahe dem Schwarzen Loch ankommt, die es ihm erlaubt, der gravitativen Anziehung des Lochs vollständig zu entfliehen. Ob dies eine Möglichkeit ist, um Ausflüsse zu erzeugen, muß einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben.

Wir wollen noch die geometrische Dicke der ADAF's veranschaulichen und betrachten dazu isotherme vertikale Strukturen wie in Gl (3.35). Für genügend große Enfernungen vom Schwarzen Loch können wir die Enthalpie gegen c^2 vernachlässigen und finden für eine azimutale Machzahl von 1.5, wie sie in ADAF's auftritt, eine durch Fliehkräfte abgeplattete Struktur wie in Abbildung 3.14 für die Dichteverteilung. Im relativistisch modifizierten Bereich innerhalb von $100 R_S$ wird die Dicke der Scheibe durch die Enthalpie und eine größere azimutale Machzahl reduziert. Dies führt zur Ausbildung eines Kanals geringer Dichte entlang der Rotationsachse wie in Abbildung 3.15.

Anwendung auf Sgr A*

Es bleibt nun zu zeigen, daß die ADAF-Hypothese einen Teil des Radiospektrums und den zugeordneten Röntgenfluß von Sgr A*, der Radioquelle im Galaktischen Zentrum, die mit einem Schwarzen Loch von $2.6\,10^6\ M_\odot$ identifiziert wird, beschreiben kann. Ein erstes Modell dafür haben wir im Abschnitt 2.2.1 vorgestellt. Zur Bestimmung des Synchrotronspektrums der advektionsdominierten Akkretionsströmungen haben wir die Strahlung eines thermischen Plasmas durch die Emissivität einer quasi-monoenergetischen Verteilung in einer einfachen Näherung verwendet, wie sie in Beckert & Duschl (1997) angegeben ist. Wir nehmen eine sphärische Konfiguration für den Strahlungstransport an und ermitteln die Strahlungskühlung und das

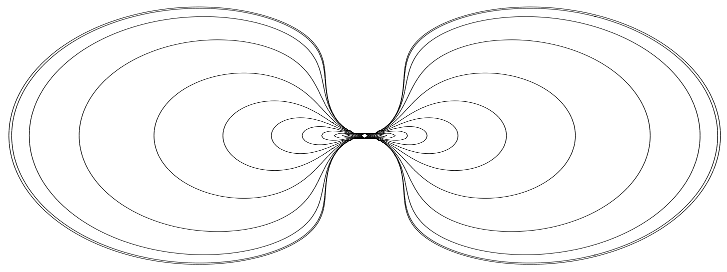

Abbildung 3.15: Dichtekonturen für eine relativistische ADAF-Lösung innerhalb $100 R_S$. Der Verlauf der azimutalen Machzahl ist mit $1.5(1 + M/r)$ nur näherungsweise dem tatsächsichen Verlauf nachgebildet und die Schallgeschwindigkeit ist auf $0.2c$ bei $r = 2M$ skaliert.

Emissionsspektrum einer Schale zwischen den Radien r_1, r_2 mit $\delta r = r_2 - r_1$ der ADAF-Strömung , in der wir eine selbstähnliche Dichte und Temperaturstruktur annehmen, durch

$$S_\nu(r, \delta r) = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\tilde{r} \epsilon_\nu(\tilde{r}) \exp\left[-\int_{\tilde{r}}^{r_2} \mathrm{d}s \alpha_\nu(s)\right] \quad . \tag{3.167}$$

Die Schalen liegen dicht in unseren ADAF-Modellen und sind zentriert auf die Radien r an denen ein lokales thermisches Gleichgewicht gesucht wird. Die Doppelintegrale in (3.167) sind im Allgemeinen nur numerisch zu lösen und wir verwenden dazu ein Romberg-Verfahren für den modifizierte Mittelwertssatz. Aufgrund der sphärischen Symmetrie sind dies die einzigen zu lösenden Integrale. Für den gesamten Strahlungsfluß muß noch die Absorption in weiter außenliegenden Schalen berücksichtigt werden.

Wir haben die möglichen Parameterabhängigkeiten der advektionsdominierten Scheiben und der resultierenden Synchrotron- und Bremsstrahlungsspektren durchgespielt und die beste Annäherung für die Strömung in ein Schwarzes Loch von $2.6\,10^6\ M_\odot$ in einer Entfernung von 8 kpc bei einer Massenakkretionsrate von $10^{-5}\ M_\odot$ pro Jahr gefunden. Um Synchrotron- und Bremsstrahlungsspektrum mit einer Wasserstoffsäulendichte von $2.2\,10^{21}$ cm^{-2} in Einklang zu bringen, haben wir ein Plasma-β von 10^{-2} und ein β von 0.1 für die Viskosität gewählt. Die in den Abbildungen 3.16 und 3.17 gezeigten Spektren sind insofern unvollständig als die Comptonisierung der Radiostrahlung weiteren Strahlungsfluß liefert, der energetisch für die Kühlung der Strömung aber weniger wichtig und in den abgeleiteten Spektren nicht aufgenommen ist. Die vorgestellten ADAF-Lösungen sind in der Lage die Sub-mm Strahlung und damit den sogenannten Infrarot-Exzeß (Falcke et al. 1998) zu erkären. Damit ist energetisch der größte Teil der emittierten Strahlung beschrieben, aber nicht die Radiostrahlung zwischen 1 und 100 GHz erklärt. Auch fehlt etwas Leistung im sub-mm Bereich bei 1 THz wie in Abb. 3.17 zu erkennen.

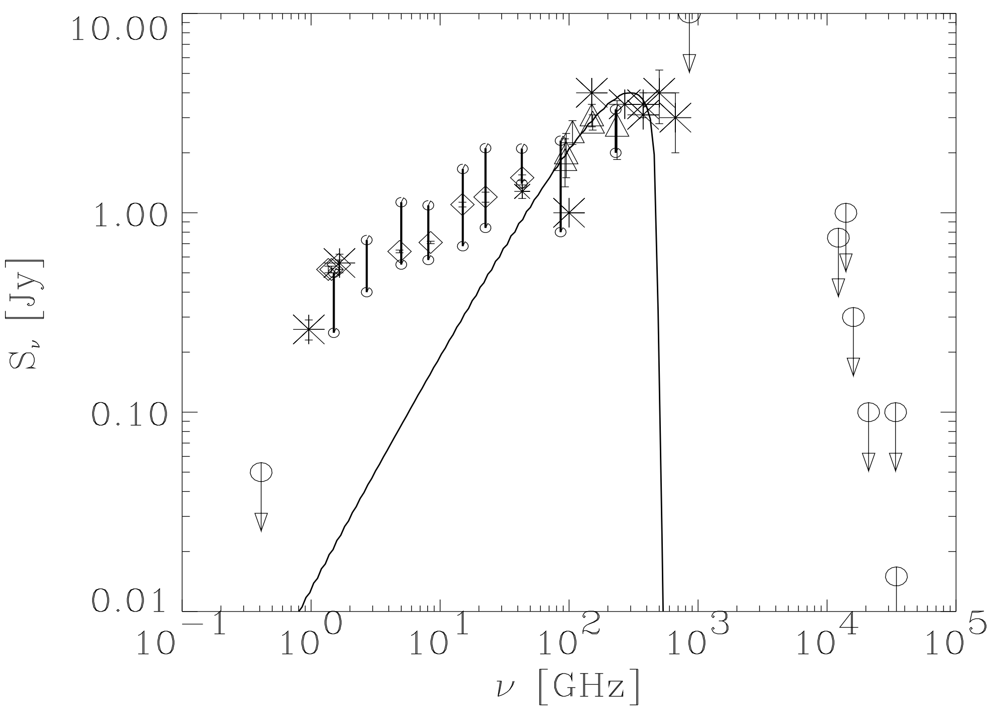

Abbildung 3.16: Synchrotronspektrum der advektionsdominierten Strömung angepaßt an das Radiospektrum von Sgr A*. Die Parameter des Modells sind im Text beschrieben.

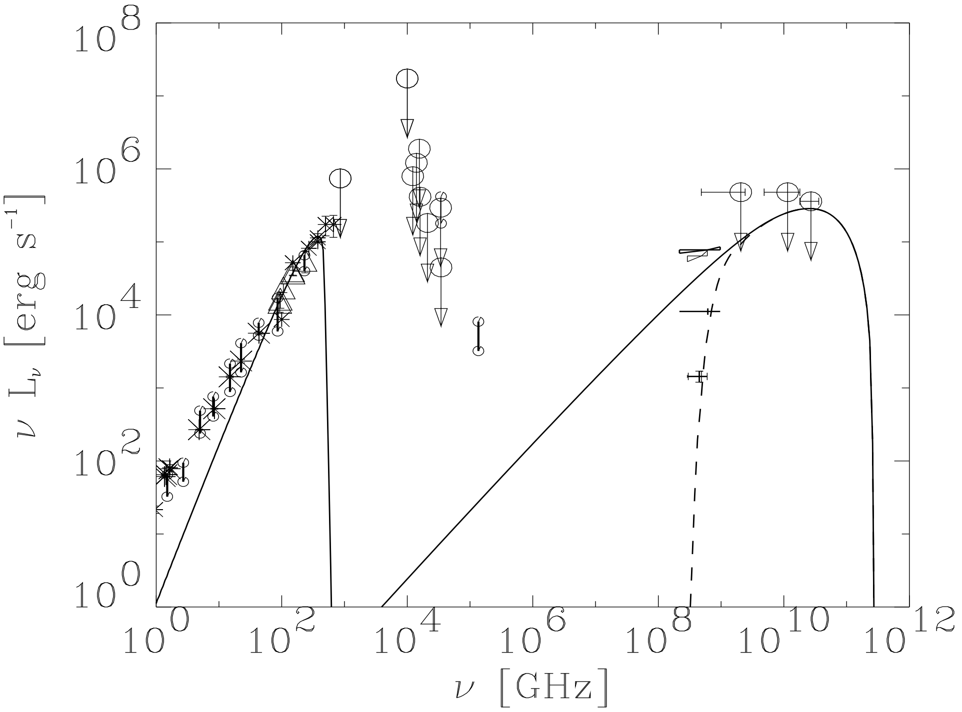

Abbildung 3.17: Spektrale Leuchtkraft einer advektionsdominierten Strömung und die entsprechenden Meßwerte von Sgr A* für eine angenommene Entfernung von 8 kpc und isotroper Ausstrahlung.

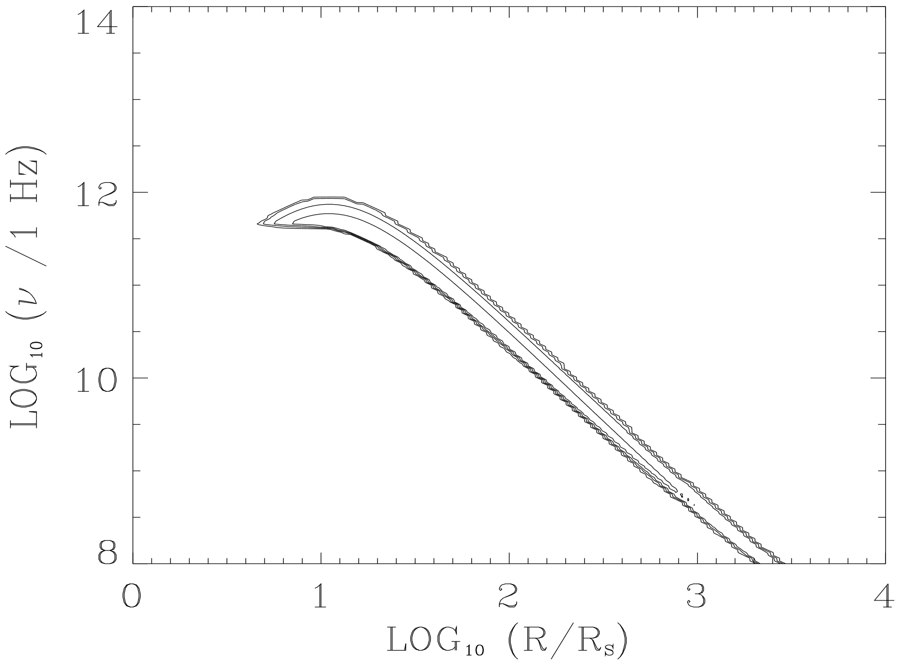

Abbildung 3.18: Synchrotronemission als Funktion von Radius und Frequenz. Der relativistische innere Bereich ist für die Emission unbedeutend. Unterhalb der Konturlinien ist die Strömung optisch dick und Emission bei kleinen Frequenzen von kleinen Radien kann nicht direkt beobachtet werden.

Die meiste Leistung wird im inneren Bereich $r < 20M$ erzeugt, in dem unsere Modellierung des thermischen Gleichgewichts nicht gut sein muß. Realistischere ADAF-Modellierungen können diese Frage klären und werden dadurch auch zu etwas anderen Parametern für die Massenflußrate kommen. Da die spektrale Leistung im Radiobereich von den äusseren Bereichen $r > 20M$ emittiert wird, in dem wir unseren Lösungen vertrauen, und der Fluß dort empfindlich von der Massenakkretionsrate abhängt, sind keine großen Variationen in den Quellparametern möglich. Ein letzter Vergleich mit den aktuellen Beobachtungen (Kriechbaum et al. 1998) kommt von der radialen Ausdehnung der Quelle, die bei 215 GHz einen Quellradius von etwa 20 Schwarzschild-Radien zeigt. Aus unserem Strahlungstransport in advektionsdominierten Strömungen können wir den Radius angeben, bei dem Strahlung einer bestimmten Frequenz optisch dick wird und der Fluß dort sein Maximum erreicht. Wir haben dies in Abbildung 3.18 getan, in der wir den Strahlungsfluß als Konturlinien in der der ν-R/R_S-Ebene angeben. Die optisch dicken Bereiche liegen im linken unteren Teil der Ebene. Die meiste Emission kommt aus einem Band, so daß eine frequenzabhängige Größe der Quelle zu beobachten ist, die bei 215 GHz sehr gut mit der Ausdehnung von Krichbaum et al. (1998) zusammenpaßt.

Kapitel 4

Der AGN-Schalter

Neben der Anwendung der ADAF-Hypothese auf Sgr A* wurden verschiedene weitere schwach aktive galaktische Kerne als Kandidaten für advektionsdominierte Akkretionsströmungen gefunden. So untersuchten Lasota et al. (1996) den Kern von NGC 4258, der ein Schwarzes Loch mit einer kinematisch bestimmten Masse von $3.6\,10^7 \ M_\odot$ (Miyoshi et al., 1995) enthält. Die Leuchtkraft des Kerns beträgt im Röntgenbereich nur $10^{-5} \ L_{\rm Edd}$ und im visuellen und UV sind nur Flußobergrenzen bekannt. Die Autoren bestimmen aus den Röntgendaten eine Massenflußrate für die advektionsdominierte Akkretionsströmung von $\dot{m}/\alpha = 0.16$. Für dicke Scheiben $H \sim r$ und $c_s \sim 0.2 v_\phi$ entspricht dies in der β-Parametrisierung der Viskosität ein $\dot{m}/\beta = 0.03$. Es wird sich zeigen, daß dies im Vergleich mit Sgr A* relativ hohe Akkretionsraten sind.

Auch wurden die Kerne der großen elliptischen Galaxien M87 (Reynolds et al., 1996) und M60 (di Matteo & Fabian, 1997) untersucht und aus den Leuchtkräften geschlossen, daß advektionsdominierte Strömungen die wahrscheinlichste Akkretionsart auch in den Kernen von großen elliptischen Galaxien sind, wenn sie nicht als Quasare auftreten.

Außer schwach aktiven galaktischen Kernen werden auch Kandidaten für Schwarze Löcher mit stellaren Massen auf mögliche ADAF-Akkretion untersucht. So finden Esin, McClintock & Narayan (1997) für das Röntgen-Doppelstern-System Nova Muscae 1991, als Erklärung der verschiedenen spektralen Moden der Röntgenemission ein Hybrid aus einer äußeren Standard-Scheibe mit Korona, die an einem Übergangsradius in eine ADAF-Scheibe übergeht. Sie bestimmen die Akkretionsrate zu $\dot{m} \sim 0.01$ und benötigen einen Übergangsradius bei etwa 100 Schwarzschild-Radien.

Neben diesen Anwendungen auf einzelne Objekte, wie überzeugend sie auch immer sein mögen, bieten ADAF's eine Antwort auf die Frage, wohin die Quasarpopulation, die vorwiegend bei Rotverschiebungen von $z = 1 \ldots 4$ beobachtet wird, im gegenwärtigen, lokalen Universum verschwunden ist. Die Quasarleuchtkräfte erfordern große Akkretionsraten ($\dot{M} \sim 100$ $M_\odot$ /Jahr) und ein Abstrahlungseffizienz der Ruheenergie der akkretierten Materie von wenigstens $\eta \approx 0.1$. Um in diesen Systemen die Eddington-Leuchtkraft nicht wesentlich zu überschreiten, sind Massen der akkretierenden Schwarzen Löcher von 10^8 bis 10^{10} Sonnenmassen nötig. Diese Schwarzen Löcher werden auch in späteren Phasen Materie aus dem Interstellaren Gas akkretieren. Allerdings muß angenommen werden, daß die Massenakkretionsrate um wenigstens vier Größenordnungen sinkt, damit diese Qbjekte nicht mehr als Quasare oder Seyfert-1 Kerne in unserem lokalen Universum ($z < 0.3$) beobachtet werden. Die Abnahme der Raumdichte von Quasaren ist in Abbildung 4.1 gezeigt. Eine einfache Methode die starke Abnahme der Massenakkretionsrate zu umgehen, bietet die advektionsdominierte Akkretion, da die Leuchtkraft eines Objekts nicht mehr linear von der Massenflußrate abhängt, wie in Standard-Akkretionsscheiben, sondern sehr viel stärker mit der Rate abnimmt, wie in Abb. 4.4 zu erkennen. Diese Überlegungen erfordern noch immer eine zeitliche Entwicklung der Massenakkretionsrate relativ zur Eddington-Rate. Wir wollen uns hier auf eine mehr lokale Untersuchung

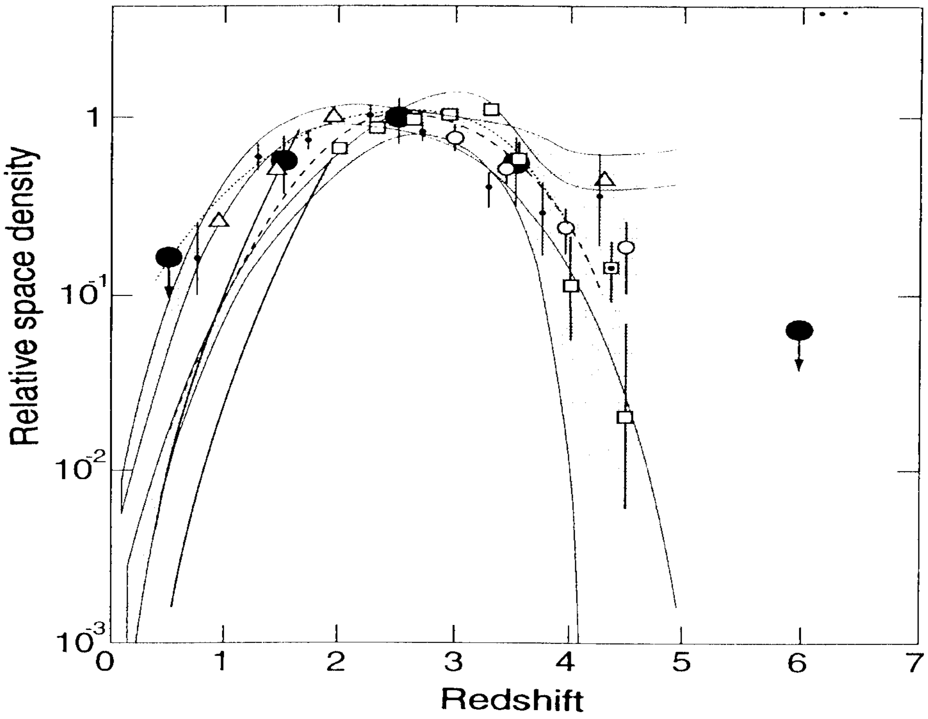

Abbildung 4.1: Raumdichte der Quasare als Funktion der Rotverschiebung für verschieden selektierte Quasar-Samples. Die Darstellung ist Shaver et al. (1996) entnommen.

konzentrieren und sehen, in welcher Weise die ADAF-Hypothese sich in der Leuchtkraftfunktion von aktiven galaktischen Kernen bei kleine Rotverschiebungen wiederspiegeln sollte.

Die Leuchtkraftfunktion einer Objektklasse ist die Dichte dieser Objekte in einem Raumvolumen pro Leuchtkraftintervall in einem bestimmten Frequenzband. Die besten Daten sind im visuellen B-Band verfügbar und in Abb. 4.2 zusammengefaßt. Wir haben die Leuchtkraftfunktion von Quasaren und Seyfert-1 Kernen nach Köhler et al. (1997) verwendet, die eine differentielle Dichte $\phi(L_B)\, \mathrm{d}L \propto L^{-2.2}$ ableiten. Probleme in der Bestimmung der Leuchtkraftfunktion traten dabei bei etwa -21 mag im B-Band auf, da von dort ab—zu kleineren Leuchtkräften hin—die Strahlung der Galaxie gegenüber dem Kern gewinnt und die Subtraktion der diffusen galaktischen Strahlung die abgeleitete Leuchtkraft des Kern beeinflußt. Dies stimmt gut mit dem Schnittpunkt einer Schechter-Funktion für die Leuchtkraftdichte von Seyfertgalaxien ohne Separation von Kern- und galaktischer Emission nach Huchra & Burg (1992) überein. Der zusätzliche Beitrag der Galaxie zur Gesamtleuchtkraft führt zu einer zu hohen Dichte von AGN's mit Leuchtkräften kleiner $M_B = -21 \ldots - 18$mag. Für die Quelldichte von Seyfert-Kernen haben wir die Daten von Cheng et al. (1985) und von Della Ceca et al. (1996) für AGN's mit breiten Emissionslinien aufgetragen und durch eine Schechterfunktionen angenähert. Für die Leuchtkraftfunktion aktiver Kerne mit breiten Emissionslinien finden wir daraus einen Abfall der Dichte bei absoluten Helligkeiten $M_B > -19$mag. Das Verhältnis optisch selektierter Seyfert-2 zu Seyfert-1 Galaxien ist nach Huchra & Burg ungefähr zwei, so daß bei kleinen Leuchtkräften Seyfert-2 Kerne ohne breite Emissionslinien die Dichte nicht um Größenordnungen erhöhen werden.

Falls wir annehmen können, daß Quasare und Seyfert-1 Kerne bei großen absoluten Helligkeiten nahe der Eddington-Rate akkretieren, so spiegelt sich in der Leuchtkraftfunktion mit $\phi(L_B)\, \mathrm{d}L \propto L^{-2.2}$ die Dichtefunktion der Masse schwarzer Löcher wieder: $\psi(M_{\mathrm{SL}})\, \mathrm{d}M_{\mathrm{SL}} \propto$

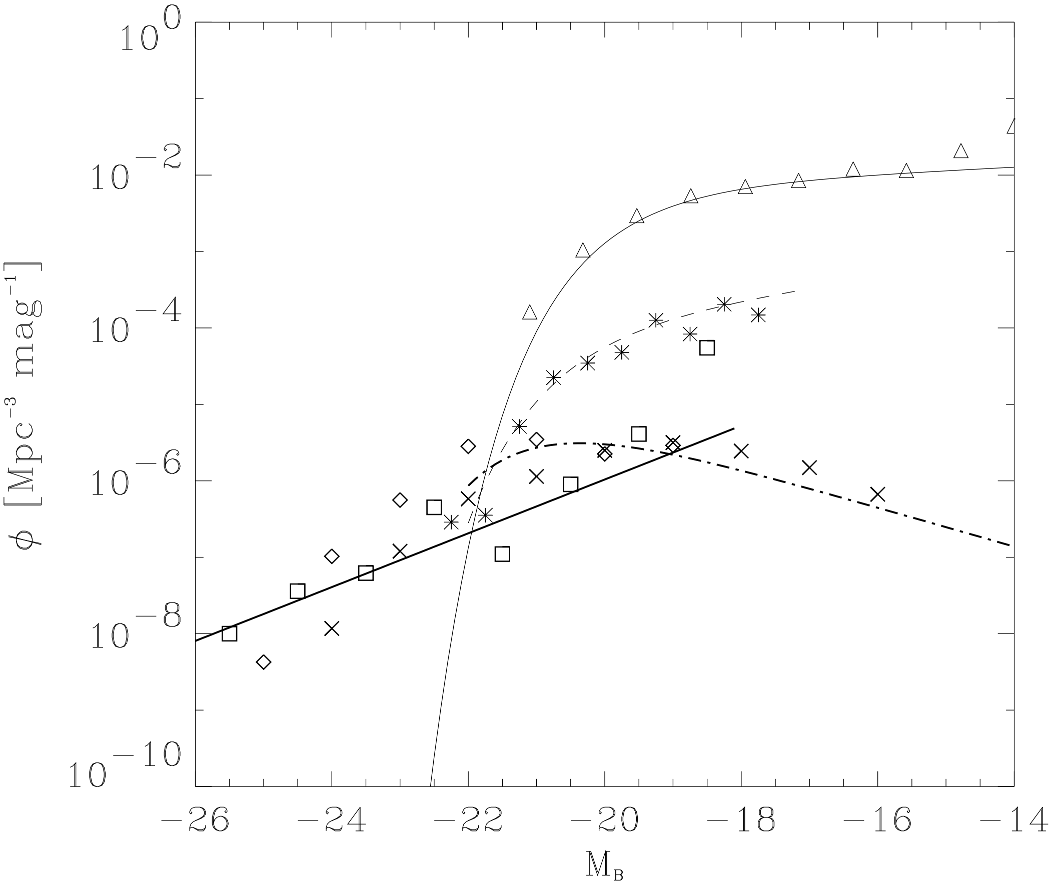

Abbildung 4.2: Lokale Leuchtkraftfunktion ($z \leq 0.3$) für Spiralgalaxien nach Geller et al. (1998) [Dreiecke] mit Schechterfunktion, Quasare und Seyfert-1 Kerne nach Köhler et al. (1997) [Quadrate] und für Seyfert-1 Kerne nach Cheng et al. (1985) [Rauten] sowie für AGN mit breiten Emissionslinien nach Della Ceca (1996) [Kreuze]. Die Leuchtkraftfunktion von Seyfert 1 und 2 Galaxien von Huchra & Burg (1992) [Sterne] ist gestrichen eingezeichnet. Für Quasare und Seyfert-1 Kerne ergibt sich eine Potenzverteilung $\phi \propto L^{-2.2}$ (dicke Linie), während für schwache Kerne ein Abfall der Dichte zu erkennen ist (strichpunktierte Linie).

$M_{\mathrm{SL}}^{-2.2}$. Wenn die schwach aktiven Kerne dadurch erklärt werden sollen, daß die Massenakkretionsrate kleiner als die Eddington-Rate ist, so sollte dies alle Schwarzen Löcher unabhängig von ihrer Masse betreffen. Dies ist aber für schwach aktive Kerne mit breiten Emissionslinien nicht der Fall, da ihre Zahl bei kleinen absoluten Helligkeiten abnimmt. Gleichzeitig können wir aus der Raumdichte der Quasare bei größeren Rotverschiebungen entnehmen, daß die entsprechenden Schwarzen Löcher vorhanden sein müssen. Es besteht also die Notwendigkeit einen Akkretionsmode zu finden, der die Leuchtkraft aktiver Kerne bei sinkender Akkretionsrate stark reduziert. Advektionsdominierte Akkretion bietet gerade eine solche Möglichkeit an.

Wir haben daher die Gesamtleuchtkraft der ADAF's als Funktion der Massenflußrate untersucht. Für ein relativ massearmes Schwarzes Loch von $2.6\,10^6\ M_\odot$ bei den Parametern für Viskosität $\beta = 0.1$ und Plasma-$\beta = 0.1$ ähnlich den Werten, wie sie sich aus der Modellierung des Spektrums von Sgr A* ergeben, haben wir die Leuchtkraft in Abbildung 4.3 dargestellt. Bei Massenakkretionsraten kleiner als $2\,10^{-3}\ \ M_\odot$/Jahr bildet sich bei mittleren Radien, wie im vorigen Abschnitt 3.10 dargestellt, eine advektionsdominierten Stömung aus. Zur prinzipellen Möglichkeit ADAF's in Akkretionströmungen zu finden müssen wir der ADAF-Hypothese hinzufügen, daß ADAF's realisiert werden, wann immer sie erlaubt sind. Damit sinkt die Leuchtkraft der Akkretion nicht mehr linear, wie bei Standard-Akkretionsscheiben, sondern mit $L(\dot{M}) \sim \dot{M}^3$ im reinen ADAF-Fall. Berücksichtigt man, daß bei mittleren Akkretionsraten von $\dot{m} = 10^{-3} \ldots 10^{-2}$ bei Radien jenseits des Übergangsradius (3.165) eine Standardscheibe existiert und sie den Hauptteil der Leuchtkraft ausmacht, so ergibt sich $L(\dot{M}) \propto \dot{M}^2$.

Wir habe die gleiche Rechnung für ein $10^8\ M_\odot$ Schwarzes Loch wiederholt (Abb. 4.4) und sehen einen prinzipiell gleichen Verlauf der ADAF-Leuchtkraft. Die ADAF-Strömung setzt bereits bei 10^{-1} Sonnenmassen pro Jahr ein und die Leuchtkraft fällt in gleicher Weise wie im Fall Sgr A* zu kleinen Akkretionsraten stark ab. Relativ zum Standardwert $L_0 \propto \dot{m}$ verhält sich die ADAF-Leuchtkraft in gleicher Weise, unabhängig von der Massen des Schwarzen Lochs. Die ADAF-Lösungen verringern ab $0.1\ \dot{m}$ die Leuchtkraft und änderen auch die spektrale Verteilung der emittierten Strahlung. Radio- und Röntgenfluß werden zunehmen, sofern nicht eine Korona über einer Standard-Scheibe selbst nichtthermische Strahlung erzeugt hat. Da bei Akkretionsraten $\dot{m} \approx 0.01$ die Elektronentemperatur im relativistischen Bereich ist, dominiert die Synchrotronleuchtkraft $L_{\mathrm{Sync}} \propto \gamma^2$ die spektrale Leuchtkraftverteilung. Bei kleineren Massenflußraten dominiert dann die Bremsstrahlung das Spektrum, wobei sowohl im Radio- wie im Röngtenbereich der Strahlungsfluß stark abnimmt. Für genauere Aussagen über die breitbandige spektrale Verteilung der Ausstrahlung muß die nicht lokal comptonisierte Synchrotronstrahlung mit einbezogen werden, wie dies neuere Modell von Narayan et al. (1998) tun.

Die Annäherung der ADAF-Leuchtkraft an die Leuchtkraft einer Standardscheibe bei gleicher Massenflußrate zwischen $\dot{m} = 0.01$ und 0.1 wird durch das Anwachsen der Synchrotronleistung innerhalb von 20 Schwarzschild-Radien bestimmt. Diese Leistung kann lokal die Heizleistung übersteigen und die advektionsdominierten Strömungen können nicht mehr existieren. Wenn es für die Existenz von ADAF's notwendig ist, daß ab einem Übergangsradius nach innen die gesamte Strömung advektionsdominiert ist, so bricht die ADAF-Lösung in der gesamten Strömung zusammen und die Akkretion wird über eine Standardscheibe erfolgen. In diesem Szenario wird sich die Leuchtkraft nicht wie in den Abbildungen 4.3 bis 4.5 langsam bis $\dot{m} = 0.2$ der Standardleuchtkraft annähern, sondern bei circa $\dot{m} = 0.02$ schlagartig in die Standardleuchtkraft übergehen.

Die Leuchtkraft optisch dicker Scheiben haben wir dabei aus den gesamten Lösungen bis zur Photonenkreisbahn ermittelt. Da offensichtlich nur advektive Strömungen bis zum Horizont ausgedehnt werden können und dies gerade bei hohen Akkretionsraten möglich ist, wird sich an die Standardscheibe ab einem Radius zwischen $r = 3M$ und $r = 6M$ immer eine ADAF-Lösung anschließen. Dies ist für die hochenergetische Strahlung von Systemen mit Standardakkretion in Schwarze Löcher interessant und wird die Leuchtkraft dieser Objekte gegenüber den

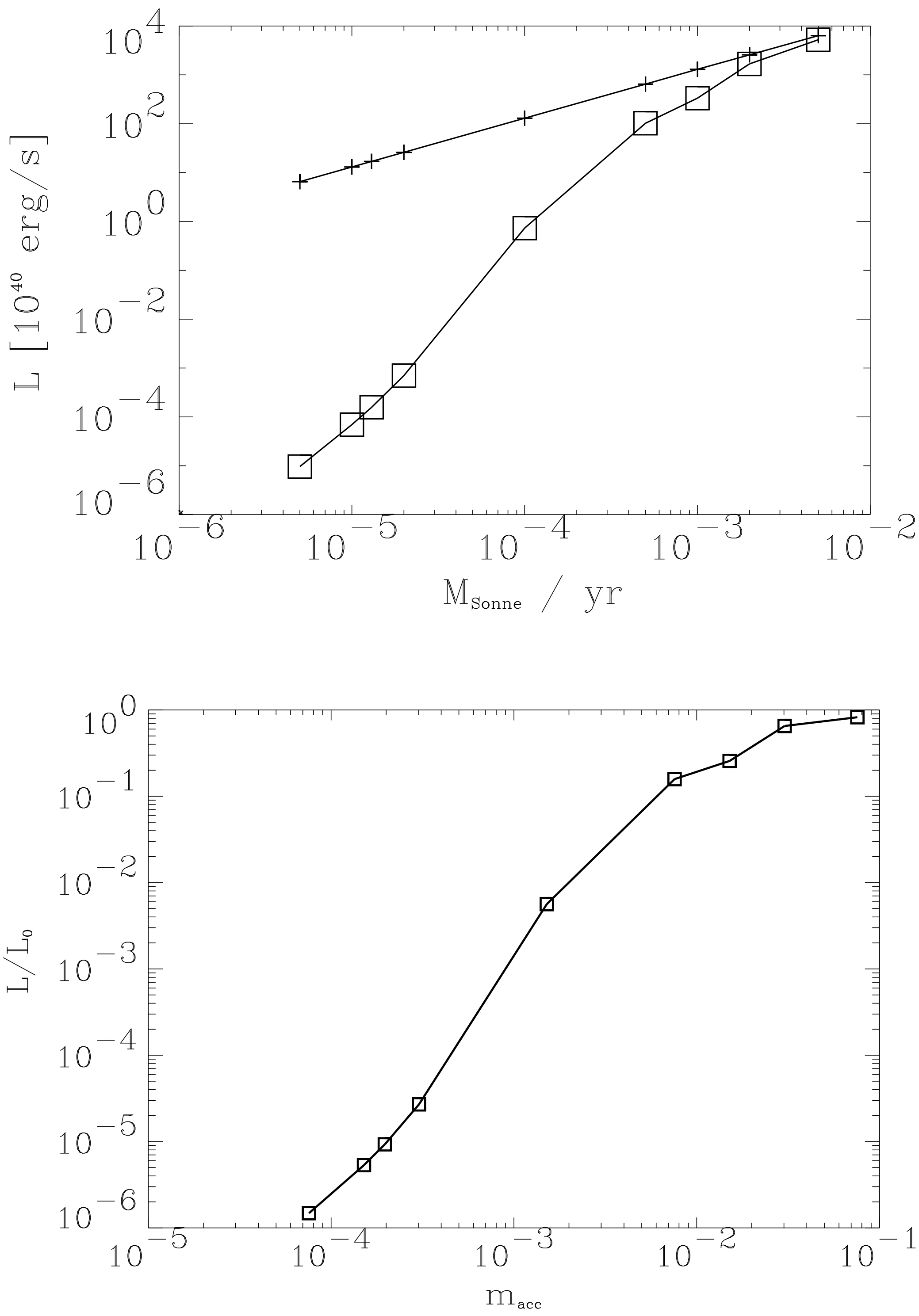

Abbildung 4.3: Leuchtkraft von ADAF-Lösungen (Quadrate) und Standard-Scheiben (Kreuze) als Funktion der Massenflußrate für Sgr A*. Die Masse des Schwarzen Lochs ist 2.6 10^6 $M_\odot$. Die untere Darstellung zeigt das Verhältnis der ADAF-Leuchtkraft zur Leuchtkraft der Standard-Scheibe L_0 bei gleicher Akkretionsrate als Funktion des Massenfluß relativ zur Eddington-Rate.

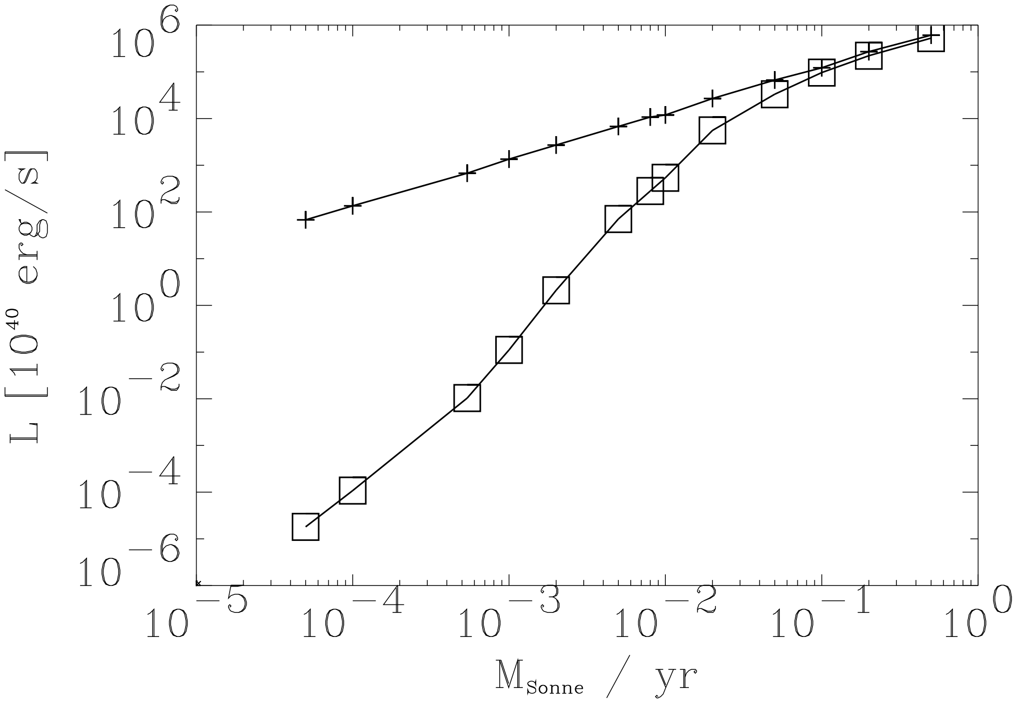

Abbildung 4.4: Leuchtkraft von ADAF-Lösungen(Quadraten) und Standard-Scheiben (Kreuze) für Akkretion auf ein 10^8 $M_\odot$ Schwarzes Loch.

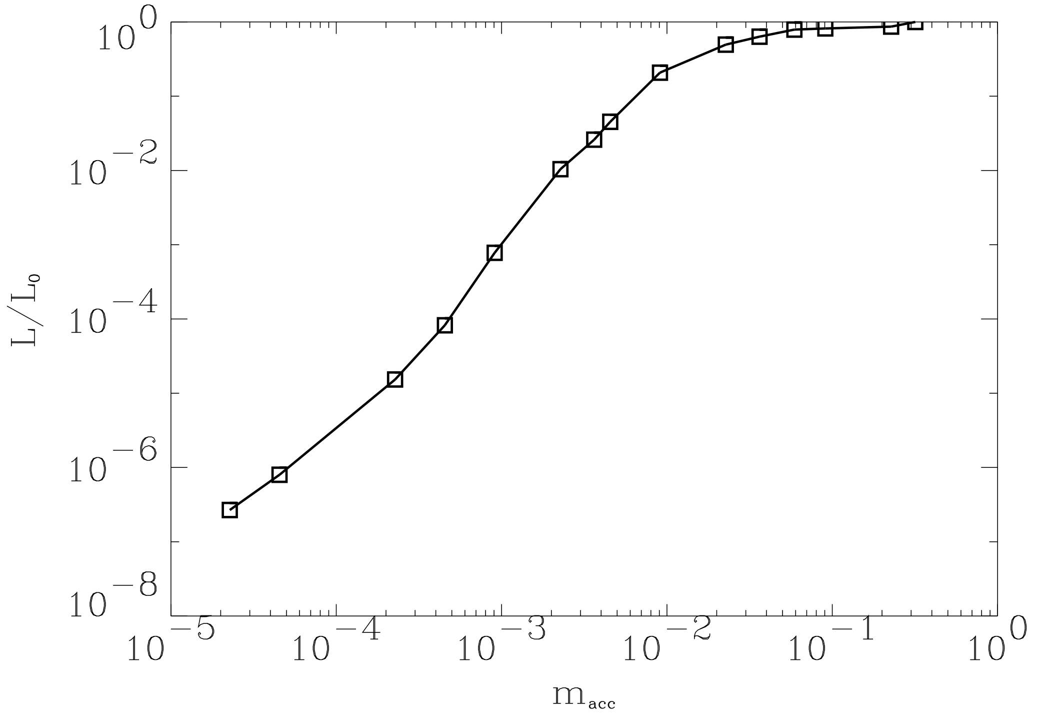

Abbildung 4.5: Relative Leuchtkraft der ADAF-Modelle am Beispiel eines 10^8 $M_\odot$ Schwarzen Lochs.

von uns hier angegeben Werten erhöhen.

Kapitel 5

Abschließende Bemerkungen und Ausblick

Die Untersuchung aktiver galaktischer Kerne ist ein so weites Forschungsgebiet, daß die Konzentration auf einen Teilaspekt, wie die korrekte Formulierung der Hydrodynamik in der Umgebung schwarzer Löcher, den Blick verengt und die Beziehungen, in denen dieses Thema zu den Beobachtungen steht, außer acht läßt. Wir haben deshalb versucht, mit der Modellierung von den Beobachtungsergebnissen für das Radiospektrum von Sgr A* auszugehen, und sind so zum optisch dünnen Synchrotronmodell gekommen. Die sich daran anschließenden Fragen nach dem Energiereservoir und den Beschleunigungsmechanismen führten uns zu den advektionsdominierten Akkretionsmodellen. Um die Emission dieser Akkretionsströmungen zu modellieren, war es notwendig das thermische Gleichgewicht in ADAF's zu ermitteln und die wesentlichen Effekte der allgemein-relativistischen Akkretion zu berücksichtigen. Die Anwendung auf Sgr A* hat uns dann zur Leuchtkraft dieser Klasse von Akkretionsmodellen geführt, deren Abhängigkeit von der Massenflußrate eine Möglichkeit eröffnet, aktive galaktische Kerne durch eine moderate Änderung des Massenflusses in inaktive zu verwandeln und umgekehrt.

Die wesentliche offene Frage ist, ob die Dynamik der Akkretionsströmung in der Nähe des Schwarzen Lochs mit ausreichender Genauigkeit beschrieben ist. Die Iterationsversuche zeigen, daß der supersonische Teil, wenigstens in unserer Behandlung, instabil erscheint. Eine Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen für stationäre Akkretion mit Regularitätsbedingung am Schallpunkt wird diese Frage nicht beantworten. Als Ziel für weitere Arbeiten ist deshalb eine zeitabhängige Behandlung und eine Stabilitätsanalyse gerade des relativistischen, supersonischen Teils anzusehen. Dadurch sollte sich auch zeigen, ob die Bernoulli-Zahl innerhalb der letzten stabilen Kreisbahn tatsächlich negativ bleibt, oder ob eine intrinsisch instabile Akkretion zu Phasen der Akkretion in das Schwarze Loch und zu Phasen der Jet-Erzeugung führt.

Die Möglichkeit das der Übergang zwischen advektionsdominierter und optisch dicker Standardakkretion aktive galaktische Kerne ein- und ausschalten kann, legt es Nähe nach Eigenschaften schwach aktiver Seyfertkerne in einem größeren Sample zu suchen, die auf einen Übergang zwischen beiden Akkretionsmoden hindeuten.

Wenn es gelingt die Emission der Akkretionsströmung von reprozessierter und nicht vom unmittelbaren Kern stammender Strahlung in weiteren schwach aktiven Kernen zu trennen, so wird sich daran die ADAF-Hypothese auch an anderen Objekten als Sgr A* überprüfen lassen.

Literaturverzeichnis

[1] Abramowicz M. A.,Calvani M., Nobili L., 1980, ApJ 242, 772

[2] Abramowicz M. A., Czerny B., Lasota J.P., Szuszkiewicz E., 1988, ApJ 332, 646

[3] Abramowicz M. A.,Prasanna A. R., 1990, MNRAS 245, 720

[4] Abramowicz M. A., Chen X., Kato S., Lasota J. P., Regev O., 1995, ApJ 438, L37

[5] Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.), 1972, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York

[6] Altenhoff W., Mezger P. G., Wendker H., Westerhout G., 1960, Veröff. Univ.-Sternwarte Bonn 59, 48

[7] Balick B., Brown R. L., 1974, ApJ 194, 265

[8] Beckert T., Duschl W.J., Mezger P.G., Zylka R., 1996, A&A 307, 450

[9] Beckert T., Duschl W. J., 1997, A&A 328, 95

[10] Begelman M. C., Meier D. L., 1982, ApJ 253, 873

[11] Brussaard P. J., van de Hulst H. C., 1962, Rev. Mod. Phys 34, 507

[12] Cameron M., Storey J. W. V., Rotaciuc V., et al., 1993, ApJ 419, 136

[13] Carson T. R., 1988, A&A 189, 319

[14] Chandrasekhar S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford, 1983

[15] Chandrasekhar S., *An Introduction to the Studiy of Stellar Structure*, Dover , New York, 1938

[16] Chen X., Abramowicz M. A., Lasota J. P., Narayan R., YI I., 1995, ApJ 443, L61

[17] Cheng F. Z., Danese L, De Zotti G., Franceschini A., 1985, MNRAS 212, 857

[18] Coker R. F., Melia F., 1997, ApJL 488, 149

[19] Cooper J., 1966, Rpt. Prog. Phys. 29, 2

[20] Della Ceca R., Zamorani G., Maccacaro T., Setti G., Wolter A., 1996, ApJ 465, 650

[21] Di Matteo T., Fabian A C., 1997, MNRAS 286, L50

[22] Esin A. A., McClintock J., E., Narayan R., 1997, ApJ 489, 865

[23] Fabian A.C., Canizares C.R., 1988, Nature 333, 829

[24] Falcke H., Goss W.M., Matsuo H. et al., 1998, ApJ 499, 731

[25] Frank J., King A., Raine D., *Accretion Power in Astrophysics*, 2 ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[26] Gallimore J. F., Baum S A., O'Dea C. P., 1997, Ap&SS 248, 253

[27] Gammie C.F., Popham R., 1998, ApJ 498, 313

[28] Gayet R., 1970, A&A 9, 312

[29] Grant I. P., 1958, MNRAS 118, 241

[30] Huchra J., Brug R., 1992, ApJ 393, 90

[31] Hummer D. G., 1988, ApJ 327, 477

[32] Ichimaru S., 1977, ApJ 214, 840

[33] Igumenschchev I. V., Chen X., Abramowicz M A., 1996, MNRAS 278, 236

[34] Karzas W. J., Latter R., 1962, ApJS 6, 167

[35] Krabbe A., Genzel R., Eckart A., et al. ,1995, ApJ 447, L95

[36] Krichbaum T.P., Graham D.A., Witzel A. et al., 1998, A&A 335, L106

[37] Köhler T., Groote D, Reimers D., Wisozki L., 1997, A&A 325, 502

[38] Lasota J.-P., Abramowicz M. A., Chen X., et al., 1996, ApJ 462, 142

[39] Lesch H., Pohl M., 1992, A&A 254, 29

[40] Levinson A., Eichler D., 1992, ApJ 387, 212

[41] Liang E. P. T., Thompson K. A., 1980, ApJ 240, 271

[42] Lightman A. P., Eardley D. M., 1974, ApJ 187, L1

[43] Lynden-Bell D., Rees M. J., 1971, MNRAS 152, 461

[44] Lynden-Bell D., Pringle J.E., 1974, MNRAS 168, 603

[45] Marcaide J. M., Alberdi A., Bartel N., et al., 1992, A&A 258, 295

[46] Meixner J., Reik H. G., Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, Handbuch der Physik Band III/2, Hsg. S. Flügge, 1959, Springer Verlag, Berlin

[47] Mezger P. G., Henderson A. P., 1967, ApJ 147, 471

[48] Mezger P. G., Smith L. F., Churchwell E., 1974, A&A 32, 269

[49] Mezger P. G., Duschl W. J., Zylka R., 1996, A&AR 7, 289

[50] Mezger P.G., Phillip S., 1997, IAUS 184, in press

[51] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation*, 1973, Freeman and Co. , San Francisco

[52] Miyoshi M., Moran J., Herrnstein J., et al. , 1995, Nature 373, 127

[53] Mihalas D., Weibel Mihalas B., *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, New York, 1984

[54] Morrision R., McCammon D., 1983, ApJ 270, 119

[55] Narayan R., 1992, ApJ 394, 261

[56] Narayan R., Yi I., 1994, ApJ 428, L13

[57] Narayan R., Yi I., 1995, ApJ 452, 710

[58] Narayan R., Yi I., Mahadevan R., 1995, Nature 374, 623

[59] Narayan R., 1996, ApJ 462, 136

[60] Narayan R., Mahadevan R., Grindlay J. E., Popham R. G., Gammie C., 1998, ApJ 492, 554

[61] Oster L., 1961, ApJ 134, 1010

[62] Oster L., 1961, Rev. Mod. Phys. 33, 525

[63] Oster L., 1970, A&A 9, 318

[64] Paczyński B., Wiita P.J., 1980, A&A 88, 23

[65] Papaloizou J.C.P., Stanley G.Q.G., 1986, MNRAS 220, 593

[66] Predehl P., Trümper J., 1994, A&A 290, L29

[67] Pringle J. E., 1981, ARA&A 19, 137

[68] Ramani A., Laval G., 1978, Phys. Fluids 21, 980

[69] Reynolds C. S., Di Matteo T., Fabian A C., Hwang U., Canizares C. R., 1996, MNRAS 283, L111

[70] Roelfsema P. R., Goss W. M., 1992, A&AR 4, 161

[71] Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979, *Radiative Processes in Astrophysics*, Wiley, New York

[72] Rubin R. H., 1968, ApJ 154, 391

[73] Seaton M. J., 1959, MNRAS 119, 81

[74] Seguin F. H., 1975, ApJ 197, 745

[75] Service A. T., 1986, ApJ 307, 60

[76] Sexl R. U., Urbantke H. K., *Gravitation und Kosmologie*, 4. Auflage, Heidelberg, Akademischer Verlag, 1995

[77] Shakura N.I., Sunyaev R.A., 1973, A&A 24, 337

[78] Shaver P. A., Wall J. V., Kellermann K. I., Jackson C. A., Hawkins M. R. S., 1996, Nature 384, 439

[79] Skibo J.G., Dermer C.D., Ramaty R., McKinley J.M. 1995, ApJ 446, 86

[80] Spitzer L., Physics of Fully Ionized Gases, Sec. Edition, John Wiley & Sons, New York, 1962

[81] Stepney S., Guilbert P.W., 1983, MNRAS 204, 1269

[82] Storey P. J., Hummer D. G., 1995, MNRAS 272, 41

[83] von Linden S., Duschl W.J., Biermann P.L., 1993, A&A 269, 169

[84] Watson M.G., Willingale R., Grindlay J.E., Hertz P., 1981, ApJ 250, 142

[85] Willner S. P., Becklin E. E., Visanathan N., 1972, ApJ 175, 699

[86] Wynn-Williams C. G., Becklin E. E., Neugebauer G., 1972, MNRAS 160, 1

Danke an alle, die diese Arbeit möglich gemacht haben :

Zuerst an Prof. Wolfgang J. Duschl, für die Betreung der Arbeit, sein großes Interesse daran und die vielen weiten Ausblicke auf andere Bereiche der Astronomie (von Speckle-Interferometrie bis η Car).

An Prof. Immo Appenzeller, der das Zweitgutachten für diese Arbeit erstellte.

Den Mitgliedern unserer Arbeits- und Kaffeerunde: Kerstin Weis, Zeno Jauch, Richard Auer, Michael Biermann, ... für interessante und unterhaltsame Diskussionen.

An Rainer Kürschner, der die Rechner am laufen hält, solange sie unter UNIX betrieben werden.

Meinen Eltern, die mich materiell unterstützt haben, ohne meinen Weg in die Astronomie in Frage zu stellen. Wenn es auch immer schwieriger geworden ist, ihnen zu erklären, was mich im Moment interessiert.

Dorothea, die mich in ganz praktischen Dingen des Lebens unterstützt und immer wieder motiviert hat.