INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

vorgelegt von
Christian W. Straka, M.S.
aus Lich

Tag der mündlichen Prüfung: 1. 2. 2002

Thermonukleares Brennen und Mischen mit einer zeitabhängigen Konvektionstheorie in massereichen Population-III-Sternen

Gutachter : **Prof. Dr. Werner M. Tscharnuter**
Prof. Dr. Heinrich J. Völk

Zusammenfassung

Die erste Generation von Sternen im Universum, die hypothetischen Population-III-Sterne, sollten sich aus reinem Wasserstoff-Helium-Gas frei von schweren Elementen gebildet haben. Die (quasi-)hydrostatische Entwicklung dieser Sterne wird im Massenbereich $15\,\mathrm{M}_\odot$–$150\,\mathrm{M}_\odot$ untersucht, angefangen von der Vorhauptreihe bis zum Ende des Hauptreihenstadiums.

Wegen der anfänglichen Abwesenheit von CNO-Elementen sowie der geringen Effizienz des pp-Brennens erreichen alle massereichen Population-III-Sterne die Hauptreihe im Vergleich zu „normalen“ Sternen als deutlich kompaktere und heißere Objekte. Population-III-Sterne mit Massen oberhalb von $30\,\mathrm{M}_\odot$ kontrahieren bis zu Zentraltemperaturen von 10^8 K, produzieren im 3α-Prozess Kohlenstoff und lassen sich im Modus des heißen CNO-Brennens auf der Hauptreihe nieder. Population-III-Sterne im Bereich $15\,\mathrm{M}_\odot$–$30\,\mathrm{M}_\odot$ erreichen die Hauptreihe im pp-Brennen, doch übernimmt auch hier der CNO-Zyklus noch im Hauptreihenstadium die Energieproduktion .

Die hohe Temperatur dieser Sterne führt zur Koppelung der konvektiven Mischungszeitskala mit den Zeitskalen der Protoneneinfänge und der β-Zerfälle im CNO-Zyklus. Das Mischen kann nicht mehr als instantan innerhalb der Konvektionszonen angenommen werden. Ein neu entwickelter Sternentwicklungscode, der auf dem Softwarepaket LIMEX aufsetzt, integriert die Sternaufbaugleichungen zusammen mit einem zeitabhängigen Kernreaktionsnetzwerk, zeitabhängigem Mischen und einer zeitabhängigen Konvektionstheorie erstmals vollständig gekoppelt und implizit.

Die verbesserte Modellierung der Kernreaktionen und des Mischens wirkt sich nur in der räumlichen Verteilung der CNO-Elemente aus, die 10%–20% von einer homogenen Durchmischung abweicht. Die verwendete zeitabhängige Konvektionstheorie führt in allen Modellen zu größeren Konvektionszonen im Vergleich zu bestehenden Rechnungen. Daraus resultieren längere Lebensdauern auf der Hauptreihe und größere Heliumkerne mit möglichen Auswirkungen auf die Endstadien dieser Sterne und die Metallanreicherung der folgenden Sterngenerationen.

Abstract

The first generation of stars in the universe, the hypothetical Population III stars, are believed to have formed out of pure hydrogen-helium gas with negligible amounts of heavy elements. The (quasi-)hydrostatic evolution of these stars in the mass range $15\,\mathrm{M}_\odot$–$150\,\mathrm{M}_\odot$ is studied starting from the pre-main sequence until the end of the main-sequence phase.

Compared to “normal“ stars, both the initial absence of CNO elements and the small temperature dependence of pp burning lead to more compact and hotter objects on the main sequence for all massive Population III stars. Above $30\,\mathrm{M}_\odot$, Population III stars contract to central temperatures of 10^8 K, produce carbon via the 3α process and settle on the main sequence in the mode of hot CNO burning. In the range of $15\,\mathrm{M}_\odot$–$30\,\mathrm{M}_\odot$ the main sequence is reached with pp burning but even in these cases CNO-burning takes over during the main-sequence phase.

The hot temperature of these stars leads to the coupling of the convective mixing timescale and the timescales of proton capture and β-decay reactions of the CNO-cycle. The assumption of instantaneous mixing across convective regions is not fulfilled. For the first time, a newly developed stellar evolution code utilizing the sofware package LIMEX integrates the stellar structure equations together with a time-dependent nuclear reaction network, time-dependent mixing and a time-dependent theory of convection fully coupled and implicitly.

The improved modeling of nuclear reactions and mixing only changes the spatial distribution of CNO elements that deviates 10%–20% from homogeneity. In all models the employed time-dependent theory of convection leads to larger convection zones compared to other work. This results in longer main-sequence lifetimes and larger helium cores with possible consequences for the final stages of these stars and the metal feedback for successive generations of stars.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im modernen kosmologischen Weltbild der Urknalltheorie durchlebte unser Universum eine Phase der Dunkelheit: Zwischen der Entkoppelung von Materie und Photonen bei einer Rotverschiebung von $z \sim 1000$ und der Bildung der ersten Objekte bei $z > 6$ enthielt das Universum kein sichtbares Licht. Diese Ära wird als *Zeitalter der kosmischen Finsternis* (engl.: *cosmic dark ages*) bezeichnet. Die wesentliche Frage, wann und wie die kosmische Finsternis endete, ist noch offen (Rees, 2000), doch scheint die Beantwortung mit wissenschaftlichen Methoden aufgrund der Erfolge in der Beobachtungstechnik, die einen immer tieferen Blick in die Vergangenheit unseres Universums zulässt, sowie einem besseren theoretischen Verständnis auf den Gebieten der Strukturbildung, Galaxienentstehung, Sternentstehung und Sternentwicklung möglich zu werden.

Es ist eine weit verbreitete Meinung, dass die kosmische Finsternis von den ersten im Universum entstandenen Sternen unterbrochen wurde. Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass im Verschmelzungsprozess zweier Protogalaxien entstandene *Aktive Galaktische Kerne* (AGN) sich noch vor den ersten Sternen bilden konnten. Unabhängig davon, ob der erste AGN vor dem ersten Stern entstanden ist oder umgekehrt, markiert die Bildung der ersten Sterne ein Ereignis in der kosmischen Entwicklung hin zu einer Struktur, wie wir sie heute am Himmel sehen. Wodurch unterscheidet sich die Entstehung und Entwicklung der ersten Sterngeneration von der folgenden? Wenn es richtig ist, dass beim Urknall nur Elemente bis Lithium synthetisiert werden (z.B. Olive, 2000), dann müssen sich die ersten Sterne frei von schweren Elementen und Staub gebildet haben. Dieser Mangel an schweren Elementen hat direkte Auswirkungen auf den Kollaps primordialer Wolken hin zu stellaren Dichten, der nur dann erfolgen kann, wenn die Wolke in der Lage ist zu kühlen. In Abwesenheit schwerer Elemente kann sich kein Staub bilden, der ein sehr gutes Kühlagens darstellt, und die Kühlung der primordialen Wolken muss durch molekularen Wasserstoff oder seine deuterierte Form erfolgen, die einen sehr ineffizienten Kühlmechanismus darstellen. Folglich sollten nur sehr massereiche Wolken Jeans-instabil werden und zu stellaren Dichten kollabieren können. Dies legt die Vermutung nahe, dass die erste Generation von Sternen ausschließlich aus massereichen Sternen besteht. Obwohl auch dieses Argument durch ein besseres Verständnis des Fragmentationsprozesses relativiert werden könnte, bildet es hier eine Motivation für die Untersuchung massereicher primordialer Sterne.

Nicht nur die Phase des Kollapses, auch die Sternentwicklung selbst wird mit einer primordialen Elementmischung einen anderen Lauf nehmen. Auswirkungen auf die Opazität und damit die Sternstruktur in radiativen Sternzonen sind zu erwarten. Bei massereichen Sternen steht zudem der CNO-Zyklus als nukleare Energiequelle nicht zur Verfügung, da die Elemente Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff fehlen. Ezer (1961) erkannte, dass dies zu heißeren Hauptreihensternen führen muss. Derselbe Autor konnte zeigen, dass manche dieser Sterne sogar so heiß werden, dass sie im 3α-Prozess ihren Kohlenstoff selbst bilden und sich so den Modus des CNO-Brennens erschließen können.

Diese zeitabhängigen Bildungsmechanismen der Katalysatorelemente in primordialen Sternen quantitativ zu beschreiben, bildet die urpsprüngliche Aufgabenstellung dieser Arbeit. Eine detaillierte, zeitabhängige Modellierung der Kernreaktionen alleine reicht jedoch für die Beantwortung dieser Frage nicht aus. Ebenso wichtig ist eine zeitabhängige Beschreibung des konvektiven Mischens, welches den frisch produzierten Kohlenstoff auch in höherliegende Schichten transportieren kann, die zu kalt für eine eigene Kohlenstoffbildung sind.

In Kapitel 1 werden Sternaufbaugleichungen, von gundlegenden Erhaltungssätzen ausgehend, hergeleitet, welche die Wechselwirkungsmechanismen von Kernreaktionen, Mischen und mechanischer wie thermo-energetischer Sternstruktur in konsistenter Form beschreiben. Das verwendete numerische Verfahren, das eine Koppelung aller modellierten Prozesse ermöglicht und sowohl in einfachen Einzonen-Rechnungen als auch in den Simulations-Rechnungen zum Einsatz kommt, wird in Kapitel 2 vorgestellt. Die Bedeutung einzelner Kernreaktionen sowie mögliche Wechselwirkungen mit dem konvektiven Mischen werden in Kapitel 3 noch losgelöst vom System Stern untersucht, jedoch unter Bedingungen, wie sie in massereichen primordialen Sternen auftreten können. In Kapitel 4 werden die Ergebnisse der Simulationsrechnungen vorgestellt, die die Entwicklung primordialer Sterne im Massenbereich von $15\,\mathrm{M}_\odot$–$150\,\mathrm{M}_\odot$ verfolgt, beginnend von der Vorhauptreihe bis zum Ende des Hauptreihenstadiums. Daran schließt sich in Kapitel 5 eine zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse an. Eine Abhandlung über die korrekte Form der Energiegleichung in Sternen ist in Anhang A zu finden. In Anhang B sind die in den numerischen Simulationen verwendeten Reaktionsraten der Kernreaktionen tabelliert. Schließlich werden in Anhang C alle verwendeten Symbole aufgelistet, wie sie in den Formeln dieser Arbeit auftreten.

Der in dieser Arbeit häufig verwendete Begriff des *Population-III-Stern*s soll noch näher präzisiert werden. Hier bezeichnet dies einen Stern, der sich aus Gas bildet, das im Wesentlichen aus Wasserstoff und Helium besteht mit einem Anteil an schweren Elementen von $Z < 10^{-12}$.

1 Sternaufbau

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Gleichungen für den inneren Sternaufbau abgeleitet. Abweichungen von der Standardtheorie des Sternaufbaus betreffen erstens die Energiegleichung, die um die korrekte Zeitabhängigkeit des Molekulargewichts erweitert wurde. Zweitens wird die Konvektion in dieser Arbeit mit einer zusätzlichen zeitabhängigen Gleichung für die turbulente kinetische Energie modelliert. Drittens wird das Mischen der Elemente in konvektiv instabilen Zonen als ein zeitabhängiger Diffusions-Prozess behandelt. Viertens wird ein zeitabhängiges Kernreaktionsnetzwerk für die chemische Entwicklung des Modells verwendet, das keine Annahmen von Gleichgewichten enthält.

1.1 Grundannahmen

Betrachtet wird der Sternaufbau in *sphärischer* Symmetrie. Diese Annahme ist gerechtfertigt, solange der Drehimpuls z.B. durch Akkretion oder Rotation keine entscheidende Rolle spielt. Spektroskopisch gemessene Radialgeschwindigkeiten von 36 O-Sternen (Herrero et al., 1992, 1999) zeigen, dass die projizierten Radialgeschwindigkeiten typischerweise bei $V_r \sin i = 30 \ldots 400\,\mathrm{km\ s^{-1}}$ liegen. Nach den Entwicklungsrechnungen von Meynet & Maeder (2000) haben Radialgeschwindigkeiten dieser Größenordnung Auswirkungen auf alle Sternparameter. Eine zweite wichtige Annahme besteht darin, dass diese Sterne bei *konstanter Masse* entwickelt werden. Auch hier ist wiederum gerade bei massereichen Sternen der Population I und II bekannt, dass Masseneinstrom durch Akkretion in der Vorhauptreihen-Phase sowie Massenabstrom durch Winde oder Eruptionen in späteren Entwicklungsphasen wichtig sind. Zumindest der Massenabstrom könnte bei Population-III-Sternen durch das Fehlen von Staub und schweren Elementen unterdrückt sein (Kudritzki, 2000). Der praktische Grund für diese zwei zentralen Annahmen sind die Vereinfachungen, die daraus folgen, und zwar sowohl für die numerische Behandlung des Gleichungssystems als auch für das Verständnis der zugrunde liegenden Mechanismen. Eine weitere wichtige Annahme, die in diesen Rechnungen immer vorausgesetzt wird, ist die Annahme von *hydrostatischem Gleichgewicht.* Diese Annahme ist nicht streng mathematisch aufzufassen (Konvektion z.B. bedeutet eine Abweichung von strikter Hydrostatik), sondern entspringt einem Zeitskalen-Argument: Wenn die betrachteten Zeitskalen groß sind gegen die hydrostatische Zeitskala, dann kann sich der Stern immer so adjustieren, dass das hydrostatische Gleichgewicht erfüllt ist. Auch diese Annahme schränkt den Gültigkeitsbereich des Modells ein: Kollaps- oder dynamische Pulsations-Prozesse können hier nicht behandelt werden.

Die Gleichungen für den inneren Sternaufbau sind ableitbar aus den grundlegenden Erhaltungssätzen der Strahlungshydrodynamik für Masse, Impuls und Energie. Im allgemeinen Fall müssen die Erhaltungssätze für Materie- und Photonengas getrennt formuliert werden. Die Koppelung von Strahlung und Materie geschieht hierbei durch die mikrophysikalischen Prozesse von Absorption und Emission. Die Strahlung wird im inneren Sternaufbau in der *grauen Diffusionsnäherung* behandelt, d.h., Größen des Strahlungsfeldes sind über alle Frequenzen integriert, und die Strahlungstransportgleichung wird durch eine Diffusionsgleichung modelliert. Diese Annahme ist in optisch dicken Schichten sehr gut erfüllt, nicht jedoch in den optisch dünnen Gebieten der Atmosphäre. Dennoch wird diese Näherung in dieser Arbeit bis zur optischen Tiefe $\tau = 2/3$ verwendet, weil der Einfluss der Randbedingungen in vollradiativen Hüllen auf die Lösung der inneren Sternaufbaugleichungen gering ist.

Unter den genannten Annahmen von sphärischer Symmetrie, konstanter Masse und Hydrostatik sowie der grauen Diffusionsnäherung für Strahlung reduzieren sich die Erhaltungssätze der Strahlungshydrodynamik auf vier Gleichungen, die auch als Sternaufbaugleichungen bezeichnet werden. Die Atmosphäre, die die äußeren Randbedingungen für die Sternaufbaugleichungen liefern muss, wird hier als *graue Atmosphäre* behandelt, wobei die Photosphäre bei der optischen Tiefe $\tau = 2/3$ angenommen wird. Weitere vereinfachende Annahmen, die in den einzelnen Abschnitten eingehender diskutiert werden, sind jene von *vollständig ionisiertem Gas*, einer Opazität ausschließlich aufgrund von *Elektronenstreuung*, der Vernachlässigung des Elektronen-Abschirmfaktors (*Screening*) bei den Kernreaktionen sowie einer nur teilweisen Berücksichtigung von Neutrinoverlusten. Schließlich finden Magnetfelder keine Berücksichtigung.

1.2 Grundgleichungen

Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern, in denen die Sternaufbaugleichungen intuitiv hergeleitet werden, wird hier ein formaler Zugang gewählt, der von den dynamischen Erhaltungssätzen für kontinuierliche Medien ausgeht. Dieser Weg bietet den Vorteil, dass klar ersichtlich ist, welche Approximationen gemacht werden und unter welchen Bedingungen diese Approximationen gültig sind. Eine Diskussion der dynamischen Grundgleichungen findet man z.B. bei Mihalas (1997) und Dorfi (1997). Hier wird ausgegangen von den dynamischen Gleichungen, die Kürschner (1992, 1994) zusammengestellt hat.

1.2.1 Massenerhaltung

Die Massenerhaltung wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot u = 0$$

beschrieben, wobei $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ die substanzielle Ableitung bezogen auf das Massenelement, ρ die Dichte und u die Materiegeschwindigkeit darstellt. Unter der Annahme von Hydrostatik (siehe unten) kann eine Variable im System eliminiert werden, sodass eine Bestimmungsgleichung entfällt. Aus diesem Grund tritt die Kontinuitätsgleichung in den Sternaufbaugleichungen nicht explizit auf. Die Zahl der Photonen ist im Gegensatz zur Masse keine Erhaltungsgröße, und deshalb gibt es keine separate Kontinuitätsgleichung für die Photonenanzahl.

1.2.2 Impulserhaltung

Die Bewegungsgleichung für kontinuierliche Medien ist die Eulergleichung. Diese Gleichung beschreibt die Impulserhaltung der Materie. Mit der Impulsdichte oder Massenstromdichte ρu als Erhaltungsgröße schreibt sich die Gleichung im mitbewegten System mit dem Gasdruck $P_{\rm gas}$, der Opazität κ, dem Gravitationspotenzial Φ und dem ersten Moment des Strahlungsflusses H wie folgt:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho u) + \rho u \nabla \cdot u + \nabla P_{\rm gas} - \frac{4\pi}{c}\kappa\rho H - \rho\nabla\Phi = 0 \quad . \tag{1.1}$$

Als Quellterme werden der Druckgradient, die Materie-Strahlungswechselwirkung und die Gravitation berücksichtigt. Die ersten beiden Terme der Eulergleichung (1.1) sind vom Absolutbetrag her klein gegen die restlichen Terme dieser Gleichung, wenn die betrachtete Zeitskala groß ist im Vergleich zur hydrodynamischen Zeitskala:

$$\tau_{\rm Entw} \gg \tau_{\rm hydr} \sim (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad .$$

Hier bezeichnet $\bar{\rho}$ eine über den gesamten Stern gemittelte Dichte. Unter diesen Bedingungen reduziert sich die Gleichung zur hydrostatischen Druckgleichung auf

$$\nabla P_{\rm gas} - \frac{4\pi}{c}\kappa\rho H - \rho\nabla\Phi = 0 \quad . \tag{1.2}$$

Somit ist der Anwendungsbereich dieser Gleichung nicht nur auf den strikt hydrostatischen Fall $u = 0$ beschränkt. Die hydrostatische Näherung ist immer dann gut erfüllt, wenn die relevante Zeitskala groß gegen die hydrodynamische Zeitskala ist. Man spricht dann auch von einer quasi-hydrostatischen Entwicklung. Das Gravitationspotenzial wird aus der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

bestimmt. Im sphärisch symmetrischen Fall kann diese Gleichung einmal integriert werden, und mit der Definition für die Massenvariable $m := r^2 G^{-1} \partial\Phi/\partial r$ gilt:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad . \tag{1.3}$$

Diese Gleichung ist die erste Gleichung für den Sternaufbau.

Die Impulsgleichung für ein Photonengas ist die erste Momentengleichung der Strahlungstransportgleichung. Für die folgende Ableitung wird von der Transportgleichung in der Formulierung von Castor (1972) ausgegangen. Relativistische Korrekturen sind bis zur Ordnung u/c berücksichtigt. Für ein isotropes Strahlungsfeld in sphärischer Symmetrie gilt:

$$\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t} + H\nabla \cdot u + H\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c}{3}\frac{\partial J}{\partial r} + c\kappa\rho H = 0 \quad . \tag{1.4}$$

Hier bezeichnet J das nullte Moment des Strahlungsflusses. Die ersten drei Terme können gegen den fünften vernachlässigt werden, wenn

$$\frac{1}{H}\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t} + 2\frac{u}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial r} \ll \kappa\rho c$$

gilt. Eine Abschätzung der Größenordnungen mit

$$\left|\frac{1}{H}\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t}\right| \sim \frac{1}{\tau_{\mathrm{Entw}}} \quad ,$$
$$\left|2\frac{\partial u}{\partial r}\right| \sim \left|2\frac{u}{r}\right| \sim \frac{2}{\tau_{\mathrm{Entw}}}$$

führt auf eine Bedingung für die Gültigkeit der Diffusionsapproximation:

$$\tau_{\mathrm{Entw}} \gg \frac{5}{\kappa\rho c} = 5\,\frac{l_{\mathrm{ph}}}{c} \quad . \tag{1.5}$$

Diese reduziert sich mit der Gleichung (1.4) zum (quasi-)stationären Grenzfall

$$H = -\frac{1}{3\kappa\rho}\frac{\partial J}{\partial r} \quad . \tag{1.6}$$

Diese Gleichung zusammen mit der Definitionsgleichung für den Strahlungsdruck in der Eddington-Näherung $P_{\mathrm{rad}} = 4\pi J/3c$ und der Definition des Gesamtdrucks von $P = P_{\mathrm{gas}} + P_{\mathrm{rad}}$ führt mit der sphärisch symmetrischen, hydrostatischen Druckgleichung (1.2) auf die in der Sternentwicklung gebräuchliche zweite Gleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial m} + \frac{Gm}{4\pi r^4} = 0 \quad . \tag{1.7}$$

In der hier gewählten Eddington-Approximation ist J durch die Planckfunktion B gegeben, und unter der Annahme von lokalem thermodynamischen Gleichgewicht (LTE) gilt:

$$J = B = \frac{\sigma}{\pi}T^4.$$

Der Strahlungsdruck ergibt sich unter diesen Annahmen in der im Sternaufbau gebräuchlichen Form $P_{\mathrm{rad}} = aT^4/3$.

1.2.3 Energieerhaltung

Es lassen sich zwei getrennte Energiegleichungen für das Photonengas und das Materiegas formulieren. Die Energiegleichung ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik für ein Gas, und mit der inneren Energie e als Erhaltungsgröße erhält man:

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} - \frac{P}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot F_{\mathrm{conv}} + 4\pi\kappa\rho(\tilde{S} - J) - \rho\epsilon_{\mathrm{nuc}} = 0 \quad , \tag{1.8}$$

wobei ϵ_{nuc} den Energiebeitrag durch Kernreaktionen nach Abzug von Neutrinoverlusten und $\tilde{S}$ die Quellfunktion der Strahlung bezeichnet. Dies ist die korrekte Form der Energiegleichung, auch dann, wenn Mischprozesse und Änderungen des Molekulargewichts eine Rolle spielen (siehe Anhang A für eine Diskussion über die korrekte Form der Energiegleichung). Der konvektive Fluss F_{conv} muss aus einer Theorie für die Konvektion bestimmt werden. In dieser Arbeit wird eine zeitabhängige Konvektionstheorie benutzt, bei der F_{conv} aus einer weiteren Gleichung für die turbulente kinetische Energie bestimmt wird. Weitere Energiebeiträge entstehen durch die Strahlung und die Energiefreisetzung durch Kernreaktionen.

Die Energiegleichung für das Photonengas bildet die nullte Momentengleichung der Strahlungstransport-Gleichung. In der Form von Castor (1972) lautet die frequenzgemittelte Gleichung unter der Annahme von isotropem Strahlungsfeld in sphärischer Symmetrie:

$$\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t} + \frac{4}{3} J\nabla\cdot u + c\nabla\cdot H - c\kappa\rho(\tilde{S} - J) = 0 \quad . \tag{1.9}$$

Wiederum erhält man das statische Diffusionslimit, wenn Bedingung (1.5) gilt, d.h., wenn die Entwicklungszeit groß ist gegen die mittlere Freilaufzeit eines Photons:

$$4\pi\kappa\rho(\tilde{S} - J) = 4\pi\nabla\cdot H \quad . \tag{1.10}$$

Zusammen mit der statischen ersten Momentengleichung (1.6) und der Annahme von LTE lässt sich weiter schreiben:

$$4\pi\nabla\cdot H = \nabla\cdot\left(-\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad .$$

Definiert man den Strahlungsfluss

$$F_{\mathrm{rad}} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r} \tag{1.11}$$

und die Leuchtkraft[1]

$$l = 4\pi r^2 F = 4\pi r^2 (F_{\mathrm{conv}} + F_{\mathrm{rad}}) \quad , \tag{1.12}$$

so folgt mit Hilfe der Gleichungen (1.10-1.12) die im Sternaufbau gebräuchliche Energiegleichung:

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} - \frac{P}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\frac{\partial l}{\partial m} - \rho\epsilon_{\mathrm{nuc}} = 0 \quad . \tag{1.13}$$

Mit der Einführung der neuen Variablen Leuchtkraft l in das Gleichungssystem benötigt man eine vierte Gleichung für den Sternaufbau. Dieser Zusammenhang ist im Prinzip gegeben durch die Gleichungen (1.11) und (1.12), vorausgesetzt, F_{conv} ist durch eine Konvektionstheorie bekannt. Im Sternaufbau ist eine andere, äquivalente Formulierung der vierten Gleichung, der Transportgleichung, üblich:

$$\frac{\partial \ln T}{\partial m} = \frac{\partial \ln P}{\partial m}\nabla \quad . \tag{1.14}$$

Der tatsächliche Temperaturgradient ∇ der Schichtung[2] ist dann mit den Gleichungen (1.11) und (1.12) bestimmt:

$$\nabla = \nabla_{\mathrm{rad}} - \frac{F_{\mathrm{conv}} H_{\mathrm{P}}}{k_{\mathrm{rad}} T} \quad . \tag{1.15}$$

Die Druckskalenhöhe H_{P}, der radiadive Gradient ∇_{rad} und k_{rad} sind wie folgt definiert:

$$k_{\mathrm{rad}} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \quad , \qquad H_{\mathrm{P}} = -\frac{\partial r}{\partial \ln P} \quad , \qquad \nabla_{\mathrm{rad}} = \frac{H_{\mathrm{P}}}{k_{\mathrm{rad}} T}\frac{l}{4\pi r^2} \quad .$$

[1] Ein möglicher Fluss-Beitrag durch Wärmeleitung wurde vernachlässigt.
[2] ∇ ist nicht mit dem Differenzialoperator zu verwechseln.

Die Gleichungen (1.14) und (1.15) sind nur Umformulierungen der Gleichungen (1.11) und (1.12), dennoch sieht man an ihnen sehr gut die zugrunde liegende Physik: In Abwesenheit von Konvektion ($F_{\rm conv} = 0$) muss sich die Temperaturschichtung so einstellen, dass die Energie vollständig durch Strahlung transportiert werden kann. Mit nicht verschwindender Konvektion hingegen wird der Temperaturgradient erniedrigt, da Strahlung nur noch teilweise den Energietransport leistet. Im Fall von Konvektion in den tiefen inneren Schichten des Sterns kann man mit der Konvektionstheorie zeigen, dass sich die Temperaturschichtung einer isentropen Schichtung annähert, also $\nabla \approx \nabla_{\rm ad}$ gilt mit

$$\nabla_{\rm ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{\rm s} \quad .$$

1.2.4 Konvektionstheorie

In den letzten Abschnitten wurde darauf hingewiesen, dass der konvektive Fluss $F_{\rm conv}$ aus einer Konvektionstheorie bestimmt werden muss. In der Sternentwicklung wurde bisher fast ausschließlich die sogenannte Mischungswegtheorie (MLT) verwendet, die auf eine Idee von Prandtl (1925) zurückgeht und deren bekannteste Form von Böhm-Vitense (1958) entwickelt und verwandt wurde. Die Unzulänglichkeiten der MLT werden immer wieder betont (z.B. Kippenhahn & Weigert, 1990, S. 48) und betreffen neben der fehlenden Ableitung aus ersten Prinzipien zuvorderst die Beschränktheit auf stationäre Konvektion sowie die Lokalität, die auf das Problem des Überschießens (Overshooting) führt.

Bei der hier vorliegenden quasi-hydrostatischen Vorhauptreihenentwicklung massereicher Sterne braucht man eine zeitabhängige Beschreibung der Konvektion, weil erst während der Entwicklung vollständig radiative Zonen konvektiv instabil werden. Außerdem kommt das hier verwendete numerische Verfahren, das die Sternaufbaugleichungen, das Kernreaktionsnetzwerk und das diffusive Mischen vollständig gekoppelt und implizit löst, nicht mit den abrupten Einschaltvorgängen zurecht, wie sie ein Schwarzschild- oder Ledoux-Kriterium vorgeben.

Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit eine eindimensionale, zeitabhängige Konvektionstheorie verwendet, die von Kuhfuß (1986) entwickelt und von Wuchterl & Feuchtinger (1998) erweitert und erstmals an RR-Lyrae-Pulsationen mit guter Übereinstimmung getestet wurde. Das Kuhfuß-Modell bietet viele Vorteile. Die Ableitung der Gleichungen erfolgt nach einem klaren Schema, bei dem jede Approximationsstufe sichtbar ist. Das Modell erfordert in der einfachsten Version nur eine weitere Gleichung, beinhaltet im stationären Grenzfall das Schwarzschild-Ledoux-Kriterium und führt in diesem Fall auf die bekannte MLT. Von Wuchterl & Feuchtinger (1998) werden hier nur die für die Sternentwicklung wichtigen Erweiterungen übernommen. Zusätzlich werden alle Terme berücksichtigt, die das chemische Potenzial enthalten und die von Wuchterl & Feuchtinger (1998) vernachlässigt wurden, obwohl sie im originalen Modell von Kuhfuß (1986) vorhanden sind. Um die Theorie so einfach wie möglich zu halten, werden nicht alle Terme des Kuhfuß-Modells berücksichtigt (siehe unten).

Kuhfuß Konvektionstheorie

Im Folgenden werden die Gleichungen der Theorie, die sich stark an Wuchterl & Feuchtinger (1998) orientieren, nur zusammengestellt. Für die aufwendigen Herleitungen muss auf die Originalarbeiten von Kuhfuß (1986, 1987) verwiesen werden. Das Kuhfuß-Modells verfolgt die grundlegende Idee, ausgehend von den hydrodynamischen Gleichungen und Erhaltungssätzen für die einzelnen Spezies, alle physikalischen Größen wohldefiniert zu mitteln. Diese Prozedur führt zusammen mit inelastischen und diffusiven Approximationen auf Transportgleichungen für die Spezies und eine weitere Gleichung für die turbulente kinetische Energie $\bar{\omega}$:

$$\frac{\mathrm{D}\bar{\omega}}{\mathrm{D}t} = S_{\bar{\omega}} - \tilde{S}_{\bar{\omega}} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot j_t - \frac{P_t}{\rho}\nabla\cdot u + \frac{1}{\rho}E_Q \quad . \tag{1.16}$$

Die Quellfunktion für die turbulente kinetische Energie

$$S_{\bar{\omega}} = -\frac{T}{P}\frac{\partial P}{\partial r}\nabla_{\mathrm{ad}}\,\Pi \tag{1.17}$$

ist die Auftriebskraft, die auch dämpfend als Senke auf die Konvektion wirken kann. Π ist dabei die Korrelationsfunktion zwischen Entropie- und Geschwindigkeits-Fluktuationen:

$$\Pi = -\alpha_s\,\Lambda\,\bar{\omega}^{1/2}\left(\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i\frac{\partial X_i}{\partial r}\right) \quad ,$$

bei der die beiden freien Parameter α_s und Λ sowie die Massenkonzentrationen X_i der n chemischen Spezies und der chemische Potenzialausdruck ψ_i auftreten. Der letzte Term, der für die Mischentropie steht, verschwindet beim Übergang von der Variable Entropie auf die Variablen innere Energie und Dichte ganz analog zur Herleitung der Energiegleichung im Anhang A. Die Transformation geschieht mit der gibbsschen Fundamentalgleichung (A.5) und führt auf:

$$\Pi = -\frac{\alpha_s\,\Lambda\,\bar{\omega}^{1/2}}{T}\left(\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \quad . \tag{1.18}$$

Die Mischungsweglänge Λ kann im hydrostatischen Fall mit der Druckskalenhöhe H_{P} und dem Mischungswegparameter α_{ML} der MLT ausgedrückt werden (siehe Wuchterl & Feuchtinger (1998) für abweichende Fälle):

$$\Lambda = \alpha_{\mathrm{ML}}\,H_{\mathrm{P}} \quad . \tag{1.19}$$

Die Korrelationsfunktion Π geht in der Energiegleichung als konvektiver Enthalpiefluss ein:

$$j_w = \rho\,T\,\Pi \quad ,$$

der später noch mit dem oben definierten konvektiven Fluss F_{conv} identifiziert werden wird. Die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie in thermische Energie, in welcher der freie Parameter c_{D} auftritt, wird mit Dimensionsargumenten bewerkstelligt:

$$\tilde{S}_{\bar{\omega}} = c_{\mathrm{D}}\frac{\bar{\omega}^{3/2}}{\Lambda} \quad .$$

Wieder führt eine Diffusionsnäherung unter Einführung eines weiteren freien Parameters, α_t, auf die Größe des turbulenten kinetischen Energieflusses

$$j_t = \alpha_t \, \rho \, \Lambda \, \bar{\omega}^{1/2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r}$$

hin, der für den nichtlokalen Charakter der Konvektion verantwortlich ist und der den Effekt des Overshootings enthält. Dieser Term wurde, um die Konvektionstheorie so einfach wie möglich zu halten, nicht berücksichtigt. Dies gilt auch für die noch übrigen Terme, die keinen Einfluss auf die Reproduktion der RR-Lyrae-Lichtkurven haben (private Mitteilung G. Wuchterl). Dies ist der turbulente Reynolds-Spannungstensor, der zum einen in einen Spurterm:

$$P_t = \frac{2}{3} \rho \, \bar{\omega}$$

und zum anderen in eine spurfreie viskose Energiedissipation zerfällt:

$$E_Q = \frac{4}{3} \, \mu_Q \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 \quad .$$

$$\mu_Q = \alpha_\mu \, \rho \, \Lambda \, \bar{\omega}^{1/2}$$

ist dabei die kinetische turbulente Viskosität. Die letzten drei Terme j_t, P_t und E_Q gehen nicht nur in der Gleichung für die turbulente kinetische Energie ein, sondern müssen auch der Energiegleichung hinzugefügt werden, sofern man sie überhaupt berücksichtigen will. Ein weiterer Term, der den Impulstransfer durch viskose Kräfte beschreibt, muss auf der rechten Seite der Eulergleichung (1.1) hinzugefügt werden:

$$U_Q = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4}{3} \mu_Q r^3 \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right] \right) \quad .$$

Dieser wird hier wegen Nichtberücksichtigung von E_Q ebenfalls vernachlässigt. Von Wuchterl & Feuchtingers (1998) Modifikationen ist für die hydrostatischen, optisch dicken Konvektionsschichten im Sterninnern nur die Limitierung des turbulenten Enthalpieflusses wichtig. Im originalen Kuhfuß-Modell kann es vorkommen, dass die Diffusionsapproximation für den turbulenten Enthalpiefluss zusammenbricht. Dies tritt genau dann ein, wenn die mit dem turbulenten Enthalpiefluss verknüpfte charakteristische Geschwindigkeit

$$u_{\mathrm{D}} = \frac{T}{w} \, \Pi$$

diejenige der turbulenten kinetischen Energie

$$u_{\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \, \bar{\omega}^{1/2}$$

übersteigt. Um dieses Problem zu beheben, schlagen Wuchterl & Feuchtinger (1998) einen Flusslimiter vor, der dafür sorgt, dass die charakteristische Geschwindigkeit des Enthalpieflusses nicht die der turbulenten kinetischen Energie übersteigt:

$$\Pi = \frac{w}{T} \, u_{\mathrm{c}} \, F_{\mathrm{L}} \left[\frac{u_{\mathrm{D}}}{u_{\mathrm{c}}} \right] = \frac{w}{T} \, u_{\mathrm{c}} \, F_{\mathrm{L}} \left[-\sqrt{3/2} \, \alpha_s \, \frac{\Lambda}{w} \left(\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \right] \quad ,$$

Tabelle 1.1: Freie Parameter der Konvektionstheorie

Parameter	Standardwert	Beschreibung
α_{ML}	1.5	Mischungslänge
α_s	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$	turbulenter Treiber
c_{D}	$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	turbulente Dissipation
α_μ		turbulente Viskosität
α_t	$0.6093\,\alpha_s$	Overshooting-Länge
α_{M}	$\frac{1}{2}$	Diffusionslänge

wobei $F_{\mathrm{L}}[x]$ eine lineare Funktion für $x < 1$ und 1 für $x > 1$ mit einem stetig differenzierbaren Übergang zwischen beiden Gebieten sein soll. Hier wird der Tangens Hyperbolicus verwendet:

$$F_{\mathrm{L}}[x] = \begin{cases} x & x < 0.9 \\ 0.9 + 0.1\ \tanh\left(\frac{x-0.9}{0.1}\right) & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Die in der Energiegleichung durch die Konvektion auftretenden Flussterme bestehen in dieser Theorie aus dem konvektiven Enthalpiefluss j_w und dem turbulenten kinetischen Energiefluss j_t, sodass F_{conv} identifiziert werden kann mit:

$$F_{\mathrm{conv}} = j_w + j_t \quad .$$

Wegen der Vernachlässigung des Overshootings ist hier $F_{\mathrm{conv}} = j_w$.

Freie Parameter

Jede makroskopische Konvektionstheorie enthält freie Parameter. Dabei kommt über jeden neuen Term in der Konvektionstheorie, der einen physikalischen Prozess modelliert, ein weiterer freier Parameter hinzu. Wie in Tabelle (1.1) zu sehen ist, sind es in der hier vorgestellten Version sechs freie Parameter, von denen wegen der Vernachlässigung einiger Terme nur vier für diese Arbeit relevant sind. Neben den aus der MLT bekannten Parametern Mischungsweglänge α_{ML} und Diffusionslänge α_{M}, welch letztere als geometrischer Faktor in der Diffusionsgleichung für die Mischprozesse auftritt, sind dies α_s und c_{D}. Die Werte der letzten beiden Parameter sind festgelegt, wenn man fordert, dass die Theorie im lokalen statischen Limit in die MLT übergeht. Natürlich sollten die freien Parameter über Vergleiche zwischen Beobachtung und Theorie, z.B. an Cepheiden, bestimmt werden. Bis diese Vergleiche vorliegen, können die verbleibenden zwei freien Parameter der Theorie, die identisch sind mit den beiden freien Parametern der MLT, durch die in der MLT gebräuchlichen Werte festgelegt werden.

1.2.5 Kernreaktions-Netzwerk

Seit der Entdeckung des Tunneleffekts durch Gamow (1928) ist der quantenphysikalische Beweis erbracht, dass bei den hohen Temperaturen und Drücken im Sterninnern thermonukleare Reaktionen ablaufen. Die Kernfusionen bilden ein Energiereservoir, das einen Stern wie die Sonne über 10 Milliarden Jahre im thermischen Gleichgewicht halten kann. Die Kernreaktionen koppeln an die Energiegleichung (1.13) über ϵ_{nuc}. Zusätzlich führen die Transmutationen der Elemente zu einer Änderung des Molekulargewichts, d.h. zu einer Änderung der Gaseigenschaften selbst. Wenn man nicht von Gleichgewichten in den Elementkonzentrationen ausgehen kann, dann müssen die Änderungen der Spezies in einem nichtlinearen System von Gleichungen mitgeführt werden. Mit den Teilchendichten n_i kann man schreiben (z.B. Arnett, 1996):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}n_i}{\mathrm{D}t} &= \sum_j c_i(j)\,\lambda_j n_j + \sum_{j,k} c_i(j,k)\ <\sigma v>_{jk}\, n_j n_k \\ &+ \sum_{j,k,l} c_i(j,k,l)\ <\sigma v>_{jkl}\, n_j n_k n_l \quad .\end{aligned} \tag{1.20}$$

Dieses Gleichungssystem wird auch als Reaktionsnetzwerk bezeichnet. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt Änderungen der Spezies selbst, z.B. durch β-Zerfall, Elektroneneinfang oder Photodisintegration. Der zweite Term beschreibt Zweier-Reaktionen wie z.B. Photoneneinfang und der dritte Term Dreier-Reaktionen wie z.B. die 3α-Reaktion. Die Koeffizienten c_i sind Abkürzungen für

$$\begin{aligned} c_i(j) &= \pm N_i \quad , \\ c_i(j,k) &= \pm\frac{N_i}{N_j!N_k!} \quad , \\ c_i(j,k,l) &= \pm\frac{N_i}{N_j!N_k!N_l!} \quad , \end{aligned}$$

wobei die N_i, N_j, N_k, N_l für die Anzahl der in einer Reaktion vorkommenden Teilchen des Typs i,j,k,l stehen und die $N_j!$, $N_k!$, $N_l!$ Mehrfachzählungen bei identischen Teilchen verhindern. Bei Produktion der Spezies i ist das Vorzeichen positiv und bei Destruktion negativ. Mit λ_j wird die Rate der schwachen Wechselwirkung (β-Zerfall, Elektroneneinfang) bzw. die Photodisintegrationsrate bezeichnet. Die $<\sigma v>$ sind die geschwindigkeitsgemittelten Wirkungsquerschnitte im Schwerpunktsystem der Reaktionspartner.

Die Formulierung (1.20) hat einen großen Nachteil: Wenn Kontraktion oder Expansion des Gases stattfindet, dann ändern sich die Teilchenzahldichten n_i auch dann, wenn keine Transmutationen aufgrund von Kernreaktionen stattfinden. Deshalb ist es zweckmäßiger, die Teilchenzahl in Abhängigkeit einer erhaltenen Größe statt in Abhängigkeit des Volumens zu formulieren (Müller, 1997). Eine solche Größe ist die Zahl der Nukleonen, die auch im relativistischen Limit eine Erhaltungsgröße bleibt. Die Nukleonenzahl pro Volumen ist gegeben durch

$$n = \sum_i n_i A_i \quad ,$$

wobei A_i die Atomgewichte sind, die die nächste ganze Zahl der Atommasse W_i in atomaren Masseneinheiten (amu) darstellt, $A_i = [W_i]$. Die spezifische Häufigkeit

$$Y_i = \frac{n_i}{n} \tag{1.21}$$

ändert sich im Gegensatz zu n_i nicht bei Kontraktion oder Expansion. Auch die übliche Definition für die Dichte $\rho = \sum_i n_i m_i$ ändert sich bei Kompositionsänderungen und ist nicht relativistisch invariant. Diese Schwierigkeit kann mit den Definitionen

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &:= \frac{\sum_i n_i A_i}{N_\mathrm{A}} \quad ,\\ \tilde{X}_i &:= \frac{n_i A_i}{\tilde{\rho} N_\mathrm{A}}\end{aligned}$$

vermieden werden, die zusammen mit den Gleichungen (1.20, 1.21) auf eine Ratengleichung führen, die auf die invariante Nukleonenzahl bezogen ist:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\tilde{X}_i}{\mathrm{D}t} = \sum_j c_i(j)\,\lambda_j \frac{A_i}{A_j}\tilde{X}_j + \sum_{j,k} c_i(j,k)\,\tilde{\rho} N_\mathrm{A} <\sigma v>_{jk} \frac{A_i}{A_j A_k}\tilde{X}_j \tilde{X}_k \\ + \sum_{j,k,l} c_i(j,k,l)\,\tilde{\rho}^2 N_\mathrm{A}^2 <\sigma v>_{jkl} \frac{A_i}{A_j A_k A_l}\tilde{X}_j \tilde{X}_k \tilde{X}_l \quad .\end{aligned} \tag{1.22}$$

In den meisten Codes wird nicht zwischen $\tilde{\rho}, \tilde{X}$ und ρ, X unterschieden. Auch in dieser Arbeit wird diese Unterscheidung nicht konsequent beibehalten, da die hierduch entstehenden Fehler vernachlässigbar klein sind gegenüber anderen Unsicherheiten, wie sie z.B. durch die nur ungenau bekannten Ratenkoeffizienten der Kernreaktionen entstehen.

1.2.6 Mischen

Änderungen der chemischen Zusammensetzung einer Massenschale im Stern rühren zum einen her von den thermonuklearen Reaktionen und zum anderen von Transportphänomenen. Das wichtigste von diesen Transportphänomenen ist das konvektive Mischen. Der Konzentrationsausgleich infolge der turbulenten Gasbewegungen lässt sich formal als ein Diffusionsprozess beschreiben (Eggleton, 1972). Die folgende Ableitung stützt sich auf Landau & Lifschitz (1991) und wird hier auf ein Gemisch mit mehr als zwei Komponenten erweitert. Sei ρ die Gesamtdichte des Gases. Die Kontinuitätsgleichung in Eulerkoordinaten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u) = 0 \tag{1.23}$$

besagt, dass sich die Gesamtmasse des Gases innerhalb eines Volumens nur ändern kann, wenn Materie aus dem Volumen herausfließt oder in das Volumen hineinfließt[3]. Die Geschwindigkeit u muss bei dieser Definition als Gesamtimpuls der Flüssigkeit pro Masseneinheit aufgefasst werden. In Abwesenheit von Kernreaktionen und Diffusion bleibt die Massenkonzentration jeder Spezies der Mixtur X_i in mitbewegten Koordinaten konstant:

$$\frac{\mathrm{D}X_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial X_i}{\partial t} + u\,\nabla X_i = 0 \quad ,$$

[3] Eine Unterscheidung zwischen ρ und $\tilde{\rho}$ müsste auch hier vorgenommen werden, da sich die Dichte allein aufgrund des durch Kernfusion hervorgerufenen Massendefekts ändern kann. Die hierdurch entstehenden Fehler sind – wie schon diskutiert – vernachlässigbar.

und dies ergibt zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (1.23) eine Kontinuitätsgleichung für die Masse ρX_i einer Komponente der Mixtur:

$$\frac{\partial(\rho X_i)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho X_i u) = 0 \quad . \tag{1.24}$$

Infolge der Diffusion kommt es zu einem Stofftransport, wenn die Flüssigkeit ruht, und dieser Diffusionsfluss j_i muss in Gleichung (1.24) als zusätzlicher Quellterm berücksichtigt werden:

$$\frac{\partial(\rho X_i)}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho X_i u) - \nabla\cdot j_i \quad . \tag{1.25}$$

Unter Vernachlässigung der Thermo- und Barodiffusion erhält man einen Diffusionsfluss für reine Konzentrationsdiffusion:

$$j_i = -\rho D\,\nabla X_i \quad .$$

Der Diffusionskoeffizient

$$D = \alpha_\mathrm{M}\, u_\mathrm{c}\, \Lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha_\mathrm{M}\,\alpha_\mathrm{ML}\, H_\mathrm{P}\, \bar{\omega}^{1/2}$$

wird hier aus der Konvektionstheorie bestimmt. Weitere Beiträge zu D, wie z.B. die atomare Diffusion, werden nicht berücksichtigt. Der Diffusionsfluss j_i, eingesetzt in Gleichung (1.25), führt im Fall sphärischer Symmetrie und gleichzeitiger Transformation auf Lagrangekoordinaten auf die gesuchte Diffusionsgleichung:

$$\frac{\mathrm{D}X_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\sigma_\mathrm{D}\frac{\partial}{\partial m}X_i\right) \quad .$$

Dabei wurde die abkürzende Schreibweise $\sigma_\mathrm{D} = (4\pi r^2\rho)^2 D$ eingeführt.

1.3 Randbedingungen

Bekanntlich hängt die Lösung oder sogar die Lösbarkeit der Gleichungen von den Randbedingungen ab. Aber selbst wenn für gegebene Randbedingungen eine Lösung existiert, muss diese nicht zwangsläufig physikalisch realisierbar oder im zu beschreibenden physikalischen Objekt realisiert sein. Aus diesem Grund stellen die Randbedingungen stets einen Teil des physikalischen Problems dar.

1.3.1 Zentrale Randbedingungen

Die Randbedingungen im Zentrum des Sterns, definiert bei $m = 0$, können sofort angegeben werden. Eine physikalisch sinnvolle Forderung verlangt, dass die Dichte im Zentrum einen endlichen, nichtverschwindenden Wert haben soll (z.B. Kippenhahn & Weigert, 1990). Dann muss für $m \to 0$ auch $r \to 0$ streben. Auch die Energiequellen müssen endlich bleiben, und deshalb muss auch die Leuchtkraft l verschwinden:

$$m = 0: \qquad r = 0 \quad , \quad l = 0 \quad .$$

Über die zentralen Werte des Drucks P_c und der inneren Energie e_c lassen sich a priori keine Aussagen machen. Für die turbulente kinetische Energie $\bar{\omega}$ und die Elementkonzentrationen X_i werden reflektierende Randbedingungen angenommen:

$$m = 0 : \qquad \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial m}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial m}\right) = 0 \quad .$$

Die Randbedingung für die turbulente kinetische Energie hat keine Auswirkungen auf das hier verwendete Gleichungssystem, da das Overshooting nicht berücksichtigt wird.

1.3.2 Oberflächen-Randbedingungen

Die Bedingungen an der Oberfläche des Sterns sind komplizierter. Hier stellt sich zunächst die Frage, wie überhaupt die Oberfläche eines Sterns definiert werden kann. In den hier betrachteten Entwicklungsphasen kann man die Oberfläche und den Gesamtradius des Sterns $r = R$ durch die Photosphäre definieren, von der ein Großteil der Strahlung ins kalte Universum emittiert wird. Mit der Theorie der Sternatmosphären kann man zeigen, dass die Photosphäre bei einer optischen Tiefe $\tau_\mathrm{phot} = 2/3$ liegt. Im hydrostatischen Gleichgewicht ist dann der Druck in der Photosphäre gegeben (siehe Kippenhahn & Weigert, 1990, S. 70) durch

$$P(r = R) = \frac{GM}{R^2}\frac{2}{3}\frac{1}{\bar{\kappa}} \quad . \tag{1.26}$$

Hier wurde eine über die gesamte Atmosphäre gemittelte Opazität $\bar{\kappa}$ definiert. Die Temperatur der Photosphäre ist gleich der Effektivtemperatur T_eff, die im Stern definiert ist durch

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_\mathrm{eff}^4 \quad . \tag{1.27}$$

Gleichungen (1.26, 1.27) sind die sogenannten photosphärischen Randbedingungen. Das größte Problem an diesen Bedingungen ist, dass sie an einem Ort definiert sind, an dem die Transportgleichung (1.14) nicht mehr gilt, weil dort die Diffusionsapproximation (1.5) zusammenbricht. Die Modellierung einer realistischen Atmosphäre stellt ein eigenes Problem dar, das in dieser Arbeit nicht angegangen wurde. In ausgedehnten Hüllen, in denen eine Photosphäre nicht sinnvoll definiert werden kann, sind auch die vorgestellten photosphärischen Randbedingungen bedeutungslos.

Die weiteren Randbedingungen ergeben sich aus folgender Überlegung: Da die Entwicklung bei konstanter Masse modelliert werden soll, darf kein Stofftransport über die Sternoberfläche stattfinden:

$$m = M : \qquad \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial m}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial m}\right) = 0 \quad .$$

Da das Overshooting vernachlässigt wurde, besteht keine räumliche Koppelung der turbulenten kinetischen Energie, und deshalb hat die Randbedingung für $\bar{\omega}$ keinen Einfluss auf das hier verwendete Gleichungssystem.

1.4 Materialfunktionen

Neben den Strukturvariablen der Sternaufbaugleichungen (r, P, e, l, $\bar{\omega}$) kommen in den Gleichungen eine Reihe weiterer Größen vor, die ausschließlich vom thermodynamischen Zustand des Gases oder der Strahlung abhängen. Jeder thermodynamische Zustand ist durch zwei Zustandsvariablen und die chemische Zusammensetzung vollständig festgelegt (z.B. durch P, e, X_i). Diese *Materialfunktionen* werden nun zusammengestellt. Eine ausführlichere Diskussion ist in Kippenhahn & Weigert (1990) auf S. 101ff zu finden.

1.4.1 Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und Dichte eines Gases. Der Gesamtdruck des Gases setzt sich aus dem Gasdruck und dem Strahlungsdruck zusammen (siehe Abschnitt 1.2.2):

$$P(\rho, T, X_i) = P_{\mathrm{gas}} + P_{\mathrm{rad}} = \frac{\mathfrak{R}}{\mu}\,\rho T + \frac{a}{3} T^4 \quad , \tag{1.28}$$

wobei $\mathfrak{R}$ die Gaskonstante, a die Strahlungskonstante und μ das mittlere Molekulargewicht ist. Für den Gasdruck wurde ein ideales Gas angenommen, das vollständig ionisiert ist. Eine realistischere Behandlung müsste in der äußeren Hülle des Sterns den Ionisationsgrad von Wasserstoff und Helium berücksichtigen. Kristallisation und Entartung des Elektronengases treten in den betrachteten Entwicklungsphasen nicht auf. Statt der Temperatur ist es in der vorgestellten Formulierung der Sternaufbaugleichungen zweckmäßiger, die innere Energie als Variable zu verwenden:

$$e(\rho, T, X_i) = \frac{3}{2}\frac{\mathfrak{R}}{\mu} T + \frac{a T^4}{\rho} \quad . \tag{1.29}$$

Umkehrfunktionen der Gleichungen (1.28, 1.29), die allerdings nicht in geschlossener Form ausgeschrieben werden können, liefern die Dichte und Temperatur in Abhängigkeit von den verwendeten Strukturvariablen P, e und X_i:

$$\rho = \rho(P, e, X_i) \quad , \quad T = T(P, e, X_i) \quad .$$

1.4.2 Mittleres Molekulargewicht

Das mittlere Molekulargewicht, das in der Zustandsgleichung vorkommt, ist für ein vollständig ionisiertes Gas durch folgenden Zusammenhang gegeben:

$$\mu = \left(\sum_i \frac{X_i (1 + Z_i)}{W_i} \right)^{-1} \quad .$$

Dabei ist Z_i die Ladungszahl des i-ten Elements. Durch die Einführung des mittleren Molekulargewichts kann man das vollständig ionisierte Gas einer Mixtur formal genauso beschreiben wie ein Einkomponentengas.

1.4.3 Opazitäten

Die Opazitäten beschreiben die Wechselwirkung von Strahlung und Materie. Für die Berechnung der Opazität müssen alle möglichen Strahlungsübergänge jeder vorkommenden chemischen Spezies berücksichtigt werden. Das stellt insbesondere für die schwereren Elemente mit ihren komplexen Niveau-Schemata hohe Anforderungen an die Atomphysik. Für realistische Sternentwicklungsrechnungen ist es daher unerlässlich, Opazitäten zu verwenden, die durch Interpolation im ρ-T-X_i-Raum aus sorgfältig berechneten Opazitätstabellen gewonnen werden. Da in dieser Arbeit nicht die exakte Modellierung, sondern vielmehr ausgewählte Prozesse wie die Kernreaktionen und das Mischen im Vordergrund stehen, wird die Opazität durch eine vereinfachende analytische Formel approximiert, die zudem den Vorteil bietet, die Rechenzeit der Modelle nicht noch weiter in die Höhe zu treiben. In massereichen Sternen ist der dominierende Beitrag zur Opazität die Elektronenstreuung oder Thomson-Streuung:

$$\kappa = 0.20\,(1 + X_{\rm H}) \quad {\rm cm}^2\ {\rm g}^{-1} \quad .$$

Bei den hohen Zentraltemperaturen, die in massereichen Population-III-Sternen erreicht werden, spielen zudem relativistische Korrekturen eine Rolle. Die Compton-Streuung reduziert die Opazität bei $T = 10^8$K um 20% (Kippenhahn & Weigert, 1990, S. 138); dieser Prozess wurde jedoch nicht berücksichtigt. Obwohl schon Population-III-Modelle mit realistischeren Opazitäten gerechnet wurden (Marigo et al., 2001), existieren noch keine Rechnungen, die mit einer Opazität für $Z = 0$ starten und dann die in massereichen Population-III-Sternen autogen produzierten Metalle in den Opazitäten berücksichtigen.

1.4.4 Thermodynamische Größen

In den Sternaufbaugleichungen werden noch einige weitere thermodynamische Größen benötigt. Die hier benutzten Gleichungen werden ohne Herleitung angegeben und beschreiben gut ein ideales Gas mit Strahlung. Im Treiberterm (1.17) für die turbulente kinetische Energie taucht der adiabatische Gradient der Schichtung

$$\nabla_{\rm ad} = \frac{\delta\,P}{\rho\,T\,c_P}$$

auf. Die spezifische Wärme berechnet sich gemäß:

$$c_P = \left(\frac{3}{2} + \delta\right)\frac{\mathfrak{R}}{\mu} + \frac{4(3+\delta)}{3}\frac{aT^3}{\rho}$$

mit der Temperatur-Kompressibilität

$$\delta = \frac{P + aT^4}{P - \frac{a}{3}T^4} \quad .$$

Die Druckskalenhöhe

$$H_{\rm P} = \frac{r^2 P}{Gm\rho}$$

für eine hydrostatische Schichtung kommt in den Gleichungen (1.15, 1.19) vor.

1.4.5 Reaktionsraten

Die Reaktionsraten λ, $<\sigma v>_{jk}$ und $<\sigma v>_{jkl}$, die in der Ratengleichung (1.22) für die Kernreaktionen vorkommen, sind ein mittleres Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass die zugehörige Reaktion eintritt. Die Reaktionsrate λ ist im Fall von β-Zerfällen eine Atomkonstante. Im Fall von Elektroneneinfang ist λ noch von der Temperatur, Dichte und Zahl der vorhandenen Elektronen abhängig. Die Berechnung von Zweierstößen ist komplizierter. Da es sich um geladene Teilchen handelt, ist der Wirkungsquerschnitt der Teilchen $\sigma = \sigma(v)$ abhängig von der Geschwindigkeit v der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem. Die Reaktionsrate muss dann zusätzlich mit der Geschwindigkeit des Teilchenflusses multipliziert sowie geeignet über das Geschwindigkeitsspektrum des Teilchenensembles gemittelt werden. Befindet sich das ideale Gas im thermodynamischen Gleichgewicht, so ist das Geschwindigkeitsspektrum durch eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung gegeben, sodass sich die Reaktionsrate mit der reduzierten Masse $\mu_{\rm red}$ und der Boltzmannkonstante $k_{\rm B}$ wie folgt berechnet (Clayton, 1983, S. 296):

$$<\sigma v>_{jk} = 4\pi \left(\frac{\mu_{\rm red}}{2\pi k_{\rm B} T}\right)^{2/3} \int\limits_0^\infty v^3 \sigma(v)\, \exp\left(-\frac{\mu_{\rm red}\, v^2}{2 k_{\rm B} T}\right)\, {\rm d}v \quad .$$

Die gesamte Atomphysik steckt im Wirkungsquerschnitt $\sigma(v)$, und dieser muss entweder gemessen oder über ein detailliertes Kernmodell berechnet werden. Die meisten astrophysikalisch relevanten Reaktionsraten der Kernreaktionen sind tabelliert. Hier werden vorwiegend die Reaktionsraten der NACRE-Kollaboration (Angulo et al., 1999) verwendet. Folgende Bezeichnungen sind üblich:

$$\begin{aligned} \lambda_{jk} &= N_{\rm A}\ <\sigma v>_{jk} \quad [{\rm cm^3\, mol^{-1}\, s^{-1}}] \quad , \\ \lambda_{jkl} &= N_{\rm A}^2\ <\sigma v>_{jkl} \quad [{\rm cm^3\, mol^{-2}\, s^{-1}}] \quad . \end{aligned}$$

1.4.6 Energieproduktion

Die Energieproduktionsrate ist gleich der freiwerdenden Energie pro Reaktion, multipliziert mit der Reaktionsrate und den Teilchendichten:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\rm nuc} = \frac{1}{\rho} \sum_{r=1}^{\#\,\rm Reakt.} (Q - <q_\nu>)_i\, \lambda_j\, \frac{A_i}{A_j} X_j + \sum_{i=1}^{\#\,\rm Reakt.} (Q - <q_\nu>)_i\, c(j,k)\, \lambda_{jk} \frac{A_i}{A_j A_k} X_j X_k \\ + \sum_{i=1}^{\#\,\rm Reakt.} (Q - <q_\nu>)_i\, c(j,k,l)\, \rho\, \lambda_{jk} \frac{A_i}{A_j A_k A_l} X_j X_k X_l \quad [{\rm erg\ g^{-1}\ s^{-1}}]. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Die mittlere Neutrinoenergie $< q_\nu >$ wird von der freigesetzten Energie Q abgezogen, da die Sternmaterie für Neutrinos praktisch durchsichtig ist und deshalb diese Energie mit dem thermo-energetischen Teil der Sternentwicklungsgleichungen nicht wechselwirken kann. Die Zahlenkoeffizienten $c(j,k)$ und $c(j,k,l)$ vermeiden Mehrfachzählungen identischer Teilchen:

$$\begin{aligned} c(j,k) &= \frac{1}{N_j! N_k!} \quad , \\ c(j,k,l) &= \frac{1}{N_j! N_k! N_l!} \quad . \end{aligned}$$

1.5 Gleichungen im Überblick

Im Folgenden werden die verwendeten Gleichungen zusammenfassend dargestellt. Die Sternaufbaugleichungen sind differenziell formuliert und auf Lagrangekoordinaten bezogen, d.h. die unabhängigen Variablen sind die Masse m und die Zeit t. Alle verwendeten Strukturvariablen, r, P, e, $\bar{\omega}$, X_i, hängen von m und t ab. $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ bezeichnet die Zeitableitung in mitbewegten Koordinaten (bezogen auf die Masse).

Tafel I Sternaufbaugleichungen

$0 = \frac{\partial r}{\partial m} - \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$	Integrierte Poisson-Gleichung
$0 = -\frac{\partial P}{\partial m} - \frac{Gm}{4\pi r^4}$	Hydrostatik
$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \epsilon_{\mathrm{nuc}} - \frac{\partial l}{\partial m}$	Energiegleichung
$0 = \frac{\partial \ln T}{\partial m} - \frac{\partial \ln P}{\partial m}\nabla$	Transportgleichung
$\frac{\mathrm{D}\bar{\omega}}{\mathrm{D}t} = S_{\bar{\omega}} - \tilde{S}_{\bar{\omega}}$	Turbulente kinetische Energiegleichung
$\frac{\mathrm{D}X_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\sigma_{\mathrm{D}}\frac{\partial}{\partial m}X_i\right) + \sum_j c_i(j)\,\lambda_j \frac{A_i}{A_j}X_j + \sum_{j,k} c_i(j,k)\,\rho\lambda_{jk}\frac{A_i}{A_j A_k}X_j X_k + \sum_{j,k,l} c_i(j,k,l)\,\rho^2\lambda_{jkl}\frac{A_i}{A_j A_k A_l}X_j X_k X_l$	Mischen & Kernreaktionen
$\nabla = \nabla_{\mathrm{rad}} - \frac{H_{\mathrm{P}}\rho\,\Pi}{k_{\mathrm{rad}}}$	Gradient der Schichtung
$S_{\bar{\omega}} = \frac{T}{H_{\mathrm{P}}}\,\nabla_{\mathrm{ad}}\,\Pi$	Turbulenter Treiber
$\tilde{S}_{\bar{\omega}} = c_{\mathrm{D}}\frac{\bar{\omega}^{3/2}}{\Lambda}$	Turbulente Dissipation
$\sigma_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(4\pi r^2\rho)^2\,\alpha_{\mathrm{M}}\,\alpha_{\mathrm{ML}}\,H_{\mathrm{P}}\,\bar{\omega}^{1/2}$	Diffusionseffizienz
$\nabla_{\mathrm{rad}} = \frac{H_{\mathrm{P}}}{k_{\mathrm{rad}}T}\frac{l}{4\pi r^2}$	Radiativer Gradient

Tafel I (Fortsetzung)

$$\Pi = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{w}{T}}\bar{\omega}^{1/2}F_{\mathrm{L}}\left[-\frac{4\pi\sqrt{3}r^2\rho\alpha_s\Lambda}{\sqrt{2}\,w}\left(\frac{\partial e}{\partial m}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)\right]$$	Geschwindigkeits-korrelation
$$F_{\mathrm{L}}[x] = \begin{cases} x & x < 0.9 \\ 0.9 + 0.1\ \tanh\left(\frac{x-0.9}{0.1}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$	Flusslimiter
$$\Lambda = \alpha_{\mathrm{ML}}\,H_{\mathrm{P}}$$	Mischungsweglänge
$$H_{\mathrm{P}} = \frac{r^2 P}{Gm\rho}$$	Druckskalenhöhe
$$k_{\mathrm{rad}} = \frac{4acT^4}{3\kappa\rho}$$	Modifizierte Strahlungskonstante

Tafel II Materialfunktionen

$$P = \frac{\mathfrak{R}}{\mu}\,\rho\,T + \frac{a}{3}T^4$$	Zustandsgleichung
$$e = \frac{3}{2}\frac{\mathfrak{R}}{\mu}T + \frac{aT^4}{\rho}$$	Innere Energie
$$w = e + \frac{P}{\rho}$$	Enthalpie
$$\nabla_{\mathrm{ad}} = \frac{\delta\,P}{\rho\,T\,c_P}$$	Adiabatischer Gradient
$$c_P = \left(\frac{3}{2}+\delta\right)\frac{\mathfrak{R}}{\mu} + \frac{4(3+\delta)}{3}\frac{aT^3}{\rho}$$	Spezifische Wärme
$$\delta = \frac{P + aT^4}{P - \frac{a}{3}T^4}$$	Temperatur-kompressibilität
$$\mu = \left(\sum_i \frac{X_i(1+Z_i)}{W_i}\right)^{-1}$$	Molekulargewicht
$$\kappa = 0.20\,(1 + X_{\mathrm{H}})$$	Opazität
$$\lambda = \lambda(P, e, X_i)$$	Reaktionsraten (siehe Anhang B)
$$\epsilon_{\mathrm{nuc}} = \epsilon_{\mathrm{nuc}}(P, e, X_i)$$	Energieproduktion (siehe Gl. 1.30)

2 Numerisches Verfahren

Bei der numerischen Behandlung astrophysikalischer Fragestellungen hat man es typischerweise mit nichtlinearen, gekoppelten differenzial-algebraischen Gleichungen zu tun, die über viele Dekaden in Raum und Zeit gelöst werden müssen. Dies stellt hohe Anforderungen an das numerische Verfahren. Daher war es in der Vergangenheit geboten, dieses an das jeweilige Problem anzupassen. Dieses Paradigma führte zu einer untrennbaren Verzahnung des physikalischen Problems mit der Numerik. Die Vorteile dieser Herangehensweise liegen in problemangepassten Geschwindigkeitsoptimierungen sowie der Möglichkeit, Fehlern bis auf die unterste Stufe des numerischen Verfahrens nachzugehen. Nachteile sind die fehlende Transparenz der implementierten Physik und zeitraubende Programmierarbeit bei nur kleinen Veränderungen am Gleichungssystem.

Fortschritte bei den numerischen Lösern der Mathematiker haben es in den letzten Jahren möglich gemacht, auch in der Astrophysik sogenannte *Black-Box*-Löser zum Einsatz zu bringen. In dieser Arbeit wird das Programmpaket LIMEX (Ehrig & Nowak, 1998) erstmals erfolgreich in der Astrophysik eingesetzt. Dabei ist es gelungen, die Sternaufbaugleichungen zusammen mit den Kernreaktionen und dem Mischen vollständig gekoppelt und implizit zu integrieren – dies wird von keinem der gängigen Codes beherrscht. Bei der Entwicklung hat sich insbesondere die numerische Berechnung der Jacobi-Matrix durch LIMEX zeitsparend ausgewirkt. Die wichtigsten Besonderheiten von LIMEX werden im Folgenden beschrieben.

2.1 LIMEX

Das Akronym LIMEX steht für *Linear IMplicit Euler method with eXtrapolation* und bezeichnet einen Löser für differenzial-algebraische-Gleichungen (DAE). Die Lösungsmethode geht zurück auf Arbeiten von Deuflhard (1985) und Deuflhard & Nowak (1987) und wird z.Zt. am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin von Ehrig & Nowak (1998) verbessert, erweitert und betreut. LIMEX ist ein Zeitintegrator für DAE's der Form

$$B(t,\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{y}) \quad ,$$

und kommt insbesondere mit steifen Gleichungssystemen zurecht, die in der Sternentwicklung bei den Kernreaktionsnetzwerken auftreten. Wenn die Matrix B die Einheitsmatrix ist, dann hat man ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen. LIMEX erlaubt auch eine singuläre B Matrix, da es algebraische Gleichungen lösen kann. Die Zeitintegration wird durch eine linear-implizite[1] Euler-Diskretisierung bewerkstelligt:

$$(B(t_n,\mathbf{y}_n) - hJ) \cdot (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) = h\,\mathbf{f}(t_{n+1},\mathbf{y}_n) \quad .$$

[1] Linear-implizit wird häufig synonym zu semi-implizit gebraucht.

Größen mit Index n bzw. $n+1$ beziehen sich auf den Zeitpunkt t_n respektive t_{n+1}. Die zeitliche Schrittweite wird mit h bezeichnet.

$$J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{y}}\left(\mathbf{f} - B\,\mathbf{y}\right)$$

ist die Jacobi-Matrix des Residuums des Systems. In LIMEX ist dieses Verfahren kombiniert mit einer Extrapolation $h \to 0$ und einer adaptiven Schrittweitensteuerung und Ordnungskontrolle.

2.2 Restriktionen von LIMEX

In der vorliegenden LIMEX-Version gibt es die folgenden Einschränkungen an den Lösungsvektor $\mathbf{y}$ und die rechte Seite $\mathbf{f}$:

$$\frac{|\mathbf{y}|_{\max}}{|\mathbf{y}|_{\min}} < 10^5 \quad ,$$

$$\frac{|\mathbf{f}|_{\max}}{|\mathbf{f}|_{\min}} < 10^{20} \quad .$$

Diese Schranken müssen sowohl in Zeit als auch Raum eingehalten werden. Insbesondere die Bedingung für den Lösungsvektor $\mathbf{y}$ ist in astrophysikalischen Anwendungen ein Problem, will man nicht nach jedem Zeitschritt alle Variablen renormieren. Eine häufige Renormierung wirkt sich negativ auf die Leistung von LIMEX aus, weil die Informationen der Vorgängerlösung verloren gehen. Um diese Probleme zu umgehen, werden hier alle Strukturvariablen logarithmiert. Dies ist besonders unschön für die Leuchtkraft l, die als Vektorgröße definiert ist. In den untersuchten Entwicklungsphasen treten keine negativen Leuchtkräfte auf, doch verliert der Code dadurch an Allgemeingültigkeit.

Eine weitere wichtige Einschränkung ist, dass LIMEX nicht mit Einschaltvorgängen zurecht kommt, welche in den klassischen Sternentwicklungsprogrammen vorkommen. So wird beispielsweise bei der Verwendung der Mischungswegtheorie die Konvektion aufgrund des Schwarzschild-Ledoux-Kriteriums angeschaltet. Aber auch bei den Kernreaktionen liegen Ratenkoeffizienten nur in bestimmten Temperaturbereichen vor, sodass bestimmte Reaktionen während der Entwicklung an- und abgeschaltet werden. Eigene numerische Versuche mit LIMEX haben gezeigt, dass Einschaltvorgänge zu unerwarteten Abbrüchen (im Fall von Konvektion) oder zu numerischen Oszillationen und Instabilitäten (im Fall der Kernreaktionen) führen. Mit einer verbesserten Theorie für die Konvektion (Abschnitt 1.2.4) sowie der Extrapolation von Ratenkoeffizienten hin zu niedrigeren Temperaturbereichen konnten alle Einschaltvorgänge vermieden werden.

2.3 Diskretisierung

Während die zeitliche Diskretisierung des Problems von LIMEX übernommen wird, so ist dies für die räumliche Diskretisierung nicht der Fall. Die Diskretisierung ist ein eigenes Problem, das allen endlichen Volumenverfahren inhärent ist. Die spezielle Wahl der Diskretisierung ist bei Verwendung von LIMEX zusätzlich durch die im vorigen Abschnitt 2.2 beschriebenen Restriktionen eingeschränkt. Ausgegangen wird von der Formulierung des Gleichungssystems in Abschnitt 1.5, Tafel I. Die Diskretisierung erfolgt auf einem gestaffelten Gitter, bei dem die Vektorgrößen r und l an den Zellrändern und die skalaren Größen P, e, X_i an den Zellmittelpunkten definiert sind. Die turbulente kinetische Energie $\bar{\omega}$ wurde ebenfalls an den Zellrändern definiert, obwohl es sich um eine skalare Größe handelt. Die Zellränder sind durch die k Massenschalen m_k definiert. Die in der k-ten Massenschale enthaltene Masse ist:

$$\Delta m_k = m_k - m_{k-1} \quad .$$

Die Notation $k \pm 1/2$ bezeichnet das arithmetische Mittel einer Größe f:

$$f_{k\pm 1/2} = \frac{f_k + f_{k\pm 1}}{2} \quad .$$

Wie schon oben erwähnt, werden aufgrund des Skalierungsproblems in LIMEX alle Strukturvariablen mit dem natürlichen Logarithmus logarithmiert, d.h. die Variablen im Lösungsvektor sind $\mathbf{y} = \{(\ln r)_k, (\ln P)_k, (\ln e)_k, (\ln l)_k, (\ln \bar{\omega})_k, (\ln X_i)_k\}$. Die Vektorgrößen werden von $k = 0 \ldots n$ und die skalaren Größen von $k = 1 \ldots n+1$ durchnummeriert, sodass die inneren Randbedingungen bei r_0 und l_0, die äußeren bei P_{n+1} und e_{n+1} gestellt werden. Das diskretisierte Gleichungssystem kann direkt von LIMEX integriert werden, wenn eine Anfangslösung vorliegt, die gut auf dem gewählten Gitter repräsentiert ist (siehe Abschnitt 4.1).

Tafel III Diskretisierung

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{\Delta m_k} - \frac{3}{4\pi \rho_k} \\
0 &= -\frac{P_{k+1} - P_k}{\Delta m_{k+1/2}} - \frac{G m_k}{4\pi r_k^4} \\
e_k \frac{\mathrm{D}(\ln e)_k}{\mathrm{D}t} - \frac{P_k}{\rho_k}\frac{\mathrm{D}(\ln \rho)_k}{\mathrm{D}t} &= (\epsilon_{\mathrm{nuc}})_k - \frac{l_k - l_{k-1}}{\Delta m_k} \\
0 &= \frac{(\ln T)_{k+1} - (\ln T)_k}{\Delta m_{k+1/2}} - \frac{(\ln P)_{k+1} - (\ln P)_k}{\Delta m_{k+1/2}} \nabla_k \\
\bar{\omega}_k \frac{\mathrm{D}(\ln \bar{\omega})_k}{\mathrm{D}t} &= (S_{\bar{\omega}})_k - (\tilde{S}_{\bar{\omega}})_k \\
(X_i)_k \frac{\mathrm{D}(\ln X_i)_k}{\mathrm{D}t} &= \left[\sigma_k \frac{(X_i)_{k+1} - (X_i)_k}{\Delta m_k \Delta m_{k+1/2}} - \sigma_{k-1}\frac{(X_i)_k - (X_i)_{k-1}}{\Delta m_k \Delta m_{k-1/2}}\right] \\
&\quad + \sum_j c_i(j)\, \lambda_j \frac{A_i}{A_j}(X_j)_k \\
&\quad + \sum_{j,m} c_i(j,m)\, \rho_k \lambda_{jm} \frac{A_i}{A_j A_m}(X_j)_k (X_m)_k \\
&\quad + \sum_{j,l,m} c_i(j,l,m)\, \rho_k^2 \lambda_{jlm} \frac{A_i}{A_j A_l A_m}(X_j)_k (X_l)_k (X_m)_k
\end{aligned}$$

Tafel III (Fortsetzung)

$$\nabla_k = (\nabla_{\rm rad})_k - \frac{(H_{\rm P})_k\,\rho_{k+1/2}\,\Pi_k}{(k_{\rm rad})_{k+1/2}}$$

$$(S_{\bar\omega})_k = \frac{T_{k+1/2}}{(H_{\rm P})_k}\,(\nabla_{\rm ad})_{k+1/2}\,\Pi_k$$

$$(\tilde S_{\bar\omega})_k = c_{\rm D}\frac{\bar\omega_k^{3/2}}{\Lambda_k}$$

$$\sigma_k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(4\pi r_k^2\,\rho_{k+1/2}\,)^2\,\alpha_{\rm M}\,\alpha_{\rm ML}\,(H_{\rm P})_k\,\bar\omega_k^{1/2}$$

$$(\nabla_{\rm rad})_k = \frac{(H_{\rm P})_k}{(k_{\rm rad})_{k+1/2}\,T_{k+1/2}}\frac{l_k}{4\pi r_k^2}$$

$$\Pi_k = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{w_{k+1/2}}{T_{k+1/2}}\bar\omega_k^{1/2} \times F_{\rm L}\left[-\frac{4\pi\sqrt{3}\,r_k^2\rho_{k+1/2}\alpha_s\Lambda_k}{\sqrt{2}\,w_{k+1/2}\,\Delta m_{k+1/2}}\left((e_{k+1}-e_k)-\frac{P_{k+1/2}}{\rho_{k+1/2}^2}(\rho_{k+1}-\rho_k)\right)\right]$$

$$\Lambda_k = \alpha_{\rm ML}\,(H_{\rm P})_k$$

$$(H_{\rm P})_k = \frac{r_k^2 P_{k+1/2}}{G m_k \rho_{k+1/2}}$$

$$(k_{\rm rad})_k = \frac{4acT_k^4}{3\kappa_k\rho_k}$$

2.4 Saatkonvektion

Die Gleichung für die turbulente kinetische Energie (1.16) umfasst immer zwei Lösungsäste: die Nullösung mit $\bar\omega \equiv 0$ und eine von Null verschiedene Lösung, bei der in stabilen Situationen $\bar\omega$ zwar fortwährend exponentiell abfällt, jedoch immer einen nicht-verschwindenden, endlichen Wert behält. Im konvektiv stabilen Regime ist es von Vorteil, wenn man sich auf dem Ast der Nulllösung befindet, da man meistens nicht an einer genauen Berechnung des Abklingprozesses interessiert ist, der zudem unnötig Rechenzeit beansprucht. Andererseits kann der Ast der Nulllösung nur durch eine zwar beliebig kleine, jedoch endliche turbulente kinetische Energie $\bar\omega$ verlassen werden. Aus physikalischer Sicht stellt dies keine Schwierigkeit dar, da es immer endliche Fluktuationen konvektiver Wirbel geben wird, die auch als *Saatkonvektion* bezeichnet werden. In dieser Arbeit wird mit der logarithmierten turbulenten kinetischen Energie ($\ln\bar\omega$) als Variable die vorhandene Nullösung ausgeschlossen, allerdings muss man dann eine nicht-verschwindende Saatkonvektion annehmen. Wird diese zu groß gewählt, dann werden die Ergebnisse verfälscht, da die physikalisch richtige Lösung die Nulllösung ist. Wird die Saatkonvektion zu klein gewählt, dann zeigt das numerische Verfahren eine schlechte Konvergenz. Saatkonvektion wirkt ähnlich wie eine künstliche Viskosität, welche Stoßfronten über mehrere numerische Gitterzellen verbreitert. Technisch wird die Saatkonvektion über einen weiteren additiven Term auf der rechten Seite der Gleichung (1.16) für die turbulente kinetische Energie gesteuert:

$$1 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{t}{10^5 [s]} \right)^{0.7} \quad .$$

Dieser Term fügt mit anwachsender Zeit t etwas mehr Saatkonvektion hinzu. Die auf diese Weise festgesetzte Saatkonvektion ist so klein, dass die Gradienten der chemischen Spezies an der Grenzschicht zwischen konvektiver und radiativer Zone ausgeprägt sichtbar bleiben (siehe Kapitel 4).

2.5 Numerische Instabilitäten?

In einigen der durchgeführten Modellrechnungen treten kurz vor dem Erreichen der Hauptreihe zeitlich gut aufgelöste, nichtlineare Oszillationen auf, die am ausgeprägtesten in einem Modell mit Population-II-Elementmischung und 150 räumlichen Punkten in der Energieproduktionsrate zu sehen sind (Abbildung 2.1). Wie es zu diesen Oszillationen kommt, konnte bisher nicht geklärt werden. Da die Amplitude der Oszillationen mit steigender räumlicher Punktauflösung sinkt sowie die Periodendauer abnimmt, hat man es vermutlich mit einem Artefakt der Numerik zu tun. Die Bedingungen, die zum Auftreten der Oszillationen führen, sind eng definierbar. Die Oszillationen setzen immer dann ein, wenn die Energieproduktion im CNO-Zyklus diejenige des pp-Brennens überschreitet, und sie verschwinden wieder, wenn die CNO-Isotope Gleichgewichtskonzentrationen erreichen. Obwohl in dieser Phase energetisch vom CNO-Brennen dominiert, treten die größten Amplituden in der Energieproduktion des pp-Brennens auf. Dies könnte ein sekundärer Effekt der im CNO-Brennen induzierten Temperatur- und Druckoszillationen sein, die jedoch in den Modellrechnungen

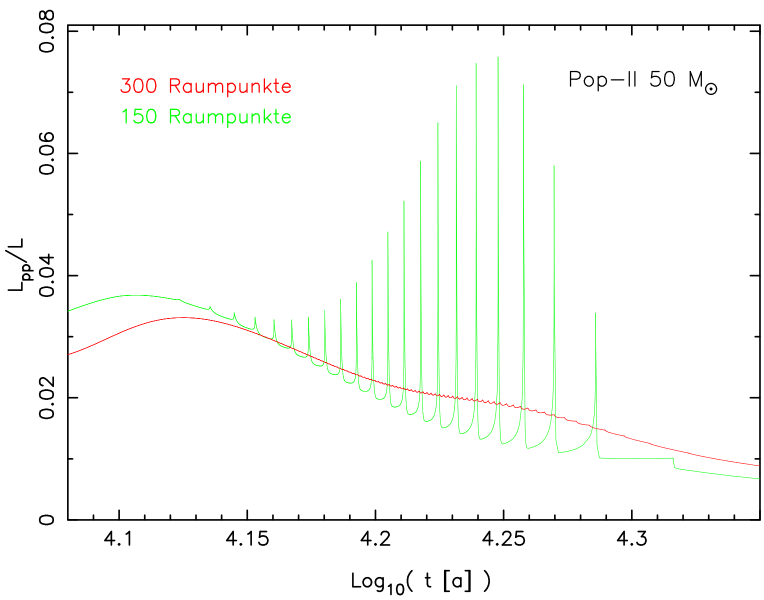

Abb. 2.1: Oszillationen aufgrund eines numerischen Artefakts oder aufgrund eines physikalischen Mechanismus?

nicht nachweisbar sind. Es kann sein, dass die Oszillationen in Druck und Temperatur dem Anstieg dieser Variablen auf der Vorhauptreihe überlagert und deshalb nicht zu sehen sind. Eine einfache, lineare Stabilitätsanalyse homologer Auslenkungen unter nicht-Gleichgewichtsbedingungen im CNO-Zyklus hat gezeigt, dass linear instabile, exponentiell ansteigende Moden existieren, die unter Gleichgewichtsbedingungen zwar nicht verschwinden, deren Lebensdauer im Gleichgewicht jedoch um vier bis fünf Größenordnungen verkleinert ist. Dass immer instabile Moden im CNO-Zyklus existieren, konnten Schwarzschild & Härm (1959) nachweisen. Diese Moden können in massereichen Sternen, die Strahlungsdruck dominiert sind, nicht mehr gedämpft werden und führen auf die bekannte vibrationelle Instabilität des ϵ-Mechanismus. Die Auswirkungen existierender instabiler Moden auf das Sternmodell kann nur durch eine nichtlineare Stabilitätsanalyse vorhergesagt werden. Die Abnahme der Amplitudenstärke mit verbesserter räumlicher Auflösung in diesen Modellrechnungen spricht dafür, dass ein effektiver Dämpfungsmechanismus existiert. Andererseits führt das verwendete numerische Verfahren der Rückwärtsdifferenzen eine starke Dämpfung ein, und die Erhöhung der räumlichen Punktzahl wirkt sich durch kleinere Schrittweiten ebenfalls dämpfend aus (private Mitteilung E. A. Dorfi). Eine genaue Untersuchung dieser Oszillationen mit anderen numerischen Verfahren ist wünschenswert, wurde in dieser Arbeit jedoch nicht angestrebt. Da alle Modelle mit der Annahme von hydrostatischem Gleichgewicht gerechnet wurden, sollte bei zukünftigen dynamischen Stabilitätsanalysen die nicht-Gleichgewichtsphase im CNO-Zyklus bei den Untersuchungen besondere Beachtung finden.

3 Kernreaktionen und Mischen

Die anfänglich nahezu völlige Abwesenheit von Metallen[1] führt bei massereichen Population-III-Sternen im Vergleich zu „normalen" massereichen Sternen zu Unterschieden bei den Opazitäten und den Kernreaktionen. Ezer (1961) erkannte als erster, dass massereiche Population-III-Sterne wegen der Ineffizienz der pp-Kette so lange weiter kontrahieren, bis sie soviel Kohlenstoff autogen über den 3α-Prozess erzeugt haben, dass der CNO-Zyklus mit einer Effizienz anlaufen kann, welche der Stern zur Deckung seiner Leuchtkraft benötigt.

Das Hauptaugenmerk in dieser Arbeit liegt auf der Wechselbeziehung zwischen den Kernreaktionen *ohne* jegliche Annahme von Gleichgewichtskonzentrationen und dem (quasi-hydrostatischen) inneren Aufbau eines Population-III-Sterns. Deshalb wird in diesem Kapitel zunächst der Frage nachgegangen, welche Kernreaktionen für die Hauptreihenentwicklung wichtig werden können. Dabei gilt es herauszufinden, ob nicht andere Reaktionswege bei den viel höheren Zentraltemperaturen von bis zu $1.4 \cdot 10^8$ K (siehe Kapitel 4) für die Energieproduktion wichtig werden. Die Ergebnisse dieser Rechnungen werden nun vorgestellt, gefolgt von einem Abschnitt über die Mischprozesse.

3.1 Kernreaktionen

Die Wichtigkeit einzelner Kernreaktionen für die Energieproduktion wird im Rahmen eines Einzonen-Modells untersucht, d.h. das zeitabhängige nukleare Netzwerk wird bei einer konstanten Temperatur und Dichte berechnet. Die numerische Integration erfolgt mit dem Programm LIMEX (Ehrig & Nowak, 1998). Die verwendeten Reaktionsraten kommen vorzugsweise von der NACRE-Kollaboration (Angulo et al., 1999). Die Raten, die von NACRE nicht erhältlich sind, kommen von anderen Autoren. Tabelle 3.1 zeigt alle verwendeten Reaktionen mit Quellennachweis der Raten. Es werden tabellierte Reaktionsraten genommen (siehe Anhang B), die in doppellogarithmischer Auftragung mit kubischen Splines interpoliert werden.

3.1.1 pp-Kette

Die für die Energieproduktion wichtigen Zweige in der pp-Kette werden im Temperaturbereich von 10^7 K – $1.5 \cdot 10^8$ K untersucht. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Abbildung 3.1 zu sehen. Die Referenzkurve zeigt die Energieproduktion bei Mitnahme der Zweige ppI bis ppIV (Abbildung 3.2). In Modellen, die von der Referenzrechnung abweichen, fehlen beitragende Zweige. Die Rechnungen bestätigen die in der Literatur bekannte Bedeutung der Zweige ppI bis ppIII (Clayton, 1983): Für $T < 10^7$ K ist der ppI-Zweig dominierend, zwischen $10^7\,\mathrm{K} < T < 2 \cdot 10^7$ K

[1] In der Astrophysik werden alle Elemente mit Ladungszahl $Z > 2$ als Metalle bezeichnet.

Tabelle 3.1: Untersuchte Nukleare Reaktionen

Nr.	Reaktion	Q [MeV]	$<q_\nu>$ [MeV]	Sequenz	Referenz
1	^{1}H(p,e$^+\nu$)^{2}H	1.442	0.265[a]	ppI	NACRE[c]
2	^{2}H(p,γ)^{3}He	5.493		ppI	NACRE[c]
3	^{3}He(α,γ)^{7}Be	1.587		ppII/III	NACRE[c]
4	^{3}He(^{3}He,2p)^{4}He	12.859		ppI	NACRE[c]
5	^{4}He(2α,γ)^{12}C	7.274		3α	NACRE[c]
6	^{7}Li(p,α)^{4}He	17.347		ppII	NACRE[c]
7	^{7}Be(e^-,ν)^{7}Li	0.862	0.862[a]	ppII	Bahcall (1989)
8	^{7}Be(p,γ)^{8}B	0.137		ppIII	NACRE[c]
9	^{7}Be(α,γ)^{11}C	7.544		ppV	NACRE[c]
10	^{8}Be(α)^{4}He	0.000		ppIII	
11	^{8}B(p,γ)^{9}C	1.296		ppIV	Wiescher et al. (1989)
12	^{8}B(β^+,ν)^{8}Be	18.071	6.710[a]	ppIII	Chang (2001)
13	^{11}B(p,γ)^{12}C	15.957			NACRE[c]
14	^{11}B(p,α)^{8}Be	8.682		ppV	NACRE[c]
15	^{9}C(α,p)^{12}N	6.711			Wiescher et al. (1989)
16	^{9}C($\beta^+\nu$)^{8}Be	16.683	0.0[e]	ppIV	Chang (2001)
17	^{11}C(p,γ)^{12}N	0.601			Wiescher et al. (1989)
18	^{11}C($\beta^+\nu$)^{11}B	1.982	0.0[e]		Chang (2001)
19	^{12}C(p,γ)^{13}N	1.943		CN	NACRE[c]
20	^{12}C(n,γ)^{13}C	4.947			Herndl et al. (1999)
21	^{13}C(p,γ)^{14}N	7.551		CN	NACRE[c]
22	^{13}C(α,n)^{16}O	2.216			NACRE[c]
23	^{13}C(n,γ)^{14}C	8.177			Herndl et al. (1999)
24	^{12}N($\beta^+\nu$)^{12}C	17.338	0.0[e]		Chang (2001)
25	^{13}N(p,γ)^{14}O	4.628		hot-CN	NACRE[c]
26	^{13}N($\beta^+\nu$)^{13}C	2.221	0.7067[b]	CN	Chang (2001)
27	^{14}N(p,γ)^{15}O	7.297		CN	NACRE[c]
28	^{14}N(α,γ)^{18}F	4.415			NACRE[c]
29	^{15}N(p,γ)^{16}O	12.129		^{17}ON	NACRE[c]
30	^{15}N(p,α)^{12}C	4.966		CN	NACRE[c]
31	^{14}O($\beta^+\nu$)^{14}N	5.143	0.7067[d]	hot-CN	Chang (2001)
32	^{15}O($\beta^+\nu$)^{15}N	2.754	0.9965[b]	CN	Chang (2001)
33	^{15}O(n,γ)^{16}O	15.688			Herndl et al. (1999)
34	^{16}O(p,γ)^{17}F	0.600		^{17}ON	NACRE[c]
35	^{17}O(p,γ)^{18}F	5.607		^{19}FO	NACRE[c]
36	^{17}O(p,α)^{14}N	1.192		^{17}ON	NACRE[c]
37	^{18}O(p,γ)^{19}F	7.996		^{19}FO	NACRE[c]
38	^{18}O(p,α)^{15}N	3.981		^{19}FO	NACRE[c]
39	^{18}O(α,γ)^{22}Ne	9.669			NACRE[c]
40	^{17}F($\beta^+\nu$)^{17}O	2.761	0.9994[b]	^{17}ON	Chang (2001)
41	^{18}F($\beta^+\nu$)^{18}O	1.655	0.0[e]	^{19}FO	Chang (2001)
42	^{19}F(p,α)^{16}O	8.115		^{19}FO	NACRE[c]
43	^{22}Ne(α,n)^{25}Ng	-0.478			NACRE[c]

[a] J.N. Bahcall 1989, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, S. 67
[b] J.N. Bahcall 1989, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, S. 72
[c] Angulo et al. (1999), URL: http://pntpm.ulb.ac.be/nacre.htm
[d] Wert in Literatur nicht gefunden. Dieser Wert sollte vergleichbar sein mit Wert aus Reaktion 26.
[e] Wert in Literatur nicht gefunden.

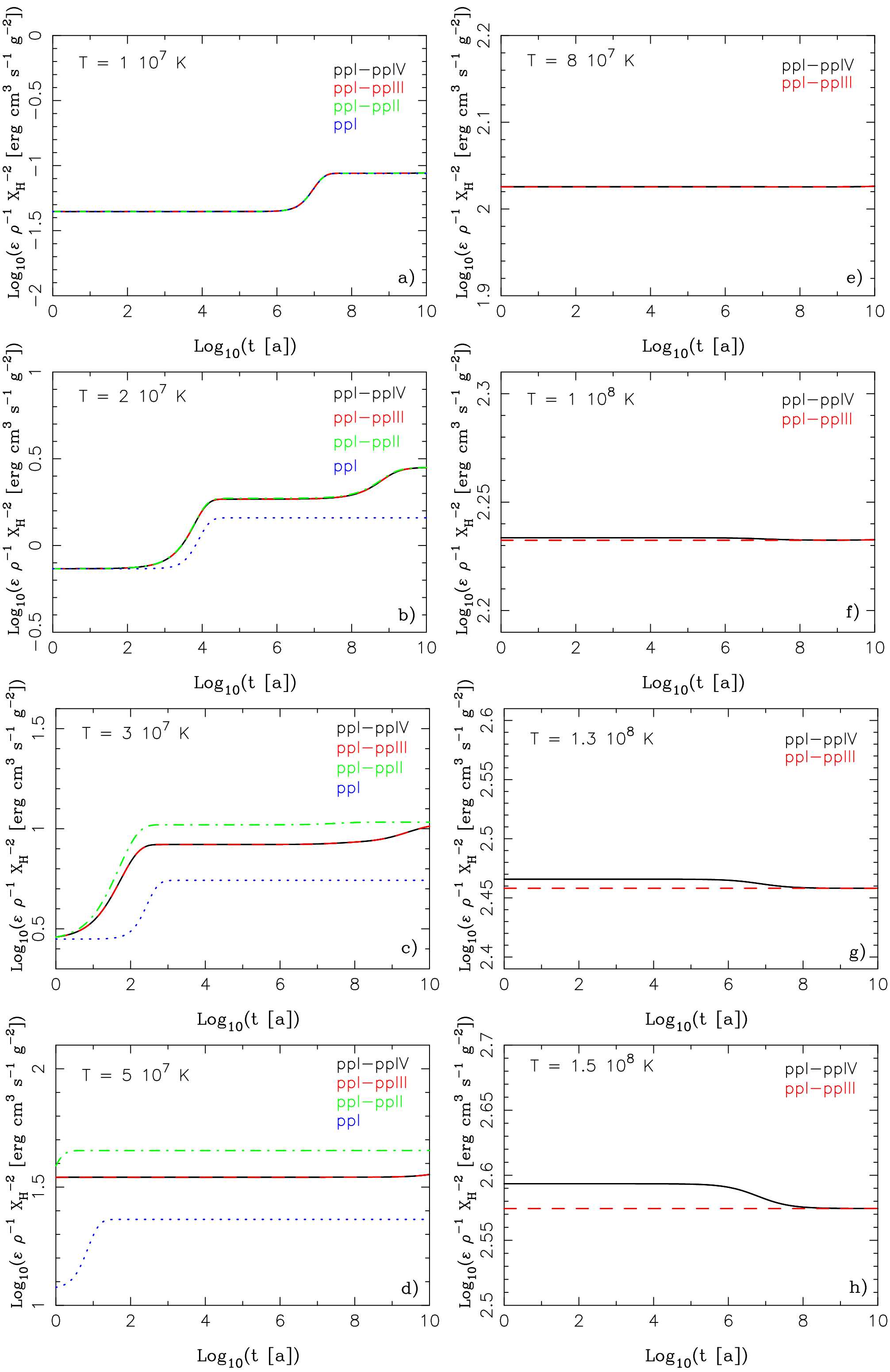

Abb. 3.1: Beitrag der Zweige ppI bis ppIV zur Energieproduktion bei acht verschiedenen Temperaturen. Die Referenzkurve (schwarze Linie) zeigt die Energieproduktion unter Berücksichtigung aller Zweige.

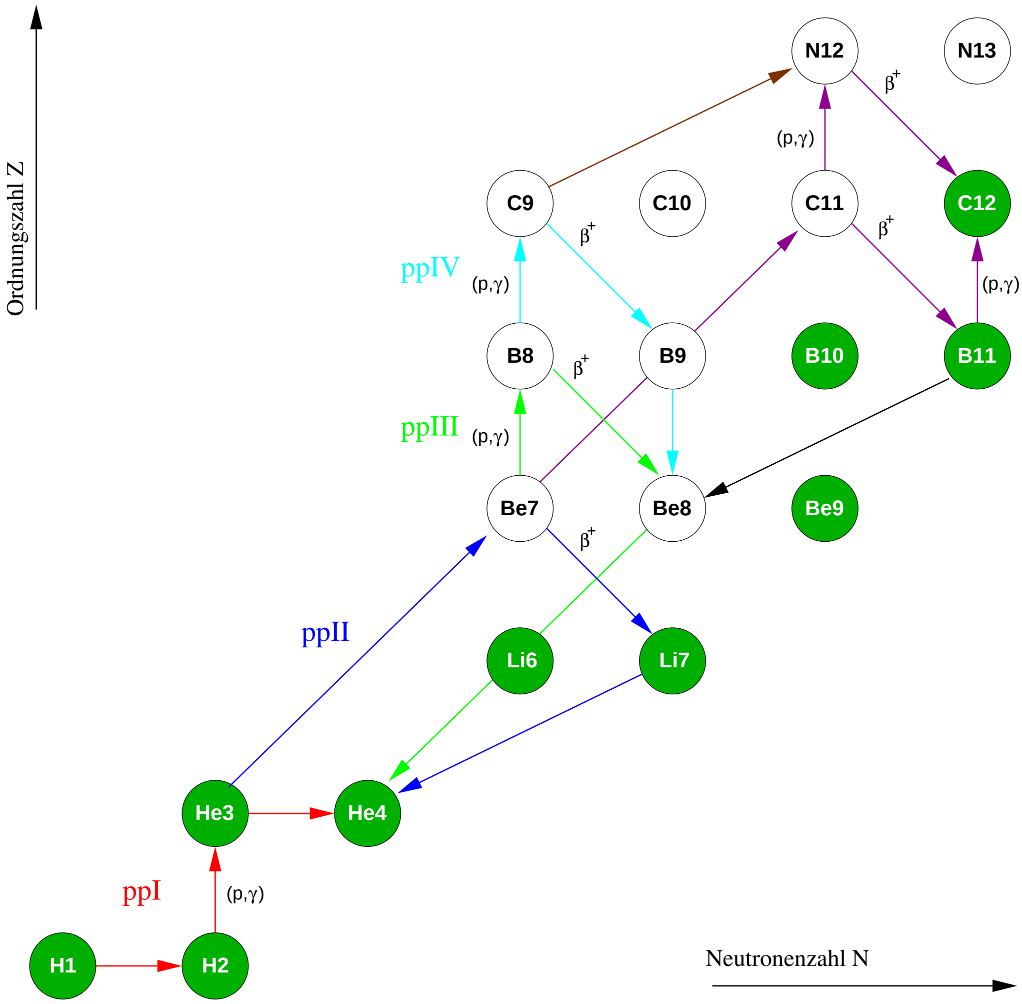

Abb. 3.2: Kernreaktionsnetzwerk für die Zweige ppI bis ppIV. Reaktionen, die für eine zusätzliche Kohlenstoffproduktion aus der pp-Kette in Frage kommen, sind mit den Farben *violett* und *braun* gekennzeichnet.

wird der ppII-Zweig zunehmend wichtig, und für höhere Temperaturen dominiert der ppIII-Zweig. In Abbildung 3.1(f-h) ist zu sehen, dass der ppIV-Zweig, den Wiescher et al. (1989) gefunden haben, bei Temperaturen $T > 10^8$ K an Bedeutung zunimmt. Dieser Zweig trägt bei $T = 1.3 \cdot 10^8$ K bis zu 1%, bei $T = 1.5 \cdot 10^8$ K bis zu 5% zur Energieproduktion bei. Allerdings wird die effektive Bedeutung dieses Zweiges insofern geschmälert, als bei diesen hohen Temperaturen rasch so viel Kohlenstoff über den 3α-Prozess gebildet wird, dass die Energieproduktion im CNO-Zyklus — im Vergleich zur Effizienz der pp-Kette — praktisch immer dominiert. Dieser Sachverhalt kann an Abbildung 3.3(c,d) überprüft werden: Die Kohlenstoffhäufigkeit liegt bei $X_{\mathrm{C12}} > 10^{-11}$, einer Konzentration, bei der der CNO-Zyklus dominiert (siehe Abschnitt 3.1.2).

Neben den Fragen zur Energieproduktion im pp-Zweig ist es wichtig zu klären, ob es nicht Reaktionen gibt, die, ausgehend von Elementen der pp-Kette, Kohlenstoff produzieren können, und ob somit nicht eine zum 3α-Prozess alternative Möglich-

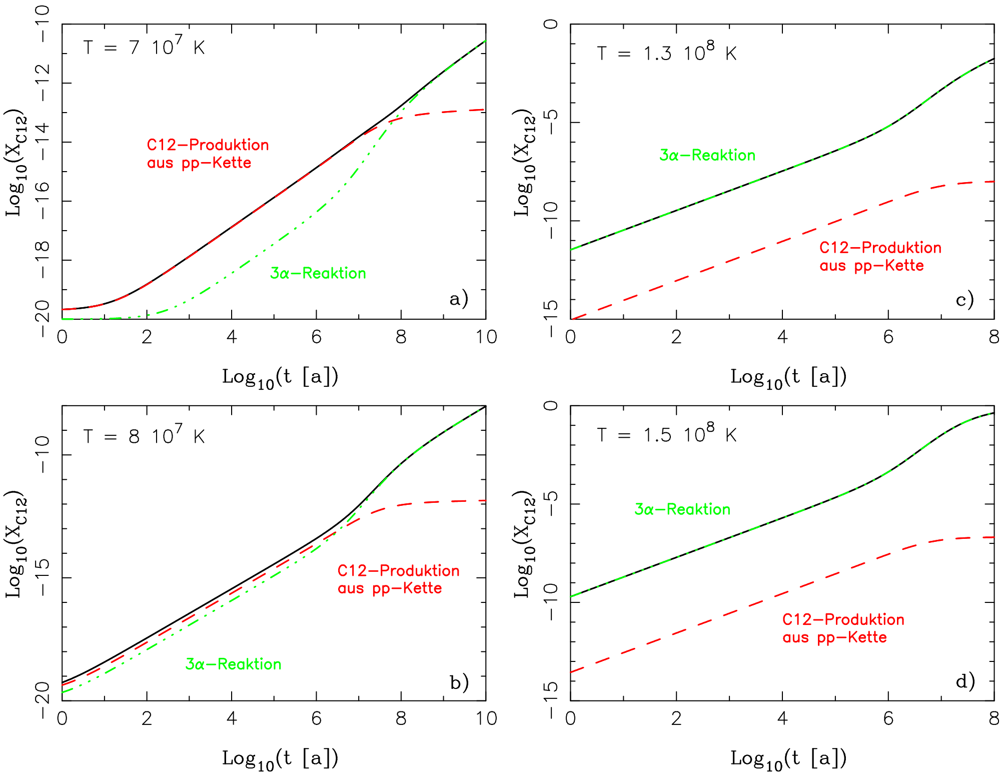

Abb. 3.3: Beitrag zur gesamten Kohlenstoffproduktion (schwarze Linie) durch den 3α-Prozess (grüne Linie) und durch Bildung aus der pp-Kette (rote Linie) bei unterschiedlichen Temperaturen und einer Dichte von 100 g cm^{-3}.

keit besteht, den CNO-Zyklus zu aktivieren. Als Ausgangspunkte für eine zusätzliche Kohlenstoffproduktion kommen nur die im ppIII-Zweig gebildeten Elemente ^{7}Be und ^{8}B in Frage (Mitalas, 1985). Das ebenfalls entstehende ^{8}Be ist vernachlässigbar, wie noch näher ausgeführt werden wird. Einfänge von α-Kernen durch die Konstituenten ^{7}Be und ^{8}B ergeben ^{11}B und ^{11}C, von denen ausgehend Kohlenstoff über die Reaktionen ^{11}B(p,γ)^{12}C und ^{11}C(p,γ)^{12}N(e$^+\nu$)^{12}C gebildet werden kann. Wiescher et al. (1989) weisen darauf hin, dass auch die abbauenden Prozesse von ^{11}B berücksichtigt werden müssen, insbesondere die Reaktion ^{11}B(p,2α)^{4}He. Dieselben Autoren diskutieren eine mögliche Kohlenstoffproduktion über einen weiteren Protoneneinfang an ^{8}B. Das hierbei entstehende ^{9}C kann über die Reaktionskette ^{9}C(α,p)^{12}N($e^+\nu$)^{12}C Kohlenstoff bilden, wenn es nicht über die Reaktion ^{9}C(β^+)^{9}B(p)^{8}Be(α)^{4}He in zwei α-Kerne zerfällt. Ein weiterer Protoneneinfang an ^{9}C würde auf ^{10}N führen, das bisher im Labor nicht gefunden wurde. Dies deutet auf eine sehr kurze Zerfallszeit von ^{10}N zurück in ^{9}C hin, sodass ^{9}C den Endpunkt der Protoneneinfänge in dieser Sequenz bildet (Wiescher et al., 1989).

In Abbildung 3.3 ist die Kohlenstoffhäufigkeit bei einer Dichte von 100 g cm^{-3} und verschiedenen Temperaturen zu sehen. Die Referenzkurve zeigt die Rechnungen mit dem 3α-Prozess und allen vorgestellten Aufbau- und Abbauprozessen von Kohlenstoff aus der pp-Kette. Es ist zu sehen, dass bei $7 \cdot 10^7$ K die Kohlenstoffproduktion aus der pp-Kette diejenige aus dem 3α-Prozess übersteigt. Bei $8 \cdot 10^7$ K tragen sowohl die pp-Kette als auch der 3α-Prozess zur Kohlenstoffproduktion bei. Für höhere Temperaturen ist nur noch der 3α-Prozess relevant. In den Abbildungen 3.3(a,b) findet bei $t > 10^7$ Jahren ein Übergang statt von der Kohlenstoffproduktion aus der pp-Kette hin zur Produktion aus dem 3α-Prozess: Wenn der Wasserstoff aufgebraucht ist, dann kann kein weiterer Kohlenstoff über die pp-Kette erzeugt werden. Obwohl für $T < 8 \cdot 10^7$ K die Kohlenstoffproduktion aus der pp-Kette überwiegt, bleibt die gebildete Kohlenstoffhäufigkeit kleiner als $X_{\mathrm{C12}} < 10^{-13}$. Bei dieser Konzentration ist die Effizienz des pp-Brennens größer als diejenige des CNO-Zyklus. Die Kohlenstoff produzierenden Prozesse aus der pp-Kette reichen somit nicht aus, um den CNO-Zyklus zu aktivieren.

Bedeutung von ^{8}Be

Die Bildung von Kohlenstoff im 3α-Prozess erfolgt über das Zwischenprodukt ^{8}Be. Daher liegt es nahe zu vermuten, dass das im ppIII-Zweig entstehende ^{8}Be auch zur Kohlenstoffproduktion beitragen kann. Das ^{8}Be ist in den vorliegenden Temperaturbereichen immer im Grundzustand, da der erste angeregte Zustand erst bei 3.04 MeV liegt (private Mitteilung Prof. Oberhummer, TU Wien). Der Grundzustand von ^{8}Be hat eine Halbwertszeit von nur $9.68 \cdot 10^{-17}$ s (Chang, 2001), und diese ist temperaturunabhängig. Weil ^{8}Be nur durch den Zerfall von ^{8}B-Kernen gebildet wird, ist die Konzentration im Gleichgewicht des ppIII-Zweiges durch die Konzentration von ^{8}B gegeben:

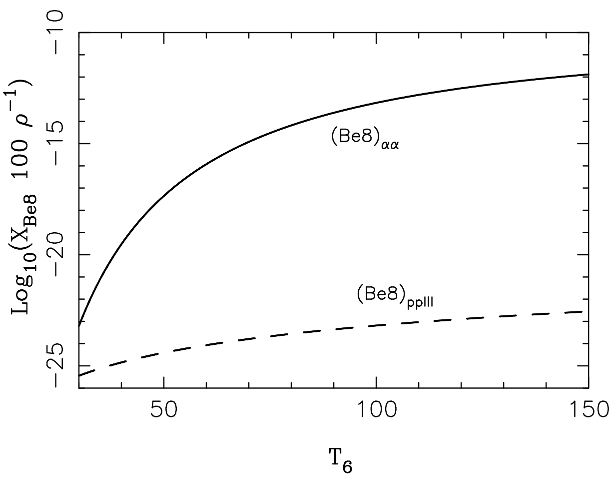

Abb. 3.4: Gleichgewichtskonzentration von ^{8}Be in Abhängigkeit der Temperatur. Die Bildung durch zwei α-Teilchen (durchgezogene Linie) überwiegt immer die Bildung im ppIII-Zweig (gestrichelte Linie).

$$X_{\mathrm{Be8}} = \frac{\tau_{\mathrm{Be8}}}{\tau_{\mathrm{B8}}} X_{\mathrm{B8}} \quad .$$

Im Gleichgewicht der ppIII-Kette kommt auf zwei fusionierte Protonen ein ^{8}B-Atom, deshalb kann die ^{8}Be-Konzentration in Abhängigkeit der Protonenzahl und der Proton-Proton Reaktionsrate λ_{pp} angegeben werden:

$$(X_{\mathrm{Be8}})_{\mathrm{ppIII}} = \frac{4}{\ln 2}\, \tau_{\mathrm{Be8}}\, \lambda_{\mathrm{pp}}(T) \rho X_{\mathrm{H}}^2 \quad .$$

Obwohl die Lebensdauer von ^{8}B wie gesehen sehr kurz ist, ist diese viel länger als die Zeit, in der zwei α-Teilchen nichtresonant miteinander streuen. Deshalb kommt ^{8}Be im Bad der Heliumkerne ins Gleichgewicht:

$$\alpha + \alpha \rightleftharpoons {}^8\mathrm{Be} \quad .$$

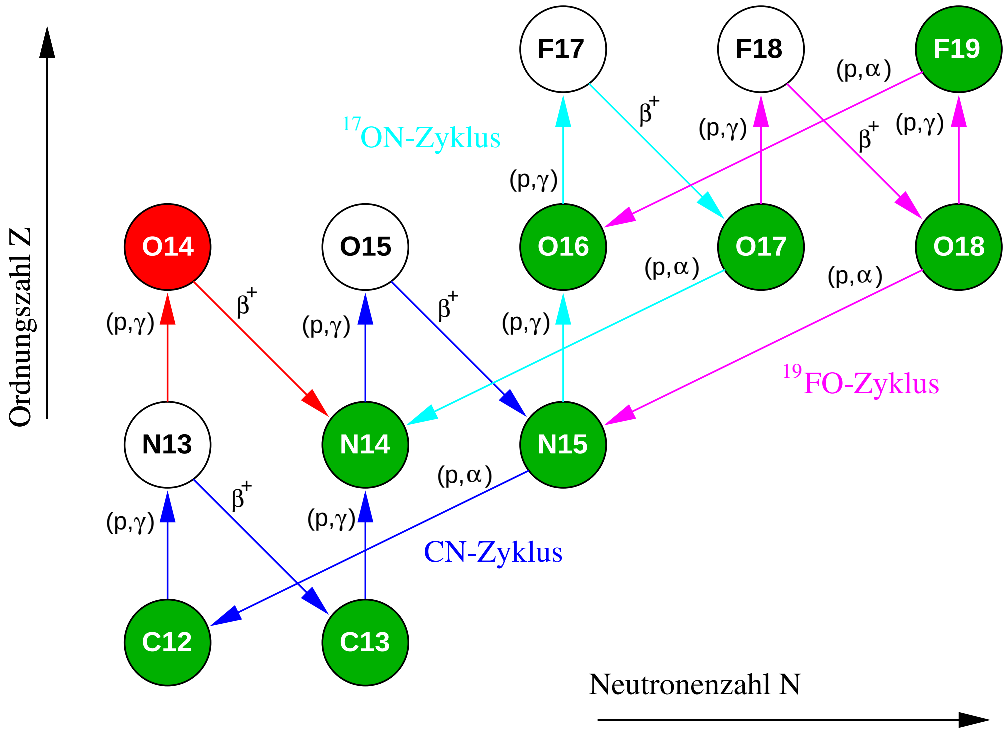

Abb. 3.5: Kernreaktionsnetzwerk für den CNO-Trizyklus, der in drei Unterzyklen zerfällt: in den CN-Zyklus (blau) , in den ^{17}ON-Zyklus (cyan) und in den ^{19}FO-Zyklus (magenta). Ein weiterer Protoneneinfang an ^{13}N (rot) innerhalb des CN-Zyklus wird für Temperaturen größer 10^8 K wichtig.

Die Gleichgewichtskonzentration des so gebildeten ^{8}Be ist temperaturabhängig, deshalb wird in der Literatur von thermischem ^{8}Be gesprochen. Der Begriff *thermisch* bezieht sich hier nicht auf einen Anregungszustand des Berylliums selbst – dieses ist im diskutierten Temperaturbereich immer im Grundzustand. Die Konzentration berechnet sich nach Clayton (1983, S. 412) zu:

$$(X_{\mathrm{Be8}})_{\alpha\alpha} = 5.63 \cdot 10^{-10}\, T_8^{-3/2}\, 10^{-\frac{4.64}{T_8}}\, \rho X_\alpha^2 \quad .$$

Diese Konzentration wird in Abbildung 3.4 verglichen mit der ^{8}Be-Konzentration aus der ppIII-Kette. Es ist zu sehen, dass für eine Komposition von $(X_{\mathrm{H}}, X_{\mathrm{He}}) = (0.77, 0.23)$ die ^{8}Be Produktion durch α-Teilchen diejenige aus der pp-Kette um viele Größenordnungen übersteigt. Somit ist das in der pp-Kette gebildete ^{8}Be für die Kohlenstoffproduktion vernachlässigbar.

3.1.2 CNO-Zyklus

Weizsäcker (1938) und Bethe (1939) haben unabhängig voneinander den Protoneneinfang an Kohlenstoff und Stickstoff als einen zur pp-Kette konkurrierenden Energieproduktionsmechanismus gefunden. Sie zeigten, dass in einer Serie von Reaktionen, im sogenannten CN-Zyklus (siehe Abbildung 3.5), Wasserstoff zu Helium konvertiert wird. Die CN-Elemente dienen als Katalysatoren und werden selbst nicht verbraucht. Obwohl bei den hypothetischen Population-III-Sternen anfänglich *per definitionem*

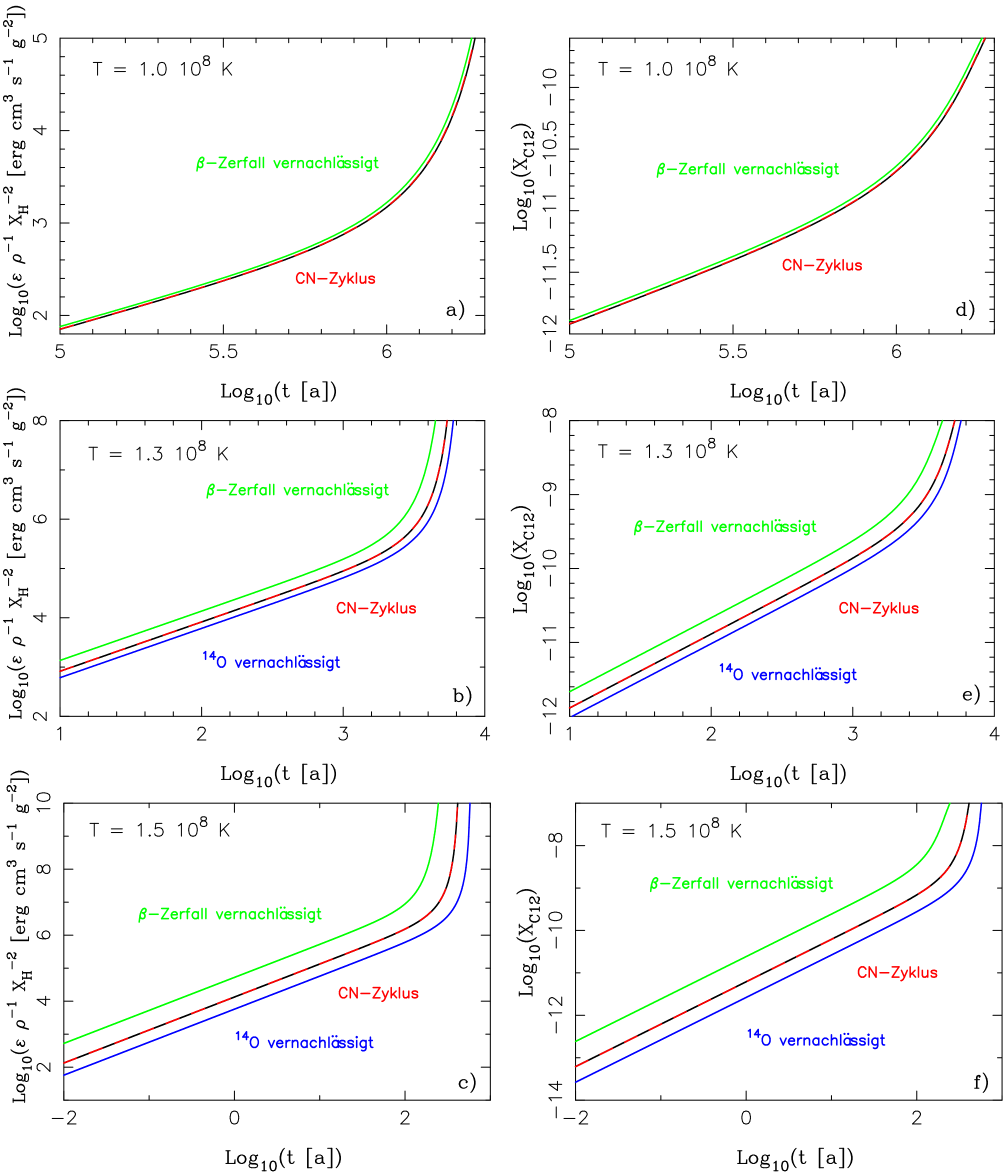

Abb. 3.6: Energie- und Kohlenstoffproduktion im CNO-Zyklus. Die Referenzkurve (schwarze Linie), die alle betrachteten Reaktionen enthält, fällt stets mit dem Modell zusammen, das den ^{19}FO- und den ^{17}ON-Zyklus vernachlässigt (gestrichelt rote Linie).

keine CN-Elemente vorliegen, kann bei den heißen, massereichen Vertretern Kohlenstoff über den 3α-Prozess in ausreichenden Mengen nachgebildet werden. Wie schon eingangs beschrieben, erkannte dies Ezer (1961) und lieferte zusammen mit Cameron auch die ersten vereinfachten Entwicklungsrechnungen (Ezer & Cameron, 1971).

Wieder wird in dieser Arbeit das zeitabhängige Einzonen-Modell herangezogen, um die zur Energieproduktion beitragenden Reaktionen der Katalysatorelemente Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff und Fluor für Temperaturen bis $1.5{\cdot}10^8$ K zu identifizieren. Die berücksichtigten Reaktionsketten sind der 3α-Prozess, der CN- , ^{17}ON- und ^{19}FO-Zyklus sowie die Sequenz ^{13}N(p,γ)^{14}O(β^+,ν)^{14}N (siehe Abbildung 3.5). Diese Sequenz sowie die im CNO-Zyklus vorkommenden β-Zerfälle werden im Reaktions-

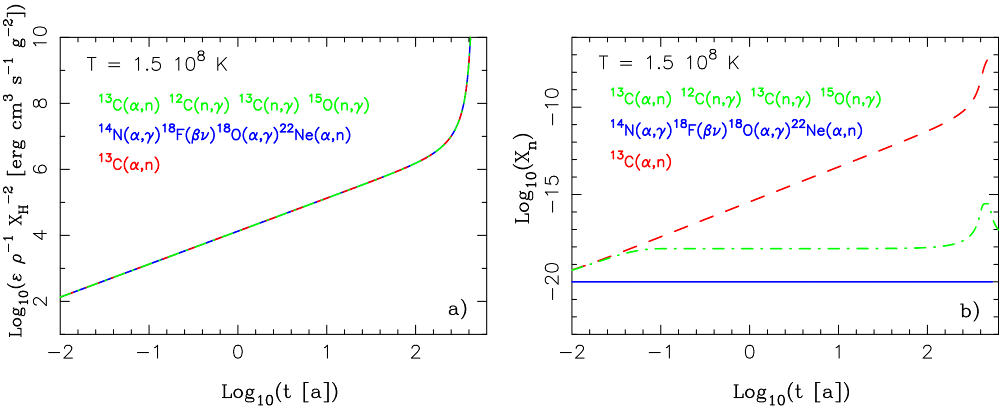

Abb. 3.7: a) Einfluss der Neutronen bildenden Reaktionen auf die Energieproduktion und b) Neutronenbildung in unterschiedlichen Reaktionszweigen.

netzwerk der klassischen Sternentwicklungsprogramme vernachlässigt. Für Zentraltemperaturen von $T < 1 \cdot 10^8$ K ist diese Vernachlässigung gerechtfertigt, weil die Zeitskalen der Protoneneinfänge groß sind gegenüber den Zeitskalen der β-Zerfälle, die in der Größenordnung von 100 Sekunden liegen. Schon Ezer & Cameron (1971) wiesen darauf hin, dass bei den hohen Zentraltemperaturen von $T \geq 1 \cdot 10^8$ K die Zeitskalen der Protoneneinfänge vergleichbar mit denen der β-Zerfälle werden. Die Referenzrechnung umfasst deshalb alle genannten Reaktionszweige, insbesondere die β-Zerfallsreaktionen sowie die Reaktionen ^{13}N(p,γ)^{14}O und ^{14}O(β^+,ν)^{14}N. Dies erfordert die Mitnahme von 15 chemischen Spezies: ^{1}H, ^{4}He, ^{12}C, ^{13}C, ^{13}N, ^{14}N, ^{15}N, ^{14}O, ^{15}O, ^{16}O, ^{17}O, ^{18}O, ^{17}F, ^{18}F und ^{19}F. In allen Modellen wird mit der Anfangshäufigkeit von ($X_{\rm H}$,$X_{\rm He}$, $X_{\rm other}$) = (0.77,0.23,10^{-20}) gestartet. Die Ergebnisse dieser Rechnungen, die auch in Straka & Tscharnuter (2001) nachzulesen sind, zeigt Abbildung 3.6. Die Vernachlässigung der β-Zerfälle führt in der Energieproduktion (Abbildung 3.6(a-c)) zu Fehlern von 10% bei $1 \cdot 10^8$ K, zu 65% bei $1.3 \cdot 10^8$ K und zu 300% bei $1.5 \cdot 10^8$ K. Der weitere Protoneneinfang an ^{13}N hat bei $1 \cdot 10^8$ K nur einen geringen Einfluss ($< 1\%$), trägt bei $1.3 \cdot 10^8$ K schon 30% zur Energieproduktion bei und bei $1.5 \cdot 10^8$ K ganze 55%. Dagegen führt die Vernachlässigung des ^{19}FO- und des ^{17}ON-Zyklus nur zu geringen Abweichungen (<1%) in der Energieproduktion. ^{17}ON- und ^{19}FO-Zyklus müssen nur dann mitgenommen werden, wenn man an den relativen Häufigkeiten von Sauerstoff und Fluor interessiert ist. Das beschriebene Verhalten lässt sich ganz analog an der Kohlenstoffhäufigkeit ablesen (siehe Abbildung 3.6(d-f)). Das Anwachsen der Energieproduktion in Abbildung 3.6(a-c) erfolgt durch die fortwährende Kohlenstoffproduktion im 3α-Prozess (Abbildung 3.6(d-f)).

3.1.3 Reaktionen mit Neutronen

In den AGB-Phasen der Sternentwicklung werden Neutronen bildende Reaktionen wichtig für den Aufbau von s-Prozess-Elementen. Haben Neutronen auch einen Einfluss auf die Hauptreihenentwicklung der heißen, massereichen Population-III-Sterne? Bei einer Temperatur von $1.5 \cdot 10^8$ K kommt die Zeitskala der Neutroneneinfänge in die Größenordnung der Protoneneinfänge, vorausgesetzt, es liegt eine Neutronenkonzentration von $X_{\rm n} = 10^{-13}$ vor. Als einzige Neutronenquelle kommt die Reaktion

^{13}C(α,n)^{16}O in Frage, da die Reaktionskette ^{14}N(α,γ)^{18}F($\beta^+\nu$)^{18}O(α,γ)^{22}Ne(α,n) bei diesen Temperaturen nicht zur Neutronenproduktion beiträgt (siehe Abbildung 3.7(b)). Betrachtet man nur den Bildungsprozess von Neutronen im Zweig ^{13}C(α,n)^{16}O, dann kann die Neutronenkonzentration auf einen Wert von 10^{-13} ansteigen. Neutroneneinfänge an den CNO-Isotopen agieren als Neutronensenke (Herndl et al., 1999), und unter Berücksichtigung der Reaktionen ^{12}C(n,γ)^{13}C, ^{13}C(n,γ)^{14}C und ^{15}O(n,γ)^{16}O bleibt die Neutronenkonzentration unter $X_{\mathrm{n}} = 10^{-16}$ (siehe Abbildung 3.7(b)). Die Ineffizienz der Neutronenquelle ist hauptsächlich darin begründet, dass die Reaktion ^{13}C(α,n)^{16}O im Vergleich zum Protoneneinfang an ^{13}C um den Faktor 10^{-7} unterdrückt ist. Dies ist auf dem AGB nicht der Fall, da in diesem Entwicklungsstadium schon alle Protonen verbraucht sind.

3.1.4 Umwandlung primordialer Elemente in Kohlenstoff

Die Standard-Urknall-Nukleosynthese (BBN) sagt voraus, dass die Elemente D, ^{3}He, ^{7}Li und ^{11}Be gebildet werden. Für primordialen Kohlenstoff gibt Jedamzik (1999) bei einem Baryonen-zu-Photonen-Verhältnis von $\eta \approx 4 \cdot 10^{-10}$ eine Kohlenstoffkonzentration von $X_{^{12}\mathrm{C}} \approx 5 \cdot 10^{-15}$ an. Deuterium wird schon bei Temperaturen von einigen Millionen Kelvin vollständig zu ^{3}He verbrannt. Geht man davon aus, dass das gesamte ^{3}He in ^{7}Be verbrannt wurde, dann lässt sich über die Reaktionskette ^{7}Be$(\alpha,\gamma)^{11}$C$(\beta^+,\nu)^{11}$B$(p,\gamma)^{12}$C Kohlenstoff produzieren. Mitalas (1985) schätzt den so produzierten Kohlenstoff zu

$$X_{\mathrm{C12}} \approx 2.0 \cdot 10^{-2} \exp\left(\frac{-12.950}{T_9^{1/3}}\right) X_{\mathrm{He3}} \tag{3.1}$$

ab. Ausgehend von der sicher zu optimistischen Annahme von $X_{\mathrm{D}} = 4 \cdot 10^{-4}$ sowie $X_{\mathrm{He3}} = 2 \cdot 10^{-4}$ (siehe Vangioni-Flam et al. (2000) für eine ausführlichere Behandlung der zu erwartenden BBN-Häufigkeiten) ergibt die vollständige Umwandlung in ^{3}He eine Konzentration von $X_{\mathrm{He3}} = 8 \cdot 10^{-4}$. Dies führt nach Formel (3.1) bei einer Temperatur von $T = 5 \cdot 10^7$ K auf eine Kohlenstoffhäufigkeit von 10^{-22}, was vollständig vernachlässigbar ist.

Ebenso die Produktion über ^{7}Li ist vernachlässigbar klein (Mitalas, 1985):

$$X_{\mathrm{C12}} = 8.9 \cdot 10^{-7} \exp\left(\frac{-10.690}{T_9^{1/3}}\right) X_{\mathrm{Li7}} \quad ,$$

denn selbst mit einer ^{7}Li Häufigkeit von 10^{-9} und einer Temperatur von $T = 5 \cdot 10^7$ K erreicht man nur $X_{\mathrm{C12}} \approx 10^{-28}$.

Die primordiale Konzentration von ^{11}Be ist besonders interessant, denn gerade bei niedrigen Temperaturen ist der Protoneneinfang nach Kohlenstoff gegenüber der Zerstörung durch ^{11}B(p,α)^{8}Be bevorzugt. Als oberste Schranke für ^{11}B liefert die Standard-BBN allerdings nur $X_{\mathrm{Be11}} \approx 10^{-15}$ mit wahrscheinlicheren Werten im Bereich von $X_{\mathrm{Be11}} \approx 10^{-16}$. Selbst wenn das gesamte ^{11}Be in Kohlenstoff umgewandelt wird, kann über diesen Mechanismus nicht mehr als $X_{\mathrm{C12}} \approx 10^{-15}$ erzeugt werden.

3.2 Mischen

Massereiche Sterne haben eine große zentrale Konvektionszone, in der die chemischen Elemente aufgrund der turbulenten Gasbewegungen gemischt werden (Kippenhahn & Weigert, 1990, S. 212ff). In Hauptreihensternen der Population I oder II ist dieser Mischprozess sehr schnell im Vergleich zu den Häufigkeitsänderungen durch die langsamen Kernreaktionen. Unter diesen Umständen kann man sicher davon ausgehen, dass die Elemente in der Konvektionszone homogen gemischt bleiben. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme von *instantanem* Mischen über die gesamte Konvektionszone. Die folgende Größenordnungsabschätzung soll zeigen, dass die Umlaufzeit im CNO-Zyklus bei den heißen Temperaturen der massereichen Population-III-Sterne vergleichbar oder sogar kürzer sein kann als die Zeitskala für das turbulente Mischen. Die in Abschnitt 3.2.1 folgende Argumentation ist auch in Straka & Tscharnuter (2001) beschrieben.

3.2.1 Mischungszeitskala

Die Mischungszeitskala kann mit der klassischen Mischungswegtheorie (MLT, Böhm-Vitense, 1958) abgeschätzt werden. Für die folgende Rechnung wird eine Standard-Komposition von $(X_\mathrm{H},X_\mathrm{He}) = (0.77{,}0.23)$ angenommen. Selbst im Fall der heißen Population-III-Sterne kann der Strahlungsdruck für diese Abschätzung vernachlässigt werden, und es reicht, ein monoatomares Gas mit $\delta = 1$ und $c_P = 5\Re/2\mu$ anzunehmen. Die Mischungszeitskala ist im Wesentlichen gegeben durch die Druckskalenhöhe geteilt durch die charakteristische Geschwindigkeit v_conv für die Bewegung der konvektiven Wirbel:

$$\tau_\mathrm{conv} \sim 10^8 \left(\frac{r}{\mathrm{R}_\odot}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{M}_\odot}{m}\right) \sqrt{\frac{T}{10^8\,\mathrm{K}}} \left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{\nabla - \nabla_\mathrm{e}}}\right) \mathrm{s} \quad . \tag{3.2}$$

Die Größe $\nabla - \nabla_\mathrm{e}$ ist die Differenz zwischen dem tatsächlichen Temperaturgradienten ∇ und der Änderung der Temperatur in einem Massenelement während seiner Bewegung ∇_e. In der MLT ist es üblich, zwei dimensionslose Größen einzuführen (Kippenhahn & Weigert, 1990, S. 51):

$$\begin{aligned} U &\sim 2\cdot 10^{-11} \left(\frac{m}{\mathrm{M}_\odot}\right) \left(\frac{T}{10^8\,\mathrm{K}}\right)^{3/2} \left(\frac{100\,\mathrm{g\,cm^{-3}}}{\rho}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{R}_\odot}{r}\right)^2 , \\ W &= \nabla_\mathrm{rad} - \nabla_\mathrm{ad} \quad . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Falls $U \ll (\nabla - \nabla_\mathrm{e})^{1/2} \ll W$ (siehe unten), dann kann die kubische Gleichung der MLT vereinfacht werden zu

$$\sqrt{\nabla - \nabla_\mathrm{e}} \sim \left(\frac{8}{9} U W\right)^{1/3} \quad .$$

Für eine Abschätzung von τ_conv im Sternzentrum können Gleichungen (3.2) und (3.3) wegen $m = 4/3\pi\rho_\mathrm{c} r^3$ noch weiter reduziert werden:

$$\tau_\mathrm{conv} \sim 10^6 \left(\frac{\mathrm{M}_\odot}{m}\right)^{1/3} \left(\frac{100\,\mathrm{g\,cm^{-3}}}{\rho_\mathrm{c}}\right)^{2/3} \left(\frac{T_\mathrm{c}}{10^8\,\mathrm{K}}\right)^{1/2} \left(\frac{7\cdot 10^{-4}}{\sqrt{\nabla - \nabla_\mathrm{e}}}\right) \mathrm{s} \tag{3.4}$$

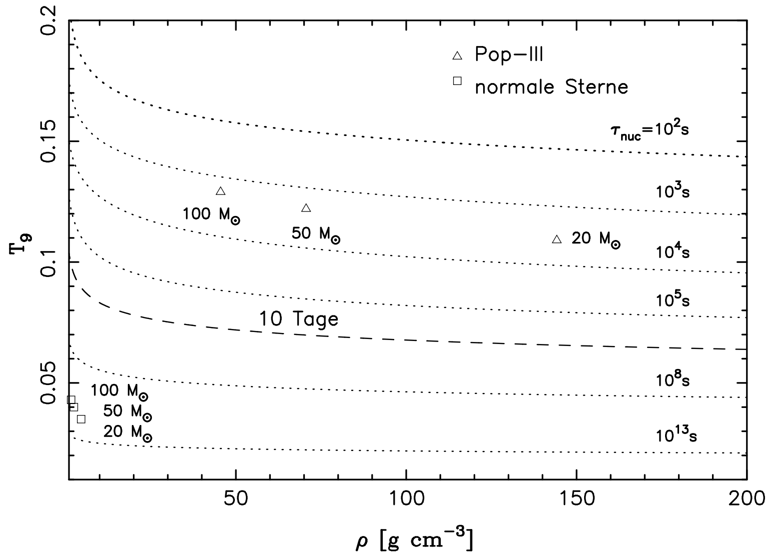

Abb. 3.8: Linien konstanter $\tau_{\mathbf{nuc}}$ bei $\mathrm{X_H} = 0.77$. Im Gebiet oberhalb der gestrichelten Linie ist das Mischen langsam im Vergleich zur nuklearen Zeitskala.

und

$$U \sim 4 \cdot 10^{-10} \left(\frac{m}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{1/3} \left(\frac{100\,\mathrm{g\,cm^{-3}}}{\rho_\mathrm{c}}\right)^{4/3} \left(\frac{T_\mathrm{c}}{10^8\,\mathrm{K}}\right)^{3/2} \quad . \tag{3.5}$$

Das folgende Zahlenbeispiel stützt sich auf einen $20\,\mathrm{M}_\odot$ Population-III-Stern, der auf der Hauptreihe typischerweise $T_\mathrm{c} \sim 10^8$ K und $\rho_\mathrm{c} \sim 100$ g cm^{-3} erreicht. Für eine innere Massenkoordinate $m = 1\,\mathrm{M}_\odot$ folgt $U \sim 4 \cdot 10^{-10}$ aus Gleichung (3.5). Für angemessene Werte von W, $W \sim 1 \ldots 100$ folgt $(\nabla - \nabla_\mathrm{e})^{1/2} \sim 7 \cdot 10^{-4}$. Wie gefordert, gilt die Annahme $U \ll (\nabla - \nabla_\mathrm{e})^{1/2} \ll W$. Einsetzen der Werte in Gleichung (3.4) führt schließlich auf:

$$\tau_\mathrm{conv} \sim 10 \text{ Tage} \quad .$$

Auch für Population-I- und -II-Sterne sowie für Massen größer $20\,\mathrm{M}_\odot$ bleibt dieser Wert bis auf Faktoren der Größenordnung Eins richtig.

3.2.2 Nukleare Zeitskala

Eine charakteristische Zeitskala für die Kernreaktionen in massereichen Sternen ist die Umlaufzeit im CNO-Zyklus. Diese Zeit ist im Wesentlichen gegeben durch die langsamste Reaktion im Zyklus: ^{14}N(p,γ)^{15}O. Selbst bei Temperaturen von $1.5 \cdot 10^8$ K, bei denen die Protoneneinfänge vergleichbar mit den β-Zerfällen werden, stimmt die folgende Abschätzung bis auf einen Faktor 2:

$$\tau_\mathrm{nuc} \sim \tau_\mathrm{n14pg} = \frac{A_\mathrm{H}}{X_\mathrm{H} \rho \lambda_\mathrm{n14pg}(T)} \quad . \tag{3.6}$$

Die Reaktionsrate $\lambda_\mathrm{n14pg}(T)$ ist nur eine Funktion der Temperatur. Die analytische Fit-Formel für diese Rate wird wieder, wie von NACRE (Angulo et al., 1999) angegeben, verwendet:

$$\lambda_\mathrm{n14pg}(T) = 4.83 \cdot 10^7\, T_9^{-2/3} \exp\left(-15.231\, T_9^{-1/3} - \left(\frac{T_9}{0.8}\right)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot (1 - 2.00\,T_9 + 3.41\,T_9^2 - 2.43\,T_9^3) \\
&+ 2.36 \cdot 10^3\,T_9^{-3/2}\,\exp(-3.010\,T_9^{-1}) \\
&+ 6.72 \cdot 10^3\,T_9^{0.380}\,\exp(-9.530\,T_9^{-1}) \quad .
\end{aligned}
$$

Mit dieser Reaktionsrate und zusammen mit Gleichung (3.6) lässt sich die Umlaufzeit im CNO-Zyklus in Abhängigkeit der Dichte ρ und der Temperatur T abschätzen. Um den Parameterraum zu erkunden, werden Linien konstanter Umlaufzeit τ_{nuc} in ein ρ-T Diagramm eingetragen (Abbildung 3.8). Die gestrichelte Linie markiert die typische Zeitskala für konvektives Mischen. Im Gebiet oberhalb (unterhalb) dieser Linie ist das Mischen langsam (schnell) im Vergleich zur nuklearen Zeitskala. Die Annahme von instantanem Mischen ist nur gerechtfertigt im unteren Gebiet, in dem das Mischen schnell ist. Es ist zu sehen, dass „normale“ Sterne im unteren Gebiet liegen (linke untere Ecke), dass sich jedoch die massereichen Population-III-Sterne im oberen Gebiet befinden, in dem die Annahme von instantanem Mischen nicht mehr gerechtfertigt ist.

3.3 Zusammenfassung

Die Bedeutung einzelner Kernreaktionen sowohl für die Energie- als auch für die Kohlenstoffproduktion wurde im Rahmen eines Einzonen-Modells untersucht. Dabei fanden Beachtung die Reaktionszweige ppI bis ppIV, Kohlenstoff produzierende Prozesse aus der pp-Kette, die 3α-Reaktion, der CN-, ^{17}ON- und der ^{19}FO-Zyklus, die Sequenz ^{13}N(p,γ)^{14}O(β^+,ν)^{14}N sowie die Neutronenproduktion und die Umwandlung primordialer Elemente in Kohlenstoff. Im Ergebnis sind für die Energieproduktion im betrachteten Temperaturbereich $T < 1.5 \cdot 10^8$ K die Reaktionszweige ppI bis ppIII sowie der CN-Zyklus und die Sequenz ^{13}N(p,γ)^{14}O(β^+,ν)^{14}N wichtig. Auch die β-Zerfallsreaktionen müssen explizit im Netzwerk mitgeführt werden. Der einzig wichtige Kohlenstoffproduzent ist die 3α-Reaktion. Des Weiteren ist die Annahme von instantanem Mischen in der Konvektionszone der heißen Population-III-Sterne nicht gerechtfertigt. Welchen Einfluss ein verbessertes Kernreaktionsnetzwerk sowie eine verbesserte Behandlung der Mischprozesse auf die Entwicklungsrechnungen massereicher Population-III-Sterne hat, ist Gegenstand der Untersuchungen im nächsten Kapitel.

4 Ergebnisse der Simulationen

Im vorhergehenden Kapitel wurde aufgezeigt, dass bei massereichen Population-III-Sternen im Vergleich zu Sternen der Population I und II sowohl einige zusätzliche Kernreaktionszweige wichtig werden können als auch die Mischung von Elementen in konvektiv instabilen Zonen nicht mehr als homogen angenommen werden darf. Durch vergleichende Simulationsrechnungen sollen in diesem Kapitel die Auswirkungen dieser Prozesse auf die Entwicklung der Population-III-Sterne, angefangen von der Vorhauptreihe bis zum Ende der Hauptreihenphase, untersucht werden.

Das zu integrierende Gleichungssystem besteht aus den in Kapitel 1 hergeleiteten Sternaufbaugleichungen, in denen in konsistenter Weise ein zeitabhängiges Kernreaktionsnetzwerk, zeitabhängiges Mischen und ein zeitabhängiges Konvektionsmodell enthalten sind. Die verwendete räumliche Diskretisierung des Systems wurde in Kapitel 2 vorgestellt. Da die zeitliche Integration des Systems von LIMEX durchgeführt wird, werden alle Gleichungen vollständig gekoppelt und implizit gelöst. Der in dieser Arbeit entwickelte Sternentwicklungscode koppelt somit erstmals die Kernreaktionen, das Mischen, die thermo-energetische und die mechanische Struktur des Sterns. Diese Koppelung wurde mit dem verwendeten numerischen Verfahren nur möglich, indem eine verbesserte, zeitabhängige Konvektionstheorie eingebaut wurde.

Diesen Stärken des selbstentwickelten Codes stehen in Bezug auf eine realistische Modellierung der Sternentwicklung noch einige Simplifizierungen gegenüber, die jedoch zukünftig leicht innerhalb des bestehenden Programmschemas verbessert werden können. Dies betrifft zum einen die Atmosphäre, die hier nur in der grauen Näherung behandelt wird. Allerdings kann man den Einfluss der atmosphärischen Randbedingung auf die Lösung der inneren Sternaufbaugleichungen bei massereichen Sternen als gering einstufen, da diese rein radiative Hüllen besitzen, bei denen die äußere Randbedingung in tieferliegenden Schichten nicht mehr von Bedeutung sind (Kippenhahn & Weigert, 1990, S. 72ff). Die zweite Vereinfachung betrifft die Behandlung der Opazität, bei der nur eine einfache analytische Formel für Elektronenstreuung berücksichtigt wurde. Obwohl einige Autoren bessere Opazitäten für die $Z = 0$ Mischung verwenden (Marigo et al., 2001), wurde bisher die autogene Metallproduktion bei der Berechnung der Opazitäten in allen Modellen vernachlässigt. Schließlich würden insbesondere die hier untersuchten Mischprozesse durch die Berücksichtigung von Rotation, die bei den massereichen Sternen von Bedeutung sein sollte (Meynet & Maeder, 2000), beeinflusst. Doch auch die Effekte der Rotation wurden bisher bei Population-III-Sternen noch nicht untersucht, sodass hauptsächlich die vereinfachte Behandlung der Opazität den Vergleich dieser Rechnungen mit bereits bestehenden erschwert.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt auf den Implikationen, die sich aus der zeitabhängigen Modellierung der Konvektion ergeben, sowie auf vergleichenden Rechnungen, in denen der Einfluss der Kernreaktionen, des Mischens und der gewählten Anfangsmodelle auf die Entwicklung der (Vor-)Hauptreihe quantifiziert wird.

4.1 Anfangsmodelle

Ein eigenes Problem stellt die Konstruktion von konsistenten Anfangsmodellen für das Gleichungssystem in Kapitel 1, Tafel I dar. Für den physikalischen Aspekt dieses Problems ist die Frage zu klären, welche Anfangsbedingungen sinnvoll sind. Der technische Aspekt dieses Problems ist es, ein Modell zu konstruieren, welches das Gleichungssystem auf gegebener Diskretisierung löst. Wie Kähler und Weigert (1974) zeigen konnten, sind die Sternstrukturgleichungen vollständig bestimmt durch die Vorgabe von Gesamtmasse M, chemischer Zusammensetzung X_i und Entropiestruktur $s(m)$. Im Folgenden wird eine Lösungsstrategie entworfen, die anhand dieser Eingangsparameter ein Anfangsmodell konstruiert. Das Rezept orientiert sich stark an der Arbeit von Kähler und Weigert (1974).

4.1.1 Reduziertes Gleichungssystem

Wie Beech & Mitalas (1994) in ihren kanonischen Vorhauptreihenrechnungen massereicher Sterne im Massenbereich 15–60 $\mathrm{M}_\odot$ zeigten, durchlaufen alle ihre Modelle, obwohl sie von ursprünglich vollkonvektiven Anfangsmodellen ausgehen, eine rein radiative Phase, in der der Stern einer Polytropen mit $n = 3$ nahe kommt. Der Startpunkt der Rechnungen in dieser Arbeit wird nun in der vollständig radiativen Phase gewählt, weil dies die Konstruktion der Anfangsmodelle erleichtert. Denn im vollständig radiativen Fall ist die turbulente kinetische Energie $\bar{\omega}$ gleich Null, und deshalb kann eine Gleichung im System, die Gleichung für die turbulente kinetische Energie, entfallen. Außerdem findet kein Mischen der Elemente statt, sodass auch der Mischterm in der Gleichung für die chemischen Spezies verschwindet. Drittens ist der Gradient ∇ der Temperaturschichtung gleich dem radiativen Gradienten ∇_{rad}. Es bleibt, eine Lösung für das in Tafel IV gezeigte reduzierte Gleichungssystem zu finden.

4.1.2 Konstruktion des Anfangsmodells

Zur besseren Übersichtlichkeit für die folgende Diskussion kann das Gleichungssystem aus Tafel IV formal wie folgt dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r^3}{\partial m} &= \hat{f}_1(\rho) \quad , \\
\frac{\partial P}{\partial m} &= \hat{f}_2(m, r) \quad , \\
\frac{\partial l}{\partial m} &= \hat{f}_3(\dot{e}, \dot{\rho}, e, \rho, X_i) \quad , \\
\frac{\partial T}{\partial m} &= \hat{f}_4(m, r, P, T, l, X_i) \quad , \\
0 &= \hat{f}_5(\rho, T, \dot{X}_i, X_i) \quad .
\end{aligned}
$$

Die Entropiestruktur ist für die Konstruktion des Anfangsmodells die relevante Größe. Aus diesem Grund sind einige Variablentransformationen sinnvoll. Jede thermodynamische Größe kann durch zwei andere und die chemische Zusammensetzung ausgedrückt werden. Es existieren somit zwei Gleichungen der Form:

$$T = T(s, P, X_i) \quad , \tag{4.1}$$

Tafel IV Reduzierte Sternaufbaugleichungen

$0 = \frac{\partial r}{\partial m} - \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$	Integrierte Poisson-Gleichung
$0 = -\frac{\partial P}{\partial m} - \frac{Gm}{4\pi r^4}$	Hydrostatik
$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \epsilon_{\mathrm{nuc}} - \frac{\partial l}{\partial m}$	Energiegleichung
$0 = \frac{\partial \ln T}{\partial m} - \frac{\partial \ln P}{\partial m}\nabla_{\mathrm{rad}}$	Transportgleichung
$\frac{\mathrm{D}X_i}{\mathrm{D}t} = +\sum_j c_i(j)\,\lambda_j \frac{A_i}{A_j} X_j + \sum_{j,k} c_i(j,k)\,\rho\lambda_{jk}\frac{A_i}{A_j A_k} X_j X_k + \sum_{j,k,l} c_i(j,k,l)\,\rho^2\lambda_{jkl}\frac{A_i}{A_j A_k A_l} X_j X_k X_l$	Kernreaktionen

$$e = e(s, P, X_i) \quad ,$$

mit denen die Variablen Temperatur T und innere Energie e auf die Variablen Entropie und Druck transformiert werden können. Des Weiteren existiert eine Zustandsgleichung

$$\rho = \rho(s, P, X_i) \quad , \tag{4.2}$$

mit der auch noch die Variable ρ aus dem System eliminiert werden kann:

$$\frac{\partial r^3}{\partial m} = f_1(P, s, X_i) \quad , \tag{4.3}$$
$$\frac{\partial P}{\partial m} = f_2(m, r) \quad , \tag{4.4}$$
$$\frac{\partial l}{\partial m} = f_3(\dot{s}, s, P, X_i) \quad , \tag{4.5}$$
$$\frac{\partial s}{\partial m} = f_4(m, r, P, s, l, X_i) \quad , \tag{4.6}$$
$$0 = f_5(P, s, \dot{X}_i, X_i) \quad . \tag{4.7}$$

Die Variablen m, s und X_i sind für das gesamte Sternmodell vorgegeben. Deshalb enthalten die Funktionen f_1 und f_2 in der ersten und zweiten Gleichung nur zwei Unbekannte, r und P. Wie dies auch bei Polytropenmodellen der Fall ist, entkoppelt hier wegen der Vorgabe der Entropiestruktur der mechanische Teil vom thermoenergetischen. Kähler und Weigert (1974) schlagen vor, den mechanischen Teil von innen nach außen durch Vorgabe des Zentraldrucks mit einem Integrator für gewöhnliche Differenzialgleichungen zu lösen. In dieser Arbeit wird ein leicht modifizierter Weg gewählt, der sich in den hier untersuchten Modellen durch ein besseres Konvergenzverhalten auszeichnete. Es wird nicht der Zentraldruck, sondern der Radius

$R(\tau = 2/3)$ vorgegeben. Wegen der Annahme einer grauen Atmosphäre lässt sich auch der Druck bei diesem Radius angeben. Anschließend werden die mechanischen Gleichungen mit einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung von außen nach innen integriert. Als zusätzlicher freier Parameter taucht nun die Variable R auf. Diese muss solange variiert werden, bis der innerste Radiuspunkt die innere Randbedingung, $r_0 = 0$, erfüllt.

Hat man die Variablen Radius r und Druck P wie beschrieben bestimmt, dann lassen sich mit der vorgegebenen Entropiestruktur alle anderen thermodynamischen Größen wie Temperatur, innere Energie und Dichte über die Gleichungen (4.1-4.2) bestimmen. Gleichung (4.6) enthält nur noch eine einzige Unbekannte, die Leuchtkraft l, und kann als Bestimmungsgleichung für l verwendet werden. Die noch übrigen Gleichungen legen die Zeitterme eindeutig fest. Gleichung (4.5) legt die Zeitableitung der Entropie $\dot{s}$ und Gleichung (4.7) die Zeitableitung der chemischen Spezies $\dot{X}_i$ fest. Leider ist die Wahl der Entropiestruktur in den äußersten Schichten nicht beliebig, da noch eine weitere Bedingung, die photosphärische Randbedingung

$$L = 4\pi R^2(\tau = 2/3)\,\sigma\,T^4(\tau = 2/3)$$

erfüllt werden muss. Diese Komplikation ist in dieser Arbeit nicht vollständig befriedigend gelöst, da für die Konstruktion der Anfangsmodelle implizit davon ausgegangen wird, dass eine geeignete Entropiestruktur in den äußeren Schichten gewählt wurde, die die photosphärische Randbedingung erfüllt.

4.1.3 Entropiestruktur des Anfangsmodells

Das Anfangsmodell für diese Rechnungen sollte idealerweise durch Kollapsrechnungen von primordialen Gaswolken geliefert werden. Die Modellierung des Kollapses ist im Fall der primordialen Gasmischung noch nicht soweit fortgeschritten, dass solche Anfangsmodelle vorlägen. Aus diesem Grund wird für die Anfangsmodelle die Entropiestruktur einer Polytrope mit $n = 3$ gewählt, die als Lösung eines vollständig radiativen Modells sinnvoll ist. Die Rechnungen von Beech & Mitalas (1994) zeigten, dass, selbst ausgehend von vollständig konvektiven Modellen, massereiche Sterne vollständig radiativ werden und einer Polytrope $n = 3$ genügen. Das Anfangsmodell ist durch die Vorgabe der Gesamtmasse und einer Polytropenstruktur noch nicht ausreichend bestimmt, die Wahl des Anfangsradius ist noch frei. Der Radius des Modells wird hier so gewählt, dass das Anfangsmodell eine Zentraltemperatur von ungefähr 10^6 K hat, ausreichend niedrig, um die nukleare Verbrennung von primordialem Deuterium und ^{3}He in den Modellrechnungen mitnehmen zu können. Um den Einfluss des Anfangsmodells auf die Entwicklung abzuschätzen, wurden für das $50\,\mathrm{M}_\odot$ Modell zwei alternative Anfangsmodelle konstruiert. Die Ergebnisse dieses Vergleiches werden in Abschnitt 4.4 vorgestellt.

4.2 Referenzmodell

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, beginnen alle Rechnungen auf der Vorhauptreihe bei einer Zentraltemperatur von ungefähr 10^6 K und mit einer primordialen Elementmischung von (X_{H}, X_{He4}, X_{D}, X_{He3}, X_{Li7}) = (0.77,0.23, $6 \cdot 10^{-5}$,

$2 \cdot 10^{-5}$, $6 \cdot 10^{-10}$). Diese Elementmischung wurde von Wagoner (1973) aufgrund von Urknall-Nukleosyntheserechnungen für das primordiale Gas vorgeschlagen. Alle übrigen Spezies werden anfänglich auf einen Wert von 10^{-15} gesetzt, der vereinbar mit der oberen Schranke der primordial erzeugten Konzentration der Elemente C, N und O ist (Jedamzik, 1999). Alle in Kapitel 3 für die Energie- und Kohlenstoffproduktion identifizierten beitragenden Kernreaktionszweige werden berücksichtigt. Dies sind der ppI- bis ppIII-Zweig, der CN-Zyklus, die Sequenz ^{13}N(p,γ)^{14}O(β^+,ν)^{14}N und der 3α-Prozess. Diese Zweige erfordern ein Kernreaktions-Netzwerk, das insgesamt die folgenden 14 Spezies enthält: ^{1}H, ^{2}H, ^{3}He, ^{4}He, ^{7}Be, ^{7}Li, ^{8}B, ^{12}C, ^{13}C, ^{13}N, ^{14}N, ^{15}N, ^{14}O, ^{15}O. Die Reaktionsraten werden von der NACRE-Kollaboration (Angulo et al., 1999) genommen, die auch im Anhang B aufgeführt sind. Um die Rechenzeit etwas zu beschleunigen, wird für eine Zentraltemperatur kleiner als 10^7 K nur der ppI-Zweig berücksichtigt. Ab einer Zentraltemperatur von 10^7 K werden der ppII-Zweig, ab $2 \cdot 10^7$ K der ppIII-Zweig und ab $3 \cdot 10^7$ K die noch übrigen Kernreaktionen zugeschaltet. Das Referenzmodell besteht aus 150 Massenschalen, wobei 50 Schalen auf die äußere Hülle entfallen, die zwar nur 10% der Masse enthält, bei der aber die Variablen Druck und Temperatur stark abfallen. Die Modellrechnungen, angefangen von der Vorhauptreihe bis zu dem Zeitpunkt auf der Hauptreihe, bei dem über 80% des Wasserstoffs verbraucht ist, benötigen ca. 50 Stunden Rechenzeit auf einem modernen *Personal Computer* (AMD Athlon 1.4 GHz).

4.3 Entwicklung massereicher Pop-III-Sterne

Die Entwicklung von fünf Population-III-Sternen der Masse $15\,M_\odot$, $20\,M_\odot$, $50\,M_\odot$, $100\,M_\odot$ und $150\,M_\odot$ wird verfolgt, beginnend mit der Vorhauptreihenphase bis hin zu dem Zeitpunkt, an dem über 80% des Wasserstoffs auf der Hauptreihe aufgebraucht sind. Das Programm ist noch nicht in der Lage, die Sterne durch die Phase der Spätstadien zu entwickeln, in denen räumliche Strukturen wie das Schalenbrennen gut aufgelöst werden müssen. Für den Vergleich liegen zwei weitere Rechnungen eines $50\,M_\odot$-Sterns vor mit einer anfänglichen Elementkomposition, wie sie typisch ist für Sterne der Population II bzw. Population I.

4.3.1 Entwicklungswege

In Abbildung 4.1 sind die Entwicklungswege der fünf Population-III-Modelle in ein HRD eingezeichnet. Die Entwicklung beginnt *rechts* im HRD bei niedrigen Effektivtemperaturen. In der Vorhauptreihenphase, in der die Sterntemperaturen noch zu gering sind, um nukleare Reaktionen zu zünden, steht dem Stern nur die Gravitationsenergie zur Deckung seine Leuchtkraft zur Verfügung: Der Stern muss kontrahieren. Die Kontraktion ihrerseits führt zu einer Erwärmung des Sterns, da die freigesetzte Gravitationsenergie nach dem Virialsatz nur zur Hälfte der Leuchtkraft zur Verfügung steht, die andere Hälfte erhöht die innere Energie. Während der Vorhauptreihenkontraktion verhalten sich diese Sterne weitgehend wie eine Polytrope mit $n = 3$, bei der die Leuchtkraft konstant bleibt und nur die Effektivtemperatur aufgrund der Kontraktion zunimmt. Vorhandene Abweichungen in der Leuchtkraft kommen in dieser Phase von primordialem Deuteriumbrennen, das mit dem Entstehen einer temporären, zen-

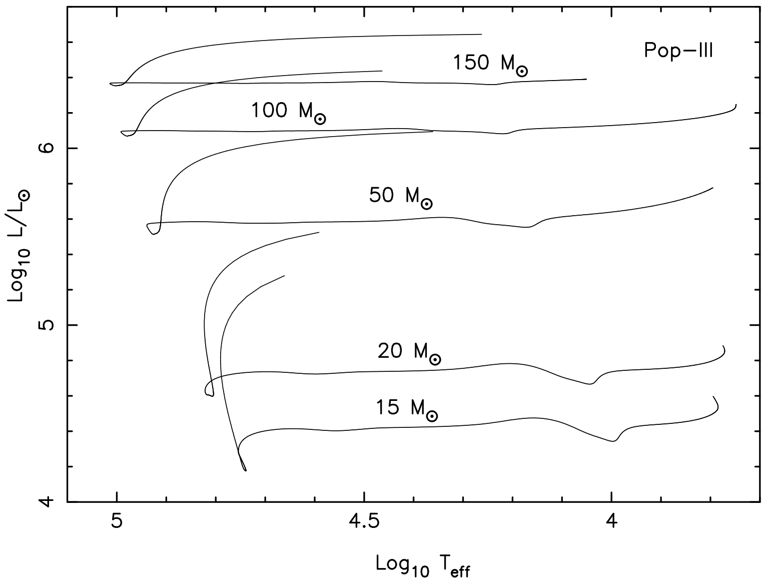

Abb. 4.1: Entwicklungswege im theoretischen HRD für Population-III-Sterne im Massenbereich 5 $\mathrm{M}_{\odot}$–150 $\mathrm{M}_{\odot}$.

tralen Konvektionszone und somit mit einer Erniedrigung der Leuchtkraft verbunden ist.

Für Massen oberhalb von $20\,\mathrm{M}_{\odot}$ ist der Stern ab dem Leuchtkraftminimum im thermischen Gleichgewicht, sodass eine Kurve durch diese Punkte die *Zero Age Main Sequence* (ZAMS) definiert. Wie gut das thermische Gleichgewicht erfüllt ist, kann am Verhältnis zwischen der gravitativen Leuchtkraft L_{g} zur Gesamtleuchtkraft L abgelesen werden. Im Gegensatz zu „normalen“ Sternen, die schon am Beginn der Hauptreihe vollständig thermisch relaxiert sind ($L_{\mathrm{g}}/L \sim 5 \cdot 10^{-4}$ für $50\,\mathrm{M}_{\odot}$-Population-II- bzw. Population-I-Stern), ist das thermische Gleichgewicht am Beginn der Hauptreihe für Population-III-Sterne ab $50\,\mathrm{M}_{\odot}$ aufwärts deutlich schlechter erfüllt ($L_{\mathrm{g}}/L \sim 10^{-1}$). Im Verlauf der Hauptreihenentwicklung verbessert sich das thermische Gleichgewicht für diese Sterne stetig bis auf $L_{\mathrm{g}}/L \sim 10^{-3}$, bei $50\,\mathrm{M}_{\odot}$ sogar bis hinab zu $L_{\mathrm{g}}/L \sim 5 \cdot 10^{-4}$. Der Relaxationsprozess wird unterbrochen durch den aufgebrauchten Wasserstoffvorrat, der den Stern von der ZAMS wegführt. Bei den niedrigeren Massen, die im pp-Brennen auf der Hauptreihe ankommen, ist das thermische Gleichgewicht gleichbleibend mit $L_{\mathrm{g}}/L \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ erfüllt.

Der $15\,\mathrm{M}_{\odot}$-Stern fällt aus der Reihe. Am Leuchtkraftminimum befindet sich dieser Stern nicht am Beginn des Hauptreihenstadiums, sondern kurz vor dem Entwicklungsstadium, an dem Molekulargewichtsänderungen die Leuchtkraft wieder ansteigen lassen. Davor sinkt die Leuchtkraft in diesem Modell stetig – aufgrund des Wachstums einer zentralen Konvektionszone, wie später noch eingehender diskutiert werden wird.

Die Entwicklungswege weg von der ZAMS können auf die Molekulargewichtsänderung durch die Verbrennung von Wasserstoff in Helium zurückgeführt werden, die einen Leuchtkraftanstieg $L \propto \mu^4$ bei einer Opazität aufgrund von Elektronenstreuung zur Folge haben muss. Die gleichzeitige Entwicklung zu niedrigeren Effektivtemperaturen deutet auf eine chemisch inhomogene Entwicklung hin. Am Endpunkt der Wege ist der Wasserstoffvorrat zu 80% aufgebraucht. Im Vergleich zu Population-

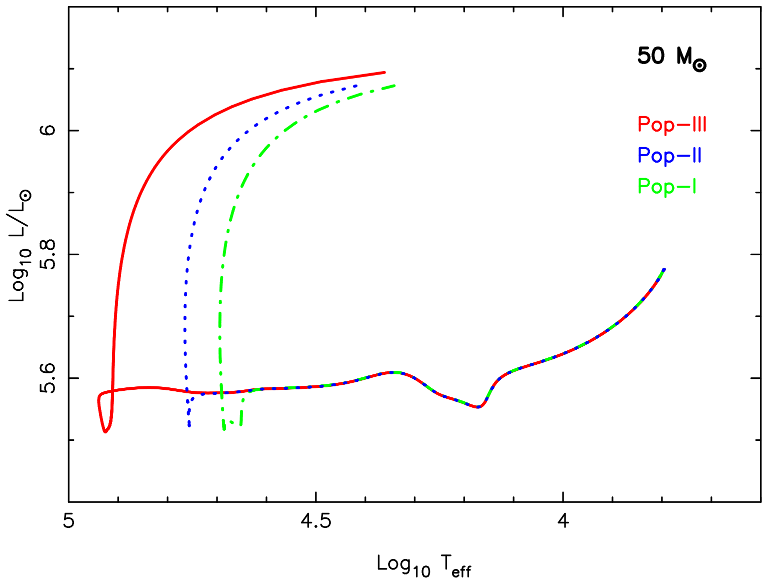

Abb. 4.2: Vergleich eines 50 $M_\odot$-Population-III-Sterns mit einem 50 $M_\odot$-Stern der Population-II und Population-I.

II- oder Population-I-Sternen erreichen Population-III-Sterne deutlich höhere Effektivtemperaturen. Wie in Abbildung 4.2 zu sehen ist, hat der 50 $M_\odot$-Population-III-Stern eine um $\Delta \log T_{\rm eff} = 0.23$ heißere Oberflächentemperatur im Vergleich zum Population-I-Stern. Wie schon Ezer & Cameron (1971) in den ersten Population-III-Entwicklungsrechnungen zeigen, muss der Stern in Abwesenheit von CNO-Elementen wegen der Ineffizienz des pp-Brennens zu höheren Temperaturen kontrahieren. Im Fall von Sternen mit mehr als 20 $M_\odot$ wird die Zentraltemperatur dabei so hoch, dass über den 3α-Prozess autogen soviel Kohlenstoff produziert werden kann, dass diese Sterne das Hauptreihenstadium mit CNO-Brennen erreichen. Bei Massen kleiner als 20 $M_\odot$ wird die Hauptreihe im pp-Brennen erreicht. Die Rechnungen dieser Arbeit bestätigen auch die Beobachtung von Ezer & Cameron (1971), dass die Vorhauptreihenkontraktion bei Population-III-Sternen *länger* ist, weil die Kontraktionsphase hin zu höheren Temperaturen länger dauert. Im Fall von 50 $M_\odot$ ist die Vorhauptreihenentwicklung um $2.9 \cdot 10^4$ a verlängert. Dagegen bleiben die Leuchtkraftunterschiede bei den massereichen Population-III- im Vergleich zu Population-I-Sternen gering (Abbildung 4.2).

4.3.2 Entwicklung von 50 $M_\odot$-, 100 $M_\odot$- und 150 $M_\odot$-Sternen

Population-III-Sternen größer 30 $M_\odot$ ist gemeinsam, dass die Energieproduktion von Beginn der Hauptreihe an vollständig von CNO-Brennen dominiert ist [1] (Abbildungen 4.3-4.5). Diese Sterne haben eine so große Leuchtkraft, dass das pp-Brennen immer ineffizient bleibt und die Kontraktion bis zu Zentraltemperaturen von mehr als 10^8 K andauert. Diese hohen Temperaturen führen zu einer Kohlenstoffbildung von $X_{\rm C12} \sim 10^{-11}$, die zur Deckung des Leuchtkraftbedarfs durch CNO-Brennen ausreicht. Die Ausbildung einer Konvektionszone von 60 Massenprozent der anfänglich

[1] In dieser Arbeit wurde nur ein 20 $M_\odot$- und ein 50 $M_\odot$-Modell gerechnet, sodass die Angabe von 30 $M_\odot$ nur eine Abschätzung ist.

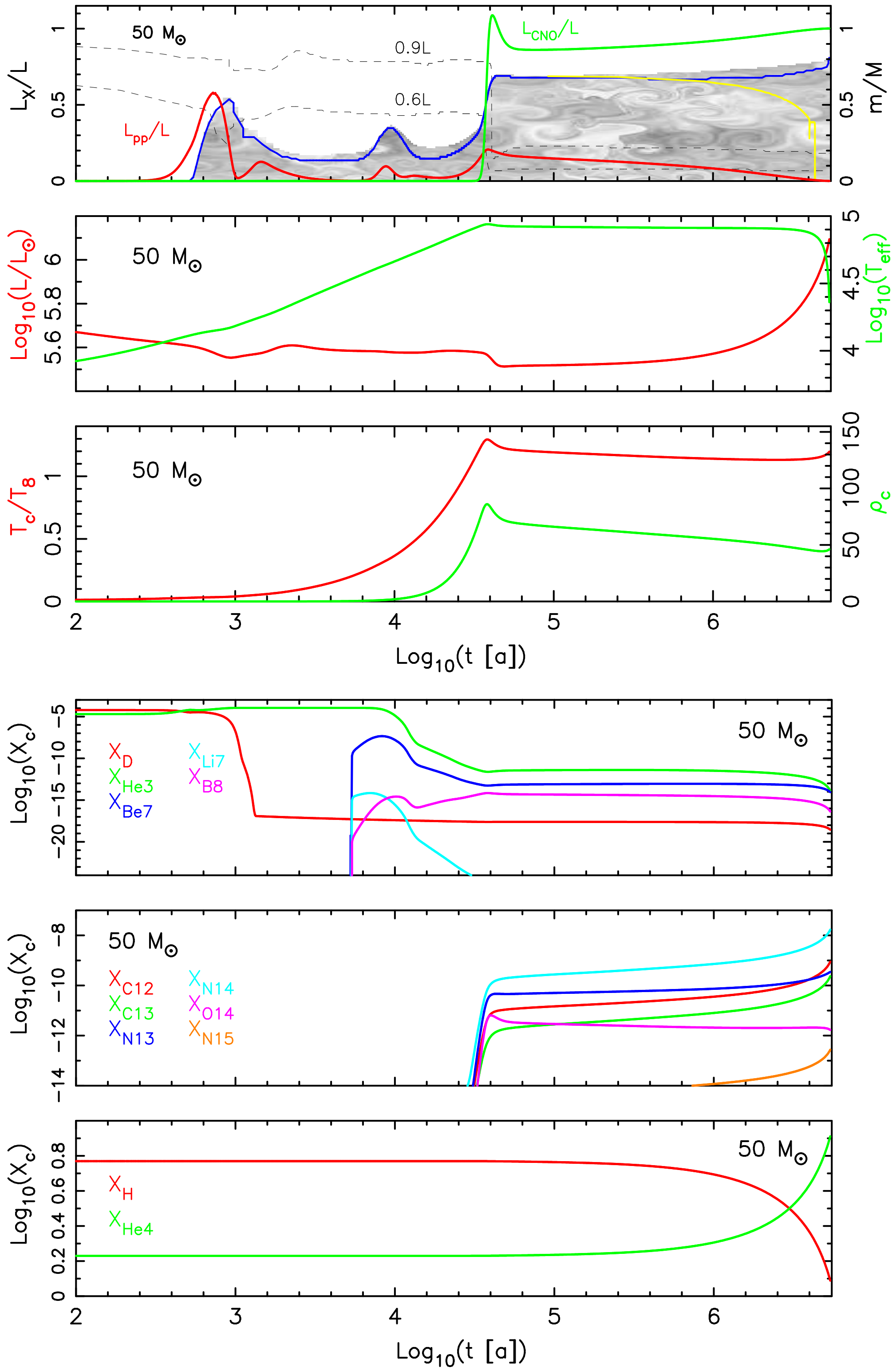

Abb. 4.3: Zeitliche Entwicklung einiger Sternparameter im $50\,M_{\odot}$-Population-III-Modell. Grau unterlegte Gebiete zeigen die Größe der Konvektionszone an.

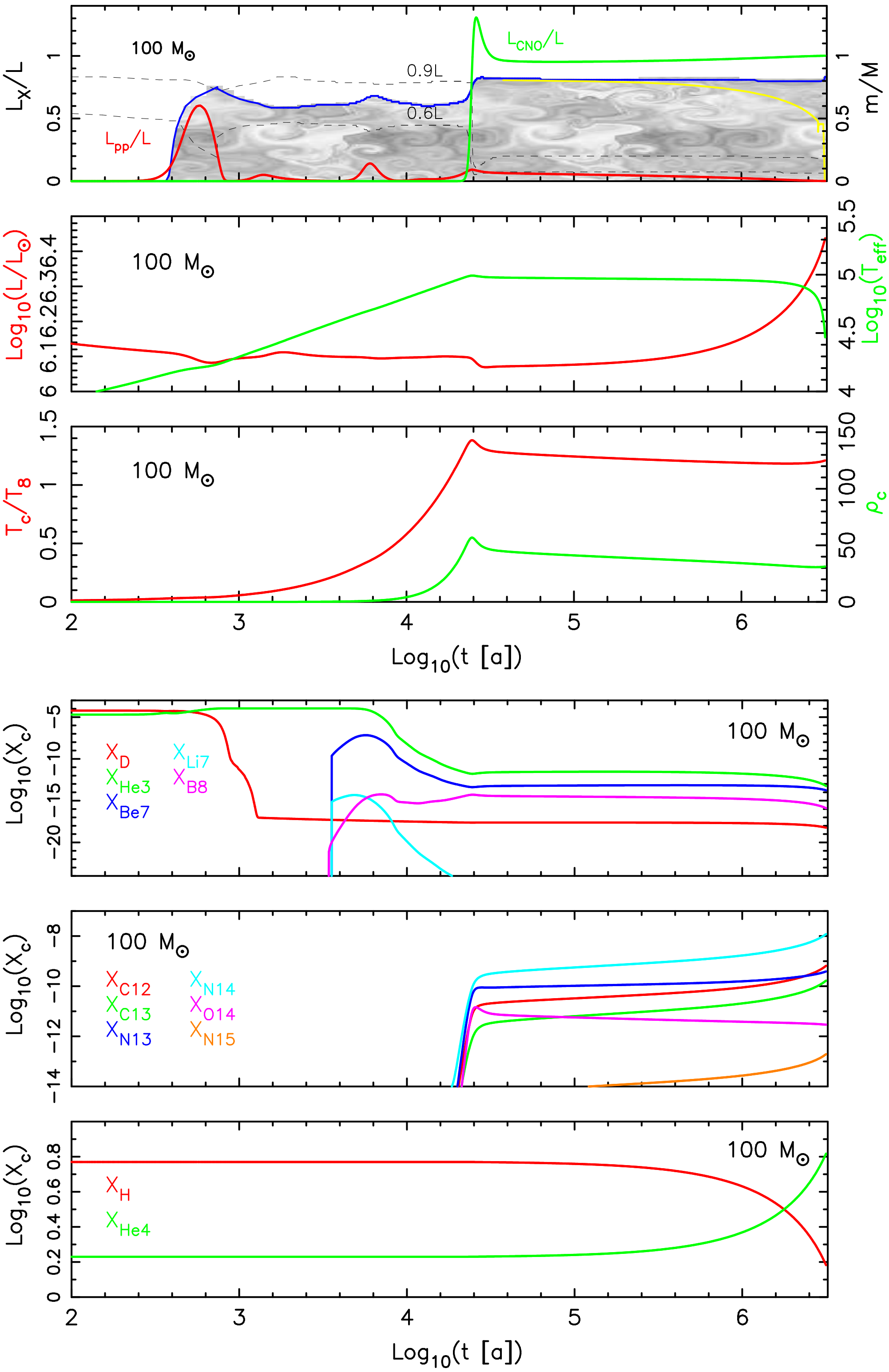

Abb. 4.4: Zeitliche Entwicklung einiger Sternparameter im 100 M$_\odot$-Population-III-Modell. Grau unterlegte Gebiete zeigen die Größe der Konvektionszone an.

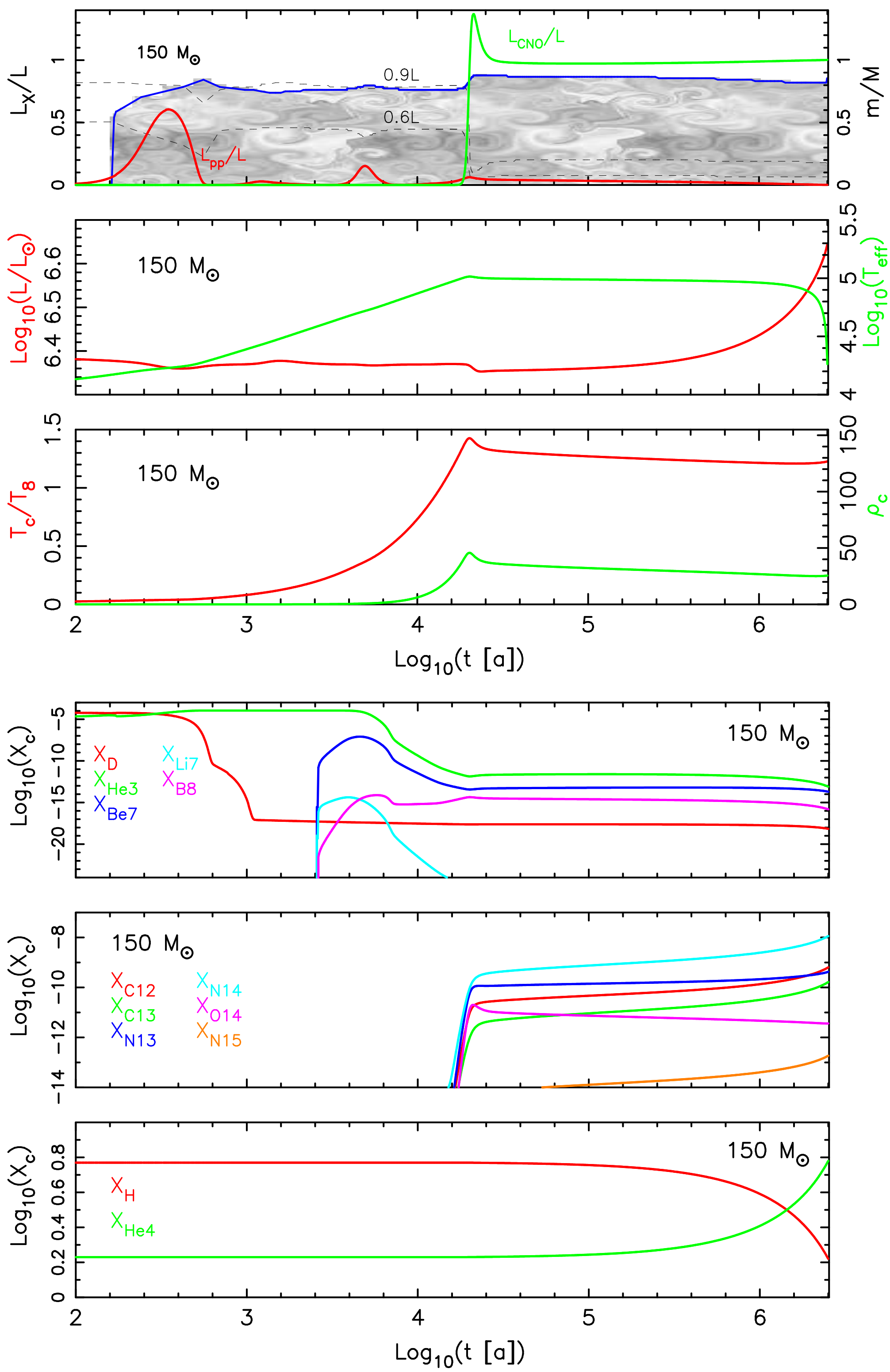

Abb. 4.5: Zeitliche Entwicklung einiger Sternparameter im 150 $M_\odot$-Population-III-Modell. Grau unterlegte Gebiete zeigen die Größe der Konvektionszone an.

vollradiativen Modelle beginnt mit der Verbrennung des primordialen Deuteriums bei ungefähr $5 \cdot 10^2$ a. Dieser Energieeintrag kann kurzzeitig 60% des Leuchtkraftbedarfs decken (Abbildungen 4.3a; 4.4a; 4.5a). Das Deuterium wird zunächst im Zentrum verbrannt (1. Maximum in L_{pp}/L) und dann sukzessive in weiter außen liegenden Schalen (2. Maximum). Nur im $50\,\mathrm{M}_\odot$-Modell schrumpft die Konvektionszone, nachdem Deuterium verbrannt ist, wieder auf 15 Massenprozent. In den massereicheren Sternen ist die Zustandsgleichung im Zentrum durch Strahlungsdruck dominiert, sodass radiativer und adiabatischer Temperaturgradient so dicht zusammen liegen, dass die Konvektionszone während der gesamten Entwicklung nicht mehr unter 60 Massenprozent fällt. Die Verbrennung von ^{3}He führt in allen drei Modellen zu einem leichten Anstieg der Konvektion, ohne die Kontraktion stark zu verlangsamen. Mit dem Einsetzen des CNO-Brennens steigt die Konvektionszone auf 70 Massenprozent, bei $150\,\mathrm{M}_\odot$ sogar auf 80 Massenprozent an. Dieses Verhalten kann mit der stärkeren Konzentration der Energieproduktion hin zum Zentrum des Sterns im Modus des CNO-Brennens erklärt werden. Ein deutlich steilerer räumlicher Anstieg der Leuchtkraft ist die Folge: 90% der Leuchtkraft wird schon in den innersten 20 Massenprozent des Sterns gedeckt (Abbildungen 4.3a; 4.4a; 4.5a). Ein steiler Leuchtkraftanstieg erhöht den radiativen Gradienten, sodass das Schwarzschild-Ledoux-Kriterium eine größere Konvektionszone anzeigt.

Allen Modellen ist weiterhin gemeinsam, dass sie kurz vor Erreichen der Hauptreihe zunächst mehr Energie produzieren als zur Deckung der Leuchtkraft erforderlich ist. Die Hauptreihe wird deshalb erst nach einer Expansionsphase von ca. 10^4 a erreicht. Bei den großen Massen und hohen Temperaturen wird das Protonenreservoir dieser Sterne in einigen 10^6 a verbraucht. Die Molekulargewichtsänderungen machen sich deshalb schon ab dem Beginn der Hauptreihe durch einen leichten Leuchtkraftanstieg bemerkbar (Abbildungen 4.3b; 4.4b; 4.5b). Obwohl die Zentraltemperatur in allen drei Modellen während des Hauptreihenstadiums abnimmt, bleibt diese deutlich über 10^8 K, sodass fortwährend Kohlenstoff im 3α-Prozess gebildet wird (Abbildungen 4.3c; 4.4c; 4.5c). Die Kohlenstoffkonzentration beträgt am Endpunkt der Rechnungen $X_{\mathrm{C12}} \sim 10^{-9}$ (Abbildungen 4.3d; 4.4d; 4.5d).

4.3.3 Entwicklung von $15\,\mathrm{M}_\odot$- und $20\,\mathrm{M}_\odot$-Sternen

Im Massenbereich kleiner $20\,\mathrm{M}_\odot$ wird die Hauptreihe mit pp-Brennen erreicht (Abbildungen 4.6; 4.7); wegen der Abwesenheit von CNO-Elementen auch hier bei deutlich höheren Temperaturen und Dichten im Vergleich zur Population I oder Population II. Im $15\,\mathrm{M}_\odot$-Modell kann das pp-Brennen die Leuchtkraft bei einer Zentraltemperatur von $T = 9 \cdot 10^7$ K decken (Abbildung 4.6c). An diesem Punkt beträgt die Konzentration der CNO-Elemente $X_{\mathrm{CNO}} < 10^{-13}$, sodass CNO-Brennen noch keinen Beitrag liefern kann. Doch auch bei $T = 9 \cdot 10^7$ K wird Kohlenstoff produziert, der nach über 10^7 a auf eine Konzentration von 10^{-11} ansteigt, und dann übernimmt der CNO-Zyklus die Energieproduktion. Die Übernahme des CNO-Zyklus erfolgt praktisch unbemerkt in der Leuchtkraft und in der Effektivtemperatur. Beim $20\,\mathrm{M}_\odot$-Modell trägt das CNO-Brennen von Anfang der Hauptreihe an 20% zur gesamten Energieproduktion bei. Die Bildung von Kohlenstoff im Hauptreihenstadium führt zu einer langsamen Verschiebung des Energieproduktionsmodus weg vom pp-Brennen und hin zum CNO-Brennen. Besonders bemerkenswert ist in beiden Modellen das kontinuierli-

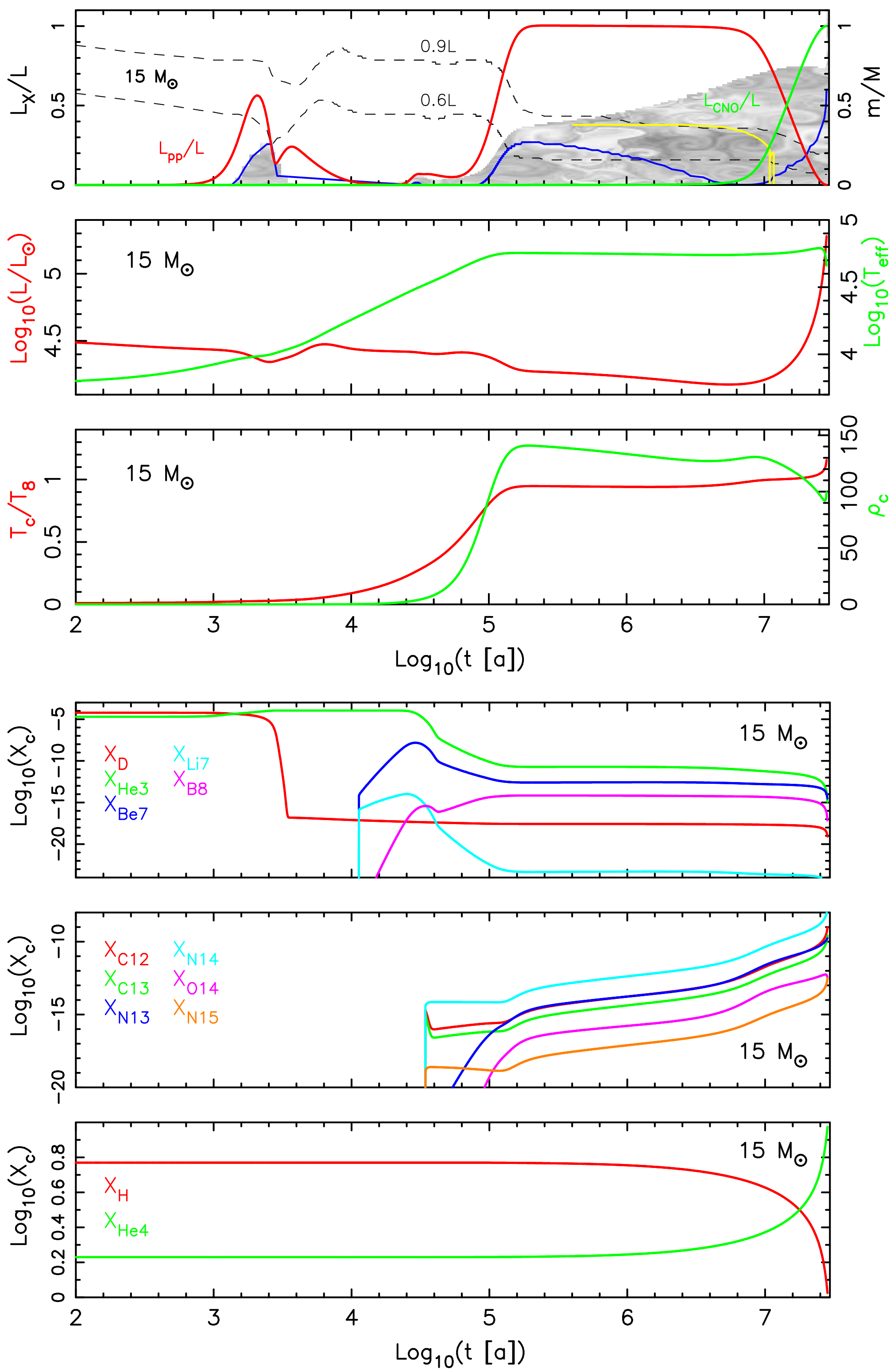

Abb. 4.6: Zeitliche Entwicklung einiger Sternparameter im 15 $M_\odot$-Population-III-Modell. Grau unterlegte Gebiete zeigen die Größe der Konvektionszone an.

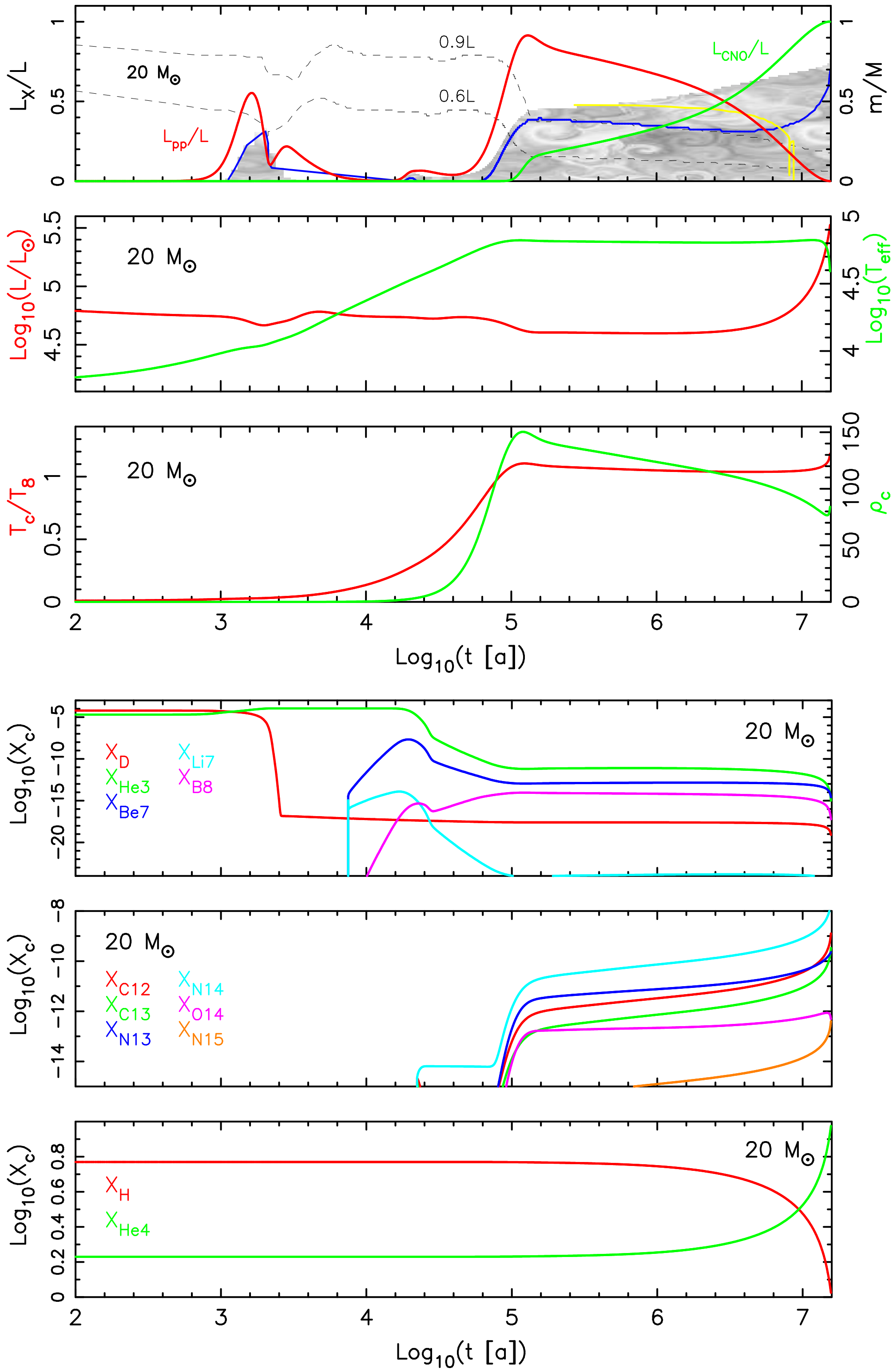

Abb. 4.7: Zeitliche Entwicklung einiger Sternparameter im 20 $M_\odot$-Population-III-Modell. Grau unterlegte Gebiete zeigen die Größe der Konvektionszone an.

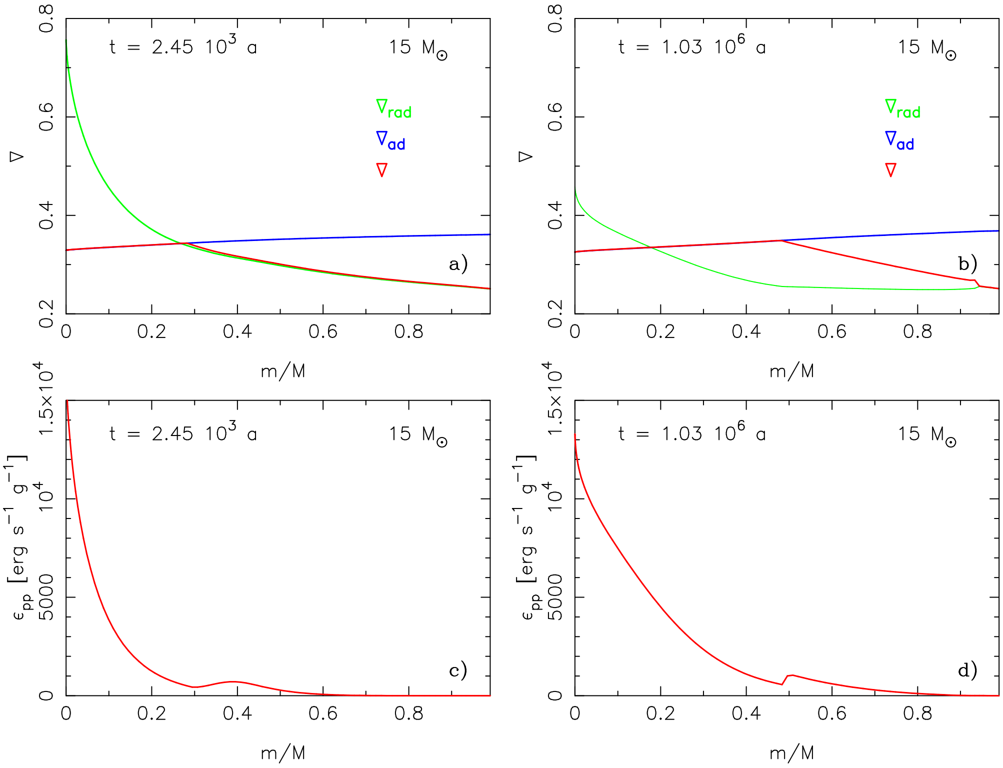

Abb. 4.8: Räumliche Verteilung der unterschiedlichen Temperaturgradienten an zwei unterschiedlichen Entwicklungszeitpunkten im 15 $M_\odot$-Stern. Im stationären Grenzfall folgt der tatsächliche Gradient der Schichtung ∇ dem radiativen Gradienten ∇_{rad} in Schwarzschild-Ledoux stabilen Gebieten (a). Im instationären Fall kann der tatsächliche Gradient deutlich vom radiativen Gradienten abweichen (b). Grund könnte die unterschiedliche räumliche Verteilung der Energieproduktion sein (c,d), die im Fall (d) einen größeren räumlichen Entropiegradienten erzeugt.

che Wachstum der zentralen Konvektionszone von 40 Massenprozent am Beginn der Hauptreihe bis auf 75 Massenprozent am Ende der Rechnungen. Dies ist ein Effekt der in dieser Arbeit zeitabhängig formulierten Konvektion, der im folgenden Abschnitt eingehender diskutiert werden soll.

4.3.4 Konvektionszonen

Ein zentrales Ergebnis dieser Arbeit ist die Ausprägung deutlich größerer Konvektionszonen im Vergleich zu bestehenden Arbeiten über massereiche Population-III-Sterne (Marigo et al., 2001; Castellani et al., 1983; Ezer & Cameron, 1971). Dies ist in Abbildungen 4.5a und 4.6a zu sehen, in denen zum Vergleich die Größe der Konvektionszone von Marigo et al. (2001) eingezeichnet ist (gelbe Linie). Besonders ausgeprägt sind die Unterschiede bei den niedrigen Massen dieser Arbeit. In denselben Abbildungen ist die Größe der Konvektionszone zu sehen, die das Modell aufgrund des Schwarzschild-Ledoux-Kriteriums annehmen müsste (blaue Linie). Auch in diesen Modellen folgt die Größe der Konvektionszone dem Stabilitätskriterium von Schwarzschild-Ledoux im Fall von 150 $M_\odot$ (exakt) und 100 $M_\odot$ (ca. 1% Abweichung). Ebenso anzuwenden ist das Stabilitätskriterium in allen Modellen bei

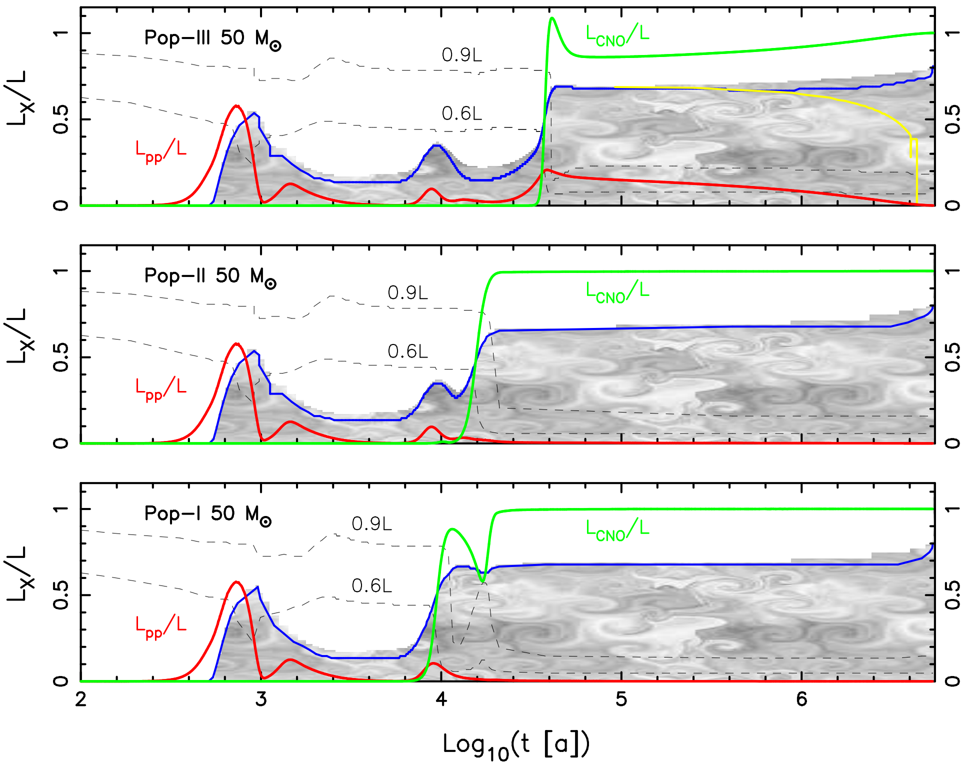

Abb. 4.9: Zeitliche Entwicklung eines 50 $M_\odot$-Sterns mit anfänglicher Population-III-, Population-II- und Population-I-Komposition. Grau unterlegte Gebiete zeigen die Größe der Konvektionszone an.

der Bestimmung der Konvektionszonen durch Deuterium- und ^{3}He-Brennen. Jedoch weicht die Größe der Konvektionszonen im 15 $M_\odot$- und 20 $M_\odot$-Modell im Hauptreihenstadium bis zu 100% von der mit Schwarzschild-Ledoux ermittelten Konvektionsgröße ab.

Diese Abweichungen liegen in der verwendeten zeitabhängigen Beschreibung für die Konvektion begründet, die nur im stationären Grenzfall in die bekannte Mischungswegtheorie übergeht. Im zeitabhängigen Fall, der hier eintritt, folgt der tatsächliche Temperaturgradient ∇ der Schichtung in Schwarzschild-Ledoux stabilen Gebieten nicht mehr zwangsläufig dem radiativen Gradienten ∇_{rad} (Abbildung 4.8b). In anderen Phasen der Entwicklung tritt auch in den Modellen dieser Arbeit der stationäre Grenzfall ein, in dem das Schwarzschild-Ledoux-Kriterium Gültigkeit hat (Abbildung 4.8a). Die gefundenen Abweichungen vom stationären Grenzfall könnten durch das in Population-III-Sternen heiße und räumlich ausgedehnte pp-Brennen getrieben sein, welches in der Lage ist, einen positiven Entropiegradienten zu produzieren, der als Quellterm in die Produktion der turbulenten kinetischen Energie eingeht (siehe Gleichungen (1.16); (1.17); (1.18)). Diese Erklärung wird unterstützt durch einen Vergleich der räumlichen Verteilung der Energieproduktion im stationären Fall mit dem instationären Fall, bei dem die Energieproduktion räumlich ausgedehnter ist (Abbildung 4.8c;d). Auch wird verständlich, warum die instationären Effekte bei den Population-III-Sternen mit höheren Massen geringer werden: Hier dominiert der CNO-Zyklus, der räumlich stärker zum Zentrum hin konzentriert ist. Beim Vergleich

Tabelle 4.1: Entwicklungszeiten bis zur ZAMS und zum Ende der Hauptreihe

$M/\mathrm{M}_\odot$	t_zams [a]	$t_{X_\mathrm{H}=0.1}$ [a]
15	$2.0 \cdot 10^5$	$2.8 \cdot 10^7$
20	$1.6 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^7$
50	$5.0 \cdot 10^4$	$5.3 \cdot 10^6$
100	$3.2 \cdot 10^4$	$3.4 \cdot 10^6$
150	$2.5 \cdot 10^4$	$2.7 \cdot 10^6$

des 50 $\mathrm{M}_\odot$-Population-III-Modells mit „normalen“ Sternen (Abbildung 4.9) sieht man, dass „normale“ Sterne deutlich besser dem Schwarzschild-Ledoux-Kriterium folgen. Nach obigem Erklärungsmuster ist dies eine Folge des sinkenden Anteils des räumlich ausgedehnten pp-Brennens. Die größeren Konvektionszonen haben Auswirkungen auf die Dauer der Hauptreihenphase, die wegen des erweiterten Protonenreservoirs verlängert ist (Tabelle 4.1).

4.4 Einfluss der Anfangsmodelle auf die Entwicklung

Am Beispiel des 50 $\mathrm{M}_\odot$-Population-III-Modells soll der Einfluss des Anfangsmodells auf die Entwicklungswege untersucht werden. Dazu werden zwei alternative Modelle entwickelt, die von einer abweichenden anfänglichen Entropiestruktur starten (Abbildung 4.10). Auch die alternativen Anfangsmodelle gehen von einer rein radiativen Sternstruktur aus ($\partial s/\partial m > 0$), weil dies die in Kapitel 4.1 beschriebene Methode zum Auffinden einer Lösung der Sternstrukturgleichungen erfordert. *Anfangsmodell 2* hat einen flacheren räumlichen Entropiegradienten und eine geringere anfängliche

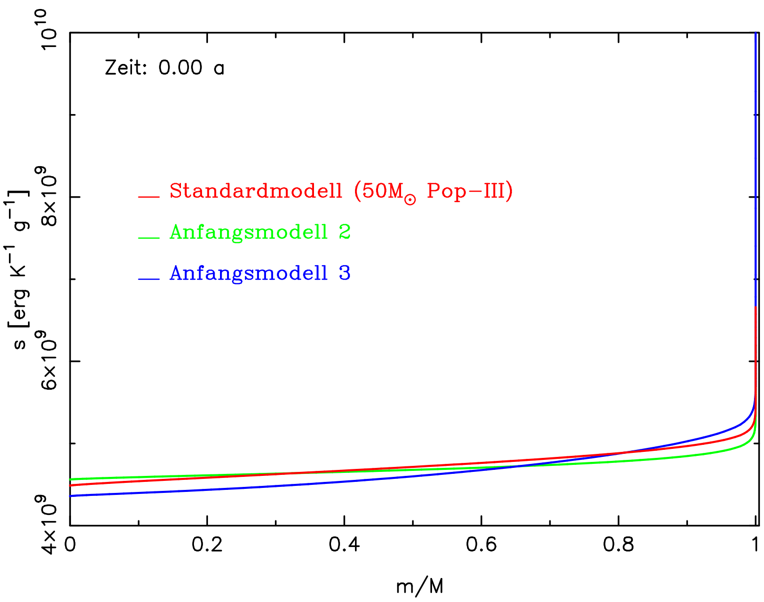

Abb. 4.10: Entropiestruktur der unterschiedlichen Anfangsmodelle eines 50 $\mathrm{M}_\odot$-Population-III-Sterns. Die Entropie ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

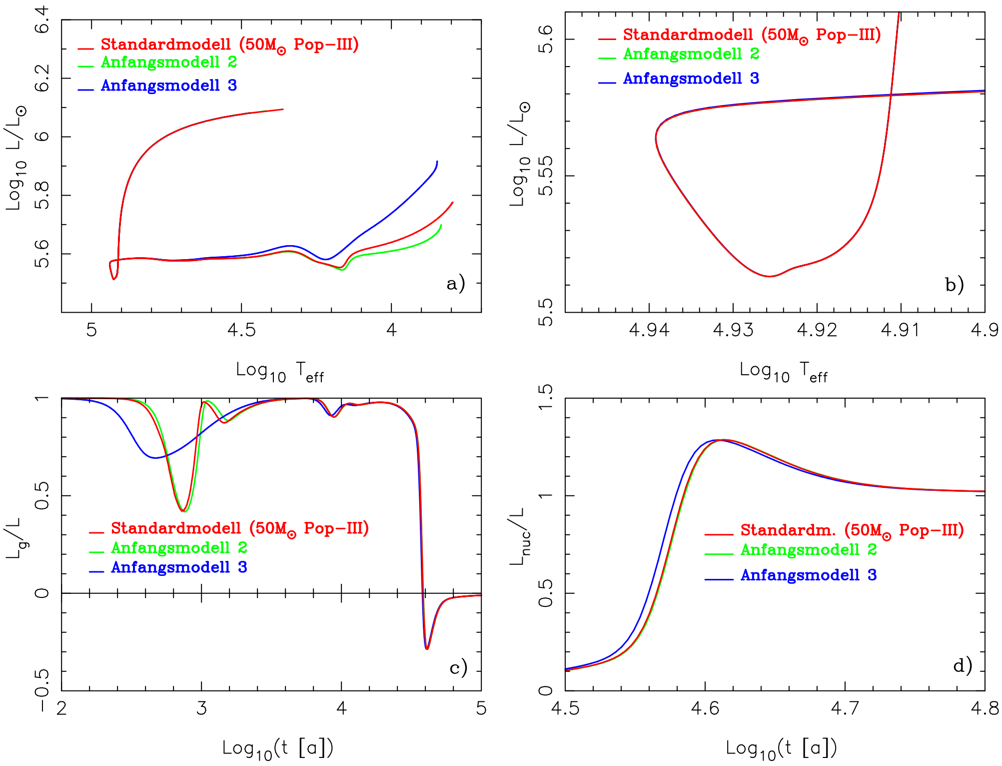

Abb. 4.11: Zeitliche Entwicklung bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen in einigen globalen Parametern: HRD (a,b), gravitative Leuchtkraft (c) und nukleare Leuchtkraft (d).

Leuchtkraft. Im Gegensatz dazu hat das *Anfangsmodell 3* einen steileren Entropiegradienten und eine deutlich höhere Leuchtkraft (Abbildung 4.10). Die Startpunkte im HRD weichen um bis zu 40% in der Leuchtkraft ab.

Die Unterschiede in den Entwicklungswegen im HRD sind in Abbildung 4.11 zu sehen. Zwar nimmt die anfängliche Differenz stetig ab, doch konvergieren die Entwicklungswege erst bei $t > 3 \cdot 10^4$ a. Noch weit vor dem Hauptreihenstadium sind die Differenzen in der Leuchtkraft kleiner als die Fehlertoleranzen des Integrators (Abbildung 4.12). Wegen der Existenz einer Masse-Leuchtkraft-Beziehung ist dieses Verhalten spätestens auf der Hauptreihe zu erwarten. Auch die räumliche Struktur der anderen Sternparameter ist im Hauptreihenstadium in allen drei Modellen identisch (Abbildung 4.12e-h; 4.13e-h). Die Unterschiede wirken sich im Vorhauptreihenstadium aus, wo die thermische Struktur noch von der Vorgeschichte mitbestimmt ist. Am ausgeprägtesten sind die Differenzen zum Standardmodell beim *Anfangsmodell 3*, das auch mit dem größeren Leuchtkraftunterschied startet. Eine höhere Leuchtkraft bedingt eine stärkere Kontraktion, weil die Leuchtkraft durch die Gravitationsenergie aufgebracht werden muss (dies ist eine Konsequenz aus dem Virialsatz). Deshalb kann das Deuteriumbrennen nur zu einem geringeren Teil den Leuchtkraftbedarf decken (Abbildung 4.11c), und die Hauptreihe wird $8 \cdot 10^3$ a früher erreicht (Abbildung 4.11d). Am Punkt des zentralen Temperaturmaximums kurz vor dem Erreichen des Hauptreihenstadiums und einer Entwicklungszeit von $3.83 \cdot 10^4$ a sind die räumlichen Strukturunterschiede im *Anfangsmodell 3* noch in der Leuchtkraft (5%), der gravitativen Energie (25%),

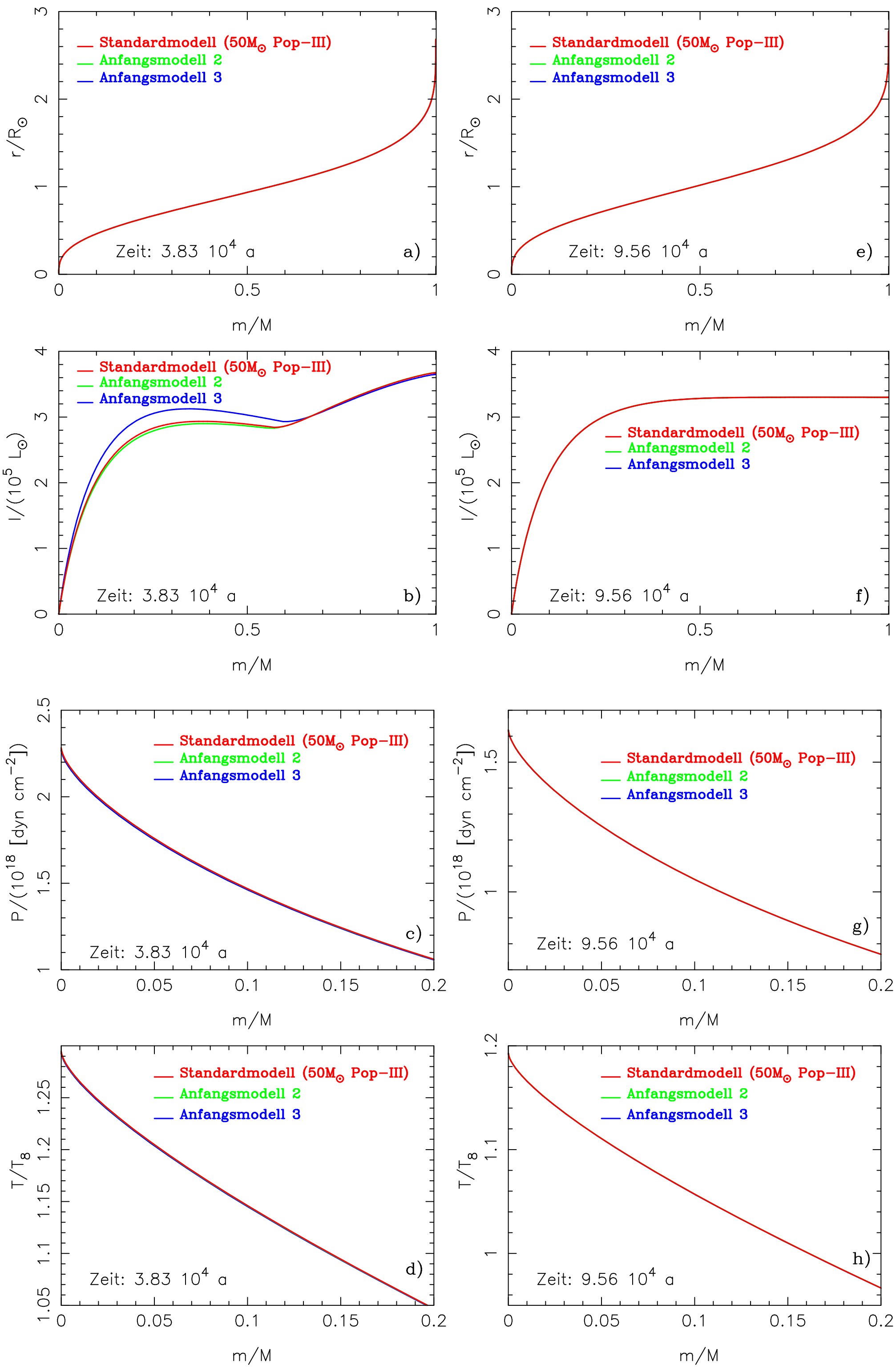

Abb. 4.12: Räumliche Strukturunterschiede in den Variablen Radius, Leuchtkraft, Druck und Temperatur aufgrund der unterschiedlichen Anfangsbedingungen am Zeitpunkt des Temperaturmaximums (a-d) und am Anfang des Hauptreihenstadiums (e-h). Unterschiede auf der Hauptreihe sind kleiner als $0.1\,\%$.

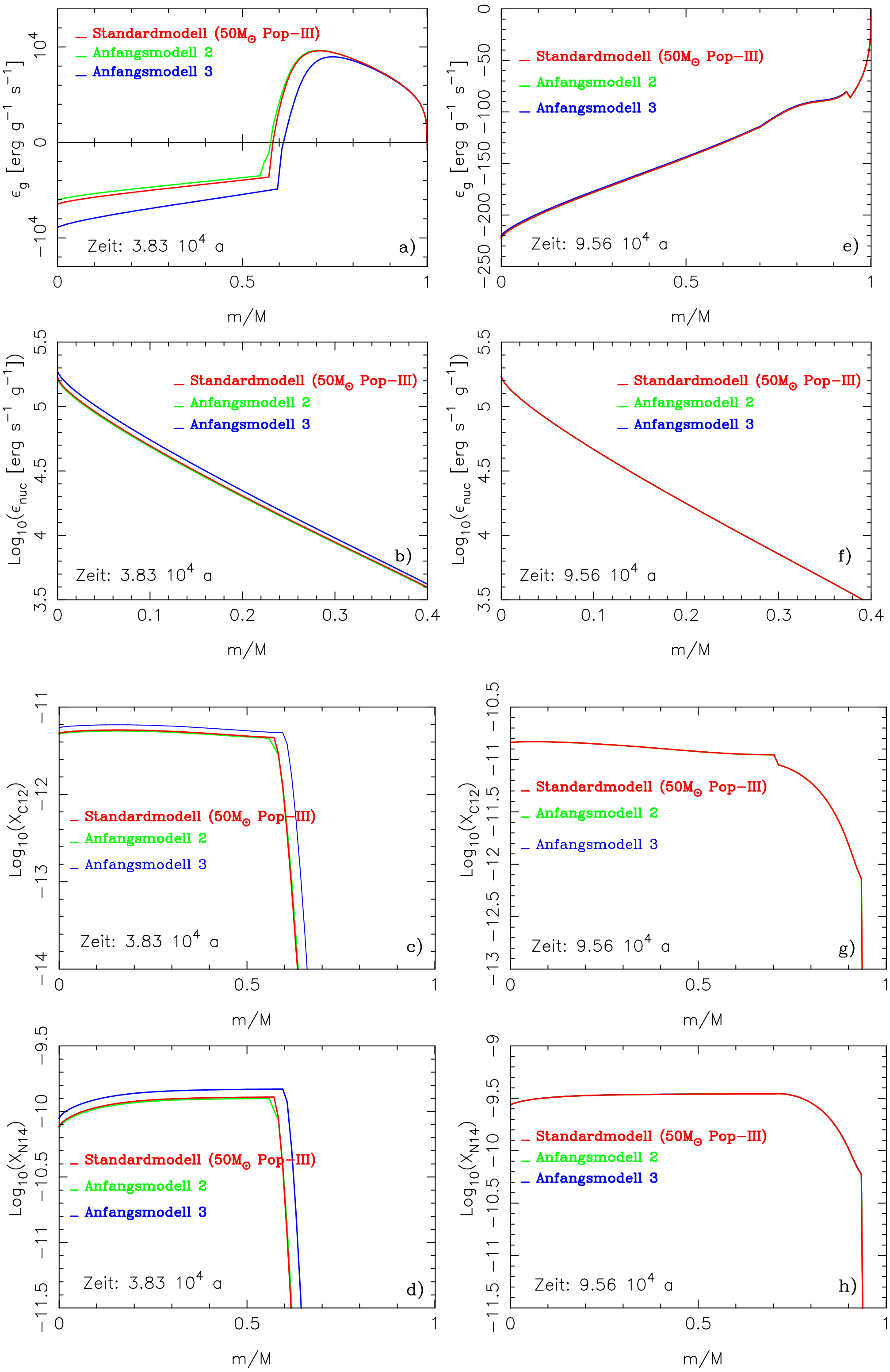

Abb. 4.13: Räumliche Strukturunterschiede in den Variablen gravitative Energie, nukleare Energie, Kohlenstoff und Stickstoff aufgrund der unterschiedlichen Anfangsbedingungen am Zeitpunkt des Temperaturmaximums (a-d) und am Anfang des Hauptreihenstadiums (e-h). Unterschiede auf der Hauptreihe sind kleiner als 0.1%.

der Größe der Konvektionszone (4%) und der Kohlenstoffhäufigkeit (6%) zu sehen (Abbildung 4.12a-d; 4.13a-d). Auf der Hauptreihe, wenn der Stern auch thermisches Gleichgewicht erreicht hat, sind die Unterschiede in den Modellen kleiner als 0.1%.

Dieser Vergleich der unterschiedlichen Anfangsmodelle zeigt, dass für eine exakte Festlegung der Vorhauptreihenentwicklung die genauen Anfangsbedingungen bekannt sein müssen, zumindest dann, wenn man mit vollradiativen Modellen startet. Obwohl, wie zu erwarten, die unterschiedliche Anfangsstruktur auf der Hauptreihe nicht auswirkt, kann der Zeitpunkt des Erreichens der Hauptreihe variieren. Auch wenn die hier gefundenen Zeitunterschiede gering sind, so ist nicht ausgeschlossen, dass realistische Anfangsmodelle noch stärker von den hier untersuchten vollradiativen Modellen abweichen.

4.5 Einfluss der Kernreaktionen auf die Entwicklung

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen auf die Entwicklungsrechnungen von drei Population-III-Sternen der Masse $150\,M_\odot$ (Abbildung 4.14-4.17), $100\,M_\odot$ (Abbildung 4.18-4.21) und $50\,M_\odot$ (Abbildung 4.22-4.25) untersucht, wenn entweder die β-Zerfälle vernachlässigt werden oder die Kernreaktionssequenz ^{13}N(p,γ)^{14}O(β^+,ν)^{14}N im Netzwerk ausgeklammert wird. Das qualitative Verhalten ist für alle drei Massen identisch. Im Vergleich zur Referenzrechnung ist der räumliche Gradient der Energieproduktion bei Vernachlässigung der β-Zerfälle steiler und bei Vernachlässigung des weiteren Protoneneinfangs an ^{13}N flacher (Abbildungen 4.16b,f; 4.20b,f; 4.24b,f). Dieses Verhalten ist eine direkte Konsequenz aus den Verhältnissen von Umlaufzeit im Zyklus und der Mischungszeitskala. Ohne β-Zerfälle wird der Zyklus schneller durchlaufen, und deshalb ist der Transport von Kohlenstoff in äußere Schichten nicht so effizient. Innere Schichten tragen folglich mehr zur Energieproduktion bei (Abbildungen 4.16b; 4.20b; 4.24b). Ein steilerer Abfall in der Energieproduktion führt gleichzeitig zu einer etwas ausgedehnteren Konvektionszone. Genau entgegengesetzt verhält es sich bei Vernachlässigung von ^{14}O. Da der Zyklus hier langsamer durchlaufen wird, besteht mehr Zeit für Stofftransport nach außen, der Temperaturabfall ist flacher und die Konvektionszone nicht ganz so ausgedehnt. Bei „normalen“ Sternen führen kleinere Konvektionszonen zwangsläufig zu einer kürzeren Lebensdauer auf der Hauptreihe, da nicht so viele Protonen als Energiereservoir zur Verfügung stehen. Auch hier wird der Wasserstoffvorrat bei Vernachlässigung von ^{14}O schneller verbraucht (Abbildungen 4.15a; 4.19a; 4.23a). Doch obwohl im Modell ohne β-Zerfälle die Konvektionszone vergrößert ist, wird auch in diesem entgegengesetzten Fall der Wasserstoff schneller verbraucht. Die schnellere Fusion im kürzeren Zyklus dominiert hier gegenüber der Vergrößerung der Konvektionszone. Eine stärkere räumliche Konzentration der Energieproduktion zum Zentrum hin spiegelt sich auch in einem stärkeren Anstieg der Leuchtkraft wider (Abbildungen 4.17a,c; 4.21a,c; 4.25a,c). Andere Strukturgrößen wie Temperatur und Dichte weichen in den untersuchten Modellen nur gering ab.

Die Vernachlässigungen bei den Kernreaktionen führen erwartungsgemäß bei massereicheren Sternen zu größeren Abweichungen. Dies liegt an der höheren Zentraltemperatur der massereicheren Sterne, für die die in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Abweichungen in der Energieproduktion zunehmen. Die Auswirkungen auf die Ent-

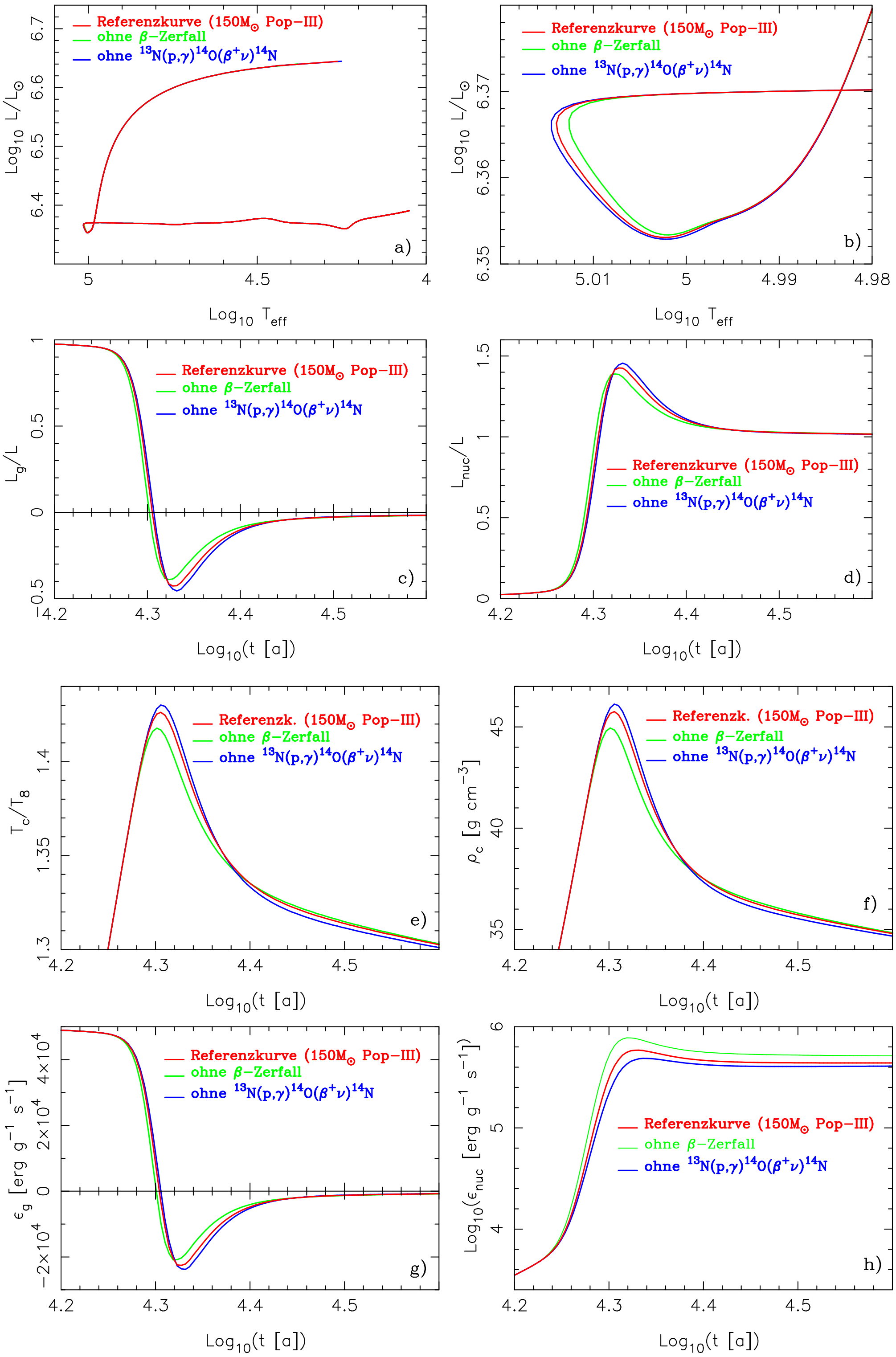

Abb. 4.14: Abweichungen vom 150 M$_\odot$-Referenzmodell (rot) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) in der Gesamtleuchtkraft (a,b), gravitativen Leuchtkraft (c), nuklearen Leuchtkraft (d), Zentraltemperatur (e), Zentraldichte (f), zentralen gravitativen Energieproduktion (g) und zentralen nuklearen Energieproduktion (h). Die Abweichungen in h) betragen ca. 10 %, in den anderen Variablen jedoch weniger als ein Promille.

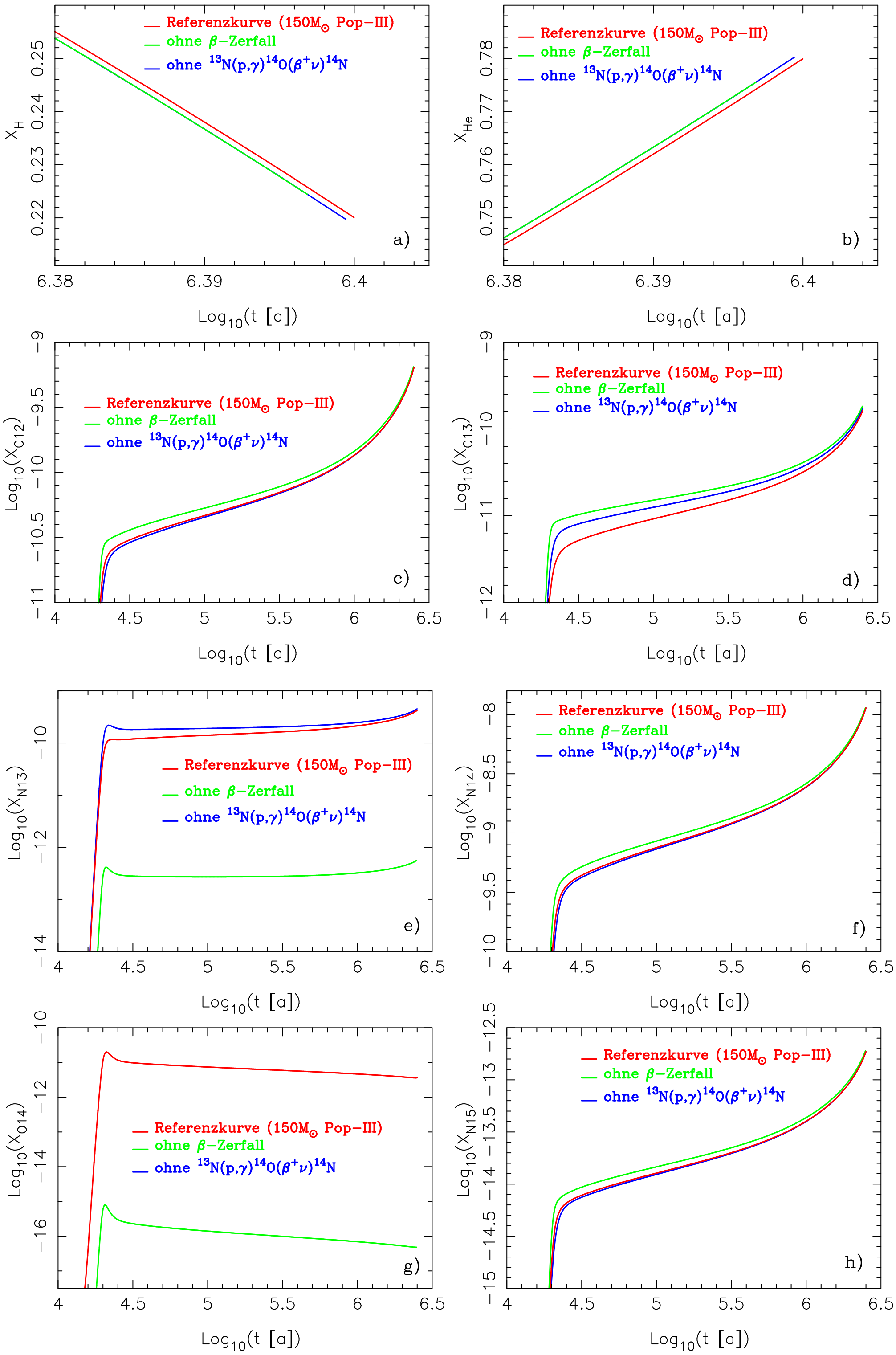

Abb. 4.15: Abweichungen vom 150 $M_\odot$-Referenzmodell (rot) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) in der Protonenlebensdauer (a,b), Kohlenstoffhäufigkeit (c,d), Stickstoffhäufigkeit (d-f,h) und Sauerstoffhäufigkeit (g). Die Abweichungen in den häufigsten CNO-Elementen betragen ca. 15%. Die Lebensdauer des Protonenreservoirs weicht in den unterschiedlichen Modellen nur im Promillebereich ab (a,b).

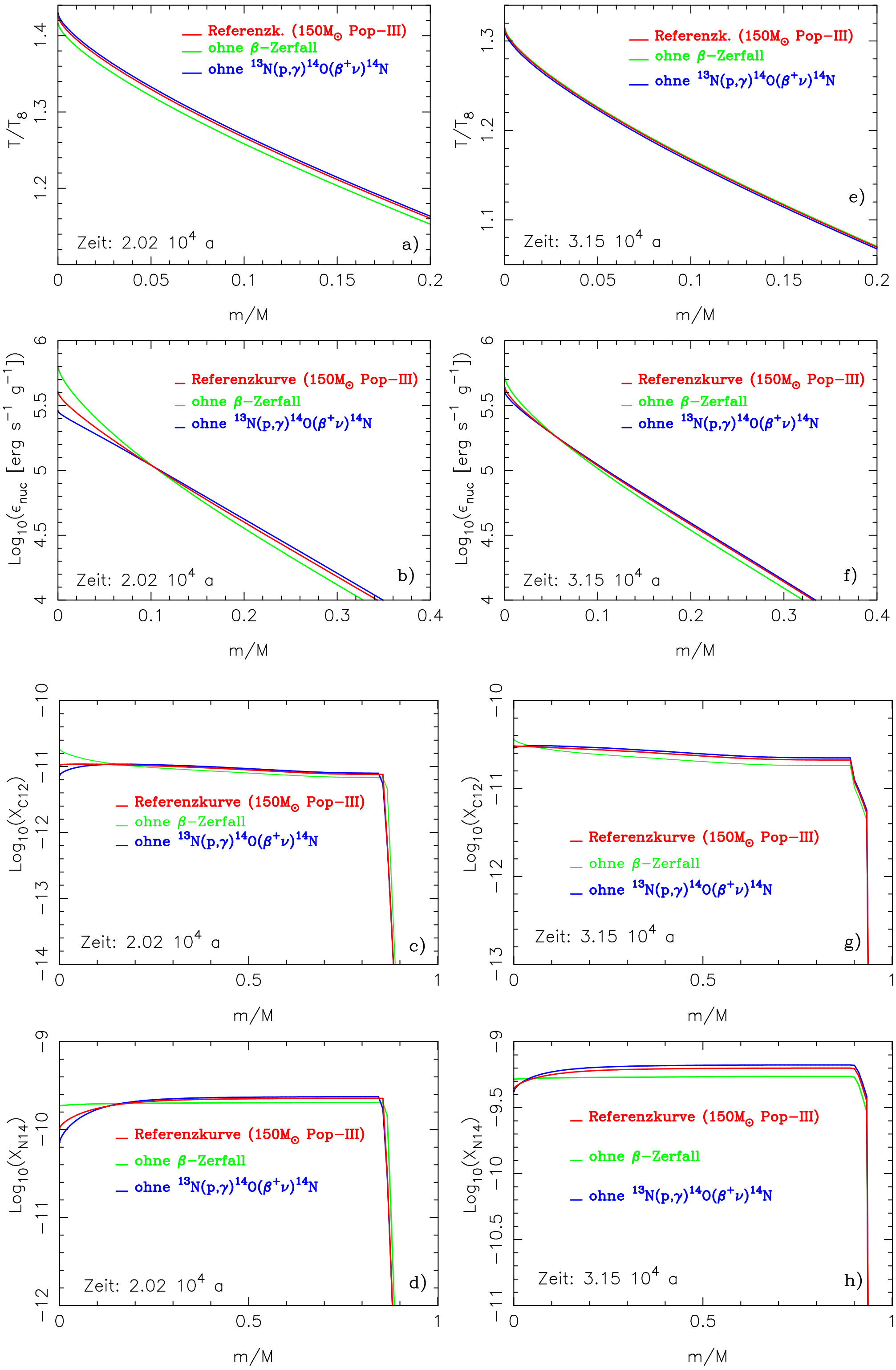

Abb. 4.16: Abweichungen vom $150\,M_\odot$-Referenzmodell (rot) in der räumlichen Sternstruktur bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) für zwei unterschiedliche Zeitpunkte. Bei $2.02 \cdot 10^4$ a erreicht die Zentraltemperatur ein Maximum, und der Stern befindet sich kurz vor dem Erreichen des Hauptreihenstadiums (a-d). Bei $3.15 \cdot 10^4$ a ist der Stern auf der Hauptreihe angekommen (e-h). Räumliche Abweichungen in den unterschiedlichen Modellen bewegen sich im Bereich von 10% (b-d,f-h). Abweichungen in der Temperaturverteilung sind um den Faktor 100 kleiner.

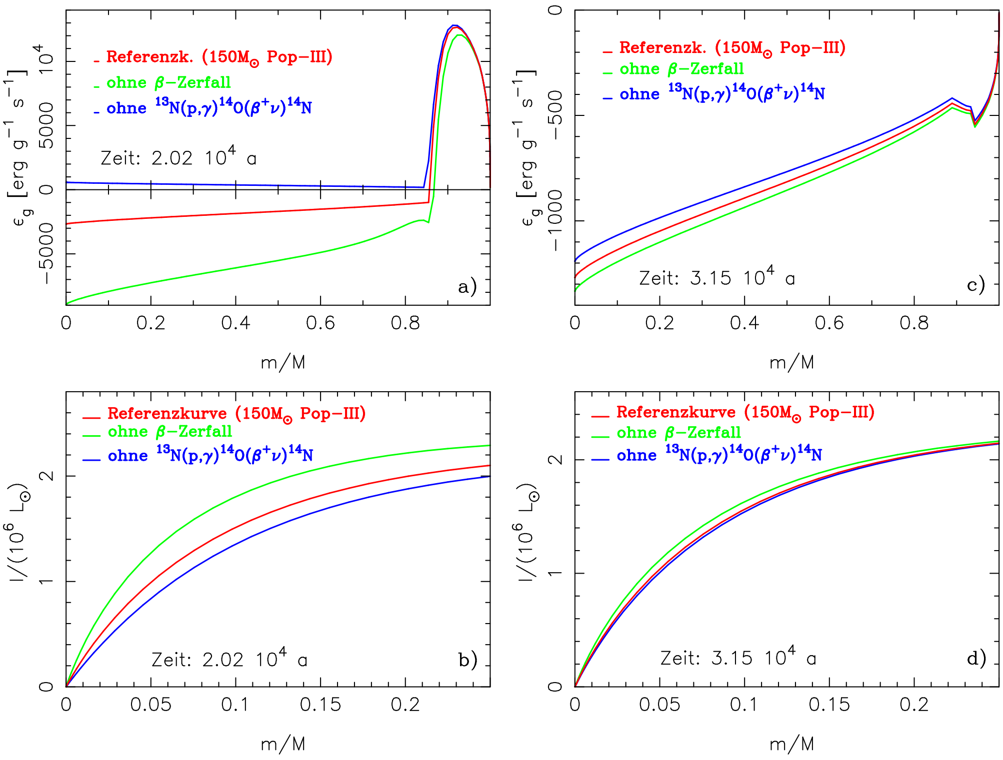

Abb. 4.17: Abweichungen vom 150 M$_\odot$-Referenzmodell (rot) in der räumlichen Verteilung der gravitativen Energie (a,c) und Leuchtkraft (b,d) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) an den beiden Entwicklungszeitpunkten $2.02 \cdot 10^4$ a (a,b) und $3.15 \cdot 10^4$ a (c,d). Die unterschiedliche räumliche Verteilung in der Energieproduktion wirkt sich in diesen beiden Variablen im Prozentbereich aus.

wicklungspfade im HRD sind jedoch vernachlässigbar gering. Im HRD beschränken sich die Differenzen auf die kurze Expansionsphase kurz vor Erreichen der Hauptreihe. Die Vernachlässigung der β-Zerfälle bedingt eine um nur 0.3% (150 M$_\odot$), 0.28% (100 M$_\odot$) und 0.21% (50 M$_\odot$) erniedrigte Effektivtemperatur (Abbildungen 4.14b; 4.18b; 4.22b). Die Abweichungen bei Vernachlässigung von ^{14}O sind noch geringer. Auch die beschriebene längere Haupreihenphase im Referenzmodell bewegt sich im Promillebereich (Abbildungen 4.15a; 4.19a; 4.23a). Obwohl die Auswirkungen auf die Entwicklungswege vernachlässigbar sind, bedingt die verbesserte Modellierung der Kernreaktionen eine *räumliche Strukturänderung* des Sterns, die sich im Bereich von 10% bewegt. Diese bildet sich ab in der Energieproduktion und in der Leuchtkraftverteilung sowie in den Häufigkeiten der CNO-Elemente, die zwischen den Modellen während des Hauptreihenstadiums um bis zu 10% abweichen (Abbildungen 4.15c-h; 4.19c-h; 4.23c-h). Diese Unterschiede werden allerdings während der Hauptreihenentwicklung immer kleiner, weil die Temperatur der Sterne aufgrund der andauernden Kohlenstoffproduktion im 3α-Prozess abnimmt. Wie schon im Einzonen-Modell in Abschnitt 3.1.2 gesehen, sind die Unterschiede in der Energieproduktion stark temperaturabhängig. Warum wirken sich nun die 10% Abweichungen in der Energieproduktion nur im Promillebereich auf die Sternparameter wie Dichte, Temperatur und Radius aus? Man könnte meinen, dies liege an der Abhängigkeit der Energiepro-

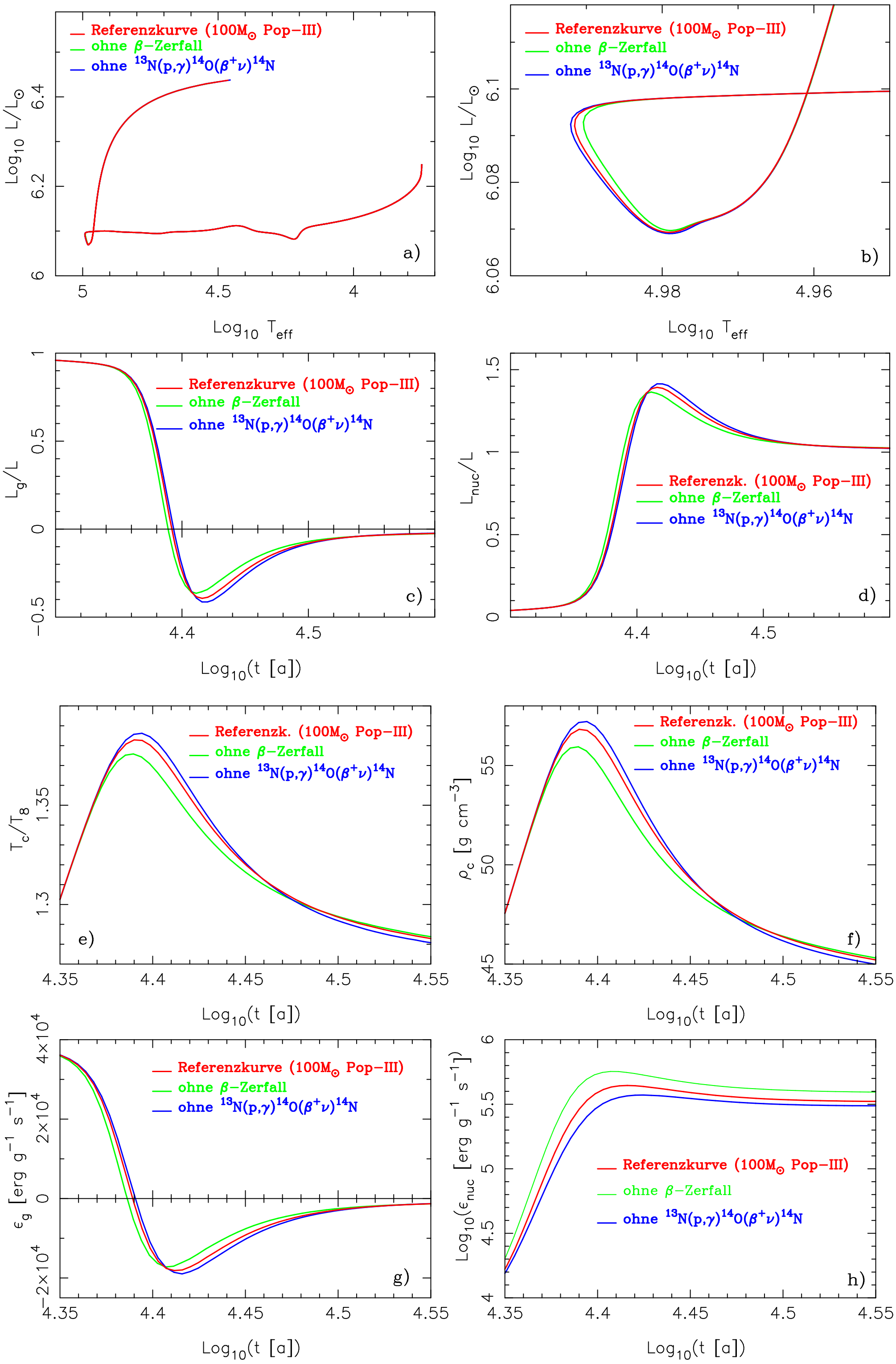

Abb. 4.18: Abweichungen vom 100 $M_\odot$-Referenzmodell (rot) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) in der Gesamtleuchtkraft (a,b), der gravitativen Leuchtkraft (c), nuklearen Leuchtkraft (d), Zentraltemperatur (e), Zentraldichte (f), zentralen gravitativen Energieproduktion (g) und zentralen nuklearen Energieproduktion (h). Die Abweichungen in h) betragen ca. 10%, in den anderen Variablen jedoch weniger als ein Promille.

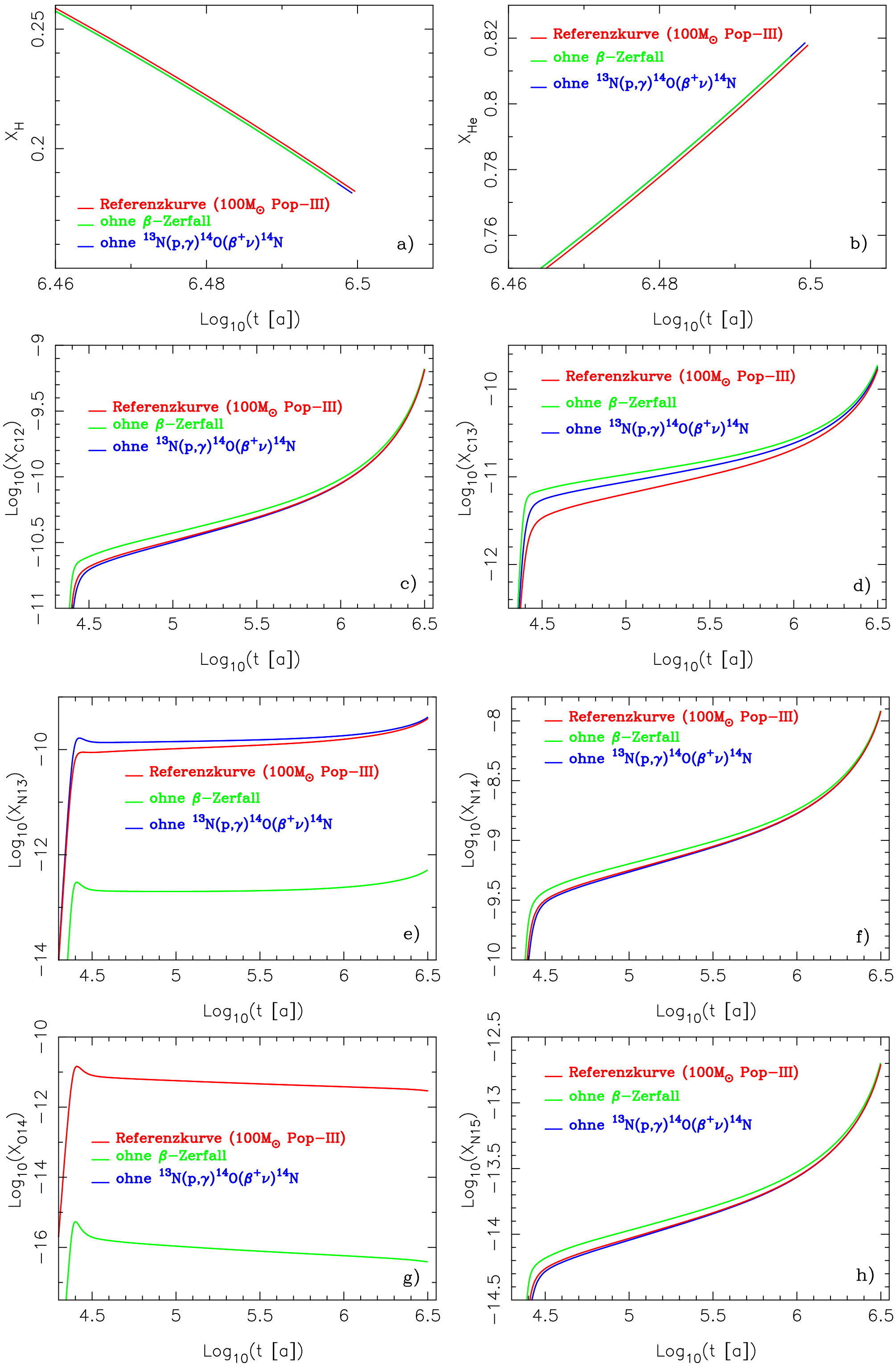

Abb. 4.19: Abweichungen vom 100 $M_\odot$-Referenzmodell (rot) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) in der Protonenlebensdauer (a,b), Kohlenstoffhäufigkeit (c,d), Stickstoffhäufigkeit(d-f,h) und Sauerstoffhäufigkeit (g). Die Abweichungen in den häufigst vorkommenden CNO-Elementen betragen ca. 13%. Die Lebensdauer des Protonenreservoirs weicht in den unterschiedlichen Modellen nur im Promillebereich ab (a,b).

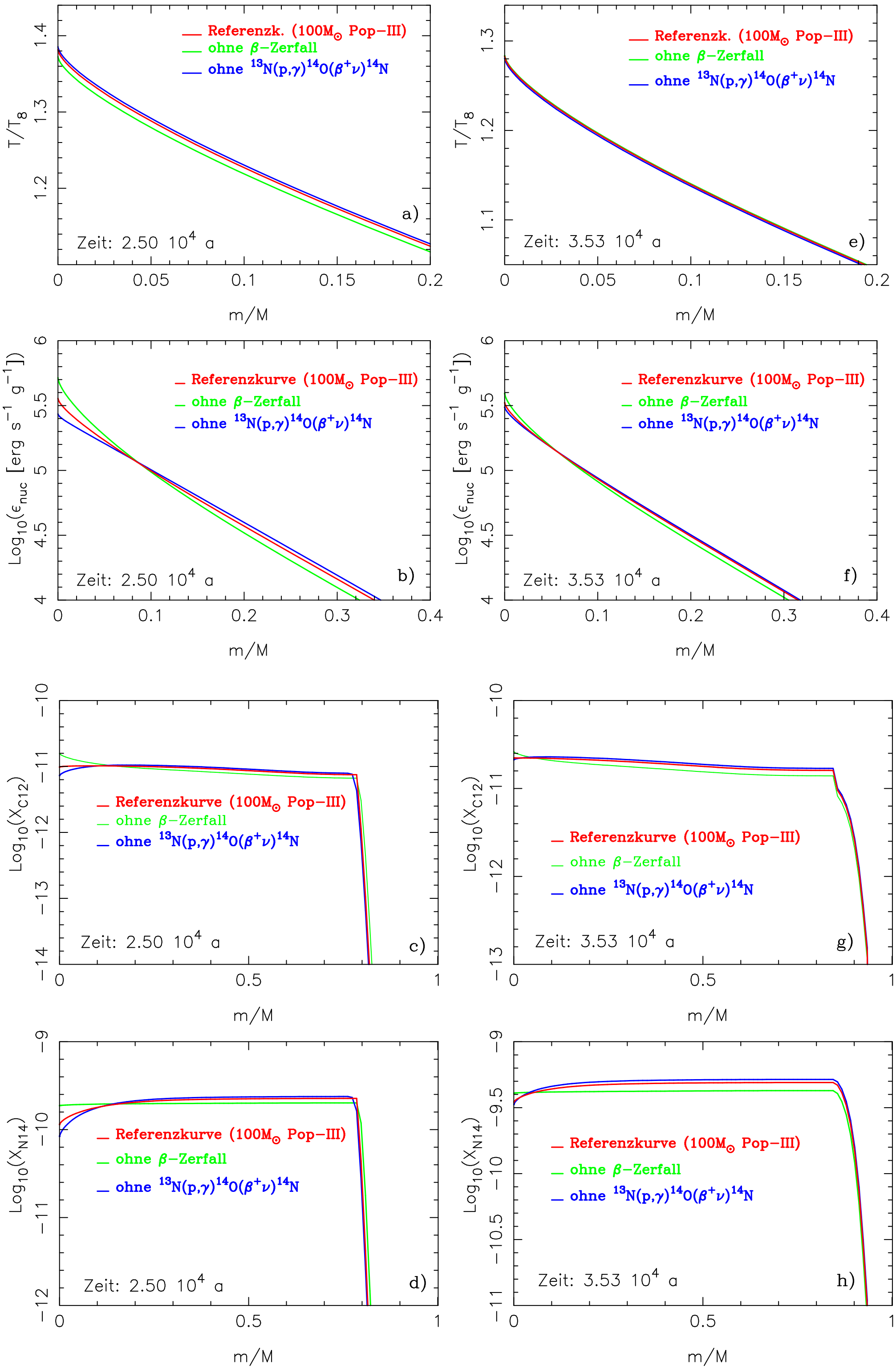

Abb. 4.20: Abweichungen vom $100\,M_\odot$-Referenzmodell (rot) in der räumlichen Sternstruktur bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) für zwei unterschiedliche Zeitpunkte. Bei $2.50 \cdot 10^4$ a erreicht die Zentraltemperatur ein Maximum, und der Stern befindet sich kurz vor dem Erreichen des Hauptreihenstadiums (a-d). Bei $3.53 \cdot 10^4$ a ist der Stern auf der Hauptreihe angekommen (e-h). Räumliche Abweichungen in den unterschiedlichen Modellen bewegen sich im Bereich von 10% (b-d,f-h). Abweichungen in der Temperaturverteilung sind um den Faktor 100 kleiner.

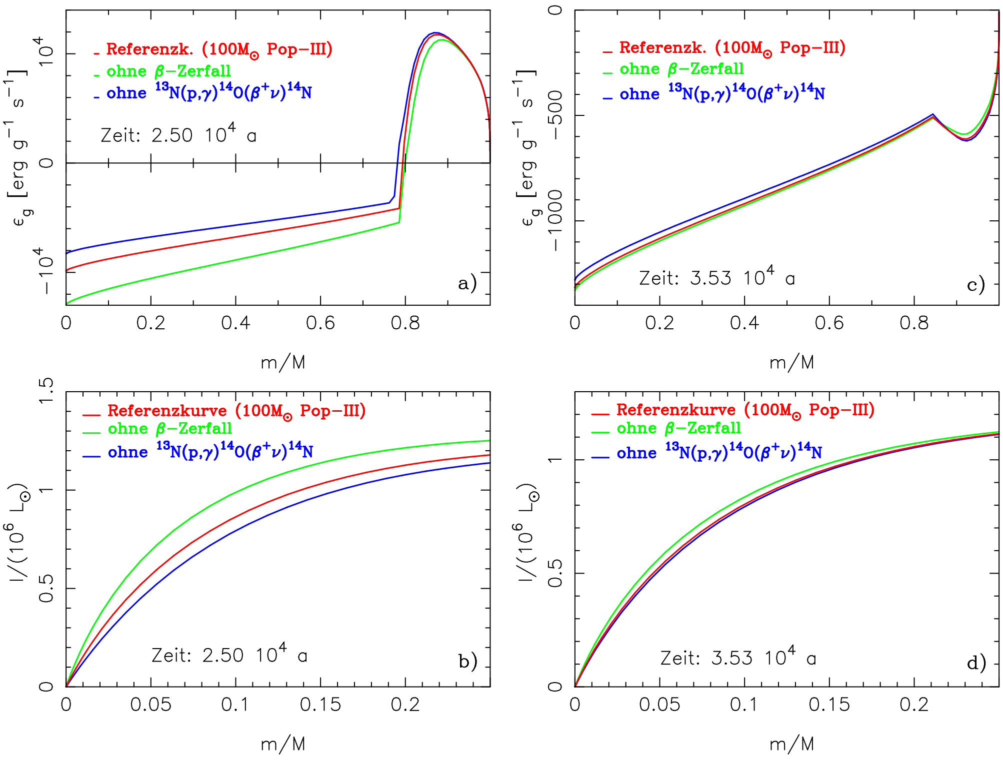

Abb. 4.21: Abweichungen vom 100 $M_\odot$-Referenzmodell (rot) in der räumlichen Verteilung der gravitativen Energie (a,c) und Leuchtkraft (b,d) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) an den beiden Entwicklungszeitpunkten $2.50 \cdot 10^4$ a (a,b) und $3.53 \cdot 10^4$ a (c,d). Die unterschiedliche räumliche Verteilung in der Energieproduktion wirkt sich in diesen beiden Variablen im Prozentbereich aus.

duktion, welche von einer hohen Potenz der Temperatur ($\epsilon \propto T^{10}$ für $T = 10^8$ K) abhängt. Mit einer Potenz von 10 können jedoch die gefundenen Temperaturabweichungen im Promillebereich nur im Prozentbereich auf die Energieproduktion durchschlagen. Die Abweichungen in der Energieproduktion sind vielmehr eine Folge der räumlich anderen Verteilung der CNO-Elemente. Die räumliche Verteilung wirkt auf das Gesamtmodell selbstregulierend: Vollzieht sich das Mischen langsam im Vergleich zur Umlaufzeit im Zyklus, dann ist zwar die Energieproduktion im Zentrum erhöht, in den äußeren Schichten jedoch erniedrigt, sodass insgesamt (bei gleicher Temperatur und Dichteverteilung) die gleiche nukleare Gesamtleuchtkraft aufgebracht werden kann (Abbildungen 4.14d; 4.18d; 4.22d), deshalb ist das auch der Grund für die geringen Auswirkungen auf das Protonenreservoir. Ein schnelleres Brennen im Zentrum wird durch ein langsameres Brennen in den äußeren Schichten kompensiert. Die andere räumliche Verteilung der Energieproduktion muss sich allerdings auch auf die Verteilung der Leuchtkraft auswirken. Dies zeigt sich auch in Abweichungen von 5% (150 $M_\odot$), 2% (100 $M_\odot$) und 0.2% (50 $M_\odot$) im Vergleich zur Referenzkurve (Abbildungen 4.17b,d; 4.21b,d; 4.25b,d). Ebenfalls wirkt sich die veränderte Energieproduktion auf die gravitative Energie aus, die um 5% (150 $M_\odot$), 1% (100 $M_\odot$) und 0.5% (50 $M_\odot$) von der Referenzrechnung abweicht. (Abbildungen 4.17a,c; 4.21a,c; 4.25a,c).

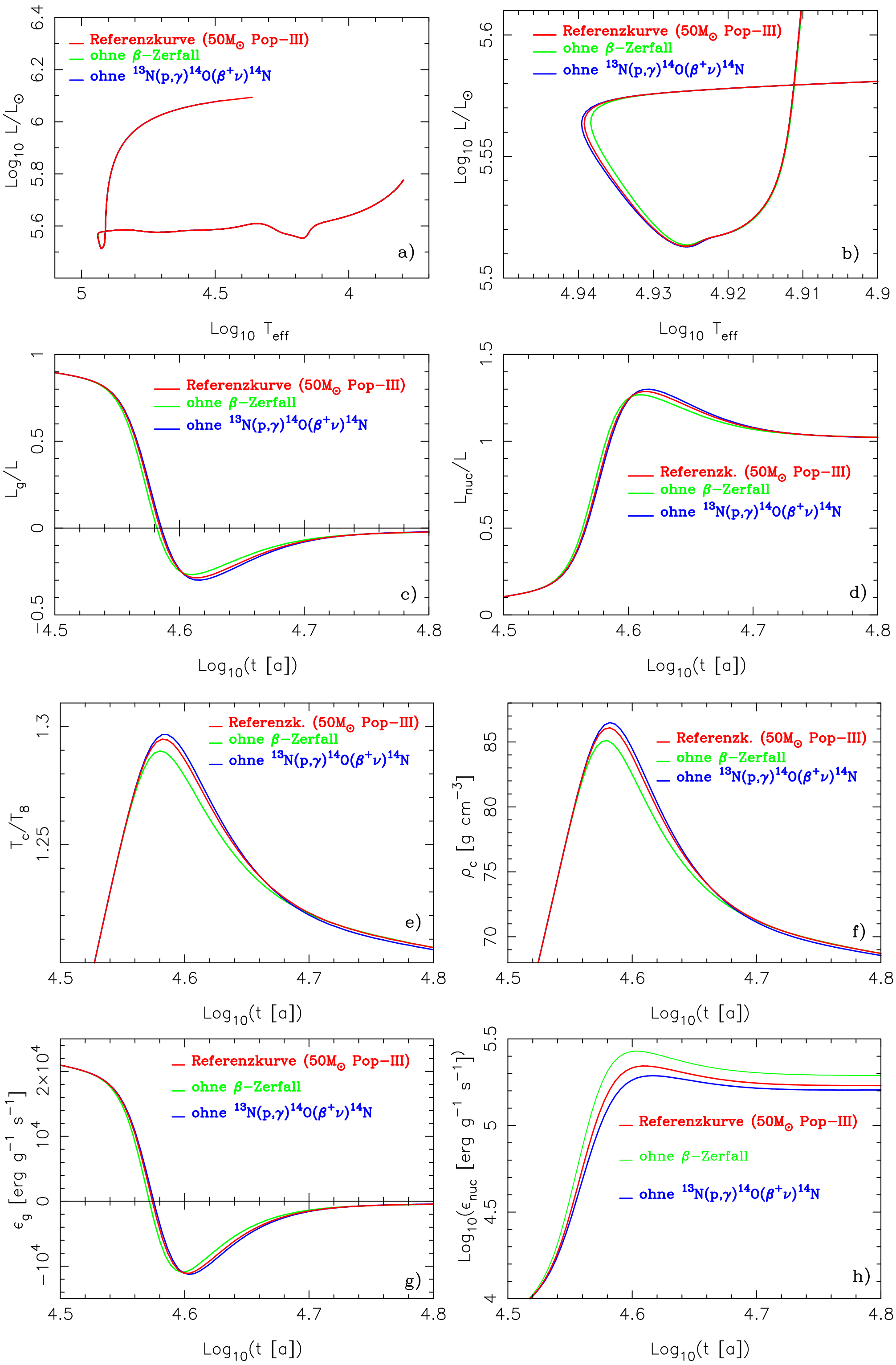

Abb. 4.22: Abweichungen vom 50 $M_\odot$-Referenzmodell (rot) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) in der Gesamtleuchtkraft (a,b), gravitative Leuchtkraft (c), nuklearen Leuchtkraft (d), Zentraltemperatur (e), Zentraldichte (f), zentralen gravitativen Energieproduktion (g) und zentralen nuklearen Energieproduktion (h). Die Abweichungen in h) betragen ca. 10%, in den anderen Variablen jedoch weniger als ein Promille.

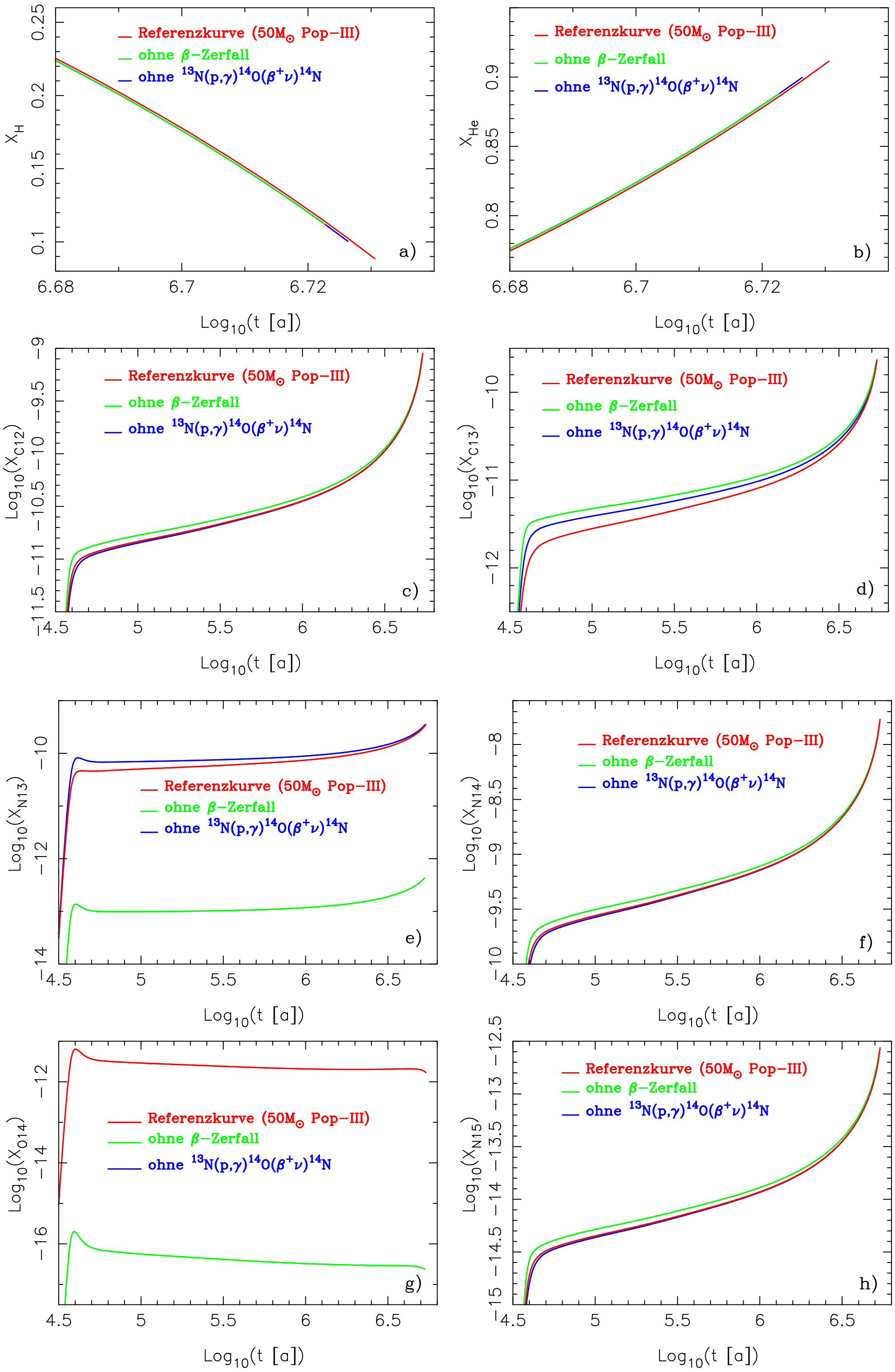

Abb. 4.23: Abweichungen vom $50\,M_\odot$-Referenzmodell (rot) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) in der Protonenlebensdauer (a,b), Kohlenstoffhäufigkeit (c,d), Stickstoffhäufigkeit(d-f,h) und Sauerstoffhäufigkeit (g). Die Abweichungen in den häufigst vorkommenden CNO-Elementen betragen ca. 13%. Die Lebensdauer des Protonenreservoirs weicht in den unterschiedlichen Modellen nur im Promillebereich ab (a,b).

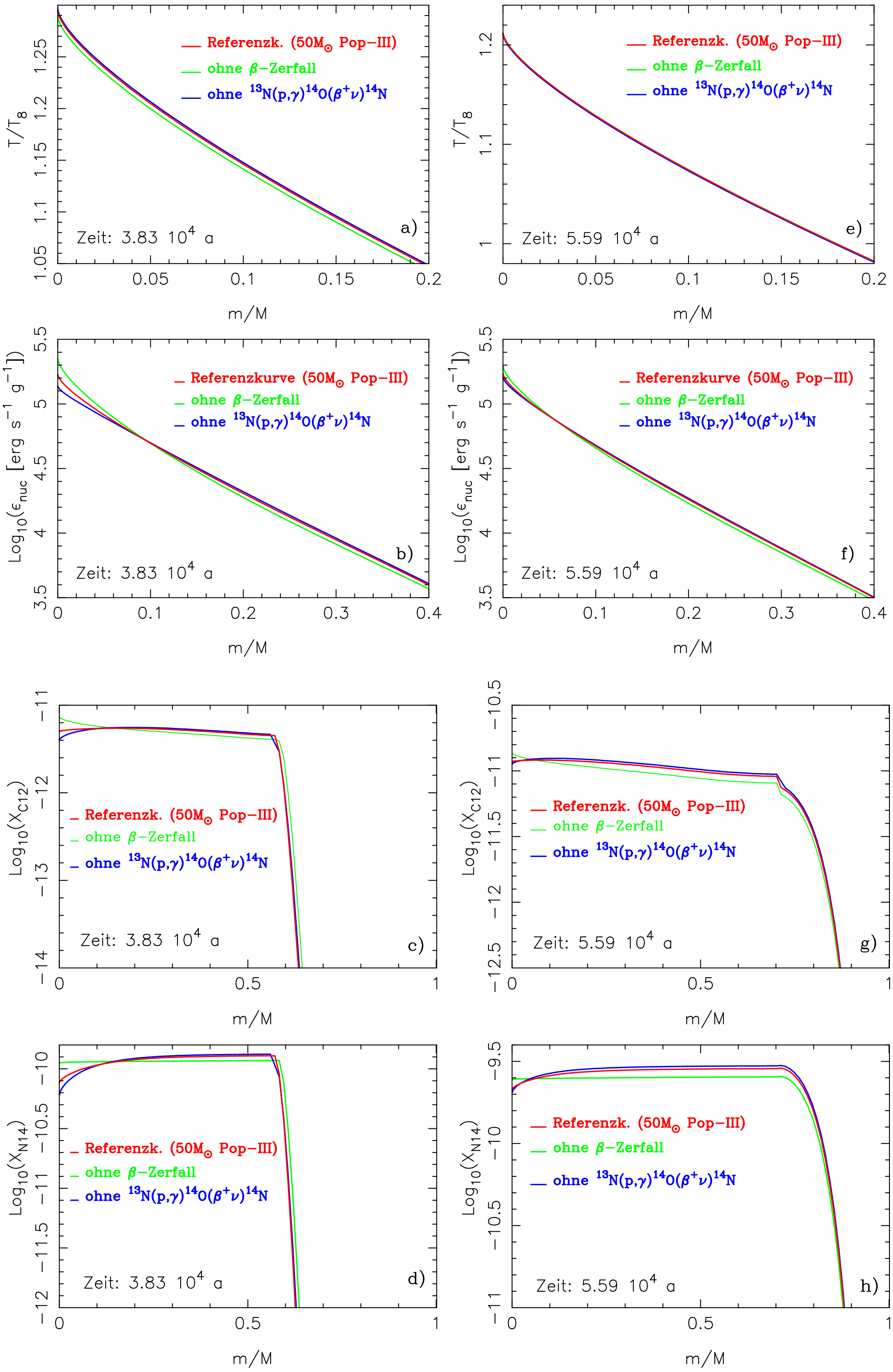

Abb. 4.24: Abweichungen vom 50 $M_\odot$-Referenzmodell (rot) in der räumlichen Sternstruktur bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) für zwei unterschiedliche Zeitpunkte. Bei $3.83 \cdot 10^4$ a erreicht die Zentraltemperatur ein Maximum, und der Stern ist kurz vor dem Erreichen des Hauptreihenstadiums (a-d). Bei $5.59 \cdot 10^4$ a ist der Stern auf der Hauptreihe angekommen (e-h). Räumliche Abweichungen in den unterschiedlichen Modellen bewegen sich im Bereich von 10% (b-d,f-h). Abweichungen in der Temperaturverteilung sind um den Faktor 100 kleiner.

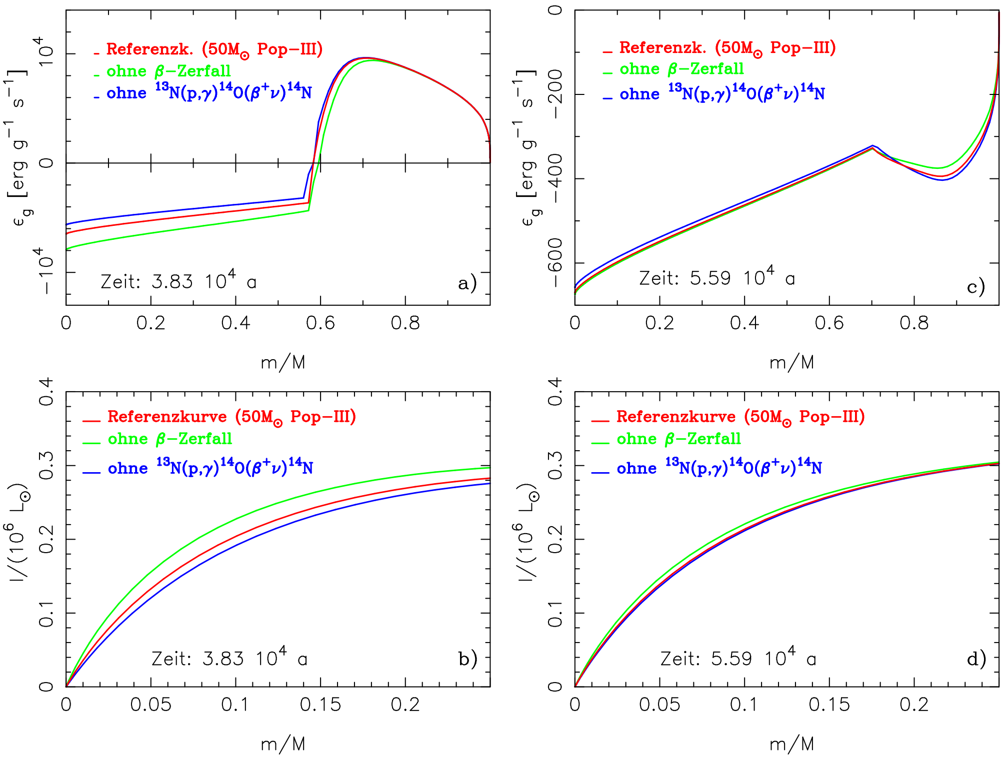

Abb. 4.25: Abweichungen vom 50 $M_\odot$-Referenzmodell (rot) in der räumlichen Verteilung der gravitativen Energie (a,c) und Leuchtkraft (b,d) bei Vernachlässigung der β-Zerfälle (grün) oder Vernachlässigung von ^{14}O (blau) an den beiden Entwicklungszeitpunkten $3.83 \cdot 10^4$ a (a,b) und $5.59 \cdot 10^4$ a (c,d). Die unterschiedliche räumliche Verteilung in der Energieproduktion wirkt sich in diesen beiden Variablen im Prozentbereich aus.

4.6 Einfluss des Mischens auf die Entwicklung

Wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, ist die Mischungszeitskala kleiner als die Umlaufzeit im CNO-Zyklus, die wegen der hohen Temperaturen in massereichen Population-III-Sternen verkürzt ist. Um den Einfluss der Annahme von instantanem Mischen innerhalb der Konvektionszone zu ermitteln, wird in zwei Vergleichsmodellen von 150 $M_\odot$ und 50 $M_\odot$ die Diffusionskonstante in der Diffusionsgleichung künstlich um fünf Größenordnungen erhöht, sodass die Mischungszeitskala schneller als die Umlaufzeit im CNO-Zyklus gesetzt ist. Wie die Abbildungen 4.28 und 4.31 zeigen, sind die CNO-Elemente mit diesem Kunstgriff vollständig homogen in der gesamten Konvektionszone durchmischt. Denselben Abbildungen ist ebenfalls zu entnehmen, dass die Annahme von instantanem Mischen im Fall der massereichen Population-III-Sterne nicht gerechtfertigt ist: Im Modell, das instantanes Mischen annimmt, weichen die CNO-Elemente im Vergleich zum Referenzmodell um bis zu 20% ab, und zwar sowohl am Beginn der Hauptreihe (Abbildungen 4.28b-d; 4.31b-d) als auch am Ende (Abbildungen 4.28f-h; 4.31f-h), wenn über 80% des Wasserstoffs verbraucht sind.

Welche Unterschiede ergeben sich daraus für die Sternstruktur? Wie in den Abbildungen 4.28a und 4.31a zu sehen, ist die Summe aller CNO-Elemente $X_{\rm CNO}$ kurz nach dem Erreichen der Hauptreihe ($3.16 \cdot 10^5$ a) im Referenzmodell um 10% erniedrigt und für Massenschalen größer 0.2 M um 20% erhöht. Man könnte vermuten,

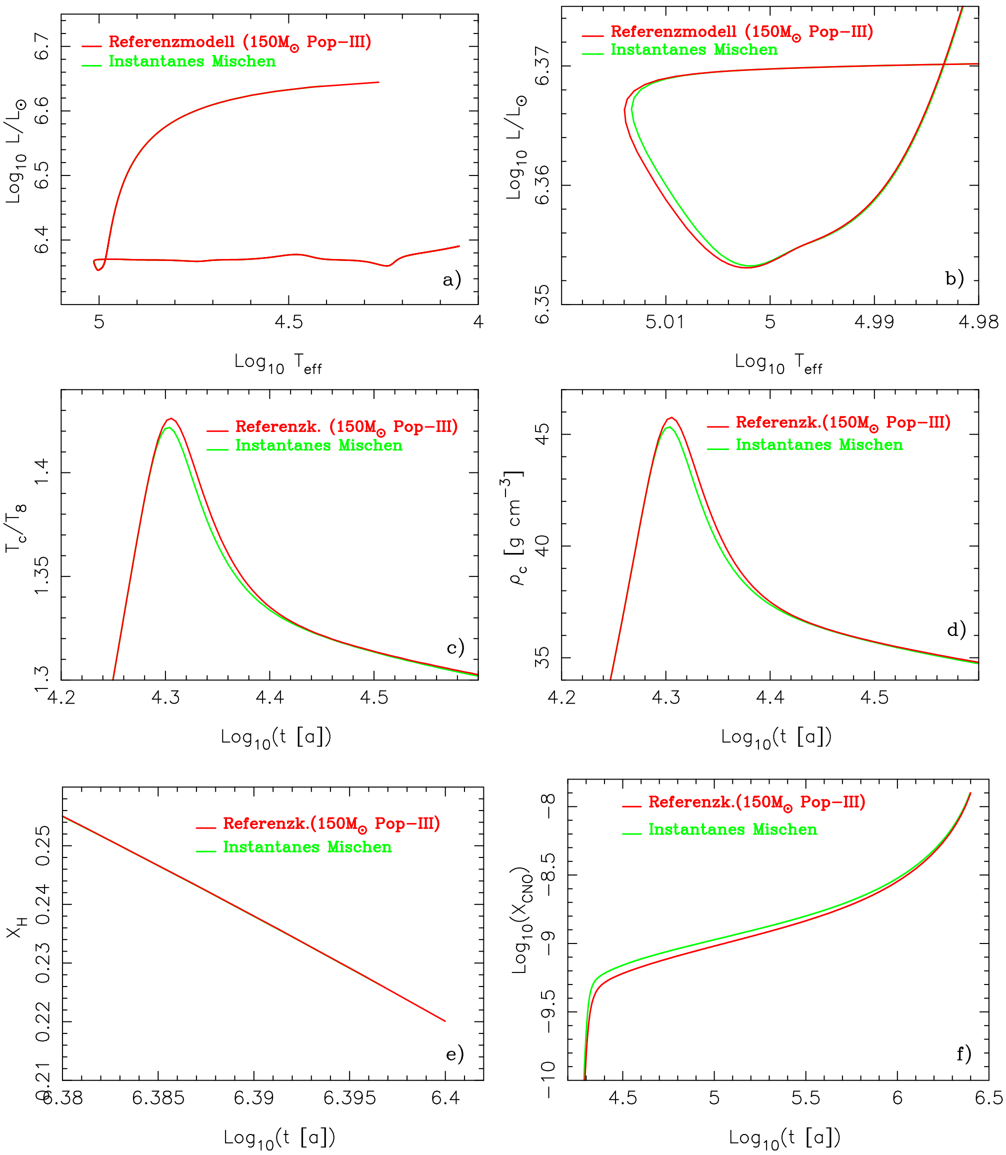

Abb. 4.26: Einfluss der Mischprozesse (rot) auf die zeitliche Entwicklung im Vergleich zur Annahme von instantanem Mischen (grün) eines 150 $M_\odot$-Sterns in einigen globalen Parametern: HRD (a,b), Zentraltemperatur (c), Zentraldichte (d), Wasserstoffkonzentration (e) und Summe der CNO-Elemente (f).

dass ineffizientes Mischen immer zu einer erhöhten Elementkonzentration im Zentrum führt, da frisch erzeugte Elemente nicht so schnell in höhere Schichten gemischt werden können. Für die Kohlenstoffkonzentration ist dies auch der Fall, weil die Produktion von Kohlenstoff im 3α-Prozess ein Abbild der Temperaturstruktur darstellt. Dagegen muss dies nicht in allen Spezies der Fall sein (Abbildung 4.28c-d, g-h; 4.31c-d, g-h). Die erniedrigte Konzentration von ^{14}N im Zentrum des Sterns ist eine Folge des verkürzten Flaschenhalses ^{14}N(p,γ)^{15}O aufgrund der höheren Temperatur im Zentrum, d.h. die *Gleichgewichtskonzentration* von ^{14}N ist hier etwas zugunsten von Kohlenstoff erniedrigt. Wegen des ineffizienten Mischens ist dieser Effekt *eingefroren*. Die Summe aller CNO-Elemente $X_{\rm CNO}$, die im Referenzmodell im Zentrum um 10%

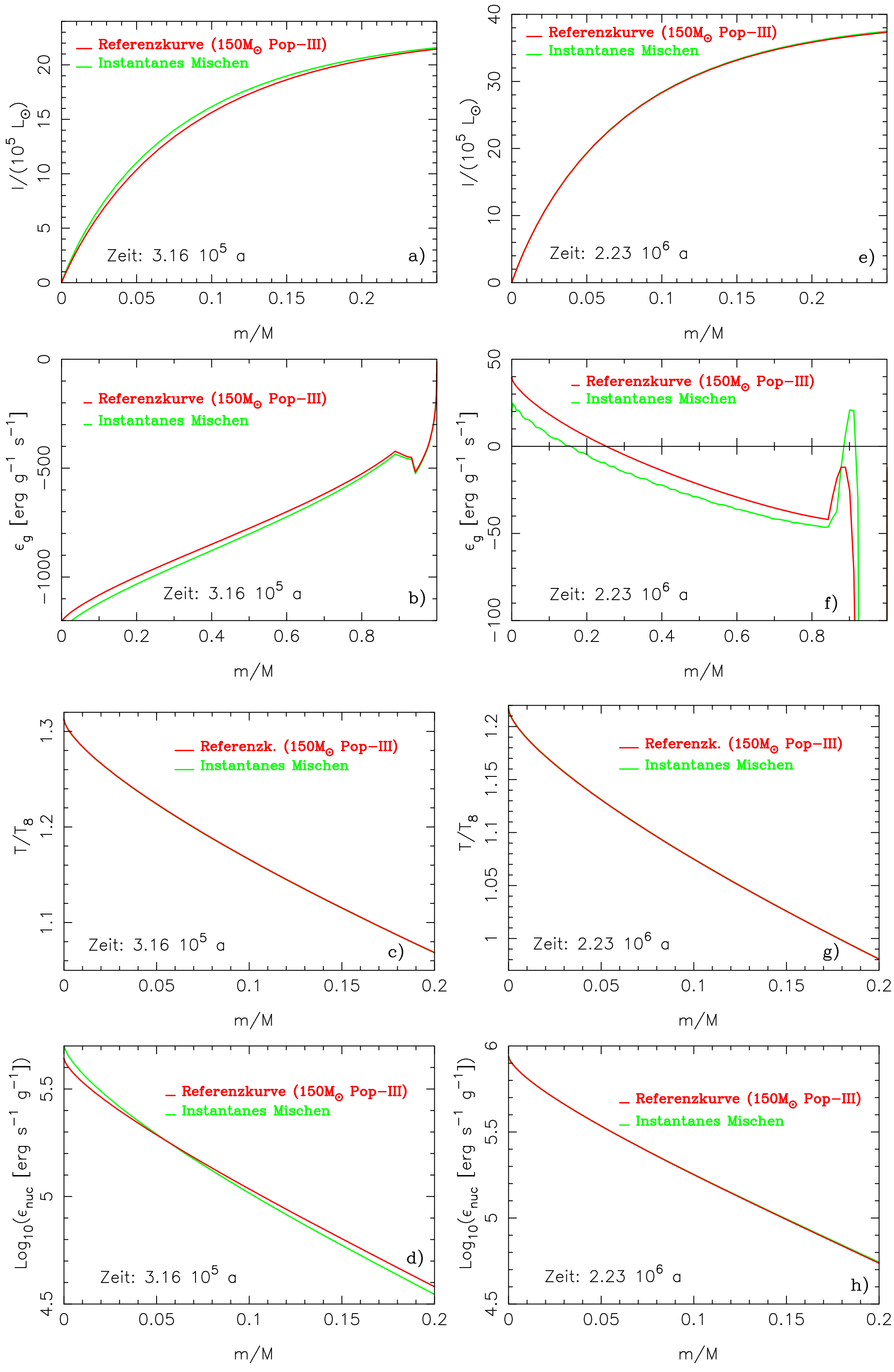

Abb. 4.27: Räumliche Strukturunterschiede eines 150 $M_{\odot}$-Sterns bei Mitnahme der Mischprozesse (rot) im Vergleich zu homogener Durchmischung (grün) in den Variablen Leuchtkraft, gravitative Energieproduktion, Temperatur und nukleare Energieproduktion am Anfang des Hauptreihenstadiums (a-d) und dann, wenn 80% des Wasserstoffs aufgebraucht sind (e-h).

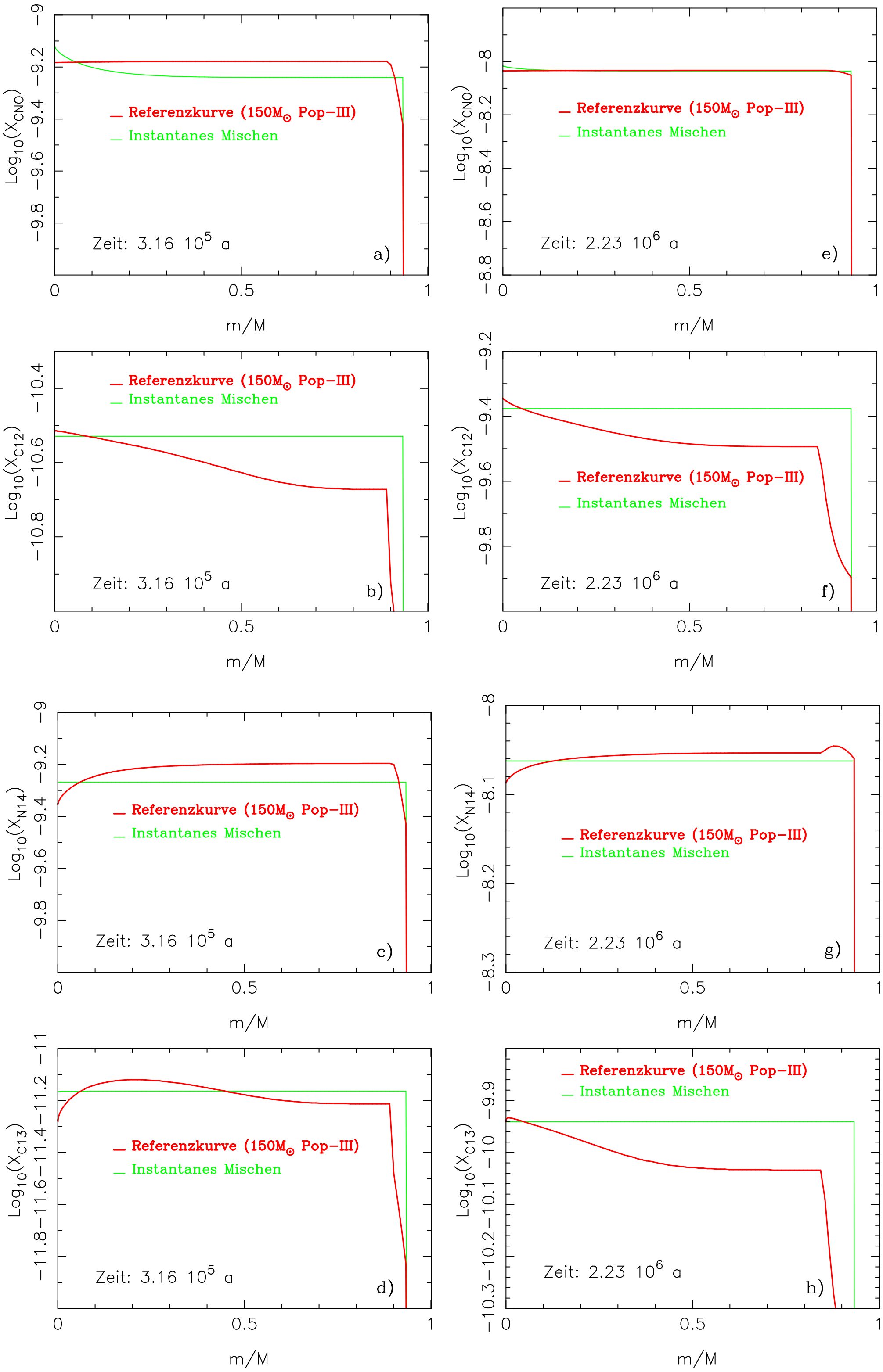

Abb. 4.28: Räumliche Strukturunterschiede eines 150 $M_\odot$-Sterns bei Mitnahme der Mischprozesse (rot) im Vergleich zu homogener Durchmischung (grün) auf die Elemente im CNO-Zyklus am Anfang des Hauptreihenstadiums (a-d) und dann, wenn 80% des Wasserstoffs aufgebraucht sind (e-h).

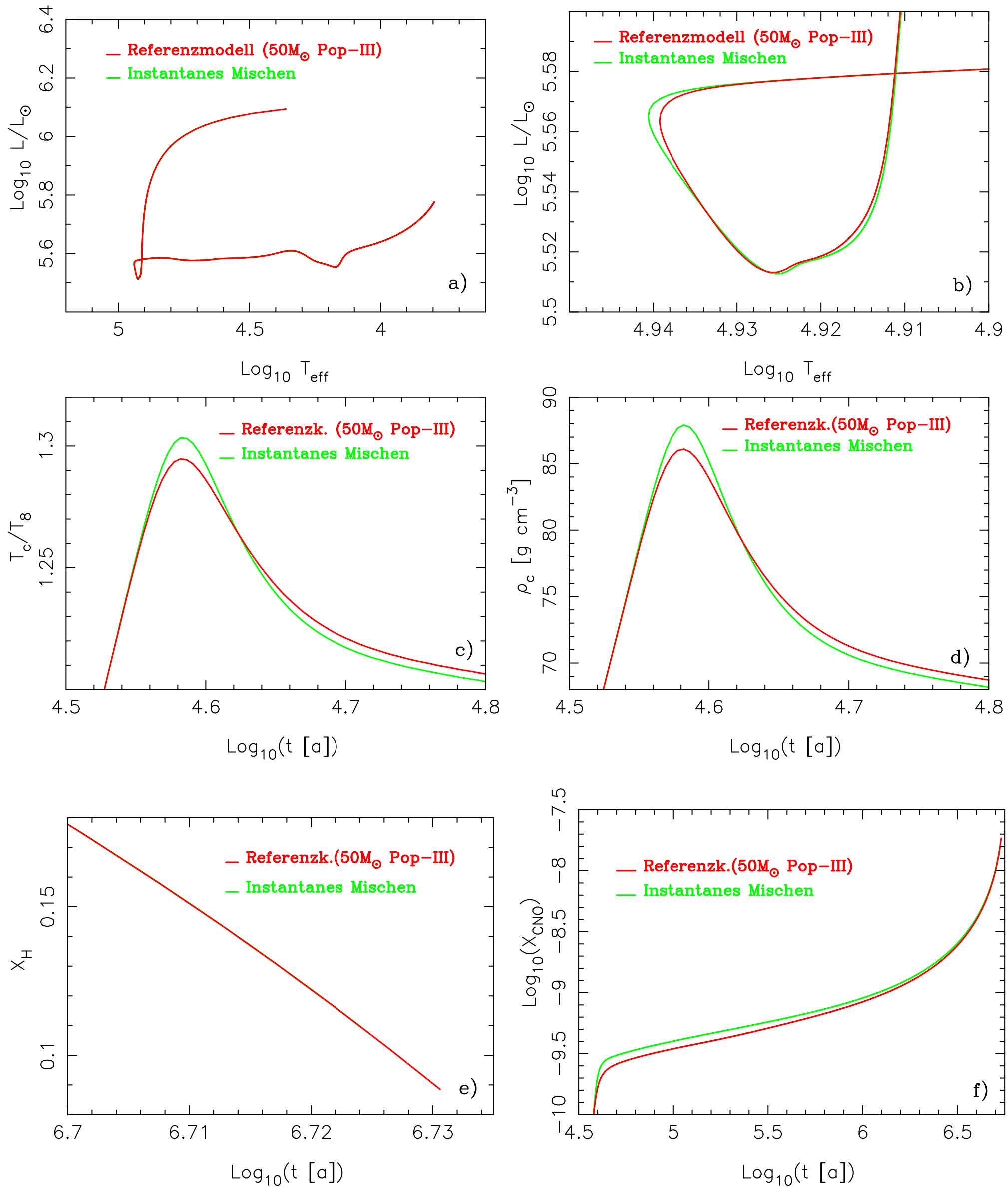

Abb. 4.29: Einfluss der Mischprozesse (rot) auf die zeitliche Entwicklung im Vergleich zur Annahme von instantanem Mischen (grün) eines 50 M$_\odot$-Sterns in einigen globalen Parametern: HRD (a,b), Zentraltemperatur (c), Zentraldichte (d), Wasserstoffkonzentration (e) und Summe der CNO-Elemente (f).

im Vergleich zur homogenen Durchmischung erniedrigt ist, führt zu einer erniedrigten Energieproduktion im Zentrum. Nur in den inneren 20% der Sternmasse schlagen sich die Änderungen in $X_{\rm CNO}$ auch in der Energieproduktion nieder. Für höhere Massenschalen nimmt der Anteil des pp-Brennens an der Energieproduktionsrate zu. Die zentral erniedrigte Energieproduktion bildet sich in den Strukturvariablen in einem flacheren Anstieg der Leuchtkraft (5%) sowie in einer stärkeren Expansion (5%) ab (Abbildungen 4.27a,b; 4.30a,b). Die Gesamtleuchtkraft ist in beiden Modellen identisch, sodass die Entwicklungswege im HRD auf der Hauptreihe nicht abweichen (Abbildungen 4.26a,b; 4.29a,b). Wie schon im vorhergehenden Abschnitt 4.5 diskutiert

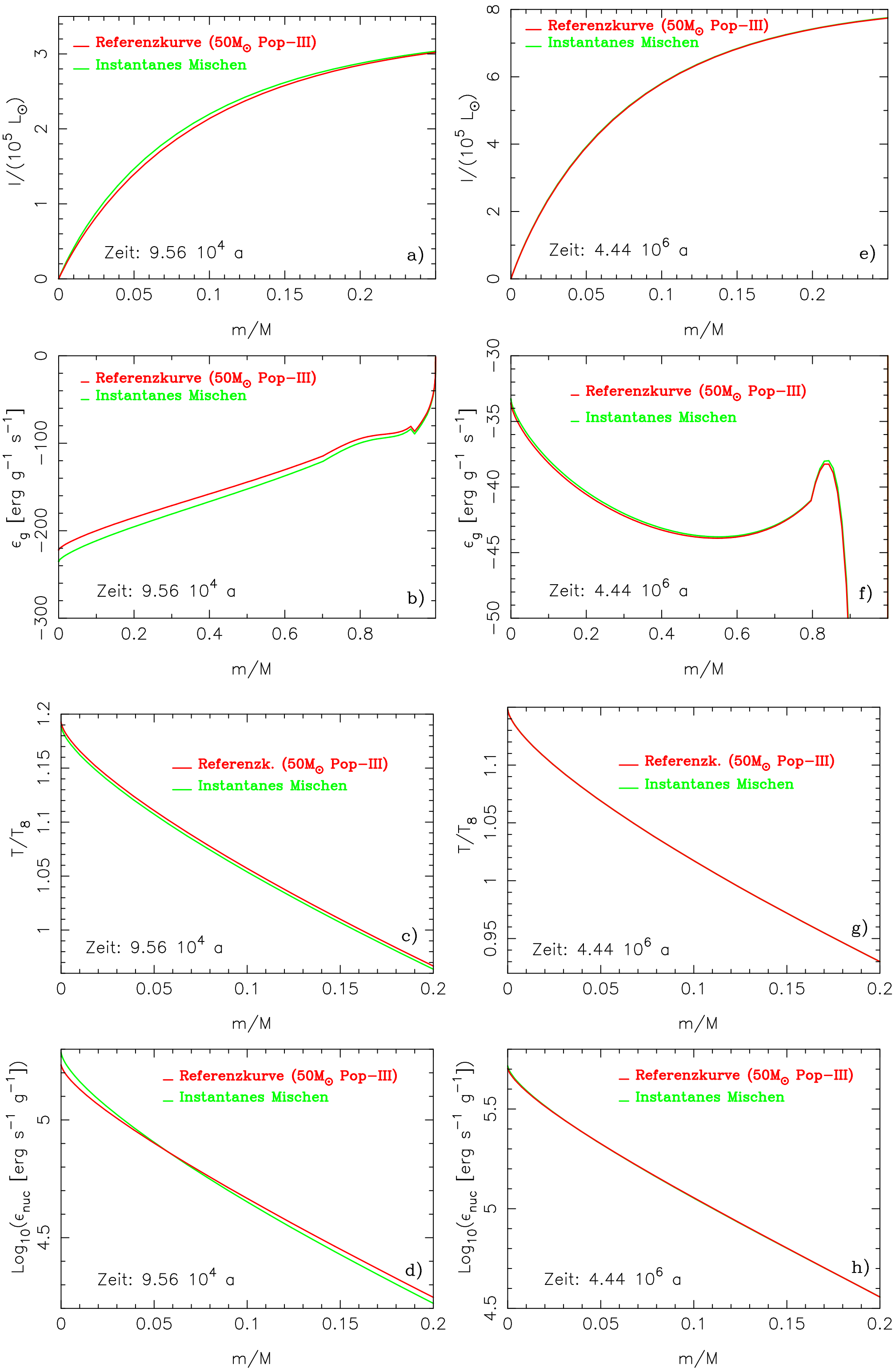

Abb. 4.30: Räumliche Strukturunterschiede eines 50 $M_\odot$-Sterns bei Mitnahme der Mischprozesse (rot) im Vergleich zu homogener Durchmischung (grün) in den Variablen Leuchtkraft, gravitative Energieproduktion, Temperatur und nukleare Energieproduktion am Anfang des Hauptreihenstadiums (a-d) und dann, wenn 80% des Wasserstoffs aufgebraucht sind (e-h).

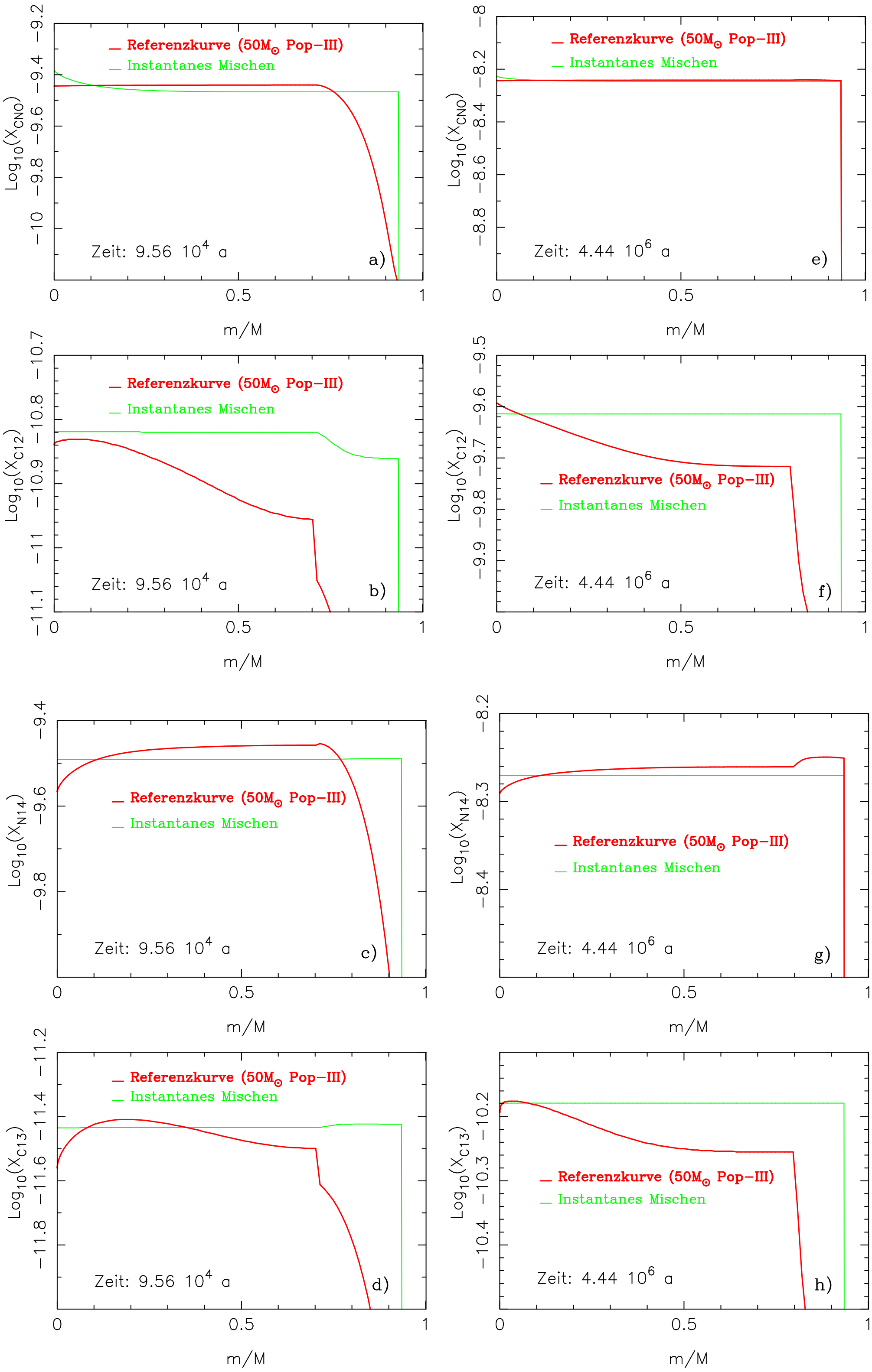

Abb. 4.31: Räumliche Strukturunterschiede eines 50 M$_\odot$-Sterns bei Mitnahme der Mischprozesse (rot) im Vergleich zu homogener Durchmischung (grün) auf die Elemente im CNO-Zyklus am Anfang des Hauptreihenstadiums (a-d) und dann, wenn 80 % des Wasserstoffs aufgebraucht sind (e-h).

wurde, werden die Elementunterschiede *nicht* durch Temperaturänderungen kompensiert: Die Energieproduktion korreliert mit der CNO-Häufigkeit, die die entsprechenden Strukturänderungen in Leuchtkraft und gravitativer Energie nach sich ziehen. Weil die Änderungen in der Variable Leuchtkraft innerhalb der Konvektionszone auftreten, besteht keine Koppelung mit den anderen Strukturgleichungen.

Obwohl die Abweichungen von 10% auch am Ende der Hauptreihe in den CNO-Elementen bestehen bleiben (Abbildungen 4.28f-h; 4.31f-h), nähert sich die Summe der CNO-Elemente $X_{\rm CNO}$ in beiden Modellen während der Entwicklung immer mehr an (Abbildungen 4.26f; 4.28e; 4.29f; 4.31e), sodass die Unterschiede in der Energieproduktion und damit auch in der Leuchtkraft verschwinden (Abbildungen 4.30e; 4.30e). Die Unterschiede wirken sich nicht auf das Protonenreservoir aus (Abbildungen 4.29e; 4.29e).

5 Zusammenfassende Diskussion

In dieser Arbeit wird die Entwicklung massereicher Population-III-Sterne im Bereich von $15\,\mathrm{M}_\odot$–$150\,\mathrm{M}_\odot$ untersucht. Population-III-Sterne setzten sich *per definitionem* aus anfänglich metallfreiem Gas zusammen. In der Standard-Urknall-Nukleosynthese können keine Elemente schwerer als Lithium gebildet werden (Olive, 2000), und deshalb sollte die erste Sterngeneration aus Population-III-Sternen bestehen. Nur eine inhomogene Urknall-Nukleosynthese könnte schwere Metalle in ausreichenden Mengen produzieren (Jedamzik, 1999).

Man könnte meinen, dass die Abwesenheit von Metallen eine Vereinfachung für die Modellierung der Sternentwicklung darstellt und bestehende Sternentwicklungscodes nur mit der $Z = 0$ Anfangsbedingung gestartet werden müssen. Doch wegen der Ineffizienz des pp-Brennens sowie den anfänglich fehlenden CNO-Elementen erscheinen Population-III-Sterne bei deutlich höheren Temperaturen und Dichten auf der Hauptreihe. Population-III-Sterne mit Massen oberhalb von $30\,\mathrm{M}_\odot$ werden noch auf der Vorhauptreihe im Zentrum heißer als 10^8 K, sie produzieren im 3α-Prozess genügend Kohlenstoff, sodass diese Sterne im Modus des heißen CNO-Zyklus den Leuchtkraftbedarf des Sterns decken. Im Gegensatz zu „normalen“ Sternen, bei denen die Katalysatorelemente C, N und O weder produziert noch vernichtet werden, erfordert die autogene Metallproduktion bei Population-III-Sternen die Mitnahme eines zeitabhängigen Kernreaktionsnetzwerks ohne Annahme von Gleichgewichtskonzentrationen in den einzelnen Spezies. Wegen der hohen Temperaturen werden einige zusätzliche Kernreaktionszweige wichtig: Die β-Zerfälle innerhalb des CNO-Zyklus können nicht mehr gegen die Protoneneinfänge vernachlässigt werden, und ein weiterer Protoneneinfang an ^{13}N ist für Temperaturen größer $1.3 \cdot 10^8$ K nicht mehr gegen den Zerfall von ^{13}N vernachlässigbar. Zusätzlich werden die Umlaufzeiten im CNO-Zyklus bei den höheren Temperaturen kürzer als die konvektive Mischzeit, sodass die Annahme von instantanem Mischen nicht mehr gerechtfertigt ist. Die höheren Anforderungen an die Modellierung von Population-III-Sternen ergeben sich aus einer stärkeren Koppelung der Sternaufbaugleichungen, in denen eine strikte Trennung der Kontraktionszeitskala, der nuklearen Zeitskala und der Mischungszeitskala nicht mehr vorausgesetzt werden kann.

Ein neu entwickelter Sternentwicklungscode, der noch stark vereinfachende Annahmen über die Opazitäten, die Zustandsgleichung und die Atmosphäre enthält, koppelt erstmals vollständig die Sternstrukturgleichungen mit einem zeitabhängigen Kernreaktionsnetzwerk, zeitabhängigem Mischen und einer zeitabhängigen Konvektionstheorie. Die Energiegleichung ist so formuliert, dass Molekulargewichtsänderungen in konsistenter Form enthalten sind. Die zeitliche Integration des Gleichungssystems übernimmt das am ZI Berlin entwickelte Programm LIMEX (Ehrig & Nowak, 1998).

Die verbesserte Modellierung der Kernreaktionen und des Mischens wirkt sich nicht auf die Entwicklungswege im HRD auf der Hauptreihe aus, obwohl die räumliche Verteilung der CNO-Isotope um 10%–20% von einer homogenen Mischung abweicht, die sich unter Annahme von instantanem Mischen einstellen würde. Eine häufig in der klassischen Sternentwicklung gegebene Erklärung lautet, dass Änderungen von 10% in der Energieproduktionsrate aufgrund der hohen Potenzabhängigkeit von der Temperatur durch Änderungen derselben im Prozentbereich ausgeglichen werden können und sich deshalb die Sternstruktur faktisch nicht ändert. Diese Erklärung trifft bei den hier untersuchten Population-III-Sternen nicht zu – die Temperatur wird nur im Promillbereich beeinflusst. Im Gegenteil, die Abweichungen von 10% in der CNO-Konzentration schlagen direkt auf die Energieproduktion durch. Doch das ineffiziente Mischen ist auf andere Weise selbstregulierend. Im Zentrum ist die Energieproduktion erhöht, während sie in darüber liegenden Schichten erniedrigt ist, sodass insgesamt die gleiche Leuchtkraft erzeugt wird. Nur der Leuchtkraftanstieg muss sich nach der Energieproduktionsverteilung richten. Dies geschieht in vollkonvektiven Schichten des Sterns, sodass der veränderte Leuchtkraftanstieg nicht an die anderen Variablen des Systems gekoppelt ist.

Die zeitabhängige Modellierung der Konvektion führt im Vergleich zu Rechnungen anderer Autoren zu deutlich größeren Konvektionszonen. Auch in dieser Arbeit wären die Konvektionszonen kleiner, wenn das Schwarzschild-Ledoux-Kriterium zur Bestimmung der Größe der Konvektionszonen herangezogen würde. Doch in der hier gewählten zeitabhängigen Beschreibung ist das Stabilitätsverhalten nur im stationären Grenzfall identisch mit dem Kriterium von Schwarzschild-Ledoux. In diesen Rechnungen kommt es vor, dass selbst in Schwarzschild-Ledoux stabilen Gebieten der tatsächliche Gradient der Schichtung gleich dem adiabatischen Gradienten ist. Die ablaufenden Mechanismen, die zu diesem Verhalten führen, sind noch nicht genügend exakt verstanden. Ein Erklärungsansatz besteht darin, dass die Entropieproduktion im räumlich ausgedehnten pp-Brennen einen weit ausgedehnten räumlichen Entropiegradienten aufrecht erhält, der die Konvektion treibt. Diese Zusammenhänge könnten auch erklären, warum die Abweichungen vom Schwarzschild-Kriterium beim $15\,\mathrm{M}_{\odot}$- und $20\,\mathrm{M}_{\odot}$-Stern besonders stark sind, denn diese Sterne befinden sich auf der Hauptreihe im pp-Brennen.

Die größeren Konvektionszonen führen zu längeren Lebensdauern auf der Hauptreihe und zur Ausbildung größerer Heliumkerne. Die Größe der Heliumkerne hat Auswirkungen auf die Endstadien dieser Sterne; und sie bestimmt weitgehend, ob ein Stern als Schwarzes Loch endet oder als Supernova explodiert und die Umgebung mit Metallen anreichert. Nach den Rechnungen von Heger & Woosley (2001) tragen nur massereiche Sterne mit einem Heliumkern von $M_{\mathrm{He}} \sim 64 \ldots 133\,\mathrm{M}_{\odot}$ zur Elementanreicherung bei. Nach herkömmlichen Rechnungen entspricht dies Sternmassen im Bereich $140\,\mathrm{M}_{\odot}$–$260\,\mathrm{M}_{\odot}$. Wenn die Konvektionsgrößen dieser Arbeit richtig sind, dann sind es Sterne im Bereich von $90\,\mathrm{M}_{\odot}$–$200\,\mathrm{M}_{\odot}$, die zur Elementproduktion beitragen. Solange die primordiale *Initial Mass Function* (IMF) nicht bekannt ist, sind weitergehende Schlüsse schwierig. Glaubt man den Fragmentationsrechnungen von Nakamura & Umemura (2000), die eine bimodale Struktur der IMF mit Höchstwerten bei $1\,\mathrm{M}_{\odot}$ und $100\,\mathrm{M}_{\odot}$ nahelegen, dann kann die Elementanreicherung effektiver erfolgen als bisher angenommen.

Anhang A Energiegleichung

In einigen Lehrbüchern der Sternentwicklung (z.B. Kippenhahn & Weigert, 1990; Hansen & Kawaler, 1995) ist die Energiegleichung nur dann richtig, wenn sich das Molekulargewicht nicht ändert und keine Mischprozesse stattfinden. Insbesondere betrifft dies die häufig zitierte Gleichung:

$$c_P \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - \frac{\delta}{\rho}\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t} = \epsilon_{\mathrm{nuc}} - \frac{\partial l}{\partial m} \quad , \tag{A.1}$$

bei deren Ableitung die Änderung vom Molekulargewicht vernachlässigt wurde, sowie die Gleichung:

$$T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} \quad , \tag{A.2}$$

die die Mischentropie außer Acht läßt und die deshalb nur für reversible Vorgänge richtig ist. Kompliziert wird die Diskussion durch eine Veröffentlichung von Wood (1981), in der behauptet wird, dass die $\dot{\mu}$-Terme in Gleichung (A.1) zu Recht vernachlässigt werden müssen, wenn die Änderung des Molekulargewichts durch Mischprozesse zustande kommt.

Im Folgenden wird die in dieser Arbeit verwendete Form der Energiegleichung abgeleitet, die die Änderungen des Molekulargewichts – sei es durch Mischen oder Kernreaktionen – korrekt enthält. Dabei wird gezeigt werden, dass die Energiegleichung von Wood (1981), die noch heute in Sternentwicklungs-Programmen gebräuchlich ist (z.B. Frost & Lattanzio, 1996; Castellani et al., 1998), fehlerhaft ist. Die korrekte Form der Energiegleichung haben Strittmatter et al. (1970) hergeleitet, ausgehend von den zwei zentralen Gleichungen:

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \,\mathrm{d}m_i \tag{A.3}$$

und

$$\mathrm{d}E = \partial Q - \partial W \quad . \tag{A.4}$$

Die erste Gleichung (A.3) ist die gibbssche Fundamentalgleichung; sie ist eine thermodynamische Identität. Die zweite Gleichung (A.4) ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik. Mit der wesentlichen Voraussetzung der Thermodynamik irreversibler Prozesse[1] kann man die Gleichungen (A.3, A.4) auch auf spezifische Größen umschreiben. Mit der Einführung der Massenkonzentrationen $X_i = \rho_i/\rho$ und des chemischen Potenzialausdrucks $\psi_i = \xi_i - \xi_n$ erhält man für die innere Energie pro Masseneinheit:

$$\mathrm{d}e = T\mathrm{d}s - P\mathrm{d}v_{\mathrm{sp}} + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \,\mathrm{d}X_i \tag{A.5}$$

[1] Man nimmt an, dass sich die Massenelemente eines Mediums als thermodynamische Systeme behandeln lassen, die mit ihrer Umgebung in Bezug auf gewisse physikalische Größen in Austausch stehen (Meixner & Reik, 1959).

und

$$\mathrm{d}e = \partial q - \partial w_{\mathrm{mech}} \quad . \tag{A.6}$$

Die zentrale Frage ist, wie sich der Differenzialausdruck ∂q durch totale Differenziale ausdrücken lässt, d.h. durch Terme von Zustandsvariablen. Mit der wichtigen Erkenntnis, dass ein Massenelement im Stern am System nur Arbeit durch Volumenänderungen unter gegebenem Oberflächendruck leisten kann (Strittmatter et al., 1970), d.h. in Formeln:

$$\partial w_{\mathrm{mech}} = P \mathrm{d}v_{\mathrm{sp}} \quad ,$$

folgt aus den Gleichungen (A.5, A.6):

$$\partial q = \mathrm{d}e + P\mathrm{d}v_{\mathrm{sp}} = T\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \, \mathrm{d}X_i \quad . \tag{A.7}$$

Es ist nun klar, warum Gleichung (A.2) nicht richtig ist: Änderungen durch das chemische Potential werden nicht in Rechnung gestellt. Auch wenn die zugeführte Wärme $\partial q = 0$ ist, kann sich bei irreversiblen Vorgängen die Entropie ändern. Die in der Sternentwicklung gebräuchliche Form der Energiegleichung erhält man wie folgt: Die zugeführte Wärme pro Masseneinheit ist gleich dem Netto-Energiefluss durch diese Schale:

$$\frac{\partial q}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial l}{\partial m} - \epsilon_\nu \quad .$$

Zusammen mit Gleichung (A.7) bei gleichzeitiger Abspaltung des Beitrags der nuklearen Energie von der inneren Energie folgt:

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \epsilon_{\mathrm{nuc}} - \frac{\partial l}{\partial m} \tag{A.8a}$$

$$= T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \frac{\mathrm{D}X_i}{\mathrm{D}t} \quad . \tag{A.8b}$$

Die Gleichungen unter (A.8) sind exakt. Man kann diese Gleichung auch in Abhängigkeit von Druck, Temperatur und Molekulargewicht formulieren. Das Resultat lautet (für eine Herleitung siehe Kippenhahn et al. (1965)):

$$c_P\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - \frac{\delta}{\rho}\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t} + A\frac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t} = \epsilon_{\mathrm{nuc}} - \frac{\partial l}{\partial m} \tag{A.9}$$

mit

$$A = \left(\frac{\partial e}{\partial \mu}\right)_{\rho,\,T} - \frac{P\delta\varphi}{\rho\mu\alpha} \quad .$$

Gleichung (A.1) ist genau um den Term $(A\dot{\mu})$ fehlerhaft. Gleichungen (A.8) und (A.9) sind die korrekten Gleichungen, *unabhängig* davon, wodurch die Änderung des Molekulargewichts hervorgerufen wurde. Wood (1981) argumentiert, dass die Gleichungen (A.8a, A.9) *lokal* nicht angewendet werden dürfen, weil eine gegebene Massenschale kein isoliertes thermodynamisches System sei, wenn Mischprozesse ablaufen. Hierzu ist zu sagen, dass es zwar richtig ist, dass eine gegebene Massenschale kein isoliertes thermodynamisches System ist, jedoch ist der Schluss nicht zulässig, dass deshalb der lokale Charakter von Gleichungen (A.8a, A.9) verloren geht. Die Tatsache, dass die Relationen (A.3, A.4) beim Übergang auf spezifische Größen auch richtig bleiben, d.h., wenn die thermodynamischen Größen auf die Masse bezogen werden, beweist das Gegenteil. Die Zulässigkeit des Übergangs von Gleichungen (A.3, A.4) hin zu (A.5, A.6) ist verankert in den grundsätzlichen Voraussetzungen der irreversiblen Thermodynamik (Meixner & Reik, 1959). Lässt man diese fallen, dann ist es überhaupt unmöglich, makroskopische, thermodynamische Variablen lokal sinnvoll zu formulieren.

Anhang B Reaktionsraten

Es werden die in den Simulationsrechnungen verwendeten Reaktionsraten der Kernreaktionen in Tabellenform angegeben, um eine Überprüfung der vorgestellten Ergebnisse zu ermöglichen. Reaktionen mit zwei Reaktionspartnern werden in Einheiten [cm^3 mol^{-1} s^{-1}] angegeben und Dreierstöße in Einheiten [cm^3 mol^{-2} s^{-1}]. Die einzige Reaktion, die als Dreierstoß behandelt wird, ist die 3α-Reaktion. Der überwiegende Teil der Reaktionen kommt von der NACRE Kollaboration (Angulo et al., 1999); für eine genaue Referenzliste der einzelnen Reaktionen sei auf Tabelle 3.1 verwiesen. Die Berechnung von Zwischenwerten erfolgt durch eine Interpolation mit kubischen Splines in der doppellogarithmisch aufgetragenen T-λ-Ebene.

T_9	^{1}H(p,e$^+\nu$)^{2}H	^{2}H(p,γ)^{3}He	^{3}He(α,γ)^{7}Be	^{3}He(^{3}He,2p)^{4}He	^{4}He(2α,γ)^{12}C
0.001		$1.30 \cdot 10^{-11}$			
0.002	$5.57 \cdot 10^{-25}$	$1.79 \cdot 10^{-08}$			
0.003	$1.28 \cdot 10^{-23}$	$5.80 \cdot 10^{-07}$		$2.91 \cdot 10^{-25}$	
0.004	$9.06 \cdot 10^{-23}$	$5.13 \cdot 10^{-06}$		$5.76 \cdot 10^{-22}$	
0.005	$3.62 \cdot 10^{-22}$	$2.41 \cdot 10^{-05}$	$4.97 \cdot 10^{-25}$	$1.27 \cdot 10^{-19}$	
0.006	$1.04 \cdot 10^{-21}$	$7.78 \cdot 10^{-05}$	$3.66 \cdot 10^{-23}$	$7.75 \cdot 10^{-18}$	
0.007	$2.39 \cdot 10^{-21}$	$1.98 \cdot 10^{-04}$	$1.13 \cdot 10^{-21}$	$2.06 \cdot 10^{-16}$	
0.008	$4.74 \cdot 10^{-21}$	$4.27 \cdot 10^{-04}$	$1.92 \cdot 10^{-20}$	$3.08 \cdot 10^{-15}$	
0.009	$8.46 \cdot 10^{-21}$	$8.17 \cdot 10^{-04}$	$2.10 \cdot 10^{-19}$	$3.02 \cdot 10^{-14}$	
0.010	$1.39 \cdot 10^{-20}$	$1.43 \cdot 10^{-03}$	$1.64 \cdot 10^{-18}$	$2.16 \cdot 10^{-13}$	$2.93 \cdot 10^{-71}$
0.011	$2.14 \cdot 10^{-20}$	$2.32 \cdot 10^{-03}$	$9.90 \cdot 10^{-18}$	$1.20 \cdot 10^{-12}$	$5.94 \cdot 10^{-69}$
0.012	$3.13 \cdot 10^{-20}$	$3.57 \cdot 10^{-03}$	$4.85 \cdot 10^{-17}$	$5.51 \cdot 10^{-12}$	$6.59 \cdot 10^{-67}$
0.013	$4.41 \cdot 10^{-20}$	$5.24 \cdot 10^{-03}$	$2.01 \cdot 10^{-16}$	$2.14 \cdot 10^{-11}$	$4.46 \cdot 10^{-65}$
0.014	$5.98 \cdot 10^{-20}$	$7.40 \cdot 10^{-03}$	$7.24 \cdot 10^{-16}$	$7.29 \cdot 10^{-11}$	$2.01 \cdot 10^{-63}$
0.015	$7.90 \cdot 10^{-20}$	$1.01 \cdot 10^{-02}$	$2.32 \cdot 10^{-15}$	$2.22 \cdot 10^{-10}$	$6.40 \cdot 10^{-62}$
0.016	$1.02 \cdot 10^{-19}$	$1.35 \cdot 10^{-02}$	$6.71 \cdot 10^{-15}$	$6.12 \cdot 10^{-10}$	$1.53 \cdot 10^{-60}$
0.018	$1.59 \cdot 10^{-19}$	$2.24 \cdot 10^{-02}$	$4.40 \cdot 10^{-14}$	$3.69 \cdot 10^{-09}$	$4.22 \cdot 10^{-58}$
0.020	$2.34 \cdot 10^{-19}$	$3.47 \cdot 10^{-02}$	$2.22 \cdot 10^{-13}$	$1.73 \cdot 10^{-08}$	$5.45 \cdot 10^{-56}$
0.025	$5.02 \cdot 10^{-19}$	$8.29 \cdot 10^{-02}$	$5.64 \cdot 10^{-12}$	$3.81 \cdot 10^{-07}$	$1.11 \cdot 10^{-51}$
0.030	$8.96 \cdot 10^{-19}$	$1.61 \cdot 10^{-01}$	$6.61 \cdot 10^{-11}$	$4.01 \cdot 10^{-06}$	$1.46 \cdot 10^{-47}$
0.040	$2.08 \cdot 10^{-18}$	$4.23 \cdot 10^{-01}$	$2.37 \cdot 10^{-09}$	$1.22 \cdot 10^{-04}$	$5.31 \cdot 10^{-41}$
0.050	$3.76 \cdot 10^{-18}$	$8.41 \cdot 10^{-01}$	$2.98 \cdot 10^{-08}$	$1.38 \cdot 10^{-03}$	$1.04 \cdot 10^{-36}$
0.060	$5.91 \cdot 10^{-18}$	$1.42 \cdot 10^{+00}$	$2.05 \cdot 10^{-07}$	$8.70 \cdot 10^{-03}$	$1.20 \cdot 10^{-33}$
0.070	$8.47 \cdot 10^{-18}$	$2.16 \cdot 10^{+00}$	$9.50 \cdot 10^{-07}$	$3.77 \cdot 10^{-02}$	$3.00 \cdot 10^{-31}$
0.080	$1.14 \cdot 10^{-17}$	$3.06 \cdot 10^{+00}$	$3.36 \cdot 10^{-06}$	$1.26 \cdot 10^{-01}$	$9.68 \cdot 10^{-29}$
0.090	$1.47 \cdot 10^{-17}$	$4.11 \cdot 10^{+00}$	$9.72 \cdot 10^{-06}$	$3.48 \cdot 10^{-01}$	$2.52 \cdot 10^{-26}$
0.100	$1.83 \cdot 10^{-17}$	$5.30 \cdot 10^{+00}$	$2.42 \cdot 10^{-05}$	$8.33 \cdot 10^{-01}$	$2.38 \cdot 10^{-24}$
0.110	$2.21 \cdot 10^{-17}$	$6.63 \cdot 10^{+00}$	$5.37 \cdot 10^{-05}$	$1.78 \cdot 10^{+00}$	$9.64 \cdot 10^{-23}$

T_9	^{1}H(p,e$^+\nu$)^{2}H	^{2}H(p,γ)^{3}He	^{3}He(α,γ)^{7}Be	^{3}He(^{3}He,2p)^{4}He	^{4}He(2α,γ)^{12}C
0.120	$2.62 \cdot 10^{-17}$	$8.09 \cdot 10^{+00}$	$1.09 \cdot 10^{-04}$	$3.49 \cdot 10^{+00}$	$2.07 \cdot 10^{-21}$
0.130	$3.06 \cdot 10^{-17}$	$9.66 \cdot 10^{+00}$	$2.03 \cdot 10^{-04}$	$6.37 \cdot 10^{+00}$	$2.72 \cdot 10^{-20}$
0.140	$3.51 \cdot 10^{-17}$	$1.14 \cdot 10^{+01}$	$3.58 \cdot 10^{-04}$	$1.09 \cdot 10^{+01}$	$2.43 \cdot 10^{-19}$
0.150	$3.99 \cdot 10^{-17}$	$1.32 \cdot 10^{+01}$	$5.97 \cdot 10^{-04}$	$1.78 \cdot 10^{+01}$	$1.60 \cdot 10^{-18}$
0.160	$4.49 \cdot 10^{-17}$	$1.51 \cdot 10^{+01}$	$9.52 \cdot 10^{-04}$	$2.79 \cdot 10^{+01}$	$8.22 \cdot 10^{-18}$
0.180	$5.53 \cdot 10^{-17}$	$1.91 \cdot 10^{+01}$	$2.17 \cdot 10^{-03}$	$6.14 \cdot 10^{+01}$	$1.22 \cdot 10^{-16}$
0.200	$6.64 \cdot 10^{-17}$	$2.36 \cdot 10^{+01}$	$4.40 \cdot 10^{-03}$	$1.21 \cdot 10^{+02}$	$1.02 \cdot 10^{-15}$

T_9	^{7}Li(p,α)^{4}He	^{7}Be(e^-,ν)^{7}Li	^{7}Be(p,γ)^{8}B	^{7}Be(α,γ)^{11}C	^{8}B(p,γ)^{9}C
0.001	$1.13 \cdot 10^{-26}$	$5.19 \cdot 10^{-09}$		$1.95 \cdot 10^{-89}$	$3.96 \cdot 10^{-44}$
0.002	$2.79 \cdot 10^{-19}$	$3.67 \cdot 10^{-09}$		$7.69 \cdot 10^{-69}$	$1.25 \cdot 10^{-33}$
0.003	$1.05 \cdot 10^{-15}$	$2.99 \cdot 10^{-09}$	$1.60 \cdot 10^{-24}$	$7.61 \cdot 10^{-59}$	$1.53 \cdot 10^{-28}$
0.004	$1.88 \cdot 10^{-13}$	$2.59 \cdot 10^{-09}$	$8.83 \cdot 10^{-22}$	$1.54 \cdot 10^{-52}$	$2.45 \cdot 10^{-25}$
0.005	$7.45 \cdot 10^{-12}$	$2.32 \cdot 10^{-09}$	$7.83 \cdot 10^{-20}$	$4.70 \cdot 10^{-48}$	$4.64 \cdot 10^{-23}$
0.006	$1.23 \cdot 10^{-10}$	$2.12 \cdot 10^{-09}$	$2.38 \cdot 10^{-18}$	$1.24 \cdot 10^{-44}$	$2.53 \cdot 10^{-21}$
0.007	$1.15 \cdot 10^{-09}$	$1.96 \cdot 10^{-09}$	$3.64 \cdot 10^{-17}$	$6.68 \cdot 10^{-42}$	$6.13 \cdot 10^{-20}$
0.008	$7.27 \cdot 10^{-09}$	$1.83 \cdot 10^{-09}$	$3.44 \cdot 10^{-16}$	$1.20 \cdot 10^{-39}$	$8.50 \cdot 10^{-19}$
0.009	$3.44 \cdot 10^{-08}$	$1.73 \cdot 10^{-09}$	$2.29 \cdot 10^{-15}$	$9.58 \cdot 10^{-38}$	$7.83 \cdot 10^{-18}$
0.010	$1.31 \cdot 10^{-07}$	$1.64 \cdot 10^{-09}$	$1.17 \cdot 10^{-14}$	$4.17 \cdot 10^{-36}$	$5.29 \cdot 10^{-17}$
0.011	$4.23 \cdot 10^{-07}$	$1.56 \cdot 10^{-09}$	$4.86 \cdot 10^{-14}$	$1.13 \cdot 10^{-34}$	$2.81 \cdot 10^{-16}$
0.012	$1.19 \cdot 10^{-06}$	$1.50 \cdot 10^{-09}$	$1.71 \cdot 10^{-13}$	$2.10 \cdot 10^{-33}$	$1.23 \cdot 10^{-15}$
0.013	$2.99 \cdot 10^{-06}$	$1.44 \cdot 10^{-09}$	$5.29 \cdot 10^{-13}$	$2.85 \cdot 10^{-32}$	$4.61 \cdot 10^{-15}$
0.014	$6.88 \cdot 10^{-06}$	$1.39 \cdot 10^{-09}$	$1.46 \cdot 10^{-12}$	$3.00 \cdot 10^{-31}$	$1.52 \cdot 10^{-14}$
0.015	$1.46 \cdot 10^{-05}$	$1.34 \cdot 10^{-09}$	$3.66 \cdot 10^{-12}$	$2.54 \cdot 10^{-30}$	$4.47 \cdot 10^{-14}$
0.016	$2.92 \cdot 10^{-05}$	$1.30 \cdot 10^{-09}$	$8.50 \cdot 10^{-12}$	$1.79 \cdot 10^{-29}$	$1.20 \cdot 10^{-13}$
0.018	$9.90 \cdot 10^{-05}$	$1.22 \cdot 10^{-09}$	$3.76 \cdot 10^{-11}$	$5.67 \cdot 10^{-28}$	$6.87 \cdot 10^{-13}$
0.020	$2.83 \cdot 10^{-04}$	$1.16 \cdot 10^{-09}$	$1.35 \cdot 10^{-10}$	$1.11 \cdot 10^{-26}$	$3.09 \cdot 10^{-12}$
0.025	$2.31 \cdot 10^{-03}$	$1.04 \cdot 10^{-09}$	$1.74 \cdot 10^{-09}$	$4.25 \cdot 10^{-24}$	$6.24 \cdot 10^{-11}$
0.030	$1.14 \cdot 10^{-02}$	$9.47 \cdot 10^{-10}$	$1.22 \cdot 10^{-08}$	$3.93 \cdot 10^{-22}$	$6.14 \cdot 10^{-10}$
0.040	$1.16 \cdot 10^{-01}$	$8.20 \cdot 10^{-10}$	$2.05 \cdot 10^{-07}$	$2.82 \cdot 10^{-19}$	$1.70 \cdot 10^{-08}$
0.050	$5.97 \cdot 10^{-01}$	$7.33 \cdot 10^{-10}$	$1.51 \cdot 10^{-06}$	$2.95 \cdot 10^{-17}$	$1.79 \cdot 10^{-07}$
0.060	$2.08 \cdot 10^{+00}$	$6.69 \cdot 10^{-10}$	$6.90 \cdot 10^{-06}$	$1.00 \cdot 10^{-15}$	$1.07 \cdot 10^{-06}$
0.070	$5.62 \cdot 10^{+00}$	$6.20 \cdot 10^{-10}$	$2.31 \cdot 10^{-05}$	$1.65 \cdot 10^{-14}$	$4.47 \cdot 10^{-06}$
0.080	$1.27 \cdot 10^{+01}$	$5.80 \cdot 10^{-10}$	$6.22 \cdot 10^{-05}$	$1.64 \cdot 10^{-13}$	$1.44 \cdot 10^{-05}$
0.090	$2.53 \cdot 10^{+01}$	$5.47 \cdot 10^{-10}$	$1.43 \cdot 10^{-04}$	$1.13 \cdot 10^{-12}$	$3.88 \cdot 10^{-05}$
0.100	$4.58 \cdot 10^{+01}$	$5.19 \cdot 10^{-10}$	$2.94 \cdot 10^{-04}$	$5.93 \cdot 10^{-12}$	$9.07 \cdot 10^{-05}$
0.110	$7.68 \cdot 10^{+01}$	$4.94 \cdot 10^{-10}$	$5.49 \cdot 10^{-04}$	$2.50 \cdot 10^{-11}$	$1.90 \cdot 10^{-04}$
0.120	$1.21 \cdot 10^{+02}$	$4.73 \cdot 10^{-10}$	$9.54 \cdot 10^{-04}$	$8.87 \cdot 10^{-11}$	$3.66 \cdot 10^{-04}$
0.130	$1.82 \cdot 10^{+02}$	$4.55 \cdot 10^{-10}$	$1.56 \cdot 10^{-03}$	$2.74 \cdot 10^{-10}$	$6.57 \cdot 10^{-04}$
0.140	$2.62 \cdot 10^{+02}$	$4.38 \cdot 10^{-10}$	$2.43 \cdot 10^{-03}$	$7.54 \cdot 10^{-10}$	$1.11 \cdot 10^{-03}$
0.150	$3.65 \cdot 10^{+02}$	$4.23 \cdot 10^{-10}$	$3.64 \cdot 10^{-03}$	$1.89 \cdot 10^{-09}$	$1.79 \cdot 10^{-03}$
0.160	$4.93 \cdot 10^{+02}$	$4.10 \cdot 10^{-10}$	$5.25 \cdot 10^{-03}$	$4.35 \cdot 10^{-09}$	$2.77 \cdot 10^{-03}$
0.180	$8.40 \cdot 10^{+02}$	$3.87 \cdot 10^{-10}$	$1.00 \cdot 10^{-02}$	$1.91 \cdot 10^{-08}$	$5.96 \cdot 10^{-03}$
0.200	$1.33 \cdot 10^{+03}$	$3.67 \cdot 10^{-10}$	$1.75 \cdot 10^{-02}$	$6.88 \cdot 10^{-08}$	$1.15 \cdot 10^{-02}$

T_9	^{11}B(p,γ)^{12}C	^{11}B(p,α)^{8}Be	^{9}C(α,p)^{12}N	^{11}C(p,γ)^{12}N	^{12}C(p,γ)^{13}N
0.001	$1.33 \cdot 10^{-43}$	$7.80 \cdot 10^{-39}$	$1.00 \cdot 10^{-99}$	$3.79 \cdot 10^{-53}$	
0.002	$5.78 \cdot 10^{-33}$	$3.39 \cdot 10^{-28}$	$1.52 \cdot 10^{-91}$	$4.15 \cdot 10^{-41}$	
0.003	$8.25 \cdot 10^{-28}$	$4.90 \cdot 10^{-23}$	$4.76 \cdot 10^{-78}$	$2.84 \cdot 10^{-35}$	
0.004	$1.45 \cdot 10^{-24}$	$8.68 \cdot 10^{-20}$	$1.56 \cdot 10^{-69}$	$1.35 \cdot 10^{-31}$	
0.005	$2.92 \cdot 10^{-22}$	$1.77 \cdot 10^{-17}$	$1.77 \cdot 10^{-63}$	$5.53 \cdot 10^{-29}$	
0.006	$1.61 \cdot 10^{-20}$	$1.01 \cdot 10^{-15}$	$7.37 \cdot 10^{-59}$	$5.43 \cdot 10^{-27}$	$1.22 \cdot 10^{-24}$
0.007	$4.28 \cdot 10^{-19}$	$2.57 \cdot 10^{-14}$	$3.59 \cdot 10^{-55}$	$2.11 \cdot 10^{-25}$	$4.83 \cdot 10^{-23}$
0.008	$6.22 \cdot 10^{-18}$	$3.69 \cdot 10^{-13}$	$3.95 \cdot 10^{-52}$	$4.31 \cdot 10^{-24}$	$1.00 \cdot 10^{-21}$
0.009	$5.89 \cdot 10^{-17}$	$3.51 \cdot 10^{-12}$	$1.47 \cdot 10^{-49}$	$5.51 \cdot 10^{-23}$	$1.30 \cdot 10^{-20}$
0.010	$4.07 \cdot 10^{-16}$	$2.43 \cdot 10^{-11}$	$2.40 \cdot 10^{-47}$	$4.94 \cdot 10^{-22}$	$1.18 \cdot 10^{-19}$
0.011	$2.21 \cdot 10^{-15}$	$1.32 \cdot 10^{-10}$	$2.06 \cdot 10^{-45}$	$3.36 \cdot 10^{-21}$	$8.15 \cdot 10^{-19}$
0.012	$9.89 \cdot 10^{-15}$	$5.91 \cdot 10^{-10}$	$1.06 \cdot 10^{-43}$	$1.83 \cdot 10^{-20}$	$4.49 \cdot 10^{-18}$
0.013	$3.77 \cdot 10^{-14}$	$2.26 \cdot 10^{-09}$	$3.59 \cdot 10^{-42}$	$8.35 \cdot 10^{-20}$	$2.06 \cdot 10^{-17}$
0.014	$1.26 \cdot 10^{-13}$	$7.54 \cdot 10^{-09}$	$8.60 \cdot 10^{-41}$	$3.27 \cdot 10^{-19}$	$8.17 \cdot 10^{-17}$
0.015	$3.77 \cdot 10^{-13}$	$2.25 \cdot 10^{-08}$	$1.54 \cdot 10^{-39}$	$1.13 \cdot 10^{-18}$	$2.85 \cdot 10^{-16}$
0.016	$1.03 \cdot 10^{-12}$	$6.14 \cdot 10^{-08}$	$2.15 \cdot 10^{-38}$	$3.52 \cdot 10^{-18}$	$8.96 \cdot 10^{-16}$
0.018	$6.02 \cdot 10^{-12}$	$3.61 \cdot 10^{-07}$	$2.27 \cdot 10^{-36}$	$2.62 \cdot 10^{-17}$	$6.78 \cdot 10^{-15}$
0.020	$2.76 \cdot 10^{-11}$	$1.66 \cdot 10^{-06}$	$1.25 \cdot 10^{-34}$	$1.47 \cdot 10^{-16}$	$3.88 \cdot 10^{-14}$
0.025	$5.82 \cdot 10^{-10}$	$3.49 \cdot 10^{-05}$	$3.82 \cdot 10^{-31}$	$4.65 \cdot 10^{-15}$	$1.28 \cdot 10^{-12}$
0.030	$5.92 \cdot 10^{-09}$	$3.55 \cdot 10^{-04}$	$1.71 \cdot 10^{-28}$	$6.44 \cdot 10^{-14}$	$1.83 \cdot 10^{-11}$
0.040	$1.72 \cdot 10^{-07}$	$1.04 \cdot 10^{-02}$	$1.20 \cdot 10^{-24}$	$2.94 \cdot 10^{-12}$	$8.86 \cdot 10^{-10}$
0.050	$1.88 \cdot 10^{-06}$	$1.13 \cdot 10^{-01}$	$6.40 \cdot 10^{-22}$	$4.42 \cdot 10^{-11}$	$1.40 \cdot 10^{-08}$
0.060	$1.17 \cdot 10^{-05}$	$7.02 \cdot 10^{-01}$	$7.56 \cdot 10^{-20}$	$3.47 \cdot 10^{-10}$	$1.14 \cdot 10^{-07}$
0.070	$5.52 \cdot 10^{-05}$	$3.02 \cdot 10^{+00}$	$3.41 \cdot 10^{-18}$	$1.80 \cdot 10^{-09}$	$6.13 \cdot 10^{-07}$
0.080	$2.72 \cdot 10^{-04}$	$1.01 \cdot 10^{+01}$	$7.94 \cdot 10^{-17}$	$6.94 \cdot 10^{-09}$	$2.45 \cdot 10^{-06}$
0.090	$1.47 \cdot 10^{-03}$	$2.82 \cdot 10^{+01}$	$1.15 \cdot 10^{-15}$	$2.17 \cdot 10^{-08}$	$7.93 \cdot 10^{-06}$
0.100	$7.11 \cdot 10^{-03}$	$6.94 \cdot 10^{+01}$	$1.17 \cdot 10^{-14}$	$5.79 \cdot 10^{-08}$	$2.18 \cdot 10^{-05}$
0.110	$2.78 \cdot 10^{-02}$	$1.55 \cdot 10^{+02}$	$9.00 \cdot 10^{-14}$	$1.36 \cdot 10^{-07}$	$5.29 \cdot 10^{-05}$
0.120	$8.79 \cdot 10^{-02}$	$3.19 \cdot 10^{+02}$	$5.58 \cdot 10^{-13}$	$2.90 \cdot 10^{-07}$	$1.16 \cdot 10^{-04}$
0.130	$2.34 \cdot 10^{-01}$	$6.12 \cdot 10^{+02}$	$2.89 \cdot 10^{-12}$	$5.71 \cdot 10^{-07}$	$2.36 \cdot 10^{-04}$
0.140	$5.39 \cdot 10^{-01}$	$1.11 \cdot 10^{+03}$	$1.30 \cdot 10^{-11}$	$1.05 \cdot 10^{-06}$	$4.49 \cdot 10^{-04}$
0.150	$1.11 \cdot 10^{+00}$	$1.91 \cdot 10^{+03}$	$5.12 \cdot 10^{-11}$	$1.83 \cdot 10^{-06}$	$8.08 \cdot 10^{-04}$
0.160	$2.07 \cdot 10^{+00}$	$3.12 \cdot 10^{+03}$	$1.83 \cdot 10^{-10}$	$3.04 \cdot 10^{-06}$	$1.39 \cdot 10^{-03}$
0.180	$5.77 \cdot 10^{+00}$	$7.36 \cdot 10^{+03}$	$1.81 \cdot 10^{-09}$	$7.67 \cdot 10^{-06}$	$3.67 \cdot 10^{-03}$
0.200	$1.29 \cdot 10^{+01}$	$1.51 \cdot 10^{+04}$	$1.37 \cdot 10^{-08}$	$1.86 \cdot 10^{-05}$	$8.66 \cdot 10^{-03}$
0.250	$5.25 \cdot 10^{+01}$	$5.95 \cdot 10^{+04}$	$8.40 \cdot 10^{-07}$	$2.04 \cdot 10^{-04}$	$5.50 \cdot 10^{-02}$
0.300	$1.28 \cdot 10^{+02}$	$1.60 \cdot 10^{+05}$	$1.72 \cdot 10^{-05}$	$1.86 \cdot 10^{-03}$	$2.78 \cdot 10^{-01}$
0.350	$2.32 \cdot 10^{+02}$	$3.42 \cdot 10^{+05}$	$1.60 \cdot 10^{-04}$	$1.00 \cdot 10^{-02}$	$1.15 \cdot 10^{+00}$
0.400	$3.56 \cdot 10^{+02}$	$6.36 \cdot 10^{+05}$	$8.75 \cdot 10^{-04}$	$3.55 \cdot 10^{-02}$	$3.81 \cdot 10^{+00}$
0.450	$4.87 \cdot 10^{+02}$	$1.08 \cdot 10^{+06}$	$3.25 \cdot 10^{-03}$	$9.40 \cdot 10^{-02}$	$1.02 \cdot 10^{+01}$
0.500	$6.18 \cdot 10^{+02}$	$1.70 \cdot 10^{+06}$	$9.06 \cdot 10^{-03}$	$2.02 \cdot 10^{-01}$	$2.28 \cdot 10^{+01}$
0.600	$8.66 \cdot 10^{+02}$	$3.66 \cdot 10^{+06}$	$3.77 \cdot 10^{-02}$	$6.17 \cdot 10^{-01}$	$7.67 \cdot 10^{+01}$
0.700	$1.09 \cdot 10^{+03}$	$6.76 \cdot 10^{+06}$	$8.87 \cdot 10^{-02}$	$1.32 \cdot 10^{+00}$	$1.81 \cdot 10^{+02}$
0.800	$1.31 \cdot 10^{+03}$	$1.12 \cdot 10^{+07}$	$1.53 \cdot 10^{-01}$	$2.28 \cdot 10^{+00}$	$3.38 \cdot 10^{+02}$
0.900	$1.53 \cdot 10^{+03}$	$1.70 \cdot 10^{+07}$	$2.46 \cdot 10^{-01}$	$3.42 \cdot 10^{+00}$	$5.42 \cdot 10^{+02}$
1.000	$1.77 \cdot 10^{+03}$	$2.40 \cdot 10^{+07}$	$4.35 \cdot 10^{-01}$	$4.66 \cdot 10^{+00}$	$7.80 \cdot 10^{+02}$

T_9	$^{13}C(p,\gamma)^{14}N$	$^{13}C(\alpha,n)^{16}O$	$^{13}N(p,\gamma)^{14}O$	$^{14}N(p,\gamma)^{15}O$	$^{14}N(\alpha,\gamma)^{18}F$
0.007	$2.00 \cdot 10^{-22}$				
0.008	$4.15 \cdot 10^{-21}$		$1.05 \cdot 10^{-24}$	$1.03 \cdot 10^{-24}$	
0.009	$5.39 \cdot 10^{-20}$		$1.82 \cdot 10^{-23}$	$1.78 \cdot 10^{-23}$	
0.010	$4.90 \cdot 10^{-19}$		$2.13 \cdot 10^{-22}$	$2.08 \cdot 10^{-22}$	
0.011	$3.37 \cdot 10^{-18}$		$1.83 \cdot 10^{-21}$	$1.77 \cdot 10^{-21}$	
0.012	$1.86 \cdot 10^{-17}$		$1.22 \cdot 10^{-20}$	$1.18 \cdot 10^{-20}$	
0.013	$8.54 \cdot 10^{-17}$		$6.70 \cdot 10^{-20}$	$6.44 \cdot 10^{-20}$	
0.014	$3.38 \cdot 10^{-16}$		$3.11 \cdot 10^{-19}$	$2.97 \cdot 10^{-19}$	
0.015	$1.18 \cdot 10^{-15}$		$1.25 \cdot 10^{-18}$	$1.19 \cdot 10^{-18}$	
0.016	$3.69 \cdot 10^{-15}$		$4.47 \cdot 10^{-18}$	$4.24 \cdot 10^{-18}$	
0.018	$2.79 \cdot 10^{-14}$		$4.26 \cdot 10^{-17}$	$4.00 \cdot 10^{-17}$	
0.020	$1.59 \cdot 10^{-13}$		$2.97 \cdot 10^{-16}$	$2.76 \cdot 10^{-16}$	
0.025	$5.18 \cdot 10^{-12}$		$1.45 \cdot 10^{-14}$	$1.31 \cdot 10^{-14}$	
0.030	$7.38 \cdot 10^{-11}$		$2.82 \cdot 10^{-13}$	$2.48 \cdot 10^{-13}$	
0.040	$3.54 \cdot 10^{-09}$	$5.34 \cdot 10^{-24}$	$2.13 \cdot 10^{-11}$	$1.78 \cdot 10^{-11}$	
0.050	$5.53 \cdot 10^{-08}$	$3.24 \cdot 10^{-21}$	$4.62 \cdot 10^{-10}$	$3.68 \cdot 10^{-10}$	
0.060	$4.50 \cdot 10^{-07}$	$4.19 \cdot 10^{-19}$	$4.84 \cdot 10^{-09}$	$3.68 \cdot 10^{-09}$	
0.070	$2.40 \cdot 10^{-06}$	$2.00 \cdot 10^{-17}$	$3.17 \cdot 10^{-08}$	$2.30 \cdot 10^{-08}$	$1.05 \cdot 10^{-26}$
0.080	$9.57 \cdot 10^{-06}$	$4.80 \cdot 10^{-16}$	$1.50 \cdot 10^{-07}$	$1.04 \cdot 10^{-07}$	$1.19 \cdot 10^{-24}$
0.090	$3.08 \cdot 10^{-05}$	$6.99 \cdot 10^{-15}$	$5.58 \cdot 10^{-07}$	$3.70 \cdot 10^{-07}$	$7.27 \cdot 10^{-23}$
0.100	$8.43 \cdot 10^{-05}$	$6.99 \cdot 10^{-14}$	$1.74 \cdot 10^{-06}$	$1.11 \cdot 10^{-06}$	$7.37 \cdot 10^{-21}$
0.110	$2.04 \cdot 10^{-04}$	$5.24 \cdot 10^{-13}$	$4.70 \cdot 10^{-06}$	$2.95 \cdot 10^{-06}$	$5.67 \cdot 10^{-19}$
0.120	$4.45 \cdot 10^{-04}$	$3.12 \cdot 10^{-12}$	$1.14 \cdot 10^{-05}$	$7.37 \cdot 10^{-06}$	$2.24 \cdot 10^{-17}$
0.130	$8.95 \cdot 10^{-04}$	$1.55 \cdot 10^{-11}$	$2.51 \cdot 10^{-05}$	$1.85 \cdot 10^{-05}$	$5.04 \cdot 10^{-16}$
0.140	$1.69 \cdot 10^{-03}$	$6.57 \cdot 10^{-11}$	$5.14 \cdot 10^{-05}$	$4.85 \cdot 10^{-05}$	$7.21 \cdot 10^{-15}$
0.150	$3.00 \cdot 10^{-03}$	$2.44 \cdot 10^{-10}$	$9.90 \cdot 10^{-05}$	$1.30 \cdot 10^{-04}$	$7.18 \cdot 10^{-14}$
0.160	$5.08 \cdot 10^{-03}$	$8.12 \cdot 10^{-10}$	$1.81 \cdot 10^{-04}$	$3.40 \cdot 10^{-04}$	$5.33 \cdot 10^{-13}$
0.180	$1.30 \cdot 10^{-02}$	$6.77 \cdot 10^{-09}$	$5.27 \cdot 10^{-04}$	$1.93 \cdot 10^{-03}$	$1.48 \cdot 10^{-11}$
0.200	$2.93 \cdot 10^{-02}$	$4.21 \cdot 10^{-08}$	$1.34 \cdot 10^{-03}$	$8.26 \cdot 10^{-03}$	$2.09 \cdot 10^{-10}$
0.250	$1.54 \cdot 10^{-01}$	$1.70 \cdot 10^{-06}$	$9.23 \cdot 10^{-03}$	$1.14 \cdot 10^{-01}$	$2.32 \cdot 10^{-08}$
0.300	$5.81 \cdot 10^{-01}$	$3.14 \cdot 10^{-05}$	$4.61 \cdot 10^{-02}$	$6.40 \cdot 10^{-01}$	$5.10 \cdot 10^{-07}$
0.350	$1.96 \cdot 10^{+00}$	$3.57 \cdot 10^{-04}$	$2.03 \cdot 10^{-01}$	$2.12 \cdot 10^{+00}$	$4.47 \cdot 10^{-06}$
0.400	$6.04 \cdot 10^{+00}$	$2.88 \cdot 10^{-03}$	$7.98 \cdot 10^{-01}$	$5.09 \cdot 10^{+00}$	$2.22 \cdot 10^{-05}$
0.450	$1.69 \cdot 10^{+01}$	$1.76 \cdot 10^{-02}$	$2.67 \cdot 10^{+00}$	$9.85 \cdot 10^{+00}$	$7.58 \cdot 10^{-05}$
0.500	$4.20 \cdot 10^{+01}$	$8.42 \cdot 10^{-02}$	$7.45 \cdot 10^{+00}$	$1.64 \cdot 10^{+01}$	$2.00 \cdot 10^{-04}$
0.600	$1.82 \cdot 10^{+02}$	$1.06 \cdot 10^{+00}$	$3.67 \cdot 10^{+01}$	$3.42 \cdot 10^{+01}$	$8.73 \cdot 10^{-04}$
0.700		$7.18 \cdot 10^{+00}$	$1.16 \cdot 10^{+02}$	$5.48 \cdot 10^{+01}$	$2.83 \cdot 10^{-03}$
0.800		$3.18 \cdot 10^{+01}$			$8.75 \cdot 10^{-03}$
0.900		$1.04 \cdot 10^{+02}$			$2.71 \cdot 10^{-02}$
1.000		$2.75 \cdot 10^{+02}$			$7.81 \cdot 10^{-02}$
1.250		$1.73 \cdot 10^{+03}$			$6.57 \cdot 10^{-01}$
1.500		$6.74 \cdot 10^{+03}$			$2.90 \cdot 10^{+00}$
1.750		$1.99 \cdot 10^{+04}$			$8.36 \cdot 10^{+00}$
2.000		$4.84 \cdot 10^{+04}$			$1.88 \cdot 10^{+01}$
2.500		$1.87 \cdot 10^{+05}$			$5.14 \cdot 10^{+01}$
3.000		$4.88 \cdot 10^{+05}$			$1.05 \cdot 10^{+02}$

T_9	^{15}N(p,γ)^{16}O	^{15}N(p,α)^{12}C	^{16}O(p,γ)^{17}F	^{17}O(p,γ)^{18}F	^{17}O(p,α)^{14}N
0.001	$6.15 \cdot 10^{-56}$		$6.57 \cdot 10^{-63}$	$4.03 \cdot 10^{-63}$	$2.17 \cdot 10^{-62}$
0.002	$1.81 \cdot 10^{-42}$		$3.38 \cdot 10^{-48}$	$2.38 \cdot 10^{-48}$	$1.19 \cdot 10^{-47}$
0.003	$6.17 \cdot 10^{-36}$		$4.58 \cdot 10^{-41}$	$3.47 \cdot 10^{-41}$	$1.60 \cdot 10^{-40}$
0.004	$8.12 \cdot 10^{-32}$		$1.43 \cdot 10^{-36}$	$1.14 \cdot 10^{-36}$	$4.83 \cdot 10^{-36}$
0.005	$6.90 \cdot 10^{-29}$	$7.12 \cdot 10^{-26}$	$2.24 \cdot 10^{-33}$	$1.86 \cdot 10^{-33}$	$7.21 \cdot 10^{-33}$
0.006	$1.18 \cdot 10^{-26}$	$1.24 \cdot 10^{-23}$	$6.11 \cdot 10^{-31}$	$5.25 \cdot 10^{-31}$	$1.85 \cdot 10^{-30}$
0.007	$7.01 \cdot 10^{-25}$	$7.59 \cdot 10^{-22}$	$5.36 \cdot 10^{-29}$	$4.73 \cdot 10^{-29}$	$1.53 \cdot 10^{-28}$
0.008	$2.08 \cdot 10^{-23}$	$2.27 \cdot 10^{-20}$	$2.15 \cdot 10^{-27}$	$1.94 \cdot 10^{-27}$	$5.70 \cdot 10^{-27}$
0.009	$3.67 \cdot 10^{-22}$	$4.01 \cdot 10^{-19}$	$4.85 \cdot 10^{-26}$	$4.52 \cdot 10^{-26}$	$1.27 \cdot 10^{-25}$
0.010	$4.33 \cdot 10^{-21}$	$4.76 \cdot 10^{-18}$	$7.10 \cdot 10^{-25}$	$6.73 \cdot 10^{-25}$	$1.71 \cdot 10^{-24}$
0.011	$3.75 \cdot 10^{-20}$	$4.14 \cdot 10^{-17}$	$7.41 \cdot 10^{-24}$	$7.14 \cdot 10^{-24}$	$1.65 \cdot 10^{-23}$
0.012	$2.54 \cdot 10^{-19}$	$2.81 \cdot 10^{-16}$	$5.90 \cdot 10^{-23}$	$5.77 \cdot 10^{-23}$	$1.23 \cdot 10^{-22}$
0.013	$1.40 \cdot 10^{-18}$	$1.56 \cdot 10^{-15}$	$3.77 \cdot 10^{-22}$	$3.73 \cdot 10^{-22}$	$7.46 \cdot 10^{-22}$
0.014	$6.55 \cdot 10^{-18}$	$7.31 \cdot 10^{-15}$	$2.01 \cdot 10^{-21}$	$2.01 \cdot 10^{-21}$	$3.80 \cdot 10^{-21}$
0.015	$2.66 \cdot 10^{-17}$	$2.98 \cdot 10^{-14}$	$9.16 \cdot 10^{-21}$	$9.29 \cdot 10^{-21}$	$1.68 \cdot 10^{-20}$
0.016	$9.56 \cdot 10^{-17}$	$1.08 \cdot 10^{-13}$	$3.67 \cdot 10^{-20}$	$3.76 \cdot 10^{-20}$	$6.63 \cdot 10^{-20}$
0.018	$9.22 \cdot 10^{-16}$	$1.04 \cdot 10^{-12}$	$4.27 \cdot 10^{-19}$	$4.47 \cdot 10^{-19}$	$8.71 \cdot 10^{-19}$
0.020	$6.50 \cdot 10^{-15}$	$7.39 \cdot 10^{-12}$	$3.53 \cdot 10^{-18}$	$3.82 \cdot 10^{-18}$	$1.35 \cdot 10^{-17}$
0.025	$3.25 \cdot 10^{-13}$	$3.74 \cdot 10^{-10}$	$2.42 \cdot 10^{-16}$	$3.83 \cdot 10^{-16}$	$1.13 \cdot 10^{-14}$
0.030	$6.41 \cdot 10^{-12}$	$7.48 \cdot 10^{-09}$	$6.03 \cdot 10^{-15}$	$2.17 \cdot 10^{-14}$	$1.37 \cdot 10^{-12}$
0.040	$4.96 \cdot 10^{-10}$	$5.87 \cdot 10^{-07}$	$6.48 \cdot 10^{-13}$	$6.54 \cdot 10^{-12}$	$5.23 \cdot 10^{-10}$
0.050	$1.09 \cdot 10^{-08}$	$1.31 \cdot 10^{-05}$	$1.79 \cdot 10^{-11}$	$2.13 \cdot 10^{-10}$	$1.73 \cdot 10^{-08}$
0.060	$1.16 \cdot 10^{-07}$	$1.45 \cdot 10^{-04}$	$2.23 \cdot 10^{-10}$	$2.14 \cdot 10^{-09}$	$1.69 \cdot 10^{-07}$
0.070	$7.64 \cdot 10^{-07}$	$1.00 \cdot 10^{-03}$	$1.66 \cdot 10^{-09}$	$1.12 \cdot 10^{-08}$	$8.34 \cdot 10^{-07}$
0.080	$3.63 \cdot 10^{-06}$	$5.04 \cdot 10^{-03}$	$8.69 \cdot 10^{-09}$	$4.06 \cdot 10^{-08}$	$2.69 \cdot 10^{-06}$
0.090	$1.36 \cdot 10^{-05}$	$1.99 \cdot 10^{-02}$	$3.51 \cdot 10^{-08}$	$1.25 \cdot 10^{-07}$	$6.59 \cdot 10^{-06}$
0.100	$4.23 \cdot 10^{-05}$	$6.53 \cdot 10^{-02}$	$1.16 \cdot 10^{-07}$	$3.89 \cdot 10^{-07}$	$1.35 \cdot 10^{-05}$
0.110	$1.15 \cdot 10^{-04}$	$1.87 \cdot 10^{-01}$	$3.31 \cdot 10^{-07}$	$1.28 \cdot 10^{-06}$	$2.47 \cdot 10^{-05}$
0.120	$2.78 \cdot 10^{-04}$	$4.77 \cdot 10^{-01}$	$8.35 \cdot 10^{-07}$	$4.12 \cdot 10^{-06}$	$4.33 \cdot 10^{-05}$
0.130	$6.16 \cdot 10^{-04}$	$1.12 \cdot 10^{+00}$	$1.91 \cdot 10^{-06}$	$1.21 \cdot 10^{-05}$	$7.63 \cdot 10^{-05}$
0.140	$1.27 \cdot 10^{-03}$	$2.44 \cdot 10^{+00}$	$4.01 \cdot 10^{-06}$	$3.17 \cdot 10^{-05}$	$1.38 \cdot 10^{-04}$
0.150	$2.46 \cdot 10^{-03}$	$4.97 \cdot 10^{+00}$	$7.87 \cdot 10^{-06}$	$7.41 \cdot 10^{-05}$	$2.54 \cdot 10^{-04}$
0.160	$4.53 \cdot 10^{-03}$	$9.75 \cdot 10^{+00}$	$1.46 \cdot 10^{-05}$	$1.57 \cdot 10^{-04}$	$4.63 \cdot 10^{-04}$
0.180	$1.35 \cdot 10^{-02}$	$3.28 \cdot 10^{+01}$	$4.32 \cdot 10^{-05}$	$5.43 \cdot 10^{-04}$	$1.40 \cdot 10^{-03}$
0.200	$3.52 \cdot 10^{-02}$	$9.64 \cdot 10^{+01}$	$1.10 \cdot 10^{-04}$	$1.46 \cdot 10^{-03}$	$3.60 \cdot 10^{-03}$
0.250	$2.44 \cdot 10^{-01}$	$8.80 \cdot 10^{+02}$	$7.09 \cdot 10^{-04}$	$8.24 \cdot 10^{-03}$	$2.85 \cdot 10^{-02}$
0.300	$1.05 \cdot 10^{+00}$	$4.66 \cdot 10^{+03}$	$2.92 \cdot 10^{-03}$	$2.52 \cdot 10^{-02}$	$3.55 \cdot 10^{-01}$
0.350	$3.17 \cdot 10^{+00}$	$1.66 \cdot 10^{+04}$	$8.96 \cdot 10^{-03}$	$5.78 \cdot 10^{-02}$	$3.66 \cdot 10^{+00}$
0.400	$7.48 \cdot 10^{+00}$	$4.48 \cdot 10^{+04}$	$2.25 \cdot 10^{-02}$	$1.28 \cdot 10^{-01}$	$2.25 \cdot 10^{+01}$
0.450	$1.49 \cdot 10^{+01}$	$9.86 \cdot 10^{+04}$	$4.89 \cdot 10^{-02}$	$3.11 \cdot 10^{-01}$	$9.23 \cdot 10^{+01}$
0.500	$2.58 \cdot 10^{+01}$	$1.88 \cdot 10^{+05}$	$9.52 \cdot 10^{-02}$	$7.90 \cdot 10^{-01}$	$2.84 \cdot 10^{+02}$
0.600	$5.90 \cdot 10^{+01}$	$4.91 \cdot 10^{+05}$	$2.83 \cdot 10^{-01}$	$4.12 \cdot 10^{+00}$	$1.51 \cdot 10^{+03}$
0.700	$1.07 \cdot 10^{+02}$	$9.85 \cdot 10^{+05}$	$6.73 \cdot 10^{-01}$	$1.45 \cdot 10^{+01}$	$4.93 \cdot 10^{+03}$
0.800	$1.68 \cdot 10^{+02}$	$1.64 \cdot 10^{+06}$	$1.37 \cdot 10^{+00}$	$3.74 \cdot 10^{+01}$	$1.19 \cdot 10^{+04}$
0.900	$2.46 \cdot 10^{+02}$	$2.35 \cdot 10^{+06}$	$2.48 \cdot 10^{+00}$	$7.75 \cdot 10^{+01}$	$2.37 \cdot 10^{+04}$
1.000	$3.50 \cdot 10^{+02}$	$3.37 \cdot 10^{+06}$	$4.14 \cdot 10^{+00}$	$1.38 \cdot 10^{+02}$	$4.11 \cdot 10^{+04}$

T_9	^{18}O(p,γ)^{19}F	^{18}O(p,α)^{15}N	^{18}O(α,γ)^{22}Ne	^{19}F(p,α)^{16}O	^{22}Ne(α,n)^{25}Ng
0.001	$9.82 \cdot 10^{-63}$	$1.21 \cdot 10^{-59}$		$5.51 \cdot 10^{-66}$	
0.002	$6.01 \cdot 10^{-48}$	$7.47 \cdot 10^{-45}$		$5.91 \cdot 10^{-50}$	
0.003	$8.91 \cdot 10^{-41}$	$1.12 \cdot 10^{-37}$		$3.54 \cdot 10^{-42}$	
0.004	$2.98 \cdot 10^{-36}$	$3.78 \cdot 10^{-33}$		$2.84 \cdot 10^{-37}$	
0.005	$6.83 \cdot 10^{-33}$	$8.18 \cdot 10^{-30}$		$8.74 \cdot 10^{-34}$	
0.006	$4.81 \cdot 10^{-30}$	$5.20 \cdot 10^{-27}$		$4.00 \cdot 10^{-31}$	
0.007	$8.01 \cdot 10^{-28}$	$8.32 \cdot 10^{-25}$		$5.32 \cdot 10^{-29}$	
0.008	$4.00 \cdot 10^{-26}$	$4.13 \cdot 10^{-23}$		$3.00 \cdot 10^{-27}$	
0.009	$8.54 \cdot 10^{-25}$	$8.85 \cdot 10^{-22}$		$1.03 \cdot 10^{-25}$	
0.010	$1.01 \cdot 10^{-23}$	$1.05 \cdot 10^{-20}$		$1.78 \cdot 10^{-24}$	
0.011	$7.84 \cdot 10^{-23}$	$8.34 \cdot 10^{-20}$		$2.28 \cdot 10^{-23}$	
0.012	$4.59 \cdot 10^{-22}$	$5.00 \cdot 10^{-19}$		$2.20 \cdot 10^{-22}$	
0.013	$2.21 \cdot 10^{-21}$	$2.48 \cdot 10^{-18}$		$1.68 \cdot 10^{-21}$	
0.014	$9.39 \cdot 10^{-21}$	$1.08 \cdot 10^{-17}$		$1.05 \cdot 10^{-20}$	
0.015	$3.64 \cdot 10^{-20}$	$4.31 \cdot 10^{-17}$		$5.52 \cdot 10^{-20}$	
0.016	$1.31 \cdot 10^{-19}$	$1.58 \cdot 10^{-16}$		$2.53 \cdot 10^{-19}$	
0.018	$1.39 \cdot 10^{-18}$	$1.71 \cdot 10^{-15}$		$3.72 \cdot 10^{-18}$	
0.020	$1.13 \cdot 10^{-17}$	$1.40 \cdot 10^{-14}$		$3.76 \cdot 10^{-17}$	
0.025	$8.24 \cdot 10^{-16}$	$9.94 \cdot 10^{-13}$		$3.88 \cdot 10^{-15}$	
0.030	$2.30 \cdot 10^{-14}$	$2.61 \cdot 10^{-11}$		$1.33 \cdot 10^{-13}$	
0.040	$5.39 \cdot 10^{-12}$	$3.07 \cdot 10^{-09}$		$2.27 \cdot 10^{-11}$	
0.050	$4.75 \cdot 10^{-10}$	$1.01 \cdot 10^{-07}$		$8.72 \cdot 10^{-10}$	
0.060	$2.07 \cdot 10^{-08}$	$2.91 \cdot 10^{-06}$		$1.41 \cdot 10^{-08}$	
0.070	$5.55 \cdot 10^{-07}$	$7.93 \cdot 10^{-05}$	$1.53 \cdot 10^{-24}$	$1.30 \cdot 10^{-07}$	
0.080	$7.81 \cdot 10^{-06}$	$1.17 \cdot 10^{-03}$	$5.08 \cdot 10^{-23}$	$8.13 \cdot 10^{-07}$	
0.090	$6.28 \cdot 10^{-05}$	$9.63 \cdot 10^{-03}$	$9.20 \cdot 10^{-22}$	$3.95 \cdot 10^{-06}$	
0.100	$3.32 \cdot 10^{-04}$	$5.19 \cdot 10^{-02}$	$2.73 \cdot 10^{-20}$	$1.65 \cdot 10^{-05}$	
0.110	$1.28 \cdot 10^{-03}$	$2.04 \cdot 10^{-01}$	$1.09 \cdot 10^{-18}$	$6.40 \cdot 10^{-05}$	
0.120	$3.93 \cdot 10^{-03}$	$6.30 \cdot 10^{-01}$	$2.72 \cdot 10^{-17}$	$2.33 \cdot 10^{-04}$	$2.33 \cdot 10^{-25}$
0.130	$1.00 \cdot 10^{-02}$	$1.62 \cdot 10^{+00}$	$4.20 \cdot 10^{-16}$	$7.83 \cdot 10^{-04}$	$8.64 \cdot 10^{-24}$
0.140	$2.23 \cdot 10^{-02}$	$3.62 \cdot 10^{+00}$	$4.36 \cdot 10^{-15}$	$2.43 \cdot 10^{-03}$	$1.96 \cdot 10^{-22}$
0.150	$4.40 \cdot 10^{-02}$	$7.22 \cdot 10^{+00}$	$3.29 \cdot 10^{-14}$	$6.92 \cdot 10^{-03}$	$3.03 \cdot 10^{-21}$
0.160			$1.92 \cdot 10^{-13}$		$3.51 \cdot 10^{-20}$
0.180			$3.62 \cdot 10^{-12}$		$2.68 \cdot 10^{-18}$
0.200			$3.79 \cdot 10^{-11}$		$1.23 \cdot 10^{-16}$
0.250			$2.95 \cdot 10^{-09}$		$2.30 \cdot 10^{-13}$
0.300			$7.33 \cdot 10^{-08}$		$4.06 \cdot 10^{-11}$
0.350			$9.38 \cdot 10^{-07}$		$1.64 \cdot 10^{-09}$
0.400			$7.16 \cdot 10^{-06}$		$2.60 \cdot 10^{-08}$
0.450			$3.63 \cdot 10^{-05}$		$2.27 \cdot 10^{-07}$
0.500			$1.35 \cdot 10^{-04}$		$1.33 \cdot 10^{-06}$
0.600			$9.74 \cdot 10^{-04}$		$2.45 \cdot 10^{-05}$
0.700			$3.94 \cdot 10^{-03}$		$3.04 \cdot 10^{-04}$
0.800			$1.11 \cdot 10^{-02}$		$2.69 \cdot 10^{-03}$
0.900			$2.46 \cdot 10^{-02}$		$1.68 \cdot 10^{-02}$
1.000			$4.63 \cdot 10^{-02}$		$7.81 \cdot 10^{-02}$

Anhang C Symbolverzeichnis

Alle Symbole, die in dieser Arbeit vorkommen, werden mit der verwendeten Bezeichnung und den zugehörigen cgs-Einheiten aufgelistet. Das Verzeichnis ist nach alphabetischer Reihenfolge sortiert, wobei griechische Symbole vor lateinischen Symbolen platziert sind. Die verwendeten Werte von Konstanten sind in einer eigenen Tabelle am Ende des Kapitels aufgeführt.

Symbol	Einheiten	Beschreibung
α	1	Druckkompressibilität
α_μ	1	Turbulenter Viskositätsparameter
α_{M}	1	Diffusionslängen-Parameter
α_{ML}	1	Mischungslängen-Parameter
α_s	1	Turbulenter Treiber-Parameter
α_t	1	Overshootinglängen-Parameter
A_i	1	Atomgewicht
β	1	Gasdruckanteil
B	erg s^{-1} cm^{-2}	Planckfunktion
c_i	1	Koeffizienten in Ratengleichungen
c_{D}	1	Turbulenter Dissipationsparameter
c_P	erg g^{-1} K^{-1}	Spezifische Wärme bei konstantem Druck
δ	1	Temperaturkompressibilität
D	cm^2 s^{-1}	Diffusionskonstante
ϵ_ν	erg g^{-1} s^{-1}	Spezifische Neutrinoenergie
ϵ_{g}	erg g^{-1} s^{-1}	Spezifische gravitative Energie
ϵ_{nuc}	erg g^{-1} s^{-1}	Energieeintrag durch Kernreaktionen
e	erg g^{-1}	Spezifische innere Energie
E	erg	Innere Energie
E_Q	erg cm^{-3} s^{-1}	Turbulente viskose Energieerzeugung
F	erg s^{-1} cm^{-2}	Gesamtfluss
F_{conv}	erg s^{-1} cm^{-2}	Konvektiver Fluss
F_{rad}	erg s^{-1} cm^{-2}	Strahlungsfluss
H	erg s^{-1} cm^{-2}	Erstes Moment des Strahlungsfeldes
H_{P}	cm	Druckskalenhöhe
j_i	erg s^{-1} cm^{-2}	Konzentrationsfluss
j_t	erg s^{-1} cm^{-2}	Turbulenter kinetischer Energiefluss
j_w	erg s^{-1} cm^{-2}	Konvektiver Enthalpiefluss
J	erg s^{-1} cm^{-2}	Nulltes Moment des Strahlungsfeldes
κ	cm^2 g^{-1}	Opazität
$\bar{\kappa}$	cm^2 g^{-1}	Opazität (Mittelwert in Atmosphäre)

Symbol	Einheiten	Beschreibung
λ_i	s^{-1}	Reaktionsrate von Einer-Reaktionen
$\tilde{\lambda}_i$	$\mathrm{cm}^3\ \mathrm{Mol}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$	Reaktionsrate mit Protoneneinfang
λ_{jk}	$\mathrm{cm}^3\ \mathrm{Mol}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$	Reaktionsrate von Zweier-Reaktionen
λ_{jkl}	$\mathrm{cm}^3\ \mathrm{Mol}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$	Reaktionsrate von Dreier-Reaktionen
Λ	cm	Mischungsweglänge
l	$\mathrm{erg\ s}^{-1}$	Leuchtkraft
l_{ph}	cm	Mittlere freie Weglänge der Photonen
L	$\mathrm{erg\ s}^{-1}$	Gesamtleuchtkraft
L_{g}	$\mathrm{erg\ s}^{-1}$	Gravitative Leuchtkraft
μ	1	Molekulargewicht
μ_Q	$\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}$	Turbulente Viskosität
μ_{red}	g	Reduzierte Masse
m	g	Masse
m_i	g	Masse der i-ten Spezies
Δm_i	g	Masse innerhalb der i-ten Massenschale
M	g	Gesamtmasse
n_i	cm^{-3}	Teilchenzahldichte der i-ten Spezies
n	cm^{-3}	Nukleonenzahl pro Volumen
N_i	1	Vielfachheit der i-ten Spezies pro Reaktion
Φ	$\mathrm{dyn\ cm\ s}^{-1}$	Gravitationspotential
ψ_i	1	Chemischer Potential-Ausdruck
Π	$\mathrm{cm}^3\ \mathrm{s}^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$	Geschwindigkeits-Entropie-Korrelation
P	$\mathrm{dyn\ cm}^{-2}$	Gesamtdruck
P_{gas}	$\mathrm{dyn\ cm}^{-2}$	Gasdruck
P_{rad}	$\mathrm{dyn\ cm}^{-2}$	Strahlungsdruck
P_t	$\mathrm{dyn\ cm}^{-2}$	Turbulenter Druck
q	$\mathrm{erg\ g}^{-1}$	Spezifische Wärmemenge
q_ν	MeV	Energieverlust durch Neutrinos
Q	erg	Wärmemenge
Q_i	MeV	Freigesetzte Energie der i-ten Reaktion
ρ	$\mathrm{g\ cm}^{-3}$	Dichte
$\bar{\rho}$	$\mathrm{g\ cm}^{-3}$	Mittlere Sterndichte
$\tilde{\rho}$	$\mathrm{g\ cm}^{-3}$	Nukleonendichte
ρ_{c}	$\mathrm{g\ cm}^{-3}$	Zentraldichte
r	cm	Radius
R	cm	Gesamtradius
σ_{D}	$\mathrm{g}^2\ \mathrm{s}^{-1}$	Diffusionseffizienz
$\sigma(v)$	cm^2	Wirkungsquerschnitt
s	$\mathrm{erg\ K}^{-1}\ \mathrm{g}^{-1}$	Spezifische Entropie
S	$\mathrm{erg\ K}^{-1}$	Entropie
$\tilde{S}$	$\mathrm{erg\ s}^{-1}\ \mathrm{cm}^{-2}$	Quellfunktion der Strahlung
$S_{\bar{\omega}}$	$\mathrm{erg\ g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$	Turbulente Treiberfunktion
$\tilde{S}_{\bar{\omega}}$	$\mathrm{erg\ g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$	Turbulente Dissipationsfunktion
τ	1	Optische Tiefe

Symbol	Einheiten	Beschreibung
τ_{Entw}	s	Entwicklungszeitskala
τ_{hydr}	s	Hydrodynamische Zeitskala
t	s	Zeit
T	K	Temperatur
T_{c}	K	Zentraltemperatur
T_{eff}	K	Effektivtemperatur
u	cm s^{-1}	Materiegeschwindigkeit
u_{c}	cm s^{-1}	Konvektive Geschwindigkeit
u_{D}	cm s^{-1}	Diffusionsgeschwindigkeit
U_Q	g cm^{-2} s^{-2}	Turbulente viskose Impulserzeugung
v	cm s^{-1}	Geschwindigkeit
v_{sp}	cm^3 g^{-1}	Spezifisches Volumen
V	cm^3	Volumen
V_r	cm s^{-1}	Radialgeschwindigkeit
$\bar{\omega}$	erg g^{-1}	Spezifische turbulente kinetische Energie
w	erg g^{-1}	Spezifische Enthalpie
w_{mech}	erg g^{-1}	Spezifische mechanische Arbeit
W_i	amu	Atommasse des i-ten Elements
W	erg	Mechanische Arbeit
ξ	1	Chemisches Potential
X_i	1	Massenkonzentration des i-ten Elements
X_{c}	1	Zentrale Massenkonzentration
$\tilde{X}_i$	1	Massenkonzentration der Nukleonen
$\mathbf{y}$		Lösungsvektor von LIMEX
Y_i	1	Spezifische Häufigkeit bezogen auf Nukleonenzahl
Z_i	1	Ladungszahl
∇	1	Temperaturgradient der Schichtung
∇_{ad}	1	Adiabatischer Temperaturgradient
∇_{e}	1	Temperaturgradient (siehe Text)
∇_{rad}	1	Temperaturgradient durch Strahlung

Symbol	Wert	Beschreibung
c	$2.99792458 \cdot 10^{10}$ cm s^{-1}	Lichtgeschwindigkeit
G	$6.672 \cdot 10^{-8}$ dyn cm^2 g^{-2}	Gravitationskonstante
a	$7.565 \cdot 10^{-15}$ erg cm^{-2} s^{-1} K^{-4}	Strahlungskonstante
N_{A}	$6.0221 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	Avogadrokonstante
k_{B}	$1.38062 \cdot 10^{-16}$ erg K^{-1} mol^{-1}	Boltzman-Konstante
σ	$5.66956 \cdot 10^{-5}$ erg cm^{-3} K^{-4}	Stefan-Boltzman-Konstante
$\mathfrak{R}$	$8.3143 \cdot 10^{7}$ erg mol^{-1} K^{-1}	Gaskonstante
$\mathrm{M}_{\odot}$	$1.9891 \cdot 10^{33}$ g	Sonnenmasse
$\mathrm{L}_{\odot}$	$3.862 \cdot 10^{33}$ g	Sonnenleuchtkraft
$\mathrm{R}_{\odot}$	$6.9599 \cdot 10^{10}$ g	Sonnenradius

Literaturverzeichnis

Aizenman, M. L. & Perdang, J. 1976
Secular Stability VII. An Analytic Model Displaying a Continous Spectrum
Astron. Astrophys. 51, 263

Angulo, C., et al. 1999
A Compilation of Charged-Particle Induced Thermonuclear Reaction Rates
Nucl. Phys. A 656, 3

Arnett, W. D. 1996
Supernovae and Nucleosynthesis
Princeton University Press

Bahcall, J. N. 1989
Neutrino Astrophysics
Cambridge University Press

Beech, M. & Mitalas, R. 1994
Formation and Evolution of Massive Stars
Astrophys. J. Suppl. Series 95, 517

Bethe, H. A. 1939
Energy Production in Stars
Phys. Rev. 55, 434

Böhm-Vitense, E. 1958
Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte
Z. Astrophys. 46, 108

Castellani, V., Chieffi, A. & Tornambé, A. 1983
On the Evolution of Massive Zero-Metal Stars
Astrophys. Journ. 272, 249

Castellani, V., Marconi, M. & Straniero O. 1998
On the Convective Envelope of AGB Stars
Astron. Astrophys. 340, 160

Castor, J. I. 1972
Radiative Transfer in Sperically Symmetric Flows
Astrophys. Journ. 178, 779

Chang, J. 2001
Table of Nuclides
KAERI (Korea Atomic Energy Research Institute)
URL: http://atom.kaeri.re.kr/

Clayton, D. D. 1983
Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis
The University of Chicago Press, Chicago

Deuflhard, P. 1985
Recent Progress in Extrapolation Methods for Ordinary Differential Equations
SIAM Review 27, 505

Deuflhard, P. & Nowak, U. 1987
Extrapolation Integrators for Quasilinear Implicit ODEs
In: P. Deuflhard & B. Engquist (Eds.): Large Scale Scientific Computing, Prog. Sci. Comp. 7, 37

Dorfi, E. A. 1997
Radiation Hydrodynamics: Numerical Aspects and Applications
In: R. J. LeVeque et al. (Ed.): Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow, Saas-Fee Advanced Course 27, Springer-Verlag, 263

Eggleton, P. P. 1972
Composition Changes During Stellar Evolution
Mon. Not. R. astr. Soc. 156, 361

Ehrig, R. & Nowak, U. 1998
LIMEX Version 4.2A1
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin
URL: http://www.zib.de/ehrig/software.html

Ezer, D. 1961
Models of Massive Pure Hydrogen Stars
Astrophys. Journ. 133, 159

Ezer, D. & Cameron, A. G. W. 1971
The Evolution of Hydrogen-Helium Stars
Astrophys. J. Suppl. Series 14, 399

Frost, C. A. & Lattanzio J. C. 1996
On the Numerical Treatment and Dependence of the Third Dredge-Up Phenomenon
Astrophys. Journ. 473, 383

Gamow, G. 1928
Zur Quantentheorie des Atomkerns
Z. Phys. 51, 204

Hansen, C. J. & Kawaler, S. D. 1995
Stellar Interiors
Spinger-Verlag

Heger, A. & Woosley, S. E. 2001
The Nucleosunthetic Signiture of Population III
astro-ph/0107037, akzeptiert in Astrophys. Journ.

Herndl, H. et al. 1999
Reaction Rates for Neutron Capture Reactions to C, N, and O Isotopes to the Neutron Rich Side of Stability
Phys. Rev. C 60, 064614

Herrero, A. et al. 1992
Intrinsic Parameters of Galactic OB Stars
Astron. Astrophys. 261, 209

Herrero, A., Corral, L. J., Villamariz, M. R. & Martín, E. L. 1999
Fundamental Parameters of Galactic Luminous OB Stars. III. Spectroscopic Analysis of O Stars in Cygnus OB2
Astron. Astrophys. 348, 542

Jedamzik, K. 1999
Did the Universe start at Zero Metallicity
In: A. Weiss, T. Abel, V. Hill (Eds.): The First Stars, Proceedings of the MPA/ESO Workshop, Held at Garching, 4-6 August 1999, Springer (ESO Astrophysics Symposia), 15

Kähler, K. & Weigert, A. 1974
On the Uniqueness of the Solution for Stellar Evolution
Astron. Astrophys. 30, 431

Kippenhahn, R., Thomas, H.-C. & Weigert, A. 1965
Sternentwicklung IV. Zentrales Wasserstoff- und Heliumbrennen bei einem Stern von 5 Sonnenmassen
Z. Astrophys. 61, 241

Kippenhahn, R. & Weigert, A. 1990
Stellar Structure and Evolution
Springer-Verlag

Kudritzki, R. P. 2000
Wind Models and Ionizing Fluxes of Massive Stars at Very Low Metallicity
In: A. Weiss, T. Abel, V. Hill (Eds.): The First Stars, Proceedings of the MPA/ESO Workshop, Held at Garching, 4-6 August 1999, Springer (ESO Astrophysics Symposia), 127

Kürschner, R. 1992
Die numerische Totalenergieerhaltung bei der Simulation des Protostellaren Kollapses
Diplomarbeit, Universität Heidelberg

Kürschner, R. 1994
Instabilities of Protostellar Cores. The Influence of Adaptive Grids on Instabilities of First Protostellar Cores
Astron. Astrophys. 285, 897

Kuhfuß, R. 1986
A Model for Time-Dependent Turbulent Convection
Astron. Astrophys. 160, 116

Kuhfuß, R. 1987
Ein Modell für zeitabhängige, nichtlokale Konvektion in Sternen
Dissertation, TU München

Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1991
Lehrbuch der Theoretischen Physik. Bd. 6, Hydrodynamik
In dt. Sprache hrsg. von Wolfgang Weller, 5. Auflage, Akademie-Verlag

Marigo, P., Girardi, L., Chiosi, C. & Wood, P. R. 2001
Zero-Metallicity Stars. I. Evolution at Constant Mass
Astron. Astrophys. 371, 152

Meixner, J. & Reik, H. G. 1959
Thermodynamik der irreversiblen Prozesse
In: S. Flügge (Ed.): Handbuch der Physik, Prinzipien der Thermodynamik und Statistik, Band III/2, Springer-Verlag

Meynet, G. & Maeder, A. 2000
Stellar Evolution with Rotation. V. Changes in all the outputs of massive star models
Astron. Astrophys. 361, 101

Mihalas, D. 1997
Radiation Hydrodynamics
In: R. J. LeVeque et al. (Ed.): Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow, Saas-Fee Advanced Course 27, Springer-Verlag, 161

Mitalas, R. 1985
Unconventional ^{12}C *Production in Population III Stars*
Astrophys. Journ. 290, 273

Müller, E. 1997
Simulation of Astrophysical Fluid Flow
In: R. J. LeVeque et al. (Ed.): Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow, Saas-Fee Advanced Course 27, Springer-Verlag, 420

Nakamura, F. & Umemura, M. 2000
On the Initial Mass Function of Population III Stars
Astrophys. Journ. 548, 19

Olive, K. A. 2000
Big Bang Nucleosynthesis
Nucl. Phys. Proc. Suppl. 80, 79

Prandtl, L. 1925
Z. Angew. Math. Mech. 5, 136

Rees, M. J. 2000
New Perspectives in Astrophysical Cosmology
Cambridge University Press

Schwarzschild, M. & Härm, R. 1959
On the Maximum Mass of Stable Stars
Astrophys. Journ. 129, 637

Straka, C. W. & Tscharnuter, W. M. 2001
Massive Zero-Metal Stars: Energy Production and Mixing
Astron. Astrophys. 372, 579

Strittmatter, P. A., Faulkner, J., Robertson, J. W. & Faulkner, D. J. 1970
A Question of Entropy
Astrophys. Journ. 161, 369

Vangioni-Flam, E., Coc, A., Cassé, M. & Oberto, Y. 2000
Big Bang Nucleosynthesis updated with NACRE Compilation
Astron. Astrophys. 360, 15

Wagoner, R. W. 1973
Big Bang Nucleosynthesis Revisited
Astrophys. Journ. 179, 343

Weizsäcker, C.-F. 1938
Element Transformation Inside Stars. II
Phys. Z. 39, 633

Wiescher, M., Görres, J., Graff, S., Buchmann, L., Thielemann, F.-K. 1989
The Hot Proton-Proton Chains in Low-Metallicity Objects
Astrophys. Journ. 343, 352

Wood, P. R. 1981
On the Entropy of Mixing, with Particular Reference to its Effect on Dredge-Up During Helium Shell Flashes
Astrophys. Journ. 248, 311

Wuchterl, G. & Feuchtinger, M. U. 1998
A Simple Convection Model for Selfgravitating Fluid Dynamics
Astron. Astrophys. 340, 419

Danksagung

Mein sehr herzlicher Dank gilt nachdrücklich Herrn Prof. Dr. W. M. Tscharnuter, der mir eine außerordentlich gute fachliche und außerfachliche Betreuung zukommen ließ und jederzeit für anregende Diskussionen zur Verfügung stand, in denen er mit seiner ihm eigenen Begeisterung für wissenschaftliche Ergebnisse mich stets zu motivieren und zu inspirieren wusste. Auch möchte ich mich bei ihm für die mir geschaffenen Freiräume bedanken, die erst ein konzentriertes Arbeiten ermöglichten.

Ein besonderer Dank geht an Herrn Prof. W. J. Duschl, der von Anfang an in alle Aspekte dieser Arbeit eingeweiht war und maßgeblich an deren Themenstellung mitgewirkt hat. Auch ihm verdanke ich sehr viele Diskussionen, in denen ich von seinen Ideen immer wieder profitieren konnte.

Herrn Prof. Dr. H. J. Völk danke ich für seine Bereitschaft, das Zweitgutachten zu erstellen.

Ganz herzlich möchte ich mich bei Herrn Dr. M. Biermann bedanken, der sich kurzfristig bereit erklärt hat, diese Arbeit nach fachlichen und formalen Kriterien kritisch durchzulesen. Aber auch der wissenschaftliche Austausch mit ihm am ITA darf nicht unerwähnt bleiben, an den ich mich gerne zurückerinnere.

Herrn R. Kürschner gilt mein Dank für die Betreuung der Computersysteme, die unter seiner Regie immer komplikationslos liefen. Außerdem verdanke ich Herrn Kürschner viele nützliche Anregungen und Tipps, wenn Schwierigkeiten bei der Programmentwicklung auftraten. Er vermochte es mit seiner Expertise stets richtig einzuschätzen, ob ein physikalisches oder ein numerisches Problem vorlag; er konnte mich so bei der Fehlersuche auf die richte Fährte lenken.

Bei Herrn M. Mayer bedanke ich mich besonders für die reibungslose Umstellung auf ein neues Computersystem während der Endphase meiner Arbeit, aber auch für die fachlichen und privaten Gespräche, die hoffentlich auch in Zukunft fortgesetzt werden.

Herrn Dr. R. Ehrig vom Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, der das Softwarepaket LIMEX weiterentwickelt und betreut, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Er nahm sich Problemen mit der Software immer rasch und zuverlässig an.

Ein ganz herzlicher Dank geht an meinen Vater, W. A. Straka, für das Korrekturlesen dieser Arbeit. In Fragen der alten wie der neuen deutschen Rechtschreibung konnte ich verlässlich seinen Rat einholen.

Ebenso herzlich möchte ich mich bei meiner Freundin, A. C. Feldmeyer, für das Korrekturlesen bedanken.

Schließlich danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, DFG (SFB 439 *Galaxien im Jungen Universum*), für die Finanzierung dieser Arbeit.