INAUGURAL-DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Olaf Jens Dittmann
aus Hannover

Tag der mündl. Prüfung: 15.11.1995

Transport polarisierter Strahlung
in
Medien beliebiger Geometrie

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Wehrse

Prof. Dr. Bernhard Wolf

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bis auf wenige Ausnahmen erhalten wir unsere gesamte Information über das Universum durch elektromagnetische Strahlung. Das elektrische Feld $\vec{E}$, das diese Wellen beschreibt, ist eine vektorwertige Funktion der Richtung, der Zeit und der Frequenz. Richtungs- und Zeitinformation werden in der Astrometrie seit Tausenden von Jahren verwertet. Die Frequenzinformation, d.h. die Entwicklung der Spektralanalyse durch Kirchhoff und Bunsen (1859), verhalf der Astrophysik am Ende des letzten Jahrhunderts zum Durchbruch. Da aber nur Intensitäten $I \propto |\vec{E}|^2$ direkt gemessen werden, geht dabei die Richtungs- und Phaseninformation der elektromagnetischen Welle verloren. Diese lassen sich erst durch Betrachtung der Polarisationseigenschaften des Lichtes indirekt beobachten. Die Formulierung der Strahlungstransportgleichung für polarisierte Strahlung geht auf S. Chandrasekhar (1950) zurück.

Wegen der großen Entfernungen kann man bei den meisten Objekten von astrophysikalischem Interesse nur den Fluss, also die über die sichtbare Oberfläche integrierte Intensität beobachten. Bei sphärischen Konfigurationen (z.B. Sternen) heben sich die von symmetrisch liegenden Punkten ausgesandten Polarisationsbeiträge im Flussintegral auf. Daher gewann die Untersuchung der Polarisation erst durch die Betrachtung nicht sphärischer Objekte (z.B. magnetischer Sterne, Staubwolken, Akkretionsscheiben) und NLTE Emissionen (Synchrotronstrahlung) an Bedeutung.

Inzwischen ist aber eine ganze Reihe von Objekten bekannt, die polarimetrisch untersucht wurden und eine deutliche Polarisation aufweisen. In unserem Sonnensystem sind die Streustrahlung an planetarischen Atmosphären (z.B. Hansen und Travis, 1974) und verschiedene Gebiete der Sonne zu nennen, wie z.B. die Flecken, die Flares oder auch die Korona. Während Streuung der polarisierende Effekt bei den Planeten ist, sind auf der Sonne die Magnetfelder dafür verantwortlich. Ebenso dominiert bei weißen Zwergen und Neutronensternen ein starkes Magnetfeld als Ursache der Polarisation. Das interstellare Medium ist wieder ein Beispiel für Streuung. Wolf-Rayet Sterne, Mirae, AM-Herculis-Sterne, Ap-Sterne weisen alle eine messbare Polarisation auf, die man gerade zur Bestimmung der physikalischen Parameter der Objekte zu benutzen beginnt. Viele aktive Galaxien zeigen ebenfalls eine deutliche Polarisation. Besonders auffällig sind Untergruppen der QSO's, der Seyfert-Galaxien und der BL Lac-Objekte.

Es wird also deulich, daß der Polarimetrie und der Interpretation der Polarisationsdaten künftig eine wichtige Rolle zukommen wird. Da sich die vorliegende Arbeit mit Geometrieeffekten befasst, werden wir auf polarisierte Emissionen wie etwa die Synchrotronstrahlung nicht näher eingehen.

1.1 Polarisation auf der Sonne

Würde man die Sonne als normalen Hauptreihenstern aus großer Entfernung beobachten, so würde man aufgrund der spärischen Symmetrie keine meßbare Polarisation erwarten. Da wir aber auch kleine Detaills der Sonnenoberfläche auflösen können, spielen Polarisationsmessungen auf dieser Skala eine große Rolle. Insbesondere bei allen Effekten, die sich auf Magnetfelder zurückführen lassen (*coronal loops*, Sonnenflecken etc.), ist die Bestimmung der Feldstärke aus der Zeeman-Verbreiterung von Linien eine wichtige diagnostische Technik (Stenflo und Lindegren, 1977).

Das den genannten Phänomenen zugrunde liegende theoretische Konzept ist das der magnetischen Flußröhre. Stenholm und Stenflo (1978) lösen für diese Konfigurationen die Transportgleichung im NLTE mit $38 \times 6 \times 12$ Punkten in zwei Dimensionen. Die Quellfunktion wird mit der *core-saturation*-Methode iteriert. Da aber das auf der Erde gemessene Licht nicht nur die Flußröhre durchläuft sondern auch das umgebende i.a. nicht magnetische Medium, führt man ein Zweikomponentenmodell ein (Solanki, 1993). Dann ist aber die zweidimensionale Behandlung nicht mehr gerechtfertigt, so daß eine dreidimensionale Modellierung benötigt wird.

Da der Rechenaufwand bei einer Lösung der hydrodynamischen Gleichungen und des Strahlungtransportes gleichzeitig sehr hoch wird, werden in diesen Fällen meist eindimensionale Modelle verwendet (Schmitz et al., 1985). Rees et al. (1989) führen den DELO Algorithmus ein, der den Linientransport eindimensional behandelt. Die Quellfunktion wird dabei mit einer Fixpunkt(Λ)-Iteration berechnet. Auch von der Absorptionsmatrix werden nur die Diagonalkomponenten verwendet. In diesen Fällen wäre eine schnelle mehrdimensionale Lösung der Strahlungstransportgleichung erstrebenswert.

1.2 Ap-Sterne

Die Klasse der Ap-Sterne zeichnet sich durch starke Metallinien aus. Aus der auftretenden Zeeman-Aufspaltung kann man auf starke Magnetfelder von 10^3 bis zu einigen 10^4 Gauss (Mestel, 1975) schließen. Im Stardardmodell des schiefen Rotators wird die zeitliche Variation der gemessenen Polarisationskomponenten auf das Vorhandensein einer Inklination der Magnetachse gegenüber der Rotationsachse zurückgeführt (Landolfi et al., 1993). Das eigentliche Interesse an der Polarisation gilt aber dem inversen Problem, die Stärke und die Richtung des Magnetfeldes zu bestimmen. Traditionell beschränken sich die Beobachtungen auf Messungen der zirkulären Polarisation (Borra und Landstreet, 1980). Daraus läßt sich aber die Richtung des Magnetfeldes nicht eindeutig bestimmen. Daher schlagen Landolfi et al. (1993) Messungen auch der linearen Polarisation vor, die erst mit neueren Instrumenten durchgeführt werden können, da man Polarisationsgrade im Bereich einiger Promille erwartet. In ihrem Modell zur Inversion der Beobachtungsdaten leiten sie mit unter weitreichenden Näherungen analytische Formeln für den Vektor des Magnetfeldes her. Es wäre wünschenswert, diese Näherungen durch eine echte Lösung der Strahlungstransportgleichung zu ersetzen. Das Modell des schiefen Rotators erfordert dann aber eine dreidimensionale Behandlung.

1.3 Weiße Zwerge

Weiße Zwerge zeichnen sich häufig durch starke Magnetfelder aus. Daher spielen polarisierende Prozesse wie Zeemanaufspaltung oder Zyklotronabsorption eine besondere Rolle. Martin und Wickramasinghe (1979) zeigen, daß Zyklotronabsorption breite Absorptionsfeatures in den Spektren magnetischer weißer Zwerge zur Folge haben kann. Voraussetzung ist, daß Doppelbrechung, Streuung oder steile Temperaturgradienten eine Rolle spielen. Das Spektrum von G240-72 läßt sich auf diese Weise verstehen. Ein weiteres Beispiel sind Doppelsternsysteme deren einer Begleiter ein weißer Zwerg, der andere ein Hauptreihenstern ist, der sein Rochevolumen ausfüllt. Materie strömt dann von dem einen Begleiter zum anderen. Ein starkes Magnetfeld kann die Ausbildung einer Akkretionsscheibe verhindern und den Materiefluß zu den Magnetpolen umleiten. Bei solchen AM-Her-Sternen erlaubt eine Beobachtung des Winkels der linearen Polarisation die Bestimmung der Inklination der Magnetachse (Meggitt und Wickramasinghe, 1982).

1.4 Axialsymmetrische Hüllen

1.4.1 Wolf-Rayet-Sterne

Eine Gruppe von Objekten, die eine deutlich messbare Polarisation zeigen, sind die Hüllen junger Sterne (Serkowski, 1970). Die Existenz einer dünnen Hülle kann aus dem Auftreten von Emissionslinien und bei hinreichender Materiemenge von scharfen und tiefen Absorptionslinien, sog. *shell lines* geschlossen werden. Abb. (1) zeigt ein Spektrum des Wolf-Rayet-Sterns HD 191765. Schulte-Ladbeck et al. (1991) messen eine hohe intrinsische Polarisation ($\bar{p} \geq 1\%$) und eine deutliche Frequenzabhängigkeit des Polarisationsgrades. Shakhovskoi (1965) zeigte, daß Thomson-Streuung an Elektronen der Hülle der dominante polarisierende Prozeß ist. Streuung in der Photosphäre des Sterns selbst kann dagegen ausgeschlossen werden (Buerger und collins, 1970). Da bei einer sphärischen Hülle kein polarisierter Fluß auftreten kann, versucht man mit Hilfe der Polarisationsbeobachtungen die Geometrie dieser Hülle festzulegen.

Brown und McLean (1977) entwickelten unter der Annahme von Einfachstreuung eine analytische Formel für den über die sichtbare Oberfläche integrierten Polarisationsgrad $\bar{p}$ einer optisch dünnen Hülle.

$$\bar{p} \;=\; \frac{\sin^2 i}{2\alpha + \sin^2 i} \tag{1}$$

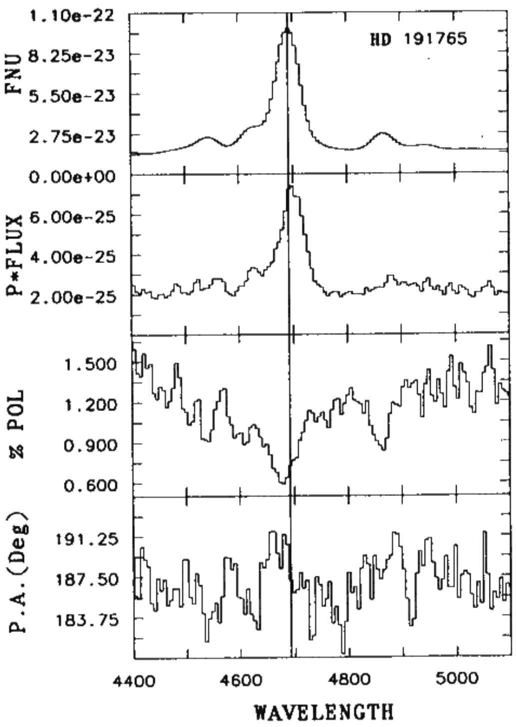


Abbildung 1: Spektrum des Wolf-Rayet-Sterns HD 191765 nach Schulte-Ladbeck et al. (1991).

$$\alpha = \frac{1+\gamma}{1-3\gamma} \tag{2}$$

Dabei ist die Inklination i der Winkel, unter dem die Scheibe gesehen wird, γ ein reiner Formfaktor, der das zweite Moment der Dichteverteilung $n(r,\mu)$der Streuzentren darstellt.

$$\gamma = \frac{\int_0^\infty \int_{-1}^1 n(r,\mu)\mu^2 d\mu dr}{\int_0^\infty \int_{-1}^1 n(r,\mu) d\mu dr} \tag{3}$$

Daß nur ein Moment in die Formel für den Polarisationsgrad eingeht, führen sie darauf zurück, daß die von einem Punkt im streuenden Gebiet ausgehende Intensität durch die Flußintegration auf die gesamte Oberfläche verteilt wird. Umgekehrt lassen dann Messungen des polarisierten Flusses nur Bestimmungen dieses einen Momentes der Dichteverteilung zu. Daher sind unter den getroffenen Annahmen verschiedene Modelle aus Beobachtungen nicht zu unterscheiden, solange sie nur dasselbe γ liefern.

Da für WR-Sterne (und auch für P-Cygni-Sterne) Mehrfachstreuung ein wichtiger Effekt ist, löst Hillier (1994) sich von der Annahme der Einfachstreuung. Alle Koeffizienten werden nicht nur axialsymmetrisch, sondern ellipsoidal angesetzt. Die Quellfunktion besteht nur aus dem Anteil durch Streuung, es wird also keine Emissivität innerhalb der streuenden Hülle angenommen. Die Transportgleichung wird dann entlang einer langen Charakteristik mit Hilfe eines Feautrierverfahrens (Faurobert-Scholl, 1991) integriert. Die

Abweichung von der Kugelgestalt wird über die Verhältnisse der Halbachsen klassifiziert. Hillier zeigt unter anderem, daß im Fall größerer optischer Dicken zusätzliche Effekte auftreten, die in dem optisch dünnen Modell von Brown und McLean (1977) nicht enthalten sind. Dazu zählt etwa eine Umkehr des Vorzeichens des Polarisationsgrades. Ein wirklicher Versuch, die Geometrie der Hüllen zu bestimmen, erfolgt aber noch nicht. Dazu werden Modellrechnungen benötigt, die sowohl Emission in der Hülle wie auch Mehrfachstreuung berücksichtigen.

1.4.2 Supernova 1987A

McCall (1984) schlug vor, die P-Cygni-Profile von Supernovae auf ihre Polarisation hin zu untersuchen, um eine Asphärizität in der Explosion festzustellen. Da Supernovae zur extragalaktischen Entfernungsbestimmung eine große Rolle spielen und die Baade-Methode sphärische Symmetrie voraussetzt, würden Abweichungen in der Geometrie der Supernovaexplosionen eine wichtige Auswirkung auf die Entfernungsskala haben. McCall et al. (1984) konnten bei der SN1983g in NGC4753 keine Polarisation messen. Erst bei der nahen Supernova SN1987A in der großen Magellanschen Wolke gelang die Spektropolarimetrie einer Supernovahülle. Cropper et al.(1987) messen Polarisationsgrade im Prozentbereich sowie eine starke Frequenzabhängigkeit von $\bar{p}$. Insbesondere die Emissionslinien zeigen eine Zwei-Peak-Struktur in der linearen Polarisation (s. Abb. 2).

Um überhaupt eine nichtverschwindende Polarisation zu besitzen, darf die Explosion nicht sphärisch symmetrisch gewesen sein. Vielmehr scheint nach Cropper et al.(1987) eine Axialsymmetrie die Situation zu beschreiben. Sie führen die Polarisation sowohl auf die Resonanzlinienstreuung als auch die Streuung an Elektronen der expandierenden Hülle zurück. Aus den beobachteten Features (wie der zwei-Peak-Struktur der Linien) schließen sie, daß die Lage der Symmetrieachse wie auch der Grad der Asphärizität wellenlängenabhängig sind.

Beobachtungen des Kontinuums von SN1987A zeigen zwei verschiedene Phasen. Bis März 1988 sinkt der Polarisationsgrad und steigt danach wieder an (Mendez et al.; 1988). Die erste Phase läßt sich durch Thomson-Streuung in einer nicht-sphärischen Hülle erklären. Höflich (1991) nimmt eine ellipsenförmige Gestalt der Hülle an. Er benutzt dann ein Monte-Carlo-Modell, um die Abweichung des Ellipsoids von der Sphäre und die Inklination i der Symmetrieachse zu bestimmen. Ausgehend von einem Satz von Standardparametern untersucht er den Einfluß der optischen Tiefe, des Abplattungsverhältnisses und der Verteilung der Streuzentren. Er findet, daß insbesondere bei optisch dicken Hüllen der Gradient der Dichteverteilung der Streuzentren die resultierende Polarisation empfindlich beeinflußt. Daher ist die optisch dünne Approximation von Brown und McLean (1977) in diesem Fall nicht anwendbar. Also läßt sich die Polarisation der Supernovahülle nicht durch Gleichung (1) beschreiben. Insbesondere reicht zur Berechnung der Polarisation nicht das zweite Moment γ der Dichteverteilung aus, sondern man benötigt die Kenntnis der Verteilung selbst. Höflich (1991) bestimmt aus seinen Modellen eine Abweichung

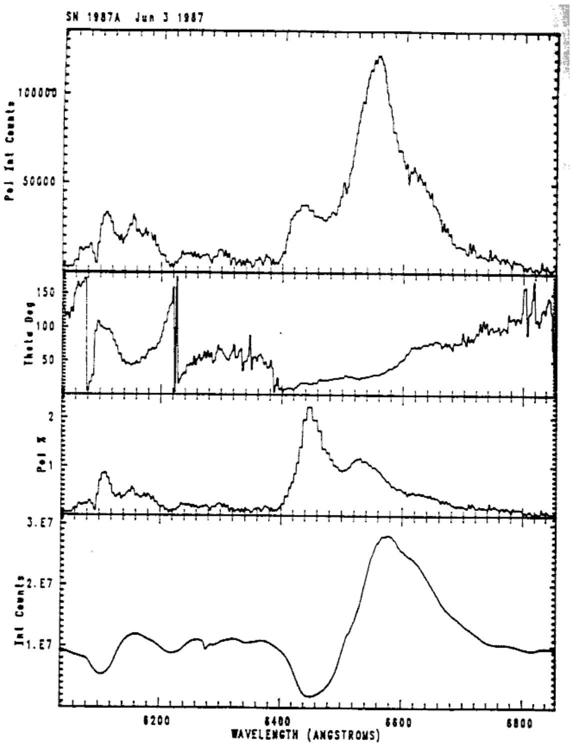


Abbildung 2: Zwei-Peak-Struktur in der Hα-Linie der Supernova SN1987A. Nach Cropper et al. (1987)

der Hülle von der Kugelgestalt zu 20% (Verhältnis von großer zu kleiner Halbachse des Ellipsoids). Um die Geometrie der Hülle von SN1987A aber noch besser zu verstehen, sind Modelle notwendig, die keine Axialsymmetrie annehmen und auch die Absorption berücksichtigen.

1.5 Mira-Veränderliche

Einige späte Sterne vom Typ der Miravariablen zeigen hohe Polarisation ($\approx 6\%$) in ihren Spektren (Landstreet und Angel, 1979). Harrigton (1969) schlägt zwei Mechanismen vor, die eine deutliche Polarisation bewirken können. Zum einen Rayleigh-Streuung an den häufigen H_2-Molekülen in einer nicht-sphärischen Photosphere, zum anderen Streuung an einer Staubhülle. Betrachtet man den Polarisationsgrad in einen Frequenzbereich, der die (photosphärischen) TiO-Banden einschließt, stellt man ein deutliches Absinken der Polarisation in diesem Bereich fest (Landstreet and Angel, 1979; Tomaszewski et al., 1980). Ein Teil der Polarisation ist somit photospärischen Ursprungs. Eine weiterer Beitrag durch eine Staubhülle wird von Landstreet und Angel für möglich gehalten.

Der Polarisationsgrad der Mira-Veränderlichen ist auch mit der Expansionsphase des Sterns korreliert. Das Maximum in der linearen Polarisation tritt meist vor dem Errei-

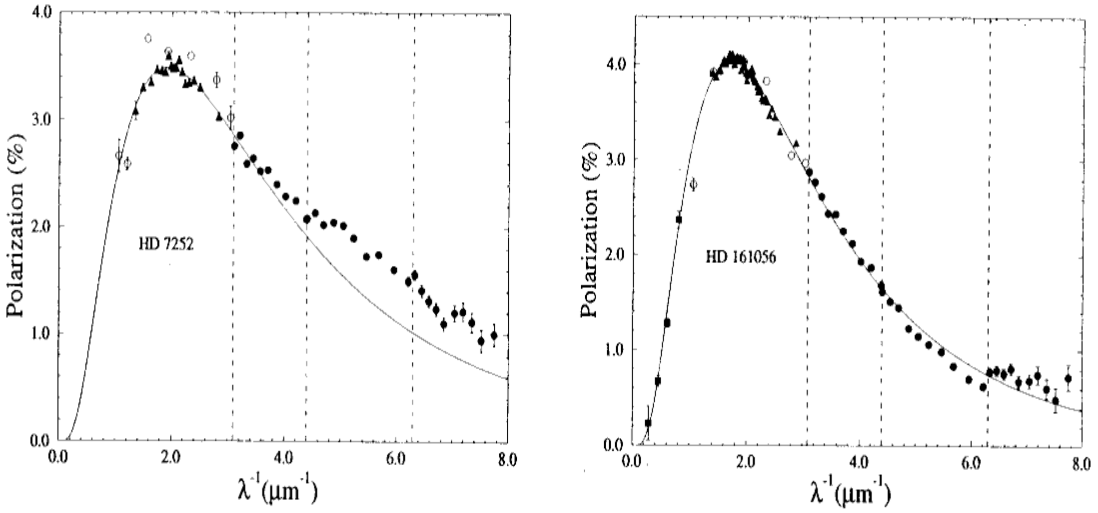


Abbildung 3: Interstellare Polarisation gegen die inverse Wellenlänge für die Sterne HD 7252 und HD 161056 (Somerville et al., 1994). Die gefüllten Kreise stellen HST Daten dar, während die übrigen Symbole Beobachtungen vom Boden aus angeben.

chen des Helligkeitsmaximums auf (Svatoš und Šolc, 1981). Diese Autoren machen für diese Variation die Einstrahlung mit Röntgenphotonen in das Gebiet der Rayleigstreuung verantwortlich. Ein weiterer Effekt, ist das Auftreten von SiO-Maser-Aktivitäten (Miller et al., 1984). Da Maseremission polarisiert ist, hat man bei Mirae mit drei verschiedenen polarisierenden Prozessen in einer Atmospäre zu tun. Um schließlich die Strahlung in einem masernden Gebiet in einem Mirastern zu modellieren, benötigt man ein Modell, das auch polarisierte Einstrahlung in eine beliebig geformte Region behandeln kann.

1.6 Interstellares Medium

Bei vielen astronomischen Messungen spielt die Extinktion des interstellaren Mediums, das zwischen dem Beobachter und dem beobachteten Objekt liegt, eine entscheidende Rolle. Dennoch sieht man sich in der Modellierung des interstellaren Staubes der Schwierigkeit ausgesetzt, daß es sich um Wolken sehr unterschiedlichen Charakters handelt (Mathis; 1990). Eines der auffallendsten Merkmale der interstellaren Extinktion ($A_V = V - V_0$) ist das Maximum bei $\lambda = 2175$ Å. Die Standardtheorie führt das Auftreten dieses Maximums auf einen hohen Anteil an Graphit zurück. Falls diese Annahme richtig ist, läßt sich eine theoretische Vorhersage über den Polarisationsgrad in diesem Wellenlängenbereich machen (Draine; 1988). Insbesondere erwartet man auch im Polarisationsgrad ein auffälliges Feature. Aktuelle Beobachtungen mit dem *Hubble Space Telescope* (HST) zeigen aber nur in einer von zehn Beobachtungsrichtungen einen messbaren Exzess bezüglich der Kontinuumspolarisation in der Nähe von $\lambda = 2175$ Å. Daher benötigt man eine sichere Modellierung der irregulär geformten absorbierenden Wolken, um Graphit als absorbierenden Stoff ausschließen oder bestätigen zu können.

Ein weiteres Phänomen ist, daß die interstellare Polarisation $p(\lambda)$ im Optischen dem rein empirischen Serkowski-Gesetz (Gleichung 4) folgt.

$$\frac{p(\lambda)}{p(\lambda_{\rm max})} = \exp(-K \ln^2(\frac{\lambda}{\lambda_{\rm max}})) \tag{4}$$

Aus der Anpassung an empirische Daten ergibt sich $K = -0.1 + 1.86\lambda_{\rm max}$. Beobachtungen mit dem HST bestätigen die Gültigkeit dieses Gesetzes in fünf von zehn Beobachtungsrichtungen auch im UV-Bereich (Abb 3; Somerville et al.; 1994). Um dies Gültigkeit dieses Gesetzes zu verstehen, wird eine dreidimensionale Modellierung des Strahlungstransportes benötigt.

1.7 Aktive galaktische Kerne (AGN)

Die Erklärung des hohen Energieausstoßes aktiver galaktischer Kerne bedarf eines effektiven Energieerzeugungsprozesses. Einen solchen stellt die Umwandlung von potentieller Energie in Strahlung in der Nähe eines starken Gravitationspotentials dar. Daher geht man gewöhnlich davon aus, daß der Motor der AGN, das *central engine*, eine Akkretionsscheibe um ein zentrales supermassives schwarzes Loch ist. Wichtige Klassen aktiver Galaxien sind Quasare, BL Lac Objekte und Seyfert Galaxien. In allen drei Klassen gibt es Objekte, deren Strahlung polarisiert ist. Über diese wollen wir einen kurzen Überblick geben.

Quasare, die polarisierte Strahlung aussenden, lassen sich in zwei Klassen einteilen. Die LPQ (*low polarized quasars*) mit einem Polarisationsgrad $p \leq 3\%$ und die HPQ (*high polarized quasars*) mit $p > 3\%$ (Stockman, Moore, Angel; 1984). Dabei stellen die LPQ den weitaus größten Teil aller QSO's ($> 95\%$), wie man Abb. (4) entnehmen kann.

Die LPQs zeigen nur einen schwachen Abfall des Polarisationsgrades mit der Frequenz und keine Drehung des Polarisationswinkels. Damit ist Synchrotronstrahlung, die ein depolarisierendes Gebiet durchquert hat, als Quelle für die Polarisation ebenso unwahrscheinlich wie Rayleigh-Streuung. Eine mögliche Ursache dagegen ist Elektronenstreuung in einer nichtsphärischen Atmosphäre.

Die HPQs zeichnen sich außer ihrer hohen Polarisation durch starke, flache Radio-Spektren aus, die auch auf einer Zeitskala von Monaten variieren können. Desweiteren gehören sie zu den *optically violent variables* und zeigen starke Emissionslinien. Sie weisen in ihren Spektren also Ähnlichkeiten mit BL Lac-Objekten auf. In beiden Klassen ist der Polarisationsgrad und der Polarisationswinkel im wesentlichen unabhängig von der Frequenz. Lediglich während eines Ausbruchs gibt es Hinweise auf einen Anstieg der IR-Polarisation. Außerdem sind die zeitliche Variabilität von Polarisationsgrad und Intensität korreliert. Aus diesen beiden Tatsachen schließt man auf Synchrotronemission aus optisch dünnen Quellen als Ursache der Polarisation (Bregman, 1990). Abb. (5) zeigt das Spektrum von BL Lac selbst während eines Ausbruchs.

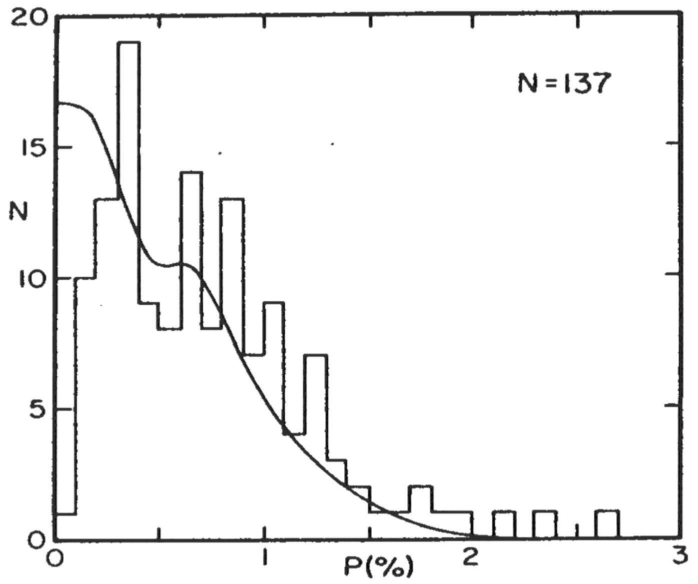


Abbildung 4: Häufikeit gegen Polarisationsgrad für das QSO Sample von Stockman, Moore und Angel, (1984).

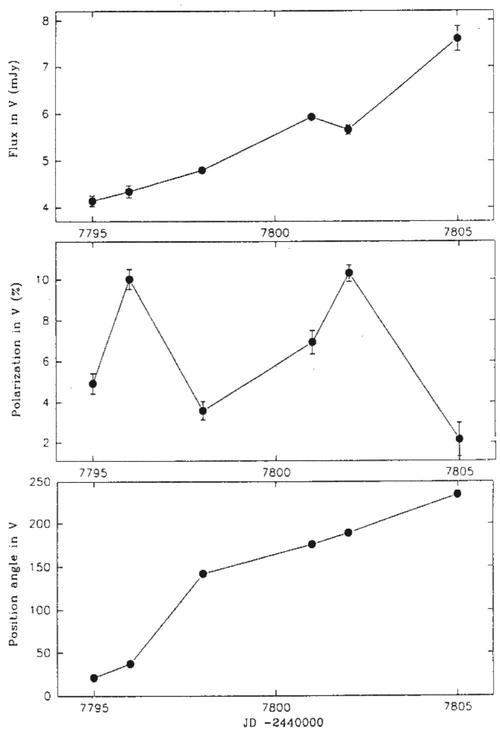


Abbildung 5: Spektum von BL Lac nach Bregman (1990). Gezeigt sind der Fluß, der Polarisationsgrad und der Polarisationswinkelim Visuellen (V).

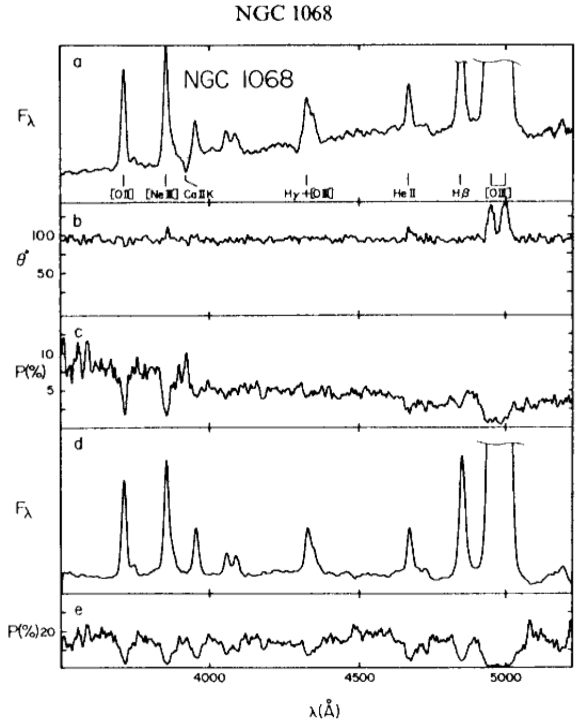


Abbildung 6: Polarisation der Seyfert Galaxie NGC1068 aus Miller und Antonucci (1983, deren Fig. 1)

Die Chance, Seyfert-Galaxien mit hoher Polarisation ($p > 2.5\%$) zu finden, ist etwa vergleichbar mit der, HPQs zu sehen. Martin et al. (1983) untersuchen 99 Seyfert-Galaxien, von denen 67 vom Typ 1, 32 vom Typ 2 sind. Darunter finden sich 10 Typ 1 und 4 Typ 2 Galaxien mit hoher Polarisation. Diese Klassifikation ist nicht immer einfach durchzuführen. Durch die Vermischung mit unpolarisiertem Sternenlicht der unterliegenden Galaxie sinkt natürlich der beobachtete Polarisationsgrad. Die Anzahl der gefundenen hochpolarisierten Objekte hängt daher oft vom zugrundeliegenden Galaxienmodell ab (Martin, 1985).

Ein vieldiskutiertes Beispiel ist die Galaxie NGC1068. Nach der Datenreduktion finden Miller und Antonucci (1983) $p \approx 16\%$ unabhängig von der Frequenz. Der Polarisationswinkel liegt senkrecht zur Symmetrieachse, was auf eine Seyfert 2 Galaxie deutet. (Abb. (6), Miller und Antonucci, 1983). Die Kontinuumspolarisation läßt sich auf die Reflektion an Staub zurückführen. Betrachtet man die Emissionslinien, so sieht man breite Balmer-Linien und Fe II. Diese weisen allerdings auf eine Seyfert 1 Galaxie hin. Die Diskussion über dieses Phänomen ist noch nicht abgeschlossen. Allerdings wird die Bedeutung genauer Spektropolarimetrie und besserer Modellbildung deutlich.

1.8 Zu dieser Arbeit

Die vorangegangenen Abschnitte haben gezeigt, daß die Polarisationseigenschaften verschiedener Objekte noch unausgeschöpfte Information enthalten. Insbesondere wurde klar, daß in allen Fällen Abweichungen von einer sphärischen Symmetrie auftreten. Man kann also nur eine Axialsymmetrie, wie im Fall der Akkretionsscheiben, erwarten, oder man muß irregulär geformte Gebiete betrachten wie etwa im Fall der interstellaren Materie. Auch die Approximationen durch optisch dünne Medien oder die Annahme der Einfachstreuung erwiesen sich als nicht ausreichend. Bisherige Modellierungen haben stets nur ein- oder zweidimensionale Lösungen geliefert oder auf die Behandlung der Streuung verzichtet. Einen Überblick über einige der vorliegenden Methoden werden wir in Abschnitt (3.1) geben. Daher unternehmen wir den Versuch den Einfluß verschiedener Geometrieparameter auf die austretende Strahlung dreidimensional zu modellieren. Wir legen mit dieser Arbeit die Grundlage für den Vergleich mit der polarisierten Strahlung von konkreten astronomischen Objekten. Hier werden wir lediglich einige Modellkonfigurationen untersuchen können. Ebenso werden wir an verschiedenen Stellen Ansätze zu einer Inversion der Daten aufzeigen. Auch hier würde eine allgemeine Lösung des inversen Problems des polarisierten Strahlungstransportes den Rahmen dieser Arbeit weit übersteigen.

In Kapitel (2) werden die grundlegenden Begriffe des polarisierten Strahlungstransportes eingeführt. Insbesondere wird das Verhalten der Stokesparameter unter Änderungen des Koordinatensystems betrachtet. In Abschnitt (2.3) stellen wir eine neue Formulierung der Unno-Lösung der Strahlungtransportgleichung mit Hilfe der vierdimensionalen Matrixexponentialfunktion vor. Kapitel (3) befasst sich mit der Beschreibung der numerischen Techniken, die wir zur Lösung der 3-D Strahlungstransportgleichung einsetzen. Ebenso werden wir Testrechnungen vorstellen und die Leistungsfähigkeit des Programmes darlegen. In Kapitel (4) werden die Ergebnisse der Modellrechnungen für Intensitätsgrößen und Flußgrößen präsentiert, wie auch der Versuch einer Inversion der Flußgrößen unternommen. In der Abschlußbetrachtung Kapitel (5) werden die wichtigen Ergebnisse noch einmal zusammengefaßt und in den größeren Zusammenhang eingeordnet.

2 Grundlagen

2.1 Das polarisierte Strahlungsfeld

Ein Strahlungsfeld wird in der Quantenfeldtheorie durch den Operator des vierdimensionalen Vektorpotentials $\mathbf{A}_\mu$ beschrieben. Wir interessieren uns hier nur für das elektrische Feld, also für die räumliche Komponente $\vec{\mathbf{A}}$. Der hermitesche Operator im Heisenbergbild der elektrischen Feldstärke ergibt sich in der Coulombeichung zu

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(\vec{x},t) &= -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}(\vec{x},t)}{\partial t} = \vec{\mathbf{E}}^+(\vec{x},t) + \vec{\mathbf{E}}^-(\vec{x},t) && (5) \\ \vec{\mathbf{E}}^+(\vec{x},t) &= i \sum_\sigma \sqrt{\frac{h\nu}{2\varepsilon}} \tilde{v}(\vec{n},\vec{x}) \vec{e}_\sigma(\vec{n}) \mathbf{a}(\nu,\vec{n},\sigma,t) && (6) \\ \vec{\mathbf{E}}^-(\vec{x},t) &= (\vec{\mathbf{E}}^+)^\dagger && (7) \\ \mathbf{a}(\nu,\vec{n},\sigma,t) &= \mathbf{a}(\nu,\vec{n},\sigma) \exp(-i\omega_l t) && (8) \end{aligned}$$

Die $\vec{e}_\sigma(\vec{n})$ sind die Einheitsvektoren in zwei Polarisationsrichtungen $\sigma = 1,2$, die auf einer Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$ senkrecht stehen. Die $\mathbf{a}(\nu,\vec{n},\sigma)$ sind die Vernichtungsoperatoren, die $\mathbf{a}^+(\nu,\vec{n},\sigma)$ die Erzeugungsoperatoren eines Photons im Polarisationszustand σ am Ort $\vec{x}$, zur Zeit t, der Frequenz ν. $\tilde{v}(\vec{n},\vec{x})$ sind die Beträge der Eigenfunktionen des Strahlungsfeldes in einem Würfel.

$$\tilde{v}(\vec{n},\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{k}\vec{x}) \qquad (9)$$

mit

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{c} \nu \vec{n} \qquad (10)$$

Diese Gleichungen stellen das quantenelektrodynamische Analogon zu den Vakuumlösungen der klassischen Maxwellgleichungen dar.

Die gesamte Information über ein quantenmechanisches System ist im statistischen Operator ρ enthalten. In reinen Zuständen des Systems ist ρ durch einen Projektor auf einen eindimensionalen Unterraum des Hilbertraumes darstellbar. Den Erwartungwert einer Observablen, also eines hermiteschen Operators $\mathbf{O}$, erhält man durch Spurbildung:

$$< \mathbf{O} >= Tr(\rho \mathbf{O}) \qquad (11)$$

Wir definieren nun eine Hierarchie von Korrelationstensoren (Grau, 1978):

$$G^{(n)}_{i_1 \cdots i_{2n}}(\vec{x}_1 t_1 \cdots \vec{x}_{2n} t_{2n}) = Tr\left(\rho \vec{\mathbf{E}}^-_{i_1}(\vec{x}_1,t_1) \cdots \vec{\mathbf{E}}^-_{i_n}(\vec{x}_n,t_n) \vec{\mathbf{E}}^+_{i_{n+1}}(\vec{x}_{n+1},t_{n+1}) \cdots \vec{\mathbf{E}}^+_{2n}(\vec{x}_{2n},t_{2n})\right) \qquad (12)$$

Diese Definition läßt sich verstehen, wenn man einen aus n gleichartigen Atomen an den Orten $\vec{R}_j, j = 1 \cdots n$ bestehenden Photodetektor betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, daß alle Atome bis zum Zeitpunkt t_j ein Ereignis detektiert haben, ist:

$$w_{ph}(t_1,\cdots,t_n) = s^n \sum \int_0^{t_1} dt'_1 \cdots \int_0^{t_n} dt'_n \, G^{(n)}_{i_1,\cdots i_n, i_n \cdots i_1}(\vec{R}_1,t'_1 \cdots \vec{R}_n,t'_n,\vec{R}_n,t'_n,\cdots \vec{R}_1,t'_1) \qquad (13)$$

s ist eine geeignete Konstante, die die Empfindlichkeit des Detektors beschreibt. Die Zählrate der Koinzidenzen ist dann

$$\frac{\partial^n w_{ph}(t_1 \cdots t_n)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} = s^n \sum G^{(n)}_{i_1,\cdots i_n, i_n \cdots i_1}(\vec{R}_1, t_1 \cdots \vec{R}_n, t_n, \vec{R}_n, t_n, \cdots \vec{R}_1, t_1) \tag{14}$$

Ein Feld wird als kohärent M-ter Ordnung bezeichnet, wenn für alle $n \leq M$ gilt:

$$\left| G^{(n)}_{i_1,\cdots i_n, i_n \cdots i_1}(x_1 \cdots \vec{x}_n, \vec{x}_n, \cdots \vec{x}_1) \right| = \prod_{l=1}^{n} < \vec{\mathbf{E}}^{-}_{i_l}(x_l) >< \vec{\mathbf{E}}^{+}_{i_{n-l+1}}(x_{n-l+1}) > \tag{15}$$

Gleichungen (14) und (15) bedeuten dann aber, daß in einem Feld, das kohärent von M-ter Ordnung ist, die Koinzidenzrate von $n \leq M$ Zählern gleich dem Produkt der einzelnen Zählraten ist. Die Koinzidenzen sind also rein zufällig. Damit gewinnt man keine zusätzliche Information über das Feld, die nicht schon in der Zählrate eines Detektors enthalten ist.

Der Polarisationsgrad eines Feldes an der Stelle $x = (\vec{R}, t)$ wird durch den Korrelationstensor erster Stufe $G^{(1)}_{i,j}(x, x)$ beschrieben. Da die Komponentenmatrix des Tensors positiv definit ist (hermitesch und positive Spur), läßt sich eine Hauptachsentransformation durchführen. Da elektromagnetische Wellen transversal sind, reicht in einem geeigneten Koordinatensystem eine 2×2-Matrix , die Kohärenzmatrix, zur Beschreibung der Polarisationseigenschaften aus. Die Eigenwerte $\gamma_{1,2}$ sind dann:

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}(G^{(1)}_{11} + G^{(1)}_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{G^{(1)}_{11} - G^{(1)}_{22}}{2}\right)^2 + \left(G^{(1)}_{12}\right)^2} \tag{16}$$

Sind die beiden Eigenwerte gleich, mißt man also in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen dieselbe Intensität, so hat man es mit unpolarisiertem Licht zu tun. Ist $\gamma_1 \neq 0$ und $\gamma_2 = 0$, so ist das Licht vollständig polarisiert. Man definiert daher einen Polarisationsgrad $0 \leq p \leq 1$ als

$$p = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\sqrt{(G^{(1)}_{11} - G^{(1)}_{22})^2 + 4(G^{(1)}_{12})^2}}{G^{(1)}_{11} + G^{(1)}_{22}}. \tag{17}$$

Die Stokesparameter I, Q, U, V (Stokes, 1852) lassen sich als Linearkombinationen der Elemente der Kohärenzmatrix definieren.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{(1)}_{11} + G^{(1)}_{22} \\ G^{(1)}_{12} + G^{(1)}_{21} \\ -i(G^{(1)}_{12} - G^{(1)}_{21}) \\ G^{(1)}_{11} - G^{(1)}_{22} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Oder

$$G^{(1)} \quad = \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I + V & Q + iU \\ Q - iU & I - V \end{bmatrix} \tag{19}$$

Da $G^{(1)}$ hermitesch ist, besteht sie aus zwei reellen Parametern auf der Diagonalen und einem komplexen Parameter $G^{(1)}_{12}$. Die vier rellen Stokesparameter enthalten also die gesamte Information der Kohärenzmatrix. Der Polarisationsgrad (Glg. 17) erhält dann die Form

$$0 \leq p = \sqrt{\frac{Q^2 + U^2 + V^2}{I^2}} \leq 1 \tag{20}$$

Ein Strahl teilweise polarisierten Lichtes kann immer als eine Überlagerung aus einer vollständig polarisierten und einer unpolarisierten Komponente dargestellt werden. Also

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} \tag{21}$$

oder

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H^*_{12} & H_{22} \end{bmatrix} && (22) \\ \det H &= H_{11}H_{22} - |H_{12}|^2 = 0 && (23) \end{aligned}$$

Nachdem wir nun die Stokesparameter quantenelektrodynamisch eingeführt und gesehen haben, daß wir tatsächlich reelle Erwartungwerte erhalten, können wir uns auch der Vorteile des klassischen Wellenbildes bedienen. Dort ist jedem polarisierten Strahl ein elektrischer Vektor zugeordnet. Die Spitze dieses Vektors zeichnet bei einem vollständig polarisierten Strahl eine Ellipse in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung nach. Diese ist gekennzeichnet durch die Winkel χ und β. Dabei ist χ der Winkel zwischen der großen Halbachse und $\vec{l}$ und $\tan\beta$ ist das Verhältnis von kleiner zu großer Halbachse. Falls β positiv ist, handelt es sich um rechtshändig polarisiertes Licht, andernfalls um linkshändiges. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich für die Stokesparameter:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{(1)}_{11} + G^{(1)}_{22} \\ I\cos 2\beta \sin 2\chi \\ I \cos 2\beta \cos 2\chi \\ I \sin 2\beta \end{bmatrix} \tag{24}$$

Zwei Beziehungen sind sofort ersichtlich.

$$\begin{aligned} \tan 2\chi &= \frac{U}{Q} && (25) \\ \sin 2\beta &= \frac{V}{I} && (26) \end{aligned}$$

I und β beschreiben dann die von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängigen geometrischen Eigenschaften der Ellipse, während χ die Lage zu einem vorgegebenen System angibt. Hat man es nur mit einem Strahl zu tun, so kann man stets ein Koordinatensystem wählen, in dem $\cos(2\chi)$ und damit U verschwindet.

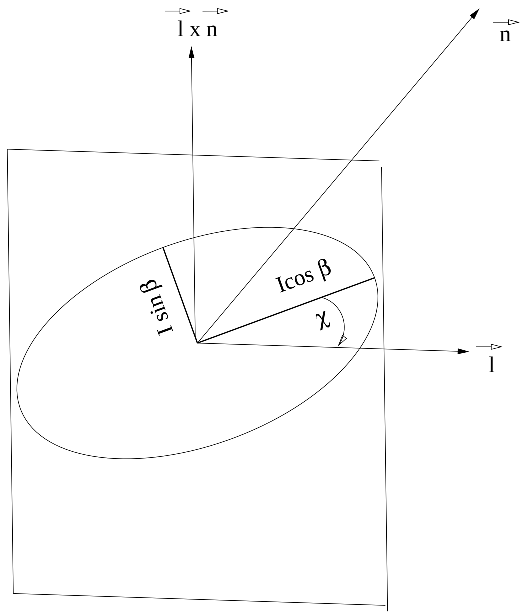


Abbildung 7: Ellipse, die die Spitze des elektrischen Vektors eines sich in Richtung $\vec{n}$ ausbreitenden Lichtstrahls nachzeichnet.

Unterwirft man einen Stokesvektor $\underline{I}$ einer Transformation $\underline{T}$, so muß auch für $\underline{I}' = \underline{T}\,\underline{I}$ die Ungleichung (20) wieder erfüllt sein. Diese Transformation kann ein reiner Koordinatenwechsel oder aber auch ein Absorptions- oder Streuprozeß sein. Eine allgemeine Behandlung findet sich bei Nagirner (1993). Einige wichtige Transformationen seien hier herausgegriffen.

Rotation der Basis gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel α. Die Rotation des Systems $(\vec{l}, \vec{l} \times \vec{n})$ entspricht einem Übergang $\chi' = \chi - \alpha$. Aus Gleichung (24) liest man leicht die Form von $\underline{T}$ ab.

$$\underline{T}_{\mathrm{rot}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Es ändern sich also nur Q und U.

Spiegelung Einer Spiegelung entspricht ein Übergang in ein Linkssystem $(\vec{l}, -\vec{l} \times \vec{n})$. Also $E^0_{\vec{l}\times\vec{n}} \rightarrow -E^0_{\vec{l}\times\vec{n}}$. Aus Gleichung (24) folgt dann:

$$\underline{T}_{\mathrm{ref}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

U und V wechseln also das Vorzeichen. Insbesondere geht also rechtszirkulär polarisiertes Licht in linkszirkulär polarisiertes über.

Absorption Auch ein physikalischer Prozeß wie die Absorption von Photonen muß wieder einen gültigen Stokesvektor liefern. Dadurch sind bereits die möglichen Formen der Absorptionsmatrix $\underline{\kappa}$ beschränkt. In vielen Fällen in der Astrophysik (magnetoaktive Plasmen, d.h. auch Zeeman-Linien, Zyklotron und Synchrotronstrahlung, Kontinuumsstrahlung magnetischer Sterne) ist das Medium nicht depolarisierend, d. h. ein vollständig polarisierter Strahl bleibt vollständig polarisiert. Es wird also sogar die strikte Bedingung $I'^2 = Q'^2 + U'^2 + V'^2$, falls $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$, erfüllt. In diesen Fällen erhält $\underline{\kappa}$ folgende Form (Wickramasinghe, 1995):

$$\underline{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_I & \kappa_Q & \kappa_U & \kappa_V \\ \kappa_Q & \kappa_I & -\rho_r & \rho_w \sin 2\vartheta \\ \kappa_U & \rho_r & \kappa_I & -\rho_w \cos 2\vartheta \\ \kappa_V & -\rho_w \sin 2\vartheta & \rho_w \cos 2\vartheta & \kappa_I \end{bmatrix} \tag{29}$$

In dieser Arbeit werden wir ausschließlich nicht depolarisierende Medien betrachten.

2.2 Transport polarisierter Strahlung

2.2.1 Die Transportgleichung

Betrachten wir nun die zeitliche Entwicklung des Operators $\mathbf{G}^{(1)}$. Im Schrödingerbild ist der Hamiltonoperator eines Systems aus N Atomen und einem Strahlungsfeld gegeben als:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_R} + \mathbf{H_A} + \mathbf{V_S} \tag{30}$$

Dabei ist $\mathbf{H_R}$ der Hamiltonoperator des freien Strahlungsfeldes, $\mathbf{H_A}$ der des Atomsystems und $\mathbf{V_S}$ der Kopplungsoperator. $\mathbf{H_R}$ ist bilinear in den Erzeugern und Vernichtern der Photonen (Heitler, 1954).

$$\mathbf{H_R} = \sum_{\nu,\vec{n},\sigma} h\nu \mathbf{a}^+(\nu,\vec{n},\sigma)\mathbf{a}(\nu,\vec{n},\sigma) \tag{31}$$

$\mathbf{a}^+(\nu,\vec{n},\sigma)$ bezeichnet wieder den Erzeugungsoperator eines Photons der Frequenz ν, des Polarisationszustandes σ, das sich in Richtung $\vec{n}$ bewegt. Die Kopplung hat die Form

$$\mathbf{V_S} = \sum_{\nu,\vec{n},\sigma} \Big(\mathbf{Q}(\nu,\vec{n},\sigma)\mathbf{a}(\nu,\vec{n},\sigma) + \mathbf{Q}^\dagger(\nu,\vec{n},\sigma)\mathbf{a}^+(\nu,\vec{n},\sigma)\Big) \tag{32}$$

$$\mathbf{Q} = d_\nu \vec{\mathbf{p}}\vec{e}_\sigma(\vec{n}) \exp(i\vec{k}\vec{\mathbf{R}}) \tag{33}$$

$$d_\nu = \frac{e_0}{m_e}\sqrt{\frac{\hbar}{\nu N}} \tag{34}$$

$\vec{\mathbf{p}}$ und $\vec{\mathbf{R}}$ sind der Impuls und der Ortsoperator des Atomsystems. $\vec{k}$ ist der Impuls des Photons, $\vec{e}_\sigma(n)$ eine Polarisationsbasis. Im Wechselwirkungsbild (Index I) nimmt $\mathbf{V_S}$ die

Form an:

$$\begin{aligned} \mathbf{V_I}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{H_R}+\mathbf{H_A})t}\mathbf{V_S}e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{H_R}+\mathbf{H_A})t} && (35)\\ &= \mathbf{B}(t)+\mathbf{B}^\dagger(t) && (36)\\ \mathbf{B}(t) &= \sum_{\nu,\vec{n},\sigma} e^{(\frac{i}{\hbar}\mathbf{H_A}t)}\mathbf{Q}(\nu,\vec{n},\sigma)e^{(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H_A}t)}e^{(\frac{i}{\hbar}\mathbf{H_R}t)}\mathbf{a}(\nu,\vec{n},\sigma)e^{(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H_R}t)} && (37) \end{aligned}$$

Sei wieder ρ der statistische Operator des gesamten gekoppelten Systems. Aus Gleichung (11) folgt dann für die zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes einer Observablen:

$$\frac{d<\mathbf{O}>}{dt} = Tr\left(\frac{d\mathbf{O_I}(t)}{dt}\rho_\mathbf{I}(t)\right) + Tr\left(\mathbf{O_I}(t)\frac{d\rho_\mathbf{I}(t)}{dt}\right) \tag{38}$$

Die Schrödingergleichung des statistischen Operators ist

$$\frac{d\rho_\mathbf{I}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{V_I}(t),\rho_\mathbf{I}(t)\right] \tag{39}$$

oder, falls bei $t=0$ der Beginn der Wechselwirkung ist:

$$\frac{d\rho_\mathbf{I}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{V_I}(t),\rho_\mathbf{I}(0)\right] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t \left[\mathbf{V_I}(t),\left[\mathbf{V_I}(t'),\rho_\mathbf{I}(t')\right]\right]dt' \tag{40}$$

Berücksichtigt man noch die zyklische Eigenschaft der Spurbildung, d. h. $Tr(\mathbf{A}[\mathbf{B},\mathbf{C}]) = Tr([\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C})$, dann nimmt die Bewegungsgleichung (38) die Form

$$\begin{aligned} \frac{d<\mathbf{O}>}{dt} = Tr\left(\frac{d\mathbf{O_I}(t)}{dt}\rho_\mathbf{I}(t)\right) &- \frac{i}{\hbar}Tr\left(\left[\mathbf{O_I}(t),\mathbf{V_I}(t)\right]\rho_\mathbf{I}(0)\right) && (41)\\ &- \frac{1}{\hbar^2}Tr\left(\int_0^t \left[\left[\mathbf{O_I}(t),\mathbf{V_I}(t)\right],\mathbf{V_I}(t')\right]\rho_\mathbf{I}(t')dt'\right) \end{aligned}$$

an.

Nehmen wir nun an, daß das Strahlungsfeld und das System der Atome während der gesamten Wechselwirkung unkorreliert sind. Für stellare Verhältnisse ist dies sicher eine gerechtfertigte Annahme. Mit dieser Hypothese können wir allerdings etwa Zustände eines Lasers nicht mehr beschreiben. Dann läßt sich der statistische Operator des Gesamtsystems in das direkte Produkt der statistischen Operatoren der Einzelsysteme zerlegen. Desweiteren vernachlässigen wir Kohärenzphänomene des Strahlungsfeldes (Glauber, 1964) und alle Korrelationen verschiedener Moden des Strahlungsfeldes bis auf die Polarisationsmoden. Unter diesen Annahmen verschwinden die Erwartungswerte aller Observablen, die linear oder bilinear in $\mathbf{a}$ oder $\mathbf{a}^+$ sind. Die Bewegungsgleichung nimmt dann die einfachere Form

$$\begin{aligned} \frac{d<\mathbf{O}>}{dt} &= Tr\left(\frac{d\mathbf{O_I}(t)}{dt}\rho_\mathbf{I}(t)\right) - \frac{1}{\hbar^2}Tr\left(\int_0^t \left[\left[\mathbf{O_I}(t),\mathbf{B}(t)\right],\mathbf{B}^\dagger(t')\right]\rho_\mathbf{I}(t')dt'\right)\\ &- \frac{1}{\hbar^2}Tr\left(\int_0^t \left[\left[\mathbf{O_I}(t),\mathbf{B}^\dagger(t)\right],\mathbf{B}(t')\right]\rho_\mathbf{I}(t')dt'\right) && (42) \end{aligned}$$

an (Landi Degl' Innocenti, 1983).

Wählen wir nun als Observable, deren Zeitentwicklung wir verfolgen wollen die Elemente des Kohärenzoperators

$$\mathbf{I}_{\gamma\delta}(\nu,\vec{n}) = \frac{h\nu^3}{c^2}\mathbf{a}^+(\nu,\vec{n},\gamma)\mathbf{a}(\nu,\vec{n},\delta). \tag{43}$$

Mit den getroffenen Annahmen vereinfacht sich Gleichung (42) zu:

$$\frac{dI_{\gamma\delta}}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2}\left(\int_0^t Tr\left(\left[\left[\mathbf{I}_{\gamma\delta},\mathbf{B}(t)\right],\mathbf{B}^\dagger(t')\right]\rho_{\mathbf{I}}(t')\right)dt' - cc(\gamma\rightleftharpoons\delta)\right) \tag{44}$$

Dabei bedeutet $cc(\gamma \rightleftharpoons \delta)$ die komplexe Konjugation und Austausch der Indizes des vorangegangenen Terms. $I_{\gamma\delta}$ ist der Erwartungswert des Operators $\mathbf{I}_{\gamma\delta}$.

Sei nun $\{|n>\}$ ein Eigensystem des Atomhamiltonoperators und

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}. \tag{45}$$

Dann können die Kommutatoren direkt ausgewertet werden. Der zentrale Kommutator ergibt sich unter Verwendung der üblichen Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu:

$$[\mathbf{I}_{\gamma\delta}(\nu_0,\vec{n}_0),\mathbf{B}(t)] = -b_{\nu_0}d_{\nu_0}\sum_{nm} q(\nu_0,\vec{n}_0,\gamma)|n><m|\mathbf{a}(\nu_0,\vec{n}_0,\delta)e^{2\pi i(\nu_{nm}-\nu_0)t} \tag{46}$$

Wir nehmen desweiteren an, daß der Erwartungswert von $\mathbf{I}_{\gamma\delta}$ nur langsam zeitlich variiert. Wir integrieren nun über einen Zeitraum, der sehr viel größer als ν^{-1} und klein gegen die Zeitskala der Variation des Erwartungswertes von $\mathbf{I}_{\gamma\delta}$ ist. Dann kann der Fehler, der bei einer Ersetzung der oberen Grenze durch ∞ auftritt, vernachlässigt werden. Wir führen daher die komplexwertige Profilfunktion Φ ein:

$$\varphi(\nu_{ab}-\nu) = \lim_{t\to\infty} 2\int_0^t \exp(2\pi i(\nu_{ab}-\nu)(t-t'))dt' = \delta(\nu_{ab}-\nu) + \frac{i}{\pi}P(\frac{1}{\nu_{ab}-\nu}) \tag{47}$$

Dabei bezeichnet P den Cauchyschen Hauptwert des Integrals. Im stationären Fall ist desweiteren $\frac{d}{dt} = c\frac{d}{ds}$(Landi Degl' Innocenti und Landi Degl' Innocenti, 1972). Man erhält dann eine allgemeine Transportgleichung für die Komponenten der Kohärenzmatrix (Landi Degl' Innocenti, 1983).

$$\begin{aligned}\frac{dI_{\gamma\delta}(\nu_0,\vec{n}_0)}{ds} = \frac{f_{\gamma\delta}+f^*_{\delta\gamma}}{2} \quad &- \sum_\lambda \left(g_{\gamma\lambda}I_{\lambda\delta}(\nu_0,\vec{n}_0) + g^*_{\delta\lambda}I_{\gamma\lambda}(\nu_0,\vec{n}_0)\right) \\ &+ \sum_\lambda \left(h_{\gamma\lambda}I_{\lambda\delta}(\nu_0,\vec{n}_0) + h^*_{\delta\lambda}I_{\gamma\lambda}(\nu_0,\vec{n}_0)\right)\end{aligned} \tag{48}$$

Die Terme geben die spontane Emission, die Absorption und die stimulierte Emission von Strahlung an. Die Koeffizienten lassen sich aus den Matrixkomponenten des Wechselwirkungshamiltonoperators explizit ableiten.

$$f_{\gamma\delta} \quad = \quad 4\pi^2 d^2_{\nu_0}\frac{\nu_0^3}{c^3}\sum_{nmr} q_{nr}(\nu_0,\vec{n}_0,\gamma)q^\dagger_{rm}(\nu_0,\vec{n}_0,\delta)\rho_{mn}\Phi(\nu_{nr}-\nu) \tag{49}$$

$$g_{\gamma\delta} = 2\pi^2 d_{\nu_0}^2 \frac{1}{ch^2} \sum_{nmr} q_{rm}(\nu_0, \vec{n}_0, \gamma) q_{nr}^\dagger(\nu_0, \vec{n}_0, \delta) \rho_{mn} \Phi(\nu_{rm} - \nu) \tag{50}$$

$$h_{\gamma\delta} = \frac{c^2}{2h\nu_0^3} f_{\gamma\delta} \tag{51}$$

Dabei ist q_{mn} das Matrixelement des Operators $\mathbf{Q}$ zu den Eigenzuständen des Atomhamiltonoperators. Geht man wieder zur Matrixnotation mit Hilfe der Kohärenzmatrix über, nimmt die Transportgleichung die Gestalt an:

$$\frac{dG^{(1)}}{ds}(\nu_0, \vec{n}_0) = -((g-h)G^{(1)} + G^{(1)}(g-h)^\dagger) + \frac{1}{2}(f + f^\dagger) \tag{52}$$

Nun kann man die die Komponenten der Kohärenzmatrix durch die Stokesparameter ersetzen und in geicher Weise Kombinationen der Koeffizienten bilden. Also:

$$\chi_I = Re(g_{11} + g_{22}) \tag{53}$$
$$\chi_I = -Re(g_{12} + g_{12}) \tag{54}$$
$$\chi_I = Im(g_{12} - g_{12}) \tag{55}$$
$$\chi_I = Re(g_{11} - g_{22}) \tag{56}$$
$$\rho_Q = -Im(g_{12} + g_{21}) \tag{57}$$
$$\rho_U = -Re(g_{12} - g_{21}) \tag{58}$$
$$\rho_V = Im(g_{11} - g_{22}) \tag{59}$$

Die Elemente der Quellfunktion lassen sich auf analoge Weise gewinnen. Um allerdings zu zeigen, daß im Fall des thermodynamischen Gleichgewichtes die Quellfunktion gleich der Planckfunktion ist, sind einige weitere Überlegungen notwendig, die wir hier nicht durchführen wollen. Schließlich erhält man die Transportgleichung, wie sie auch von Chandrasekhar (1950) formuliert wurde.

$$\frac{d\underline{I}}{ds} = -\underline{\chi}\underline{I} + \underline{S} \tag{60}$$

Berücksichtigt man beispielsweise nur die wahre Absorption, so ist $\underline{\chi} = \underline{\kappa}$. In diesem Fall hat man ein gekoppeltes System von vier partiellen Differentialgleichungen zu lösen. Da es in der vorliegenden Arbeit noch nicht um eine exakte physikalische Modellbildung geht, setzen wir im folgenden die Extinktionsmatrix als bekannt voraus. Desweiteren beschränken wir uns auf die Behandlung von Zwei-Niveau-Atomen. Unter dieser Annahme läßt sich die Quellfunktion für Mehrfachstreuung analytisch angeben. Die Gleichung, die der Arbeit zugrunde liegt, ist dann:

$$\vec{n}\nabla\underline{I} = -(\underline{\kappa} + \sigma_0\underline{E})\underline{I} + \sigma_0 \int_{S^2} \underline{P}(\Omega, \Omega')\underline{I}\frac{d\Omega'}{4\pi} + \underline{\kappa}B(T,\nu)\underline{1} \tag{61}$$

$$\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Da im unpolarisierten Fall für Photonen die natürliche Größe die optische Tiefe ist, führen wir auch hier eine analoge Größe ein:

$$d\tau = -(\kappa_I + \sigma_0)ds \tag{63}$$

Unter Verwendung dieser optischen Tiefe können wir die Transportgleichung umformulieren. Dabei führen wir zusätzlich den Streuparameter ε ein.

$$\begin{aligned}
\vec{n}\nabla_\tau \underline{I} &= \underline{\eta}\underline{I} - (1-\varepsilon)\int_{S^2} \underline{P}(\Omega,\Omega')\underline{I}\frac{d\Omega'}{4\pi} + \varepsilon\underline{\xi}B(T,\nu)\underline{1} &(64)\\
\underline{\eta} &= \frac{1}{\kappa_I + \sigma_0}(\underline{\kappa} + \sigma_0\underline{E}) &(65)\\
\underline{\xi} &= \frac{1}{\kappa_I}\underline{\kappa} &(66)\\
\varepsilon &= \frac{\kappa_I}{\kappa_I + \sigma_0} &(67)
\end{aligned}$$

Die Physik des Streuprozesses geht dabei in die Phasenmatrix $\underline{P}$ und in die Matrix der Streuquerschnitte $\underline{\sigma}$ ein. Die skalare Funktion B ist die Planckfunktion. Da thermische Emissionen unpolarisiert erfolgen, wird sie mit dem unpolarisierten Einheitsstokesvektor $\underline{1}$ multipliziert. Da sowohl wahre Absorption als auch Streuung berücksichtigt werden, haben wir es mit vier echt gekoppelten Integro-Differentialgleichungen zu tun. Nur falls man ein reines Streuproblem betrachtet und nur für spezielle Phasenmatrizen (z.B. die Rayleigh-Matrix) läßt sich die V-Komponente abspalten.

2.2.2 Streuung

Wir betrachten nun einen allgemeinen Streuprozeß. Der Zustand lange vor der Wechselwirkung $|in>$ wird dabei durch Produkte der freien Zustände beschrieben, der Zustand nach der Wechselwirkung $|out>$ ebenso. Der Basiswechsel geschieht vermittels der S-Matrix. Es ist also:

$$\mathbf{S}|out> = |in> \tag{68}$$

Der Erwartungswert der Observablen $\mathbf{G^{(1)}}$ ergibt sich also zu

$$< out|\mathbf{G^{(1)}}|out> = < in|\mathbf{S}|in>< in|\mathbf{G^{(1)}}|in>< in|\mathbf{S}^\dagger|in> . \tag{69}$$

Bezeichnen wir nun den Erwartungswert in Matrixnotation von $\mathbf{I}_{\gamma\delta}$ wieder als $G^{(1)}$ und kennzeichnen das gestreute System mit gestrichenen Größen, dann erhalten wir für die Kohärenzmatrix die Beziehung:

$$G^{(1)'} = F\ G^{(1)}\ F^\dagger \tag{70}$$

mit

$$F = < in|\mathbf{S}|in> . \tag{71}$$

Oder in Komponenten:

$$G'_{ij} = \sum_{k,l} F_{ik} F^*_{jl} G_{kl} \tag{72}$$

$$= \tilde{F}_{ikjl} G_{kl} \tag{73}$$

Falls sich die wechselwirkenden Teilchen nicht in reinen Zuständen befinden, gilt trotzdem noch Gleichung (73). Nur läßt sich der Tensor vom Rang vier nicht mehr in ein Produkt von zwei Tensoren vom Rang zwei zerlegen. Aus den Tensorkomponenten von F lassen sich dann ähnlich wie bei der Herleitung der Transportgleichung (vgl. Gleichungen (54-59)) die Elemente der Matrix $\underline{P}$ ableiten, die die Stokesvektoren transformiert (Nagirner und Poutanen, 1993).

$$\underline{I}' = \underline{PI} \tag{74}$$

Die genaue Form der Streumatrix $\underline{P}$ hängt von der Art des Streuprozesses und insbesondere von der Geometrie der streuenden Teilchen ab. Innerhalb des Bildes der klassischen Elektrodynamik gibt die Rayleighsche Theorie die Streumatrix für die Streuung an kleinen Kugeln und die Rayleigh-Gans Theorie die Streumatrix für kleine beliebig geformte Streuteilchen. In beiden Theorien, die insbesondere die Spezialfälle der Rayleighstreuung und der Comptonstreuung (und damit auch den Grenzfall der Thomsonstreuung) erfassen, hat die Streumatrix die Gestalt:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & P_{34} \\ 0 & 0 & -P_{34} & P_{33} \end{bmatrix} \tag{75}$$

Für Streumatrizen, die eine solche Blockdiagonalstruktur haben, existiert eine gut ausgearbeitete Streutheorie (s. Bohren und Huffman, 1983; Hovenier und van der Mee, 1983; Hovenier et al., 1986).

In dieser Arbeit werden wir lediglich die Rayleigh Streuung untersuchen. Rayleigh erklärte 1871 die blaue Farbe des Himmels und die vollständige Polarization bei einer Beobachtungsrichtung senkrecht zur Verbindungslinie von Beobachter und Sonne durch Streuung des Lichtes an Teilchen, die groß gegen die Wellenlänge sind. Ein Beobachter sieht stets die gesamte zur Streuebene senkrecht stehende Komponente des einfallenden Strahls, während der beobachtbare Anteil der Komponenten in der Streuebene vom Streuwinkel Θ abhängt (s. Abb. (8)).

Aus Gleichung (24) folgt für die Stokesparameter

$$\underline{I}' = \frac{1}{4\pi} \sigma_0 \underline{P}(\Theta) \underline{I} \tag{76}$$

$$\underline{P}(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \cos^2\Theta + 1 & \cos^2\Theta - 1 & 0 & 0 \\ \cos^2\Theta - 1 & \cos^2\Theta + 1 & 00 & \\ 0 & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \tag{77}$$

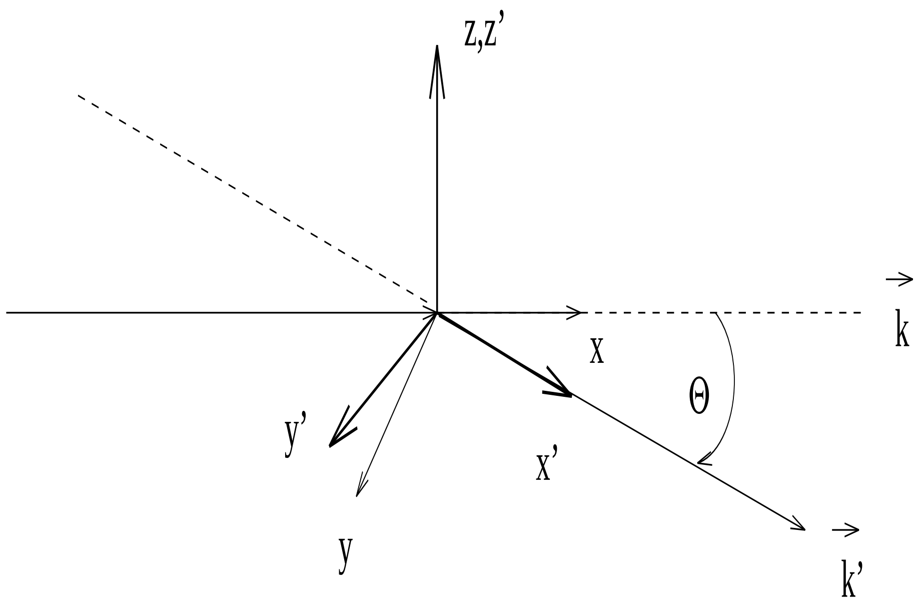


Abbildung 8: Skizze der Rayleighstreuung in der Streuebene.

Streuung an Elektronen wird durch diese Phasenmatrix ebenso beschrieben, lediglich der Streuquerschnitt σ_0 muß durch den frequenzunabhängigen Thomsonquerschnitt ersetzt werden.

Um die Phasenmatrix $\underline{P}$ allerdings in der Transportgleichung zu verwenden, sind noch zwei lineare Transformationen notwendig. In der Transportgleichung werden die Stokesparameter bezüglich Achsen, die entlang des Meridian und senkrecht dazu liegen, definiert. Für die Streuung liegen die Achsen senkrecht zum ein- bzw. ausfallenden Strahl und zur Streuebene. Es muß also erst die Polarisationsebene des einfallenden Strahls in die Streuebene gedreht, danach die des gestreuten Strahls wieder in die Meridianebene zurück gedreht werden (s. Abb (9)). Schließlich erhält man folgende Form:

$$\begin{aligned} \underline{P}(\mu,\varphi;\mu',\varphi') &= \underline{T}_{\mathrm{rot}}(\pi - i_2)\underline{P}(\Theta)\underline{T}_{\mathrm{rot}}(-i_1) &\quad (78)\\ &= \frac{3}{2}\underline{P}^0 + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}\frac{3}{2}\underline{P}^1 + \frac{3}{8}\underline{P}^2 &\quad (79)\end{aligned}$$

Dabei sind:

$$\underline{P}^0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{12}(1-3\mu^2)(1-3\mu'^2) & \frac{1}{4}(1-3\mu^2)(1-\mu'^2) & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}(1-\mu^2)(1-3\mu'^2) & \frac{3}{4}(1-\mu^2)(1-\mu'^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu\mu' \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\underline{P}^1 = \begin{bmatrix} \mu\mu'\cos\Delta\varphi & \mu\mu'\cos\Delta\varphi & \mu\sin\Delta\varphi & 0 \\ \mu\mu'\cos\Delta\varphi & \mu\mu'\cos\Delta\varphi & \mu\sin\Delta\varphi & 0 \\ -\mu'\sin\Delta\varphi & -\mu'\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\Delta\varphi \end{bmatrix} \quad (81)$$

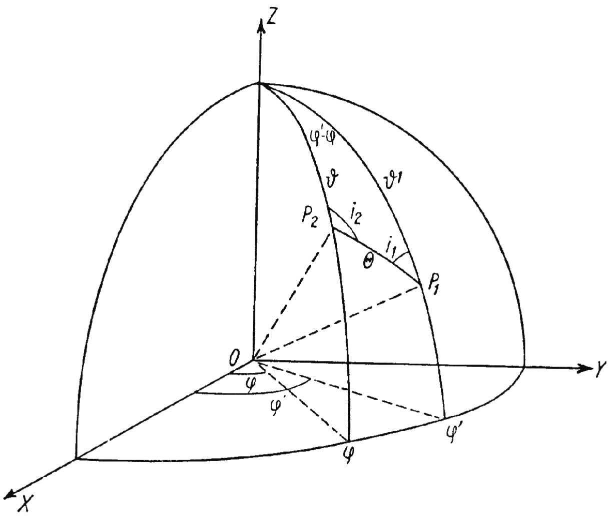


Abbildung 9: Skizze für die Bezugssyteme zur Berechnung der Phasenmatrix. Nach S. Chandrasekhar, 1950

$$\underline{P}^2 = \begin{bmatrix} (1-\mu^2)(1-\mu'^2)\cos 2\Delta\varphi & (\mu^2-1)(1+\mu'^2)\cos 2\Delta\varphi & 2(\mu^2-1)\mu'\sin 2\Delta\varphi & 0 \\ (1+\mu^2)(\mu'^2-1)\cos 2\Delta\varphi & (1+\mu^2)(1+\mu'^2)\cos 2\Delta\varphi & 2(1+\mu^2)\mu'\sin 2\Delta\varphi & 0 \\ 2\mu(1-\mu'^2)\sin 2\Delta\varphi & -2\mu(1+\mu'^2)\sin 2\Delta\varphi & 4\mu\mu'\cos 2\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{82}$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' \tag{83}$$

Eine Verwendung dieser Phasenmatrix bei der numerischen Lösung der Transportgleichung würde extrem hohe Ansprüche an die Speicherkapazität des Rechners stellen. Es müßten pro Iterationsschritt $4N_xN_yN_zN_\vartheta N_\varphi$ Intensitäten gespeichert werden, da das Streuintegral

$$\underline{S}_{\mathrm{scat}}(\varphi,\mu) = \int \underline{P}(\varphi,\mu;\varphi'\mu')\underline{I}(\varphi',\mu')d\varphi' d\mu' \tag{84}$$

echt von den lokalen Winkeln abhängen würde. Eine Zerlegung $\underline{P}(\Omega,\Omega') = \sum_{i=0}^{n} \underline{A}^i(\Omega)B^i(\Omega')$ mit kleinem n wäre daher vorteilhaft.

Wir finden im Fall der Rayleighmatrix $n = 3$ und $\underline{B}^i(\Omega) = \underline{A}^{i^T}(\Omega)$. In dieser letzten Bedingung ist das Helmholtzprinzip der Umkehrbarkeit des Lichtweges, $\underline{P}(\Omega,\Omega') = \underline{P}^T(\Omega',\Omega)$ evident. Die Matrizen sind dann:

$$\underline{A}^0(\mu) = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} (1-3\mu^2) & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3(1-\mu^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6}\mu \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\underline{A}^1(\mu,\varphi) = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1-\mu^2}\begin{bmatrix} \mu\cos\varphi & 0 & -\mu\sin\varphi & 0 \\ \mu\cos\varphi & 0 & -\mu\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{86}$$

$$\underline{A}^2(\mu,\varphi) = \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{bmatrix} (1-\mu^2)\cos 2\varphi & 0 & (1-\mu^2)\sin 2\varphi & 0 \\ -(1+\mu^2)\cos 2\varphi & 0 & -(1+\mu^2)\sin 2\varphi & 0 \\ -2\mu\sin 2\varphi & 0 & 2\mu\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{87}$$

Entsprechend können wir drei gewichtete mittlere Intensitäten definieren.

$$\underline{J}^i = \int \underline{A}^{i^T}(\Omega')\underline{I}(\Omega')\frac{d\Omega'}{4\pi} \qquad i = 0, 2 \tag{88}$$

Wir reduzieren dadurch den Speicheraufwand auf $3 \cdot 4 \cdot N_x N_y N_z$, unabhängig von der Anzahl der Punkte, die verwendet werden, um den Winkelraum zu diskretisieren. Die Transportgleichung lautet dann:

$$\vec{n}\nabla_\tau \underline{I} = \eta \underline{I} - \underline{S} \tag{89}$$

$$\underline{S}(\Omega) = (1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{2}\underline{A}^i(\Omega)\underline{J}_i + \varepsilon\xi B\underline{1} \tag{90}$$

2.3 Matrixexponentiallösung

In einigen wenigen Fällen ist die exakte Lösung der Transportgleichung möglich. Zu diesen gehören räumlich eindimensionale Atmosphären, in denen die Streuung vernachlässigt werden kann. Dann haben wir nicht ein System von Integro-Differentialgleichungen vorliegen, sondern nur ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Transportgleichung hat dann die Form

$$\frac{d\underline{I}}{d\tau} = \underline{\eta}(\underline{I} - \underline{S}) \tag{91}$$

Sei nun $\underline{\eta}$ unabhängig von der optischen Tiefe τ, wobei $\tau = -\int \kappa_I ds$. Dann kann die formale Lösung von Gleichung (91) unter Verwendung der Matrixexponentialfunktion formuliert werden (Kincaid und Cheney, 1990).

$$\exp(\underline{\eta}) = \sum_{n=0}^{\infty}(\underline{\eta})^n/n! \tag{92}$$

$$\underline{I}(0) = \exp(-\underline{\eta}\tau)(\underline{I}(\tau) - \underline{\eta}\int_\tau^0 \exp(-\underline{\eta}s)\underline{S}(s)ds) \tag{93}$$

Landi Degl'Innocenti (1987) gibt eine explizite Form für die Matrixexponentialfunktion an. Allerdings verwendet er eine Zerlegung in eine Nichtstanddardbasis von komplexen 4×4 Matrizen. Aus einer Umformung seiner Ergebnisse ergibt sich eine Form, die eine suggestivere Schreibweise erlaubt.

$$\exp(\underline{\eta}\tau) = \sum_{i=0}^{3} c_i(\tau)\underline{M}^i \tag{94}$$

$$
\begin{aligned}
\underline{M} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & 0 & -\rho_r & \rho_w \sin(2\vartheta) \\ \eta_U & \rho_r & 0 & -\rho_w \cos(2\vartheta) \\ \eta_V & -\rho_w \sin(2\vartheta) & \rho_w \cos(2\vartheta) & 0 \end{bmatrix} &(95)\\
&= \eta - \eta_I \underline{E} &(96)\\
\underline{M}^0 &= \underline{E} &(97)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\underline{E}$ die vierdimensionale Einheitsmatrix. Die Koeffizienten ergeben sich zu:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{\exp(\eta_I \tau)}{x^2 - y^2} \left(x^2 \cosh(y\tau) - y^2 \cosh(x\tau) \right) &(98)\\
c_1 &= \frac{\exp(\eta_I \tau)}{x^2 - y^2} \left(\frac{x^2}{y} \sinh(y\tau) - \frac{y^2}{x} \sinh(x\tau) \right) &(99)\\
c_2 &= \frac{\exp(\eta_I \tau)}{x^2 - y^2} (\cosh(x\tau) - \cosh(y\tau)) &(100)\\
c_3 &= \frac{\exp(\eta_I \tau)}{x^2 - y^2} \left(\frac{1}{x} \sinh(x\tau) - \frac{1}{y} \sinh(y\tau) \right) &(101)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta_5^2 + \rho_3^2)} &(102)\\
y &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta_5^2 - \rho_3^2)} &(103)\\
\rho_3^2 &= \sqrt{\eta_5^2 + 4(\eta_Q \rho_w \cos(2\vartheta) + \eta_U \rho_w \sin(2\vartheta) + \eta_V \rho_r)^2} &(104)\\
\eta_5 &= \sqrt{(\eta_Q^2 + \eta_U^2 + \eta_V^2 - \rho_r^2 - \rho_w^2)}. &(105)
\end{aligned}
$$

Man erhält also eine Abschwächung mit $\exp(-\eta_I \tau)$ in allen Stokeskomponenten und allen Termen der Lösung der Transportgleichung. Die Beschränkung der Summe auf vier Terme folgt bereits aus dem Satz von Cayley-Hamilton. Dieser besagt, daß eine Matrix eine Wurzel ihres eigenen charakteristischen Polynoms ist. Also läßt sich die höchste Potenz durch die niederen ausdrücken. Gleichung (106) gibt diese Beziehung an, die nützlich ist, um das Ergebnis einer Matrixmultiplikation wieder auf eine Summe der Form von Gleichung (94) zu bringen. Der große Vorteil dieser Formulierung liegt darin, daß die Matrixexponentialfunktion auf die Multiplikation von wenigen und einfachen Matrizen zurückgeführt wurde.

$$
\underline{M}^4 = (\eta_Q \rho_w \cos(2\vartheta) + \eta_U \rho_w \sin(2\vartheta) + \eta_V \rho_r)\underline{E} + z\underline{M}^2 \qquad (106)
$$

2.3.1 Unno-Lösung

Unno (1956) gab eine Lösung der Transportgleichung für den Fall an, daß die Quellfunktion linear mit der optischen Tiefe variiert, also

$$
\underline{S}(\tau) = (\alpha + \beta\tau)\underline{1} \qquad (107)
$$

Für konstante und nichtsinguläre Matrizen $\underline{\eta}$ und $\underline{\zeta}$ gelten die aus dem skalaren Fall bekannten Beziehungen

$$\exp(\underline{\eta}\tau)\exp(\underline{\zeta}\tau) = \exp(\underline{(\eta+\zeta)}\tau) \tag{108}$$

$$\int \exp(\underline{\eta}\tau)d\tau = \underline{\eta}^{-1}\exp\underline{\eta}\tau \tag{109}$$

$$\left[\underline{\eta}, \exp(\underline{\eta}\tau)\right] = \left[\underline{\eta}^{-1}, \exp(\underline{\eta}\tau)\right] = 0 \tag{110}$$

Dabei bezeichnen wir mit $[,]$ den Kommutator $[\underline{A}, \underline{B}] = \underline{AB} - \underline{BA}$. Daher folgt nach einmaliger partieller Integration durch eine Schicht der optischen Tiefe T:

$$\begin{aligned}
\underline{I}(0) &= \exp(-\underline{\eta}T)\underline{I}(T) - \exp(-\underline{\eta}T)\left(\underline{S}(T) + \beta\underline{\eta}^{-1}\right)\underline{1} + \left(\underline{S}(0) + \underline{\eta}^{-1}\beta\right)\underline{1} && (111)\\
&= \underline{I}_{\text{Unno}}(0) + \exp(-\underline{\eta}T)\left(\underline{I}(T) - \underline{I}_{\text{Unno}}(T)\right) && (112)\\
\underline{I}_{\text{Unno}}(\tau) &= (\alpha + \beta\tau)\underline{1} + \beta\underline{\eta}^{-1}\underline{1} && (113)
\end{aligned}$$

Um die Lösung zu vervollständigen wird noch die Inverse von $\underline{\eta}$ benötigt. Für sie gilt eine ähnliche Darstellung wie für die Matrixexponentialfunktion. Wir finden:

$$\begin{aligned}
\underline{\eta}^{-1} &= \sum_{i=0}^{3} \frac{d_i}{D}\underline{M}^i && (114)\\
d_0 &= \eta_I(\eta_I^2 - \eta_5^2) && (115)\\
d_1 &= \eta_5^2 - \eta_I^2 && (116)\\
d_2 &= \eta_I && (117)\\
d_3 &= -1 && (118)\\
D &= \eta_I^2(\eta_I^2 - \eta_5^2) - (\eta_Q\rho_w\cos(2\vartheta) + \eta_U\rho_w\sin(2\vartheta) + \eta_V\rho_r)^2 && (119)\\
&= (\eta_I + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta_5^2 + \rho_3^2})(\eta_I - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta_5^2 + \rho_3^2}) && (120)\\
&\quad (\eta_I + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta_5^2 - \rho_3^2})(\eta_I - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta_5^2 - \rho_3^2}) && (121)
\end{aligned}$$

Dabei sind die vier Faktoren der letzten Gleichung die vier Eigenwerte von $\underline{\eta}$. An dieser Ableitung zeigt sich, daß die Verwendung der Matrixexponentialfunktion viel leichter ist als der von Unno selbst beschrittene Weg.

Ebenso leicht lassen sich Lösungen für andere Quellfunktionen angeben, die elementar integriert werden können. Wählt man etwa

$$\underline{S}(\tau) = \alpha\tau^n\underline{1} \tag{122}$$

ergibt sich nach elementarer Integration die Lösung der Strahlungstransportgleichung:

$$\underline{I}(\tau) = \exp(-\underline{\eta}(T-\tau))\underline{I}(T) + \alpha\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}\underline{\eta}^{-k}\left[\tau^{n-k} - T^{n-k}\exp(-\underline{\eta}(T-\tau))\right]\underline{1} \tag{123}$$

Die darin benötigten Potenzen von $\underline{\eta}^{-1}$ können leicht durch Multiplikation des Polynoms aus Gleichung (114) und unter Verwendung von Gleichung (106) berechnet werden. Diese

Lösung der eindimensionalen Transportgleichung kann dann in Algorithmen zur Lösung der dreidimensionalen Form mit Streuung verwendet werden.

Zur Verdeutlichung betrachten wir die Unno-Lösung für verschwindende magneto-optische Effekte. Wir setzen also überall $\rho_r = \rho_w = 0$. Damit ergeben sich sofort:

$$\begin{aligned}
\eta_5 &= \sqrt{\eta_Q^2 + \eta_U^2 + \eta_V^2} && (124)\\
\rho_3 &= \eta_5 && (125)\\
x &= \eta_5 && (126)\\
y &= 0 && (127)\\
D &= \eta_I^2(\eta_I^2 - \eta_5^2) && (128)\\
\underline{M} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & 0 & 0 & 0 \\ \eta_U & 0 & 0 & 0 \\ \eta_V & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} && (129)
\end{aligned}$$

Wir führen nun eine Blockmatrixnotation ein, die die Polarisationskomponenten von der Intensität trennt. Sei desweiteren $\vec{\eta}^T = [\eta_Q, \eta_U, \eta_V]$. Dann lassen sich die Potenzen von $\underline{M}$ sehr schnell berechnen.

$$\begin{aligned}
\underline{M} &= \begin{bmatrix} 0 & \vec{\eta}^T \\ \vec{\eta} & 0 \end{bmatrix} && (130)\\
\underline{M}^2 &= \begin{bmatrix} \vec{\eta}^T\vec{\eta} & 0 \\ 0 & \vec{\eta}\vec{\eta}^T \end{bmatrix} && (131)\\
\underline{M}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & (\vec{\eta}^T\vec{\eta})\vec{\eta}^T \\ (\vec{\eta}^T\vec{\eta})\vec{\eta} & 0 \end{bmatrix} = \eta_5^2\underline{M} && (132)\\
\underline{\eta}^{-1} &= \begin{bmatrix} \eta_I^2 & -\eta_I\vec{\eta}^T \\ -\eta_I\vec{\eta} & ((\eta_I^2 - \eta_5^2)\mathbf{E} + \vec{\eta}\vec{\eta}^T) \end{bmatrix} \frac{\eta_I}{D} && (133)\\
&= \begin{bmatrix} \eta_I^2 & -\eta_Q\eta_I & -\eta_U\eta_I & -\eta_V\eta_I \\ -\eta_Q\eta_I & (\eta_I^2 - \eta_U^2 - \eta_V^2) & \eta_u\eta_V & \eta_Q\eta_V \\ -\eta_U\eta_I & \eta_Q\eta_U & (\eta_I^2 - \eta_Q^2 - \eta_V^2) & \eta_U\eta_V \\ -\eta_V\eta_I & \eta_Q\eta_V & \eta_U\eta_V & (\eta_I^2 - \eta_Q^2 - \eta_U^2) \end{bmatrix} \frac{\eta_I}{D} && (134)
\end{aligned}$$

Man sieht, daß sich in diesem Fall sogar die dritte Potenz von $\underline{M}$ noch durch $\underline{M}$ selbst ausdrücken läßt, wodurch die Berechnung der Inversen extrem einfach wird. Ebenso schnell läßt sich die Matixeponentialfunktion angeben. Nur muß man bei der Auswertung der Koeffizienten c_i den Grenzübergang

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sinh(y\tau)}{y} = \tau \qquad (135)$$

berücksichtigen. Dann ergeben sich die Koeffizienten zu

$$\begin{aligned}
c_0 &= \exp(\eta_I\tau) && (136)\\
c_1 &= \exp(\eta_I\tau)\tau && (137)
\end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{\exp(\eta_I\tau)}{\eta_5^2}(\cosh(\eta_5\tau) - 1) \tag{138}$$

$$c_3 = \frac{\exp(\eta_I\tau)}{\eta_5^2}\left(\frac{1}{\eta_5}\sinh(\eta_5\tau) - \tau\right) \tag{139}$$

Die Matrixexponentialfunktion hat dann die Gestalt

$$\underline{\exp}(\eta\tau) = \exp(\eta_I\tau)\left(\underline{E} + (\cosh(\eta_5\tau) - 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\eta}^T\vec{\eta}}{\eta_5^2} \end{bmatrix} + \frac{\sinh(\eta_5\tau)}{\eta_5}\underline{M}\right) \tag{140}$$

Die Unnolösung ergibt sich zu

$$\underline{I}(0) = \underline{I}_{\mathrm{Unno}}(0) + \exp(-\underline{\eta}T)\left(\underline{I}(T) - \underline{I}_{\mathrm{Unno}}(T)\right) \tag{141}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{Unno}}(T) = \left(\alpha + \beta T + \frac{\eta_I\beta}{\eta_I^2 - \eta_5^2}\right)\underline{1} - \frac{\beta}{\eta_I^2 - \eta_5^2}\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} \tag{142}$$

Die Berücksichtigung der Einstrahlung und der endlichen optischen Tiefe ist also auf vier triviale Matrix-Vektor Multiplikationen zurückgeführt.

2.3.2 Flußintegration

Wir betrachten nun einen Quader mit konstanter Absorptionsmatrix und einer Unno-Atmosphäre. Der Quader habe die Seitenlängen l_x, l_y, l_z. Dann lassen sich für jeden Punkt der Oberfläche die Stokesparameter mit Hilfe der Matrixexponentiallösung der Strahlungstransportgleichung sofort angeben. Da die austretende Strahlung nur noch von der zurückgelegten Strecke T innerhalb des Quaders und der Blickrichtung $\vec{n}$ abhängt, kann man den Fluß direkt berechnen. $\vec{n}$ hat wie üblich die Form:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \tag{143}$$

Aus Symmetriegründen beschränken wir uns auf den Fall, $n_x \geq 0$, $n_y \geq 0$ und $n_z \geq 0$. Zunächst betrachten wir den Beitrag der $z = l_z$ Ebene zum Gesamtfluß. Abb. (10) auf Seite (39) zeigt eine Skizze des Quaders. In Abhängigkeit von den Austrittskoordinaten x, y auf der Oberfläche des Quaders, ergeben sich folgende Schnittpunkte mit der $(x = 0)$-Ebene

$$\vec{x}_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ y - \frac{n_y}{n_x}x \\ l_z - \frac{n_z}{n_x}x \end{bmatrix}, \tag{144}$$

der $(y = 0)$-Ebene

$$\vec{x}_{y=0} = \begin{bmatrix} x - \frac{n_x}{n_y}y \\ 0 \\ l_z - \frac{n_z}{n_y}y \end{bmatrix} \tag{145}$$

und der $(z=0)$-Ebene

$$\vec{x}_{z=0} = \begin{bmatrix} x - \frac{n_x}{n_z} l_z \\ y - \frac{n_y}{n_z} l_z \\ 0 \end{bmatrix} \tag{146}$$

Die Strecke, die der Strahl innerhalb des Quaders zurücklegt ergibt sich dann jeweils zu $T_x = \frac{x}{n_x}$, $T_y = \frac{y}{n_y}$ und $T_z = \frac{l_z}{n_z}$. Um die Übersicht zu bewahren diskutieren wir nur den Beitrag von der $(x=0)$-Ebene, der Beitrag der $(y=0)$-Ebene ergibt sich dann aus Symmetrieüberlegungen. Der Beitrag der gegenüberliegenden $(z=0)$-Ebene ist trivial. Da die Integrationsgrenzen von der Blickrichtung abhängen, müssen vier Fälle unterschieden werdenr:.

$(\frac{l_x}{n_x} \geq \frac{l_y}{n_y}) \wedge (\frac{l_z}{n_z} \leq \frac{l_y}{n_y})$: Der Beitrag zum Fluß ist in diesem Fall

$$\int_0^{\frac{l_z}{n_z} n_x} \int_{\frac{x}{n_x} n_y}^{l_y} \underline{I}(\frac{x}{n_x}) dx dy = n_x n_y \int_0^{\frac{l_z}{n_z}} (\frac{l_y}{n_y} - z) \underline{I}(z) dz \tag{147}$$

$(\frac{l_x}{n_x} \geq \frac{l_y}{n_y}) \wedge (\frac{l_z}{n_z} \geq \frac{l_y}{n_y})$: Der Beitrag zum Fluß ist in diesem Fall

$$\int_0^{\frac{l_y}{n_y} n_x} \int_{\frac{x}{n_x} n_y}^{l_y} \underline{I}(\frac{x}{n_x}) dx dy = n_x n_y \int_0^{\frac{l_y}{n_y}} (\frac{l_y}{n_y} - z) \underline{I}(z) dz \tag{148}$$

$(\frac{l_x}{n_x} \leq \frac{l_y}{n_y}) \wedge (\frac{l_z}{n_z} \leq \frac{l_y}{n_y})$: Der Beitrag zum Fluß ist in diesem Fall

$$\int_0^{\frac{l_z}{n_z} n_x} \int_{\frac{x}{n_x} n_y}^{l_y} \underline{I}(\frac{x}{n_x}) dx dy = n_x n_y \int_0^{\frac{l_z}{n_z}} (\frac{l_y}{n_y} - z) \underline{I}(z) dz \tag{149}$$

$(\frac{l_x}{n_x} \leq \frac{l_y}{n_y}) \wedge (\frac{l_z}{n_z} \geq \frac{l_y}{n_y})$: Der Beitrag zum Fluß ist in diesem Fall

$$\int_0^{l_x} \int_{\frac{x}{n_x} n_y}^{l_y} \underline{I}(\frac{x}{n_x}) dx dy = n_x n_y \int_0^{\frac{l_x}{n_x}} (\frac{l_y}{n_y} - z) \underline{I}(z) dz \tag{150}$$

Der Fluß durch die $(z = l_z)$-Ebene ergibt sich dann als Summe der Beiträge der drei möglichen Schnittebenen. Die Beiträge des Flusses durch die $(y = l_y)$ und die $(x = l_x)$-Ebenen lassen sich durch einfache Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems erhalten, so daß man schließlich für das Integral über die sichtbare Oberfläche folgende Form erhält.

$$\begin{aligned}
\underline{F}(\vec{n}) &= n_x n_y n_z \int_0^{\min(\frac{l_x}{n_x}, \frac{l_y}{n_y}, \frac{l_z}{n_z})} 2(\frac{l_x}{n_x} + \frac{l_y}{n_y} + \frac{l_z}{n_z} - 3z) \underline{I}(z) dz \underline{L} && (151) \\
\underline{L} &= n_x n_y n_z (\frac{l_x}{n_x} - \frac{l_z}{n_z})(\frac{l_y}{n_y} - \frac{l_z}{n_z}) \Theta(\frac{l_x}{n_x} - \frac{l_z}{n_z}) \Theta(\frac{l_y}{n_y} - \frac{l_z}{n_z}) \underline{I}(\frac{l_z}{n_z}) && (152) \\
&+ n_x n_y n_z (\frac{l_x}{n_x} - \frac{l_y}{n_y})(\frac{l_z}{n_z} - \frac{l_y}{n_y}) \Theta(\frac{l_x}{n_x} - \frac{l_y}{n_y}) \Theta(\frac{l_z}{n_z} - \frac{l_y}{n_y}) \underline{I}(\frac{l_y}{n_y}) && (153) \\
&+ n_x n_y n_z (\frac{l_y}{n_y} - \frac{l_x}{n_x})(\frac{l_z}{n_z} - \frac{l_x}{n_x}) \Theta(\frac{l_y}{n_y} - \frac{l_x}{n_x}) \Theta(\frac{l_z}{n_z} - \frac{l_x}{n_x}) \underline{I}(\frac{l_x}{n_x}) && (154)
\end{aligned}$$

Dabei ist Θ die Sprungfunktion, die den Wert 1 annimmt, falls ihr Argument größer als Null ist, und Null sonst.

Im Fall der Unno-Atmosphäre kann man die Integration elementar ausführen. Wir erinnern kurz daran, daß in unserem Fall die bekannten Integrationsregeln auch auf die Matrixexponentialfunktion angewendet werden könne. Man erhält dann:

$$
\begin{aligned}
\underline{F}(\vec{n}) &= n_x n_y n_z \left[(p-6z)\underline{H}(z) + 6\underline{K}(z)\right]_0^{\min(\frac{l_x}{n_x},\frac{l_y}{n_y},\frac{l_z}{n_z})} + \underline{L} && (155)\\
p &= 2(\frac{l_x}{n_x} + \frac{l_y}{n_y} + \frac{l_z}{n_z}) && (156)\\
\underline{H}(z) &= I_0 z \underline{1} + (I_0 + \beta z)\underline{\eta}^{-1}\exp(-\underline{\eta} z)\underline{1} + \beta\underline{\eta}^{-2}\exp(-\underline{\eta} z)\underline{1} && (157)\\
\underline{K}(z) &= \frac{I_0}{2} z^2 \underline{1} - (I_0 + \beta z)\underline{\eta}^{-2}\exp(-\underline{\eta} z)\underline{1} - 2\beta\underline{\eta}^{-3}\exp(-\underline{\eta} z)\underline{1} && (158)
\end{aligned}
$$

Im folgenden werden wir den Spezialfall einer konstanten Atmosphäre ohne magneto-optische Effekte benutzen, um die Genauigkeit unseres Verfahrens zu testen.

2.3.3 Inversionsansätze

Da man in der Astrophysik häufig an der Bestimmung der physikalischen Parameter eines beobachteten Objektes interessiert ist, versuchen wir im einfachen Fall der Unno-Atmosphäre das inverse Problem direkt anzugehen. Wir unterscheiden das inverse Quellproblem, bei dem die Koeffizientenmatrix als bekannt angenommen wird und die Quellfunktion bestimmt werden soll, und das *Remote-Sensing*-Problem, bei dem die Quellfunktion bekannt ist und die Absorptionskoeffizienten bestimmt werden sollen.

Im vorliegenden Fall ist das inverse Quellproblem trivial, da nach Voraussetzung die Quellfunktion linear angenommen wird. Nehmen wir also an, daß $\underline{\eta}, \underline{I}(0)$ und $\underline{I}(T)$ bekannt sind, läßt sich die Unno-Lösung in der folgenden Form angeben.

$$
\underline{I}(0) = \alpha \underbrace{\left(\underline{E} - \exp(-\underline{\eta}\tau)\underline{1}\right)}_{g} + \beta \underbrace{(\underline{\eta}^{-1} - \tau\exp(-\underline{\eta}\tau) - \exp(-\underline{\eta}\tau)\underline{\eta}^{-1})\underline{1}}_{f} \qquad (159)
$$

Die unbekannten Größen α und β hängen also linear von den bekannten ab.

Wir vernachlässigen nun wieder die magneto-optischen Effekte und betrachten den Fall ohne Einstrahlung. Dann kann man die Funktionen $\underline{f}$ und $\underline{g}$ auswerten.

$$
\begin{aligned}
\underline{g} &= \tilde{g}_I \underline{1} + \tilde{g}_p \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} && (160)\\
\underline{f} &= \tilde{f}_I \underline{1} + \tilde{f}_p \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} && (161)\\
\tilde{g}_I &= 1 - a_1 && (162)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_p &= -a_2 && (163)\\
\tilde{f}_I &= \frac{\eta_I}{\eta_I^2-\eta_5^2}a_1 - \tau - \frac{\eta_5^2}{\eta_I^2-\eta_5^2}a_2 && (164)\\
\tilde{f}_p &= (\tau\frac{\eta_I}{\eta_I^2-z})a_2 - \frac{a_1}{\eta_I^2-z} && (165)\\
a_1(\tau) &= c_0(\tau)+zc_2(\tau) = \exp(\eta_I\tau)\cosh(\eta_5\tau) && (166)\\
a_2(\tau) &= c_1(\tau)+zc_3(\tau) = \frac{1}{\sqrt{z}}\exp(\eta_I\tau)\sinh(\eta_5\tau) && (167)
\end{aligned}
$$

Man sieht, daß Q, U und V nicht unabhängig sind. Daher benutzen wir den Polarisationsgrad $p = Q^2+U^2+V^2 = (-\tilde{g}_p\alpha - \tilde{f}_p\beta)\eta_5$ und die Intensität I. Also ergeben sich die Parameter der Quellfunktion durch Lösen des linearen Systems:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I(0)\\ p(0)\end{bmatrix} &= A\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} && (168)\\
A &= \begin{bmatrix}\tilde{g}_I & \tilde{f}_I\\ -\tilde{g}_p & -\tilde{f}_p\end{bmatrix} && (169)
\end{aligned}
$$

Schwieriger zu lösen ist das *Remote Sensing*-Problem. Für eine bekannte Quellfunktion, bekannte optische Tiefe τ des Mediums und gemessene austretende Stokesvektoren $\underline{I}(\tau)$ wollen wir die Materialparameter $\underline{\eta}$ des Mediums bestimmen. Wir gehen wieder von der Unno-Lösung aus, nehmen aber zusätzlich eine konstante Quellfunktion an, d.h. wir setzen $\beta = 0$. Mit der Notation des vorangegangenen Absatzes nimmt die Unno-Lösung die Form an:

$$
\begin{bmatrix} I(0)\\ \vec{Q}(0)\end{bmatrix} = \alpha(\tilde{g}_I\underline{1} + \tilde{g}_p\begin{bmatrix}0\\ \vec{\eta}\end{bmatrix}) \qquad (170)
$$

Einsetzen von $\tilde{g}_I$ und $\tilde{g}_p$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
I &= \alpha(1-\exp(-\eta_I\tau)(1+\cosh(\eta_5\tau))) && (171)\\
p &= \alpha\exp(-\eta_I\tau)\sinh(\eta_5\tau) && (172)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen lassen sich nach η_5 auflösen, da τ als gegeben angenommen wird.

$$
w \equiv \exp\eta_5\tau = \frac{1}{2(I-\alpha+p)}(-p+\sqrt{4(I-\alpha)^2-3p^2}) \qquad (173)
$$

Dann findet man sofort die Absorptionskoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
\eta_I &= -\frac{1}{\tau}\ln(\frac{2pw}{\alpha(w^2-1)}) && (174)\\
\vec{\eta} &= \begin{bmatrix}Q\\ U\\ V\end{bmatrix}\frac{\eta_5}{p\tau} && (175)
\end{aligned}
$$

Lösen wir uns nun von der Annahme der konstanten Atmosphäre und erlauben eine lineare Variation der Quellfunktion, erhalten wir zwei entkoppelte transzendente Gleichungen, die numerisch nach den Variablen e_+ und e_- aufgelöst werden müssen.

$$(I(0) - \alpha - \beta\tau + p)\exp(-e_+\tau) = \frac{\beta}{e_+}\exp(-e_+\tau) + I(\tau) - \alpha - e_+\beta \tag{176}$$

$$(I(0) - \alpha - \beta\tau - p)\exp(-e_-\tau) = \frac{\beta}{e_-}\exp(-e_-\tau) + I(\tau) - \alpha - e_-\beta \tag{177}$$

$$e_+ = \eta_I + \eta_5 \tag{178}$$

$$e_- = \eta_I - \eta_5 \tag{179}$$

Wir nehmen nun an, daß wir I und p für zwei verschiedene Frequenzen gemessen haben, die wir durch numerische Indizes $1, 2$ angeben. Ferner sei die Abhängigkeit der Absorptionskoeffizienten von der Frequenz ν in Produktform gegeben.

$$\eta_{2,k} = h_k \eta_{1,k} \quad \text{für} \quad k \in (I, Q, U, V) \tag{180}$$

Dann ist auch die ν-Abhängigkeit von τ und w gegeben. Damit hat man vier unabhängige Meßdaten zur Verfügung, die man z.B. zur Bestimmung der Quellfunktion und der optischen Tiefe verwenden kann. Dazu betrachten wir Gleichung (174) und bilden das Verhältnis der beiden Frequenzen. Wir erhalten dann eine Bestimmungsgleichung für w_1, wobei man beachten muß, das die Frequenzabhängigkeit von w_2 und damit auch implizit die Abhängigkeit von w_1 ebenfalls bekannt ist.

$$\frac{\eta_{2,Q}}{\eta_{1,Q}} = h_Q = \frac{p_1}{p_2}\frac{Q_2}{Q_1}\frac{1}{h_I}\frac{\ln(w_2)}{\ln(w_1)} \tag{181}$$

Mit diesem w_1 können nun die $\eta_{i,k}$ aus Gleichung (174) berechnet werden. Schließlich ergeben sich die Parameter der Quellfunktion und ihre ν-Abhängigkeit zu:

$$\alpha_i = I_i + 2p_i(\frac{w_i^2}{w_i^2 - 1}) \tag{182}$$

$$\tau_2 = \ln(w_2)\frac{U_2}{p_2}\frac{1}{h_U \eta_{1,U}} \tag{183}$$

3 Numerische Lösung der Strahlungstransportgleichung

3.1 Definitionen und Überblick

Bereits die Transportgleichung für die skalare spezifische Intensität ist eine Integro-Differentialgleichung in sechs Dimensionen (, wenn man die Zeit als Parameter betrachtet). Die jeweils vierdimensionalen Orts- und Impulsräume werden gewöhnlich durch die Zeit und drei räumliche Koordinaten, eine Frequenz und zwei Winkel wiedergegeben. Dazu tritt nun noch der Freiheitsgrad der Polarisation. Dadurch wird ein weiteres Koordinatensystem eingeführt und alle Koeffizienten werden durch 4×4-Matrizen ersetzt, wodurch auch die Reihenfolge von Operationen wegen des nichtkommutativen Charakters der Matrixmultiplikation eine Rolle spielt.

Das vorangegangene Kapitel hat gezeigt, daß bereits die Formulierung der zu lösenden Gleichung kein triviales Problem ist. Kuščer und Ribarič (1959) führten die Matrixformulierung des Problems ein. Dennoch blieben viele Probleme offen. Erst durch die Arbeiten von Landi Degl'Innocenti und Landi degl'Innocenti (1982), Jefferies et al (1989) und Landi Degl'Innocenti (1987) konnte eine quantenelektrodynamische Basis für die Transportgleichung gefunden werden.

Wie bei der Herleitung der Gleichung so gibt es auch bei der Lösung eine Vielzahl von Ansätzen. Abgesehen von der in Abschnitt (2.3) vorgestellten Unno-Lösung (Unno, 1956), gibt es eine Reihe von Verfahren, die sich an Methoden des unpolarisierten Strahlungstransportes orientieren.

1. Es gibt analytische Lösungen der Transportgleichung mit Polarisation für planparallele Medien. Dabei wird stets die azimutale Abhängigkeit durch eine Fouriertransformation abgespalten. Domke (1975a, 1975b) verwendet die Methode der Zerlegung in eine Basis von singulären Eigenfunktionen (Case und Zweifel, 1967; Pahor und Zweifel, 1969). Die Lösung wird dann mit geeigneten Skalarprodukten in dieser Basis angegeben. Als spezielle Anwendung des Verfahrens erhält man die Greensfunktionen einer unendlichen Schicht. Diese Formulierung ist für die Lösung der skalaren Transportgleichung bereits seit einiger Zeit bekannt (Cannon, 1973; Gibbs und Seto, 1978).

   Ein anderer Ansatz ist die Zerlegung der Lösung in eine Basis von verallgemeinerten Kugelflächenfunktionen (Siewert, 1981; Siewert und Thomas, 1990, 1991; Siewert und McCormick, 1993). Bei dieser Methode ist noch ein erheblicher Rechenaufwand bei der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten aus den Randdaten verborgen. Andererseits gibt es bereits Ansätze zu einer analytischen Inversion dieser Lösung (Siewert 1993).

   Hovenier (1987) verwendet die Reflektions- und Transmissionsmatrizen, die er zu einer Exitmatrix zusammenfaßt. Die Lösung für eine homogene, planparallele Schicht wird auch in dieser Technik durch die X- und Y-Funktionen von Chandrasekhar ausgedrückt.

2. Die ältesten numerischen Techniken beziehen sich auf eindimensionale, meist sphärisch symmetrische Konfigurationen. Cassinelli und Hummer (1971) lösen die Transportgleichung in sphärischer Symmetrie für Thomsonstreuung. Wie im skalaren Fall bei Hummer und Rybicki (1971) wird die Gleichung in die Feautrierform überführt und mit einer Iteration bezüglich des Eddingtonfaktors $f = \frac{K}{J}$ gelöst. Ein Nachteil dieser Methode ist, daß sie nur sehr schwer in mehreren Dimensionen formuliert werden kann.

   Peraiah (1975) betrachtet in sphärischer Symmetrie ein homogenes Medium mit Rayleighstreuung. Er verwendet den *fast doubling* Algorithmus um die mit finiten Differenzen diskretisierte Gleichung zu lösen. In den beiden vorangegangenen Verfahren werden aus Symmetriegründen nur die I und Q-Komponente des Stokesvektors verwendet. Als Konsequenz vereinfacht sich die Rayleigh-Phasenmatrix ganz erheblich.

   Bosma (1993) betrachtet sphärische Atmosphären der Planeten. Da der gesamte Stokesvektor verwendet wird, muß auch die azimutale Abhängigkeit vollständig berücksichtigt werden. Bosma führt eine Fouriertransformation durch und findet, daß im Fall der Rayleighstreuung nur die ersten beiden geraden Komponenten zur Lösung beitragen. Die beiden erhaltenen Gleichungen werden unterschiedlich gelöst. Die Gleichung zu $m = 0$ kann mit der Momentenmethode behandelt werden. Die Lösung der Transportgleichung zu $m = 2$ wird durch Iteration des Streuterms erhalten.

3. Eine weitere Klasse von Lösungsansätzen lassen sich als Monte-Carlo-Methoden zusammenfassen. Höflich (1991) verwendet diese Technik, um die Polarisation der Supernovae zu beschreiben, Voshchinnikov und Karjukin (1994) behandeln damit circumstellare Hüllen. Die Vorteile dieses Verfahrens sind, daß die relevanten Prozesse immer lokal in einem günstigen Koordinatensystem eingebunden und auch komplexe Randbedingungen leicht verwendet werden können. Desweiteren ist die Methode leicht auch für mehrdimensionale Modelle zu verwenden. Die Nachteile bestehen in der hohen Teilchenzahl N, die zum Erreichen eines sinnvollen Signal-zu-Rausch-Verhältnisses benötigt wird, und in der bekannten schwachen N Abhängigkeit des SNR. Zwar kann man sich von der $\sqrt{N}$ Abhängigkeit lösen, aber selbst das theoretisch erreichbare lineare Wachstum wird selten erzielt.

4. Eine Methode, die für die Behandlung der Strahlungstransportgleichung in bewegten Medien entwickelt wurde, ist das Sobolev oder *escape-probability*-Verfahren (Sobolev, 1947; Rybicki und Hummer, 1983). Dabei wird für ein Photon lokal die Entweichwahrscheinlichkeit aus dem Gebiet, in dem die Transportgleichung gelöst wird, berechnet. Dadurch wird auch die Umgebung des Photons berücksichtigt. Jeffery (1989) verallgemeinert diese Methode, so daß sie auch auf den Polarisationszustand der Photonen eingeht. Diese Sobolev-P-Methode (P um die Behandlung der Polarisation anzuzeigen) wendet er in Axialsymmetrie auf das Kontinuum von SN1987A

an. Jeffery (1990) verallgemeinert dieses Verfahren auf den dreidimensionalen Fall. Zwar zeigt Jeffery, daß in vielen Fällen gute quantitative Lösungen mit der Sobolev-P Methode erhalten werden können, dennoch handelt es sich aber um ein approximatives Verfahren. Daher müssen auch immer echte, wenn auch numerische Lösungen der Transportgleichung gesucht werden.

5. Stenholm und Stenflo (1978) verwenden eine Runge-Kutta-Methode zur Diskretisierung der Strahlungstransportgleichung. Die Quellfunktion für Resonanzlinienstreuung (Stenflo, 1976; Stenflo und Stenholm, 1976) wird mit Hilfe der *core-saturation*-Methode iteriert. In Stenholm und Stenflo (1978) werden für die Untersuchung solarer, magnetischer Flußröhren etwa 2800 Gitterpunkte für die Diskretisierung von Orts- und Impulsraum verwendet.

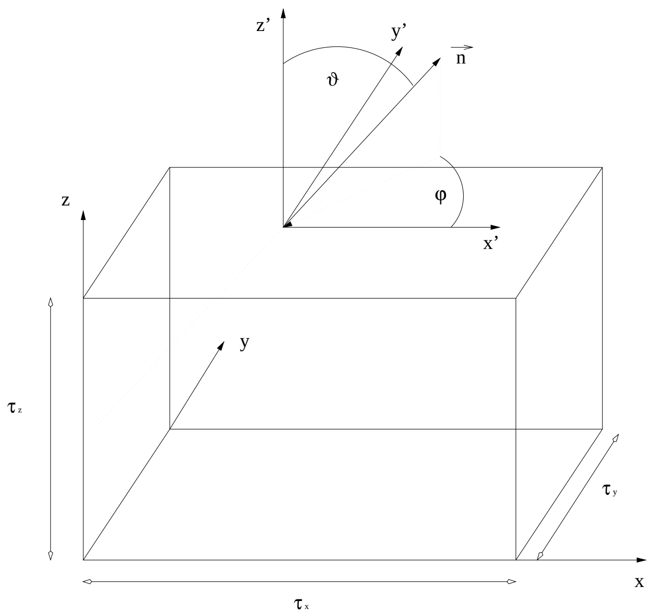


Abbildung 10: Quader, in dem die Strahlungstransportgleichung gelöst wird. Die Beobachtungsrichtung ist $\vec{n}$. Das ungestrichene Koordinatensystem kennzeichnet den Ortsraum, das gestrichene den Impulsraum, das System der Polarisation ist nicht dargestellt.

Die genannten Arbeiten bilden die Grundlage für unsere Fragestellung. Keine dieser Techniken ist in der Lage die volle dreidimensionale Strahlungstransportgleichung mit Polarisation zu lösen. Insbesondere werden wir keine Annahmen über die Symmetrie des Gebietes, auf dem die Gleichung zu integrieren ist machen.

Wir haben in Abschnitt (2.2.1) die Transportgleichung für polarisierte Strahlung in drei Raumdimensionen hergeleitet. Zur vollständigen Spezifikation des Problems gehören nun noch die Randbedingungen und das Gebiet, auf dem gerechnet wird. Da die vorliegende Arbeit einen Überblick über die Phänomene der Polarisation geben will, wählen wir beides so einfach wie möglich.

Wir betrachten ein quaderförmiges Gebiet der Dimensionen l_x, l_y, l_z (s. Abb. 10) ohne

Einstrahlung an den Außenflächen. Aus Symmetriegründen können wir uns auf die Fälle $l_x \leq l_y \leq l_z$ beschränken. Zur Lösung legen wir in unser Gebiet ein cartesisches Gitter mit $N_x \times N_y \times N_z$ Punkten. Der Winkelraum wird durch eine äquidistante Teilung von φ und $\mu = \cos\vartheta$ diskretisiert.

Um den Einfluß der Form des Gebietes von der absoluten Größe zu trennen, führen wir die Parameter τ_z, b_1 und b_2 ein.

$$\tau_z = \int_0^{l_z} (\kappa_I + \sigma_0) dz \tag{184}$$

$$b_1 = \frac{\tau_x}{\tau_z} \tag{185}$$

$$b_2 = \frac{\tau_y}{\tau_z} \tag{186}$$

Im folgenden werden wir nur Atmosphären mit konstantem κ_I betrachten, so daß diese Parameter das Gebiet eindeutig beschreiben. Die Freiheit $\kappa_Q, \kappa_U, \kappa_V$ zu wählen, werden wir im nächsten Abschnitt benutzen, um auf unterschiedliche Symmetrien des Gebietes einzugehen. Demnach ergeben sich als variable Modellparameter der Streuparameter ε, die Geometriegrößen τ_z, b_1, b_2 und die Koeffizienten $\kappa_Q, \kappa_U, \kappa_V$.

3.2 Symmetrien

Falls in einem Gebiet Symmetrien vorhanden sind, lassen sich diese häufig zur Vereinfachung der Lösungsstrategie heranziehen. Da wir an Akkretionsscheiben interessiert sind, wird insbesondere die Zylindersymmetrie eine Rolle spielen. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, die Winkel Φ, Θ, die den Ortsraum in Polarkoordinaten charakterisieren, von den lokalen Winkeln φ, ϑ, die den Impulsraum beschreiben, auseinander zu halten.

3.2.1 Zylindersymmetrie

Zylindersymmetrie heißt, daß das Strahlungsfeld $\underline{I}(x, y, z, \vartheta, \varphi) = \underline{I}(r, \Theta, \Phi, \vartheta, \varphi)$ unabhängig von Φ ist. Also

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \underline{I}(r, \Theta, \Phi, \vartheta, \varphi) = 0 \tag{187}$$

aber

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{I}(r, \Theta, \Phi, \vartheta, \varphi) \neq 0 \tag{188}$$

Abb. (11) zeigt einen beliebigen Punkt auf der Oberfläche einer Scheibe. Offensichtlich sind bereits die Weglängen, die Strahlen mit unterschiedlichem φ innerhalb der Scheibe zurücklegen, abhängig von φ, selbst wenn die Scheibe, d.h die Absorptionskoeffizienten, zylindersymmetrisch sind. Adam (1989) nutzt im unpolarisierten Fall diese Symmetrie, um das zu beschreibende Gebiet zu verkleinern. Er zeigt, daß es reicht, einen Oktanten und

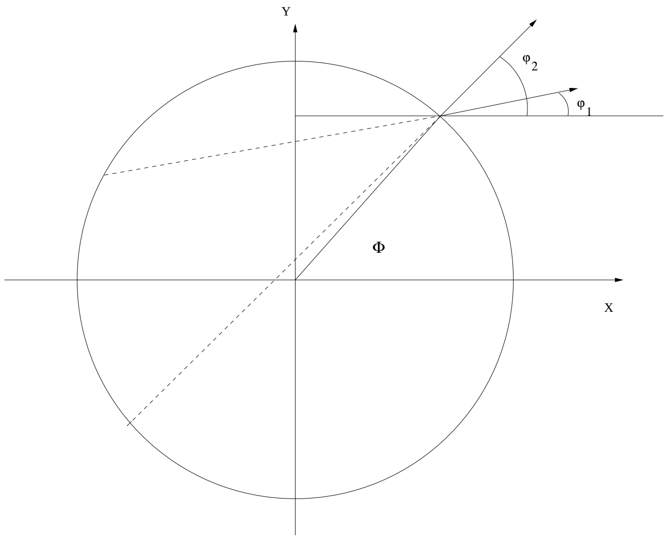


Abbildung 11: Schnitt durch einen Zylinder. Die Wege, die ein Strahl, der unter einem Winkel von φ_1 bzw. φ_2 ausfällt, innerhalb des Zylinders zurücklegt, sind offenbar abhängig vom Austrittswinkel.

den kompletten 4π Winkelraum zu behandeln. Dann lassen sich die Randbedingungen an den inneren Flächen des Oktanten durch Rotation aus bereits bekannten Daten erhalten. Desweiteren verwendet Adam zusätzlich die Spiegelsymmetrie in der xy-Ebene.

Betrachtet man nun die Polarisationseigenschaften des Lichtes, muß auch das Polarisationskoordinatensystem mittransformiert werden. In Abb. (12) muß der am Punkt 1 in Richtung $\vec{n}_1$ austretende Stokesvektor gleich dem am Punkt 2 in Richtung $\vec{n}_2$ austretenden sein. Das Bezugssystem für die Polarisationsgrößen steht dabei jeweils senkrecht auf $\vec{n}_1$ bzw. $\vec{n}_2$. Also

$$
\begin{aligned}
\underline{I}'(r, \Phi_2, \Theta, \varphi_2, \vartheta) &= \underline{I}(r, \Phi_1, \Theta, \varphi_1, \vartheta) && (189)\\
\Phi_1 - \varphi_1 &= \Phi_2 - \varphi_2 && (190)
\end{aligned}
$$

Analog müssen alle Polarisationsgrößen transformiert werden. Insbesondere die Absorptions- und die Phasenmatrix müssen bei der Drehung wie Tensoren zweiter Stufe gehandhabt werden. Im folgenden wählen wir $\Phi_1 = 0$ und unterdrücken die Argumente r, Θ, ϑ der Extinktionsmatrix. Dann ist $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \Phi_2$. Also

$$
\underline{\eta}(\Phi_2, \varphi_2) = \underline{T}_{\text{rot}}(\Delta\Phi)\underline{\eta}(\Phi_2, \varphi_1)\underline{T}^{-1}_{\text{rot}}(\Delta\Phi) \tag{191}
$$

Damit nun auch die Symmetriebedingung (189) analog für die Absorptionsmatrix gilt, muß die räumliche Abhängigkeit gerade die Polarisationstransformation aufheben. Wir benötigen also:

$$
\underline{\eta}(\Phi_2, \varphi_1) = \underline{T}^{-1}_{\text{rot}}(\Delta\Phi)\underline{\eta}(0, \varphi_1)\underline{T}_{\text{rot}}(\Delta\Phi) \tag{192}
$$

Die Absorptionsmatrix kann also nur an einem Ort vorgegeben werden und ergibt sich für alle anderen aus der angegebenen Transformation. Die explizite Anwendung der Drehung

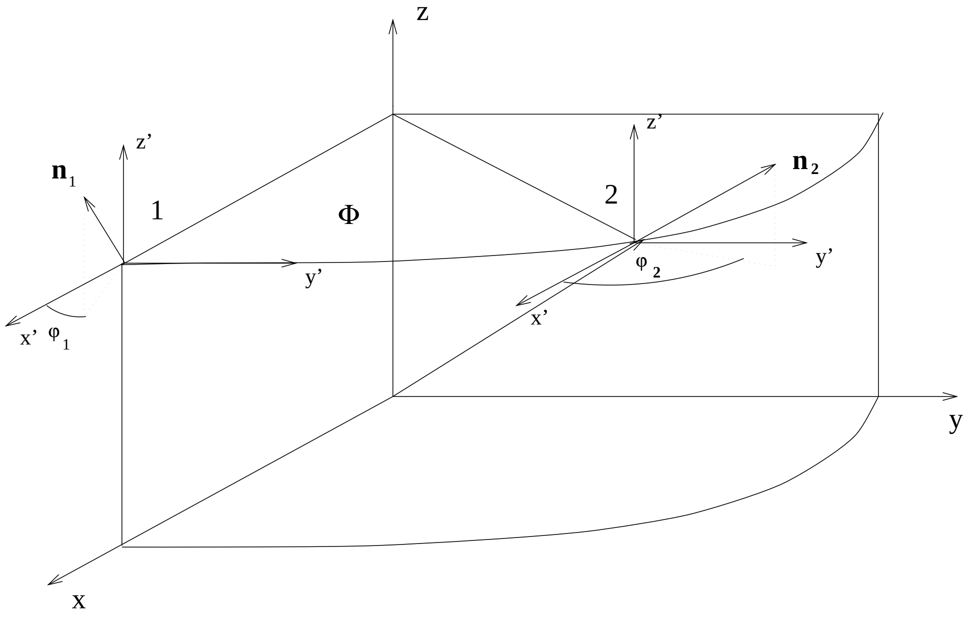


Abbildung 12: Skizze eines Zylinders

auf $\underline{\eta}$ ergibt

$$\eta_Q = \eta_Q^0 \cos(2\Delta\Phi) + \eta_U^0 \sin(2\Delta\Phi) \tag{193}$$

$$\eta_U = \eta_U^0 \cos(2\Delta\Phi) - \eta_Q^0 \sin(2\Delta\Phi) \tag{194}$$

Diese Überlegungen bedeuten insbesondere, daß die einzige global konstante und zylindersymmetrische Absorptionsmatrix die Einheitsmatrix ist.

3.2.2 Spiegelsymmetrie

Gewöhlich kann man von Akkretionsscheiben eine noch höhere Symmetrie verlangen, nämlich zusätzlich die Invarianz bezüglich einer Spiegelung an der xy-Ebene. In Abschnitt (2) wurde die Transformationsmatrix für Spiegelungen angegeben. Da ein Rechts- in ein Linkssystem überführt wird ändern sich nur die Vorzeichen der U und der V Komponenten.

$$\underline{I}(r, \Phi, -\Theta, \varphi, -\vartheta) = \underline{I}(r, \Phi, \Theta, \varphi, \vartheta) \tag{195}$$

Nach völlig analogen Überlegungen wie im Fall der Rotationssymmetrie erhalten wir als Bedingung an die Absorptionsmatrix:

$$\underline{\eta}(r, \Phi, -\Theta, \varphi, \vartheta) = \underline{T}_{\mathrm{ref}}^{-1} \underline{\eta}(r, \Phi, \Theta, \varphi, \vartheta) \underline{T}_{\mathrm{ref}} \tag{196}$$

Da hier $\underline{T}_{\mathrm{ref}}$ die Spiegelmatrix (28) ist, ergeben sich wieder Bedingungen an die Absorptionskoeffizienten.

$$\eta_U = -\eta_U^0 \tag{197}$$

$$\eta_V = -\eta_V^0 \tag{198}$$

Erst wenn beide Symmetrien gefordert werden, gibt es zu jedem Punkt auf der sichtbaren Oberfläche einer Scheibe einen Punkt mit gleich großer aber negativen U und V-Komponenten. In diesem Fall ist also im Fluß keine zirkuläre Komponente zu sehen.

3.3 Kurze Charakteristiken

Würde man die diskretisierte Strahlungstransportgleichung als großes lineares Gleichungssystem auffassen, würde man sich in einem Raum der Größe $N = 4 \cdot N_x N_y N_z N_\varphi N_\vartheta$ befinden. In einem typischen Fall hätten wir es dann mit $N = 41^3 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 4 \approx 7 \cdot 10^7$ Variablen zu tun. Bei doppelt genauer Zahlendarstellung wäre ein Speicher von ≈ 540 MB für jede Variable nötig. Da dies auch für moderne Maschinen eine sehr hohe Anforderung darstellt, behandeln wir den Differential- und den Integraloperator separat. Sei also nun

$$\underline{S} = (1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{2}\int_{S^2}\underline{A}_i\underline{A}_i^T\underline{I}\frac{d\Omega}{4\pi} + \varepsilon B\underline{\xi}\underline{1} \tag{199}$$

als bekannt angenommen. Die Charakteristik der Differentialgleichung

$$\vec{n}\vec{\nabla}_\tau\underline{I} = \underline{\eta}(\underline{I} - \underline{S}) \tag{200}$$

ist eine Gerade in Richtung $\vec{n}$. Dies spiegelt die Tatsache wieder, daß sich Licht entlang einer geraden Linie ausbreitet (solange man z.B. allgemein-relativistische Effekte vernachlässigen kann). Als affiner Parameter bietet sich die Weglänge s an. Die Differentialgleichung läßt sich dann in eine Integralform, die sog. formale Lösung, umschreiben.

$$\underline{I}(0) \;=\; \exp(-\underline{\eta}\tau)\underline{I}(\tau) + \underline{\eta}\int_\tau^0 \exp(-\underline{\eta}s)\underline{S}(s)ds \tag{201}$$

Dabei verwenden wir wieder die in Abschnitt 2.3 eingeführte Matrixexponentialfunktion. In den meisten Fällen sind aber $\underline{\eta}(s)$ und $\underline{S}(s)$ nicht analytisch gegeben oder haben eine nicht elementar integrierbare Form. Daher muß die Integration numerisch ausgeführt werden. Ein einfacher Ansatz wäre nun, für jeden Oberflächengitterpunkt und jeden Austrittswinkel die Gleichung durch das gesamte Gebiet hindurch entlang der Charakteristiken zu integrieren. Dieses Verfahren der *langen Charakteristiken* wird immer noch mit Erfolg angewandt (Hillier, 1994). Es hat aber den Nachteil, daß es wegen der vielen auftretenden Interpolationen sehr langsam ist.

Kunasz und Auer (1988) benutzen daher ein sog. *kurzes Charakteristiken*-Verfahren (SC-Verfahren). Der Ortsraum wird dabei in einem regelmäßigen Gitter diskretisiert. Möchte man in Abb. (13) die Intensität im Punkt P erhalten, integriert man entlang der Strecke $\overline{OP}$ der Charakteristik die Gleichung. Innerhalb dieser Zelle wird die Quellfunktion approximiert. Für viele Fälle, so auch in dieser Arbeit, ist eine lineare Approximation ausreichend. In anderen wird eine höhere Ordnung benötigt. Da die Quellfunktion aber als bekannt auf dem gesamten Gitter, also auch im Punkt Q angenommen wird, ist eine solche Approximation ebenfalls möglich. Der Anfangswert im Punkt O, der i.a. kein Gitterpunkt sein wird, kann durch Interpolation zwischen benachbarten Gitterpunkten erhalten

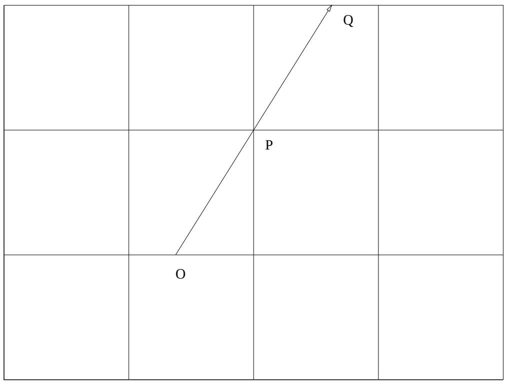


Abbildung 13: Skizze zum *short characteristics*-Verfahren in zwei Raumdimensionen. Berechnet wird der Stokesvektor im Punkt P. Da der Anfangswert am Punkt O im allgemeinen kein Gitterpunkt ist, muß er interpoliert werden.

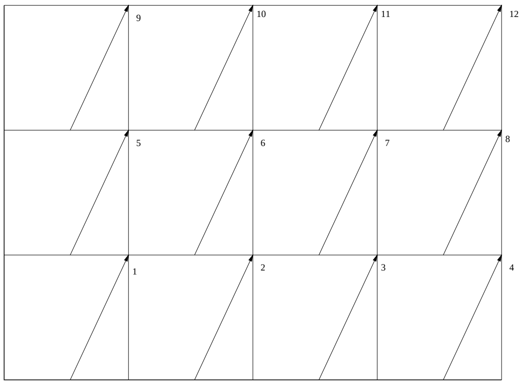


Abbildung 14: Rekursives Schema zur Lösung der Strahlungstransportgleichung auf einem cartesischen zweidimensionalen Gitter mit Hilfe des SC-Verfahrens. Die Punkte werden in der numerierten Reihenfolge abgearbeitet. Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ist offensichtlich.

werden. Dabei muß die Ordnung der Interpolation mit der der Approximation der Quellfunktion übereinstimmen. Sind die globalen Randwerte gegeben, läßt sich ein rekursives Schema (Stenholm et al., 1991) nach Abb. (14) angeben.

Sind alle Intensitäten bekannt, läßt sich ein neuer Näherungswert für die Quellfunktion durch einfache Quadratur angeben. Wir verwenden zur Berechnung der $\underline{J}_i = \int \underline{A}_i^T(\Omega)\underline{I}(\Omega)\frac{d\Omega}{4\pi}$ die Simpsonregel mit Stützstellen bei:

$$\varphi_k = \frac{2\pi}{N_\varphi}(k+\frac{1}{2}) \qquad (202)$$

$$\mu_l = \frac{2}{N_\vartheta}(l+\frac{1}{2}) \qquad (203)$$

Gewöhnlich wählen wir $N_\varphi = N_\vartheta = 16$, so daß der volle Raumwinkel durch 256 Stützstellen diskretisiert ist. Bereits 64 Winkel genügen, um ein qualitatives Bild der Lösung zu erhalten. Der Vorteil des SC-Verfahrens ist zum einen, daß für Quellfunktionen, die linear mit der optischen Tiefe variieren (Unno-Atmosphären), der Diskretisierungsfehler von der Größenordnung der Maschinengenauigkeit ist. Die Genauigkeit des Resultates wird dann lediglich durch den Interpolationsfehler bestimmt. Zum anderen bietet das Verfahren eine effektive Möglichkeit die $\underline{J}_i$ Iteration zu verbessern.

3.4 Iterationstechnik

Der zweite Schritt bei der Lösung der Strahlungstransportgleichung ist die Iteration der Quellfunktion. Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

1. Berechung der ersten formalen Lösung mit
$$\underline{S}^0 = \varepsilon B \underline{1} \tag{204}$$
2. Iterationsschritt
   (a) Lösung der Differentialgleichung bezüglich $\underline{I}^n(x, y, z, \varphi, \vartheta)$ mit $\underline{S}^{n-1}$
   (b) Berechnung der neuen Quellfunktion $\underline{S}^n$ bzw. der Größen $\underline{J}_i^n$
3. Ende des Prozesses bei Erreichen einer Abbruchbedingung. Unserer Erfahrung nach reicht es nicht aus, eine Genauigkeitsschwelle für die skalare mittlere Intensität zu fordern. Wir verwenden stets
$$\sum_{\text{Punkte}} \left(\frac{J_Q^n}{J_Q^{n-1}} - 1\right)^2 \leq 10^{-7} \varepsilon \tag{205}$$

Der Vorteil des Iterationsverfahrens liegt darin, daß im n-ten Iterationsschritt stets nur die drei Vektoren $\underline{J}_i^n(x, y, z)$ gespeichert werden müssen und nicht die $\underline{I}^n(x, y, z, \varphi, \vartheta)$ selbst. Dies ist nur möglich, da sich die Phasenmatrix nach Gleichung (85) zerlegen läßt. In der momentanen Implementation benötigt das Program etwa 100 MB Hauptspeicher, was heutzutage kein Problem darstellt. Hätte man nun den um einen Faktor $\frac{N_\varphi N_\vartheta}{3}$ höheren Speicherbedarf, also hier etwa 8.5 GB, könnte das Problem nicht auf diese Weise untersucht werden.

Die Berechnung der neuen $\underline{J}_i$-Vektoren nach obiger Vorschrift, läßt sich formal als Anwendung eines linearen Λ-Operators auf die Quellfunktion betrachten.
$$\underline{J}_i = \Lambda(\underline{S}) \tag{206}$$
Um uns von den Indizes der $\underline{J}_i$ zu lösen, führen wir den 12 komponentigen Vektor $\tilde{J}$ und die entsprechenden Matrixgewichte $\tilde{A}$ ein.
$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_{0,I} \\ \vdots \\ J_{2,V} \end{bmatrix} \tag{207}$$
$$\tilde{A} = \operatorname{diag}(\underline{A}_0, \underline{A}_1, \underline{A}_2) \tag{208}$$

Da Λ eine Lösung einer Differentialgleichung im Ortsraum und eine Integration im Winkelraum beinhaltet, die Multiplikation mit $\tilde{A}$ sich auf den Stokesraum bezieht, vertauschen die beiden Operatoren.

$$\left[\Lambda, \tilde{A}\right] = 0 \tag{209}$$

Wendet man den Operator Λ auf Gleichung (199) an, erhält man

$$\tilde{J} = (1-\varepsilon)\tilde{A}(\Omega)\Lambda(\tilde{J}) + \varepsilon\Lambda(B\tilde{1}) \tag{210}$$

Die einfachste Iterationsvorschrift, die man sich denken kann, ist:

$$\tilde{J}^n = (1-\varepsilon)\tilde{A}(\Omega)\Lambda(\tilde{J}^{n-1}) + \varepsilon\Lambda(B\tilde{1}) \tag{211}$$

Diese in der astrophysikalischen Literatur Λ-*Iteration*, in der mathematischen Literatur *Euler-Verfahren* genannte Vorschrift, hat den Nachteil, daß sie für kleines ε und großes τ sehr langsam konvergiert. Da die Abbruchkriterien für die Iteration meistens auf die Änderung in zwei oder mehreren Schritten zurückgreifen, kann es geschehen, daß ein Programm mit scheinbarer Konvergenz endet, obwohl die vermeintliche Lösung noch weit von der wahren Lösung entfernt ist.

Um eine bessere Konvergenz zu erhalten, schreiben wir zunächst mit beliebigem Λ^* die Identität (Cannon, 1973):

$$\Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*) \tag{212}$$

Als Iterationsvorschrift erhält man

$$\tilde{J}^n = \Lambda^*(\underline{S}^n) + (\Lambda - \Lambda^*)(\underline{S}^{n-1}) \tag{213}$$

Bezeichnet $\tilde{J}^{\mathrm{FS}}$ dasjenige $\tilde{J}$, das durch einfaches Auswerten der formalen Lösung gefunden wird, ergibt sich:

$$\tilde{J}^n = [\mathcal{E} - (1-\varepsilon)\tilde{A}\Lambda^*]^{-1}\left(\tilde{J}^{\mathrm{FS}} - (1-\varepsilon)\tilde{A}\Lambda^*(\tilde{J}^{n-1})\right) \tag{214}$$

Diese Technik heißt *Operator-Splitting* oder *approximate* Λ-Verfahren. Die verschiedenen Ausprägungen dieser Methode unterscheiden sich lediglich in der Wahl des Operators Λ^*. Dabei werden an Λ^* zwei widersprüchliche Bedingungen gestellt. Zum einen soll das Verfahren schnell konvergieren, zum anderen soll $\mathcal{E} - (1-\varepsilon)\tilde{A}\Lambda^*$ leicht invertierbar sein. Die Λ-Iteration entspricht dabei der Wahl $\Lambda^* = 0$, so daß die Geschwindigkeit klein ist, andererseits nur der Einheitsoperator invertiert werden muß. Das andere Extrem wäre die Wahl $\Lambda^* = \Lambda$. Dann wäre das Verfahren in einem Schritt konvergent. Allerdings müßte das ursprüngliche Problem bereits gelöst sein, um Λ^* explizit angeben zu können.

Häufig wird daher Λ^* diagonal oder tridiagonal gewählt (Olson, Auer und Buchler, 1986; Hauschildt, 1992). Wählt man für Λ^* gerade die Diagonalelemente des Λ-Operators, erhält man das aus der numerischen Mathematik bekannte Jacobi-Verfahren. Betrachtet man Gleichung (206) als Matrixmultiplikation, so kann die k-te Spalte des Operators bestimmt werden, indem man das Problem mit einer Quellfunktion löst, die nur an der k-ten Stelle

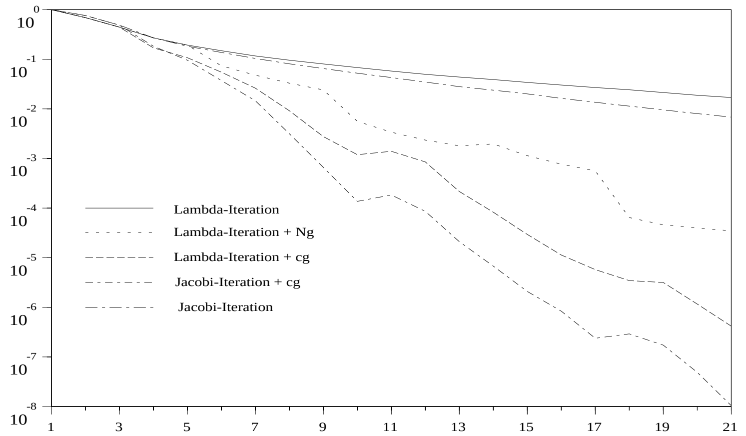


Abbildung 15: Relative Genauigkeit gegen Anzahl der Iterationschritte für verschiedene Iterationstechniken. Die Rechnungen wurden bei einem Streuparameter $\varepsilon = 0.01$ und $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 10$ durchgeführt

von Null verschieden ist. Falls man die Differentialgleichung entlang kurzer Charakteristiken löst, lassen sich die Diagonalelemente leicht erhalten (Olson und Auer, 1987).

Auch bei Verwendung des Jacobi-Verfahrens ist die Konvergenzgeschwindigkeit nicht hoch genug. Daher verwenden wir zusätzlich noch ein Beschleunigungsverfahren. Wir haben sowohl das Extrapolationsverfahren von Ng (1974) wie auch Orthomin, ein Konjugierte-Gradienten-Verfahren (Vinsome, 1976) getestet. Ein Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeiten findet sich in Abb. (15). Es zeigt sich, daß ein diagonaler Λ^*-Operator mit der Orthomin-Beschleunigung die besten Resultate liefert. Diese Kombination haben wir dann zur Untersuchung unseres Parametergitters verwendet.

3.5 Testrechnungen

Natürlich muß ein umfangreicheres Program gegen bekannte Lösungen getestet werden, um Fehler, die rein programmiertechnischer Natur sind so weit wie möglich ausschließen zu können. Leider existieren nicht viele bekannte Ergebnisse, die die polarisierte Strahlungstransportgleichung ohne besondere Symmetrieannahmen lösen. Eine wichtige Möglichkeit bietet die Unno-Lösung.

Wir nehmen also für die gesamte betrachtete Region eine Unno-Atmospäre an und erhalten damit die austretende Strahlung nach Gleichung (141) Da wir in einer Zelle unseres Gitters die Transportgleichung durch eine Unno-Atmosphäre approximieren, ist die einzige Fehlerquelle, die lineare Interpolation der Werte am Fußpunkt der kurzen Charakteristik. Anders ausgedrückt, in einer eindimensionalen Konfiguration liefert unsere Technik die

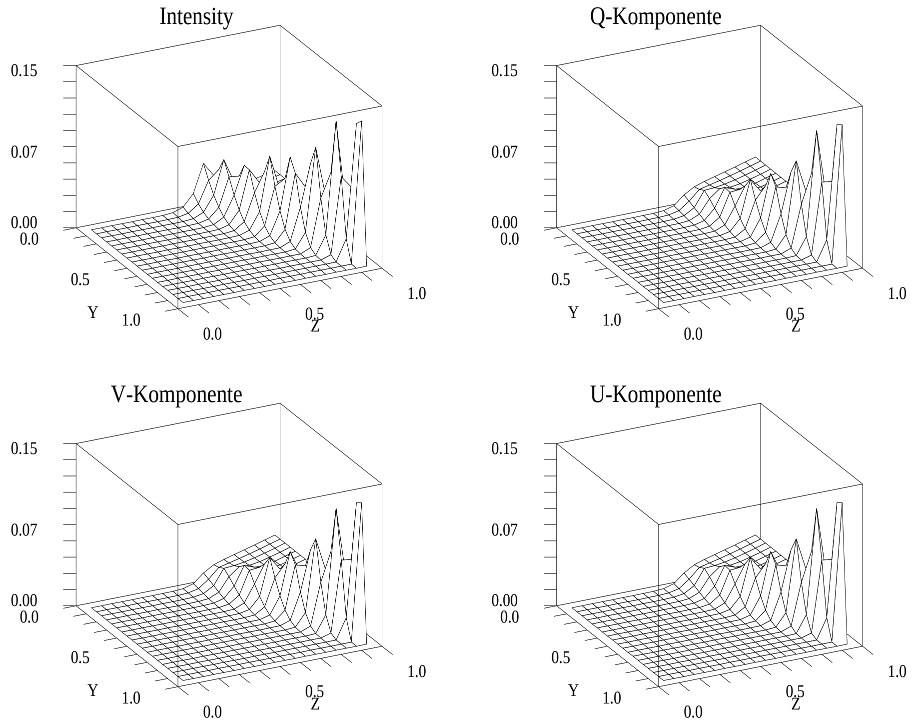


Abbildung 16: Relativer Fehler $(1 - \frac{I}{I_{\mathrm{exakt}}})$ für die vier Stokeskomponenten. Die geometrische Konfiguration ist ein Würfel mit Kantenlänge $\tau = 1$. Der Blickwinkel ist $\varphi = 0.125\,\pi$ und $\mu = 0.125$. Man erkennt deutlich, daß der Interpolationsfehler an der Kante des Würfels maximal ist.

austretende Strahlung einer Unno-Atmosphäre mit Maschinengenauigkeit. Jede andere Quellfunktion wird in der Zelle nur linear („unnosch “) approximiert, so daß hier eine zusätzliche Fehlerquelle auftritt.

Abb. (16) zeigt den relativen Fehler der vier Stokeskomponenten an der $x = 1$-Seite eines Einheitswürfels. Verglichen wird unser Algorithmus mit der analytischen Lösung. Da wir eine lineare Interpolation verwenden, ist der Fehler natürlich von der Ordnung h, wenn h die Größe einer Zelle ist. Wie im vorangegangen Abschnitt gezeigt wurde, läßt unser Verfahren aber durchaus die Verwendung höherer und geeigneter Interpolatiostechniken zu. Da es uns in der vorliegenden Arbeit darum geht, einen Überblick über die Lösungen der Transportgleichung zu gewinnen, halten wir die lineare Interpolation für ausreichend.

4 Ergebnisse

4.1 Modell

Wir lösen die dreidimensionale Strahlungstransportgleichung mit Polarisation für einen Quader mit Seitenlängen l_x, l_y, l_z ohne Einstrahlung am Rand. Die Modellparameter, die wir untersuchen sind der Streuparameter ε und die in Kapitel (3) definierten Geometrieparameter b_1, b_2, τ_z. Um einen Überblick über den Einfluß der Parameter zu erhalten, treffen wir folgende vereinfachende Annahmen für unser Modell.

1. Wir betrachten eine Atmosphäre mit konstanter thermischer also unpolarisierter Emission. Die Konstante wählen wir zu $B = 1$.

2. Wir vernachlässigen die magneto-optischen Effekte. Also $\rho_r = \rho_w = 0$. Damit wird die Absorptionsmatrix $\underline{\kappa}$ symmetrisch, wovon wir aber nicht explizit Gebrauch machen.

3. Die Absorptionsmatrix ist räumlich konstant:

$$\underline{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_I & \kappa_Q & \kappa_U & \kappa_V \\ \kappa_Q & \kappa_I & 0 & 0 \\ \kappa_U & 0 & \kappa_I & 0 \\ \kappa_V & 0 & 0 & \kappa_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{215}$$

4. Die Phasenmatrix ist die Rayleighmatrix. Wir behandeln also nur die Streuung von Photonen an Teilchen, die klein gegen die Wellenlänge sind. Der allgemeine Fall der Mie-Streuung ist bisher nur als reines Streuproblem ohne wahre Absorption und Emission behandelt (Bohren und Huffman, 1984).

Wir verwenden in jeder Raumrichtung $N_x = N_y = N_z = 41$ Gitterpunkte, der Winkelraum wird mit $N_\varphi \cdot N_\vartheta = 16 \cdot 16 = 256$ Punkten diskretisiert. Für die optische Tiefe in z-Richtung wählen wir die drei Werte $[0.1, 1, 10]$, so daß dieser Parameter einen Bereich vom optisch Dünnen bis zum optisch Dicken überstreicht. b_1 und b_2 können die drei Werte $[1, 0.1, 0.01]$ annehmen. Da wir symmetrische Konfigurationen nicht mehrfach berücksichtigen, sind nicht alle denkbaren Kombination auch gerechnet worden. So wäre ein Modell mit $\tau_z = 10, b_1 = 1$ und $b_2 = 0.1$ dieselbe Konfiguration wie ein um $\frac{\pi}{2}$ gedrehtes Modell mit $\tau_z = 10, b_1 = 0.1$ und $b_2 = 1$. Der Streuparameter kann die Werte $[0, 0.5, 0.1, 0.01]$ annehmen. Der Fall ohne Streuung könnte auch durch die Formeln aus Abschnitt (2.3) entlang langer Charakteristiken schnell gelöst werden. Wir führen ihn hier nur als Vergleichsmodell an, von dem aus man die Entwicklung zu starker Streuung leichter verstehen kann. Die in diesem Fall bekannte exakte Lösung mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion kann dann als Test der numerischen Genauigkeit dienen.

Mit diesem Parametergitter ergeben sich 40 Modelle, die wir gerechnet haben und die wir hier vorstellen werden. Im ersten Abschnitt werden wir die räumlich aufgelösten Intensitäten betrachten. Da in den meisten in der Astrophysik relevanten Fällen nur der Fluß beobachtet werden kann, werden wir die entsprechenden Ergebnisse in den darauffolgenden beiden Abschnitten behandeln, wobei wir auch auf eine einfache Inversion der Flußdaten eingehen werden.

4.2 Intensitäten

Betrachten wir zunächst einen Würfel mit einer Kantenlänge von $\tau_z = 10$ ohne Streuung. Abb. (17) stellt die an der $x = 10$-Seite unter einer Blickrichtung von $\varphi = 0.375\pi$ und $\mu = 0.375$ austretende Strahlung dar. Wir normieren dabei die Intensität so, daß der Maximalwert auf dieser Seite eins beträgt. In der Abbildung ist also nur die Information über den Verlauf nicht aber über die absolute Stärke enthalten. Desweiteren wird der Polarisationsgrad p, die Elliptizität $E = \frac{V}{I}$ und das Verhältnis $W = \frac{U}{Q}$ dargestellt. W gibt dabei den Tangens des doppelten Polarisationswinkels wieder. Oberhalb jeder räumlichen Darstellung sind noch die jeweiligen Isolinien zur Verdeutlichung angegeben.

Aus der Unno-Lösung folgen mit der Formulierung aus Abschnitt (2.3) für den Fall einer konstanten Atmospäre ohne Einstrahlung am Rand einfache analytische Formeln.

$$
\begin{aligned}
p &= \exp(-\eta_I \tau) \frac{\sinh(\eta_5 \tau)}{1 - \exp(-\eta_I \tau)\cosh(\eta_5 \tau)} && (216) \\
W &= \frac{U}{Q} = \frac{\eta_U}{\eta_Q} && (217) \\
E &= \frac{V}{I} = \frac{\exp(-\eta_I \tau)}{\eta_5} \frac{\eta_V \sinh(\eta_5 \tau)}{1 - \exp(-\eta_I \tau)\cosh(\eta_5 \tau)} && (218) \\
\eta_5 &= \sqrt{\eta_Q^2 + \eta_U^2 + \eta_V^2} && (219)
\end{aligned}
$$

Mit τ bezeichnen wir in Gleichung (216) die optische Tiefe in Strahlrichtung. Der Polarisationsgrad ist dann eine streng monoton fallende Funktion mit $\lim_{\tau\to 0} = \frac{\eta_5}{\eta_I}$. Die stärksten Beiträge zum Polarisationsgrad kommen also aus den Randbereichen. Da die Elliptizität dieselbe funktionale Abhängigkeit zeigt, tragen die Ränder auch hier am stärksten bei. Lediglich der Grenzwert ist mit $\lim_{\tau\to 0} = \frac{\eta_V}{\eta_I}$ unterschiedlich. W schließlich ist in diesem Fall konstant mit $W = \frac{\eta_U}{\eta_Q}$. Genau diese Effekte sind in Abb. (17) zu sehen. Desweiteren steigt die Intensität mit zunehmender optischer Tiefe. Sobald der Sehstrahl die gegenüberliegende Seite $x = 0$ trifft, bleibt sie konstant. Insbesondere an den dem Beobachter zugewandten Seiten bleibt sie auf dem Wert $I \approx 1$.

Betrachten wir nun den Einfluß der Streuung. Abbildung (18) zeigt denselben Würfel aus derselben Blickrichtung mit starker Streuung $\varepsilon = 0.01$. Man sieht, daß die Intensität nun symmetrische Höhenlinien zeigt, da der Beitrag der jeweils außen liegenden Regionen zum

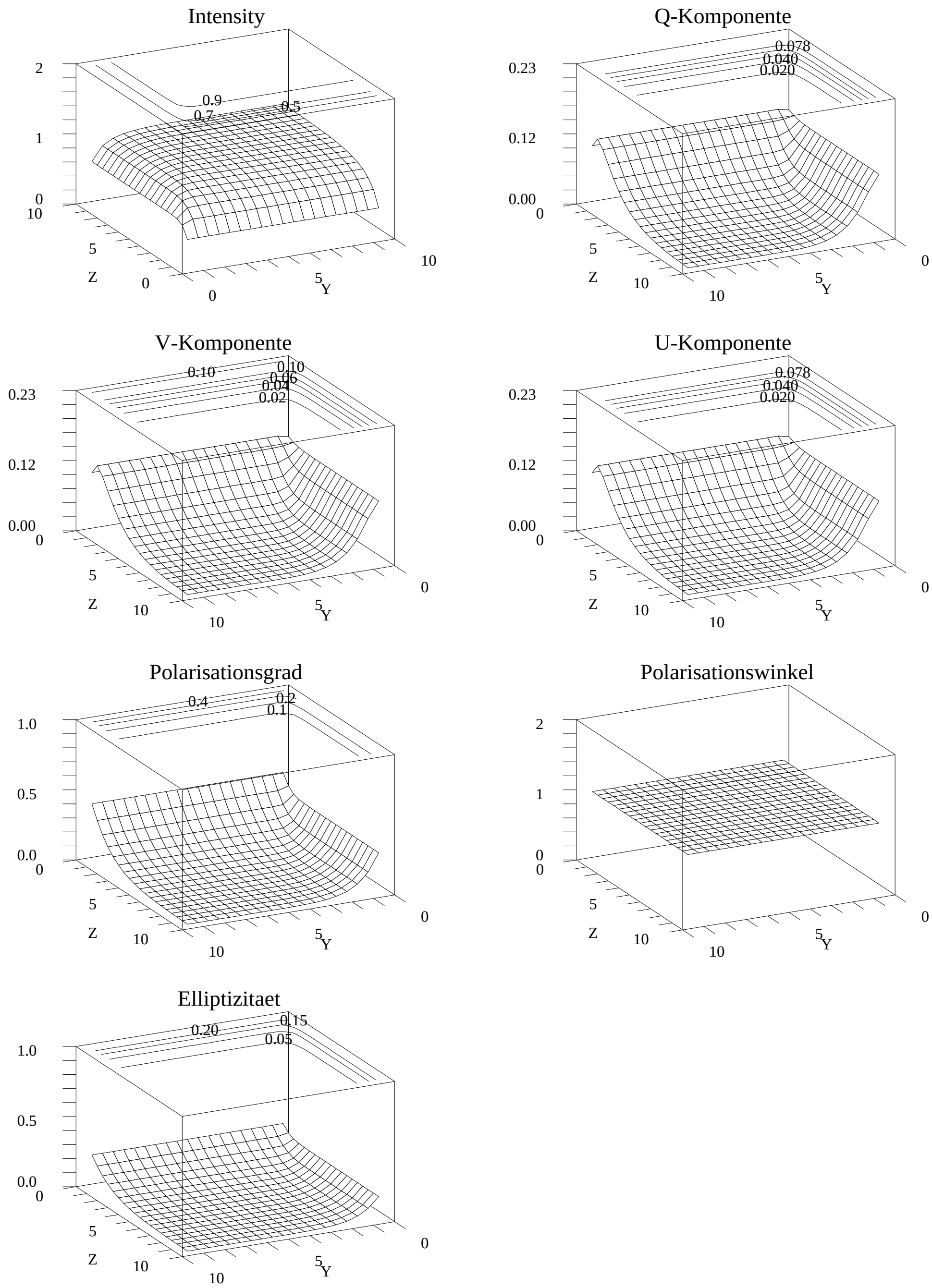


Abbildung 17: Intensität, Q, U, V, Polarisationsgrad, Elliptizität und Tangens des Polarisationswinkels für einen Würfel mit Kantenlänge $\tau = 10$ ohne Streuung. Gezeigt ist jeweils die $x = 10$ Seite unter $\varphi = 0.375\pi$ und $\mu = 0.375$

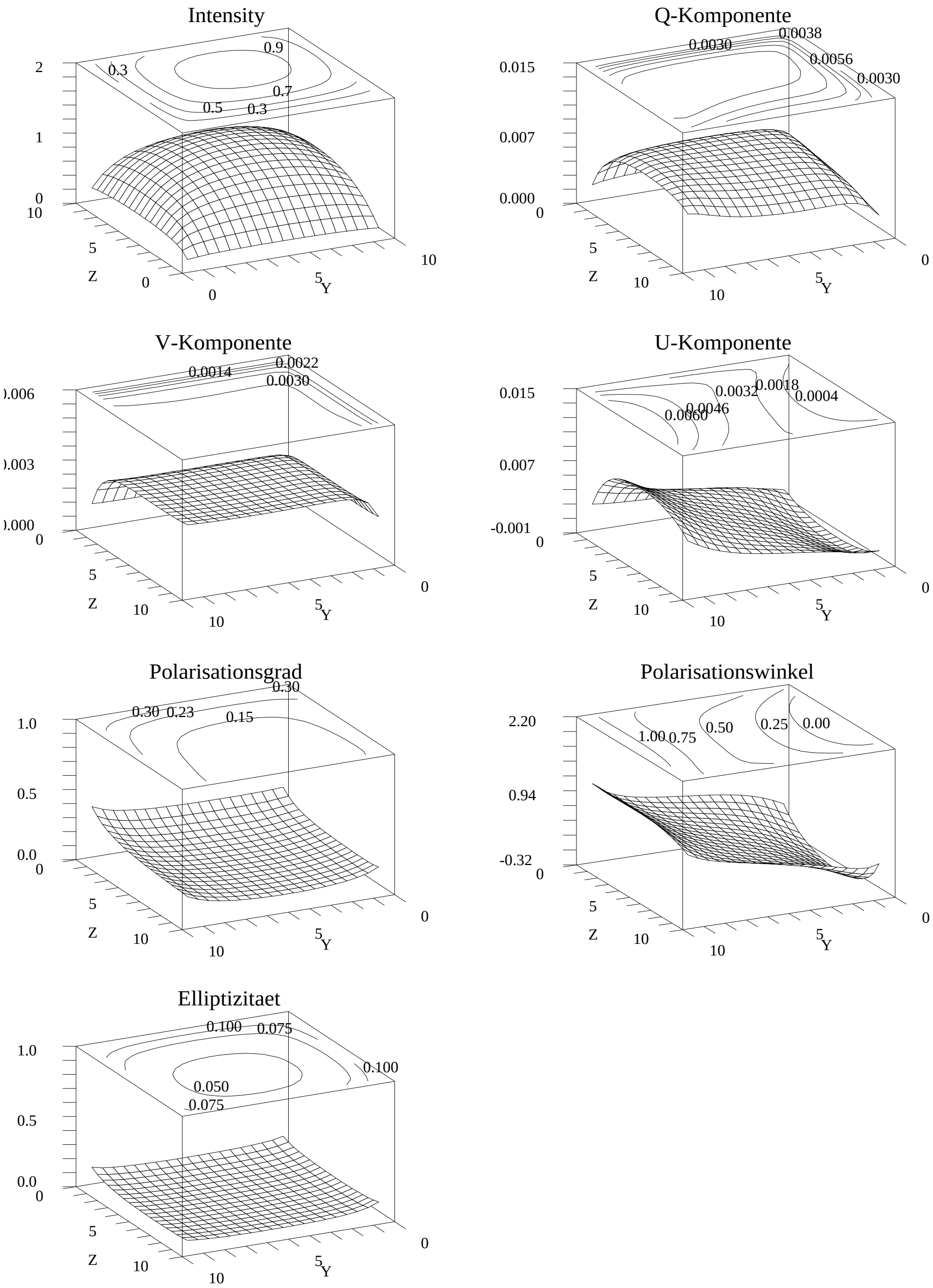


Abbildung 18: Intensität, Q, U, V, Polarisationsgrad, Elliptizität und Tangens des Polarisationswinkels für einen Würfel mit Kantenlänge $\tau = 10$ und $\varepsilon = 0.01$. Gezeigt ist jeweils die $(x = 10)$-Seite unter $\varphi = 0.375\pi$ und $\mu = 0.375$

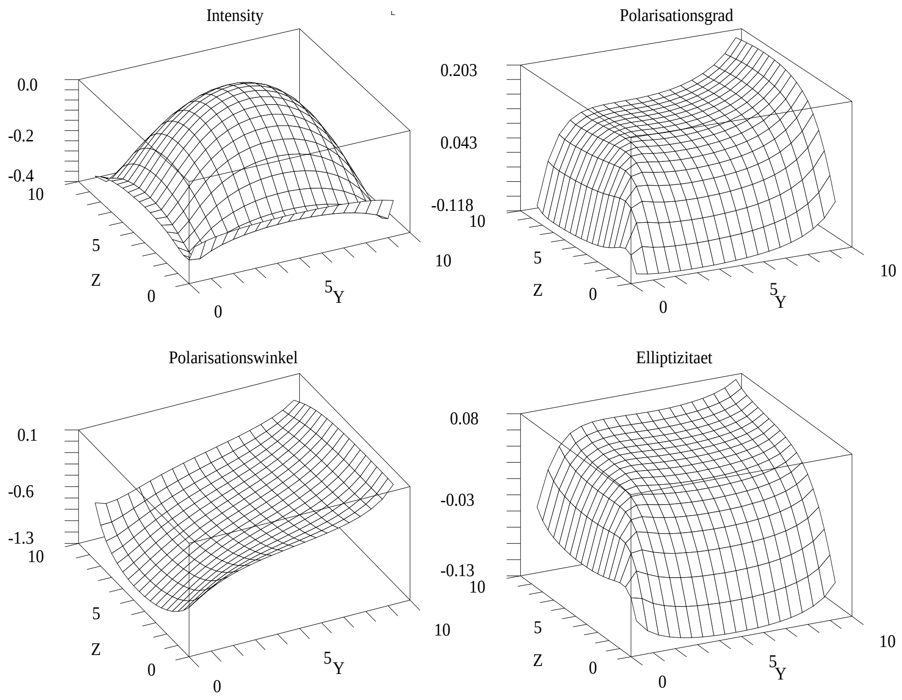


Abbildung 19: Differenz der Intensitäten, Polarisationsgrade, Elliptizitäten und Tangens des Polarisationswinkels von Modellen mit $\varepsilon = 0.01$ und $\varepsilon = 1$ für einen Würfel mit Kantenlänge $\tau = 10$. Sonst wie Abb. 17

Streuintegral nach außen hin abfällt. Während man also bei einem Würfel ohne Streuung die Kanten als scharfe Linien sehen kann, erscheinen sie mit Streuung unschärfer.

Um die Effekte der Rayleigh-Streuung zu verdeutlichen, zeigt Abbildung (19) die Differenz zwischen dem $\varepsilon = 1$ und dem $\varepsilon = 0.01$-Modell. Man kann erkennen, daß an den äußeren Rändern der Polarisationsgrad um etwa zehn Prozent abnimmt, während er in den inneren, optischen dicken Bereichen um zehn Prozent zunimmt, um an den in Beobachterrichtung liegenden Rändern sogar um zwanzig Prozent zu steigen. Die vorhandene Streuung führt also dazu, daß auch in tiefen Schichten starke Beiträge von den Polarisationskomponenten auftreten.

Da die Kopplung der V-Komponente an die übrigen Stokeskomponenten nur über die Absorptionsmatrix geschieht, treten die Winkelabhängigkeiten der Phasenmatrix hier nur schwach auf. V bleibt vielmehr etwa konstant. Da aber durch die Streuung I zu allen Rändern hin abfällt, folgt für die Elliptizität ein der Intensität ähnliches symmetrisches Verhalten. Durch die Richtungsabhängigkeit der Phasenmatrix dreht sich der Polarisationswinkel von $W \approx -0.32$ bis zu dem unpolarisierten Wert von $W \approx 1$, wobei die Variation in y-Richtung ausgeprägter ist als in z-Richtung.

Als weiteres Beispiel für die räumliche Verteilung der Komponenten betrachten wir ein

Modell, das einer Akkretionsscheibe ähnelt. Die Konfiguration hat eine quadratische Grundfläche mit $\tau_z = \tau_y = 10$ und ist in der x-Richtung optisch moderat dick $\tau_x = 1$. Abbildung (20) zeigt die austretenden Größen im Fall ohne Streuung.

Da die Blickrichtung fast senkrecht zur yz-Ebene ist, hat der Sehstrahl nur eine moderate optische Tiefe zu durchlaufen. Daher sieht man nur den exponentiellen Abfall der Polarisationskomponenten. Unter diesem Blickwinkel stammen auch die Beiträge von den anderen beiden sichtbaren Seiten aus optisch dünnen Regionen. Ändert sich die Blickrichtung in Richtung auf $\mu = \pm 1$, durchlaufen die Sehstrahlen größere optische Tiefen. Wenn man die Scheibe von der Seite sieht, ist stets $\tau = 10$.

Bei einem Streuparameter von $\varepsilon = 0.01$ findet man bei einem Blickwinkel von $\varphi = 0.375\pi$ und $\mu = 0.375$ einige Effekte, die wir im Fall des optisch dicken Würfels gesehen haben. Der Polarisationsgrad steigt in den mittleren Gebieten der sichtbaren Seite. Allerdings bleibt der Tangens des Polarisationswinkels auch überall nahezu konstant, während man beim optisch dicken Würfel eine deutlich ausgeprägte Asymmetrie in W sehen konnte. Diese Asymmetrie ist auf die Phasenfunktion zurückzuführen. Wie man ebenfalls in Abb. (18) sehen kann, ist die U-Komponente diejenige, die die Form bestimmt.

Im Fall der Scheibe tritt diese Asymmetrie im Polarisationswinkel erst auf, wenn der Blickwinkel in der Nähe von $\mu = \pm 1$ liegt (s. Abb. 22). Die Auswirkungen dieser Änderung des Verhaltens des Polarisationswinkels unter Rotation der Blickrichtung werden wir im nächsten Abschnitt noch ausführlicher betrachten.

4.3 Flüsse

In den meisten Fällen können die beobachteten Objekte nicht räumlich aufgelöst werden. Man mißt vielmehr den über die sichtbare Oberfläche integrierten Stokesvektor, den Fluß. Wir definieren also analog zu dem räumlich aufgelösten Fall Polarisationsgrad $\bar{p}$, Elliptizität $\bar{E}$ und den Polarisationswinkel $\bar{W}$ aus den integrierten Größen:

$$\bar{p} = \frac{\sqrt{\bar{Q}^2 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{I}^2} \tag{220}$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \tag{221}$$

$$\bar{W} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \tag{222}$$

Dabei bezeichnen wir mit $\bar{I}, \bar{Q}, \bar{U}, \bar{V}$ die räumlich gemittelten Stokesparameter. Diese Definition ist sinnvoll, da es sich bei den Stokesparametern um die direkt der Messung zugänglichen Größen handelt. Wären $\bar{I}, \bar{Q}, \bar{U}, \bar{V}$ unabhängig von der Position an der Oberfläche, wären sie proportional zur sichtbaren Fläche. Da diese natürlich von der Blickrichtung abhängt, träte stets eine Abhängigkeit von φ und ϑ auf, die aber uninteressant ist. Die

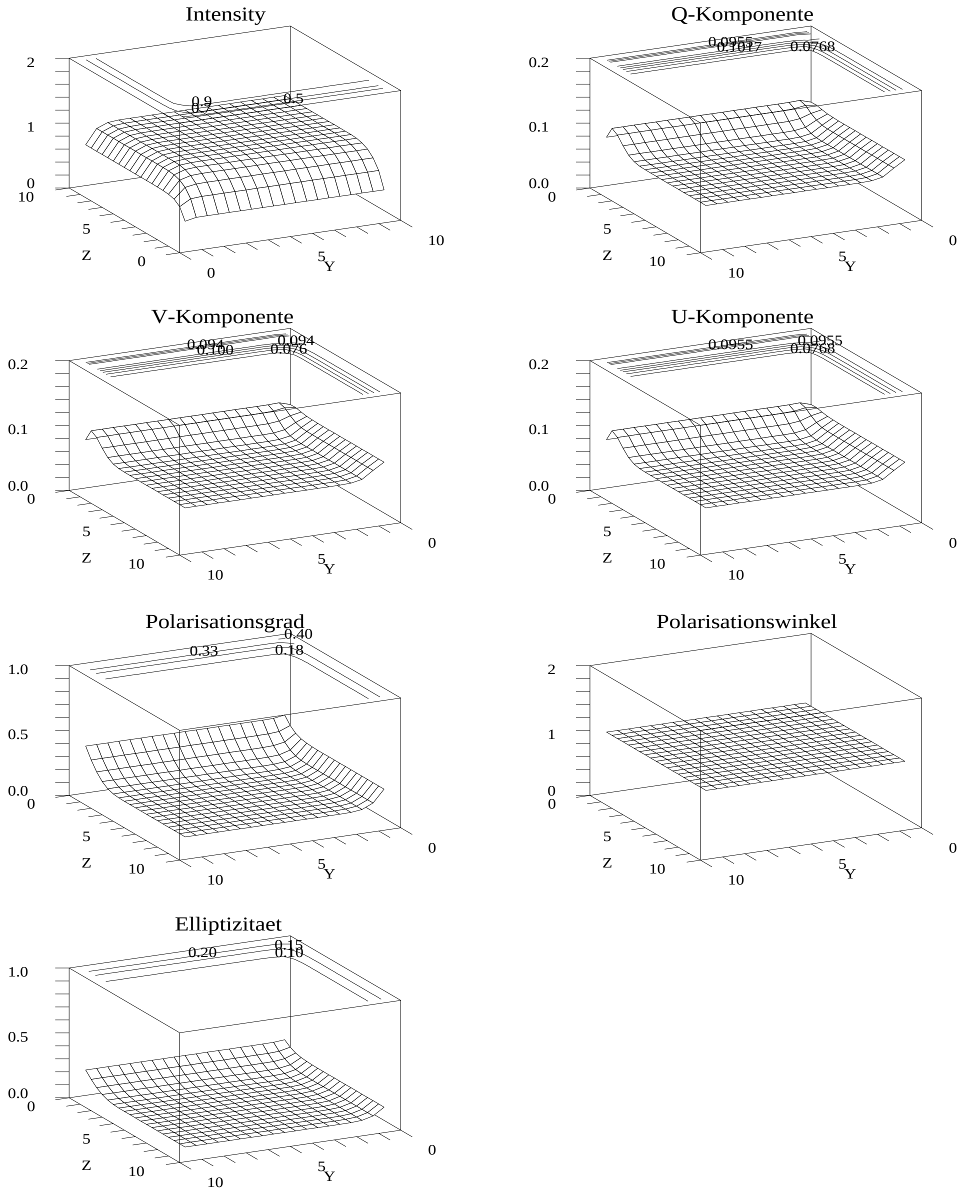


Abbildung 20: Intensität, Q, U, V, Polarisationsgrad, Elliptizität und Tangens des Polarisationswinkels für eine Scheibe mit Kantenlänge $\tau_z = \tau_y = 10$ und $\tau_x = 1$ ohne Streuung. Gezeigt ist jeweils die $(x = 1)$-Seite unter $\varphi = 0.375\pi$ und $\mu = 0.375$

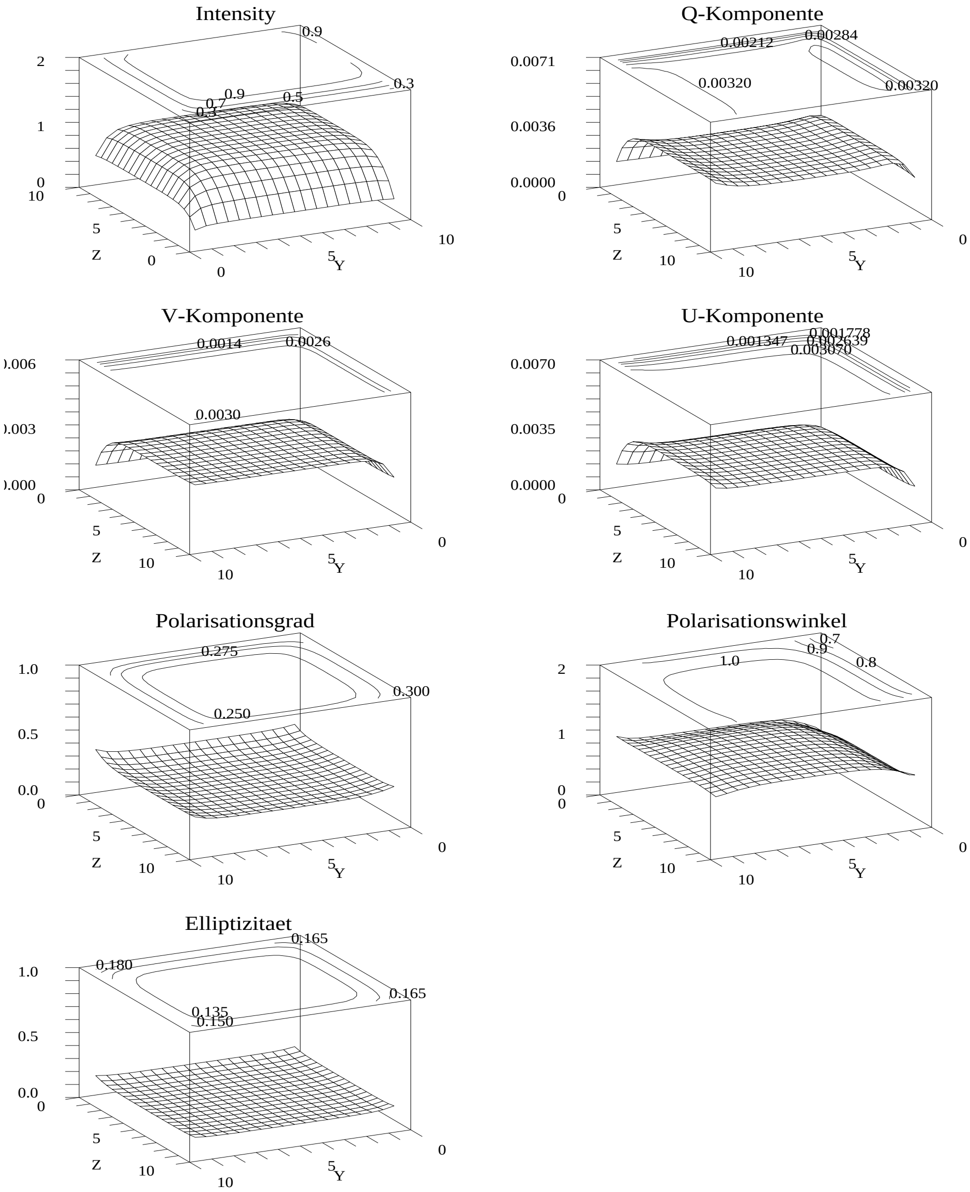


Abbildung 21: I, p, E und W für eine Scheibe mit $\tau_z = \tau_y = 10$ und $\tau_x = 1$ unter einem Blickwinkel von $\varphi = 0.375\pi$ und $\mu = 0.375$. Gezeigt ist die $(x = 1)$-Seite.

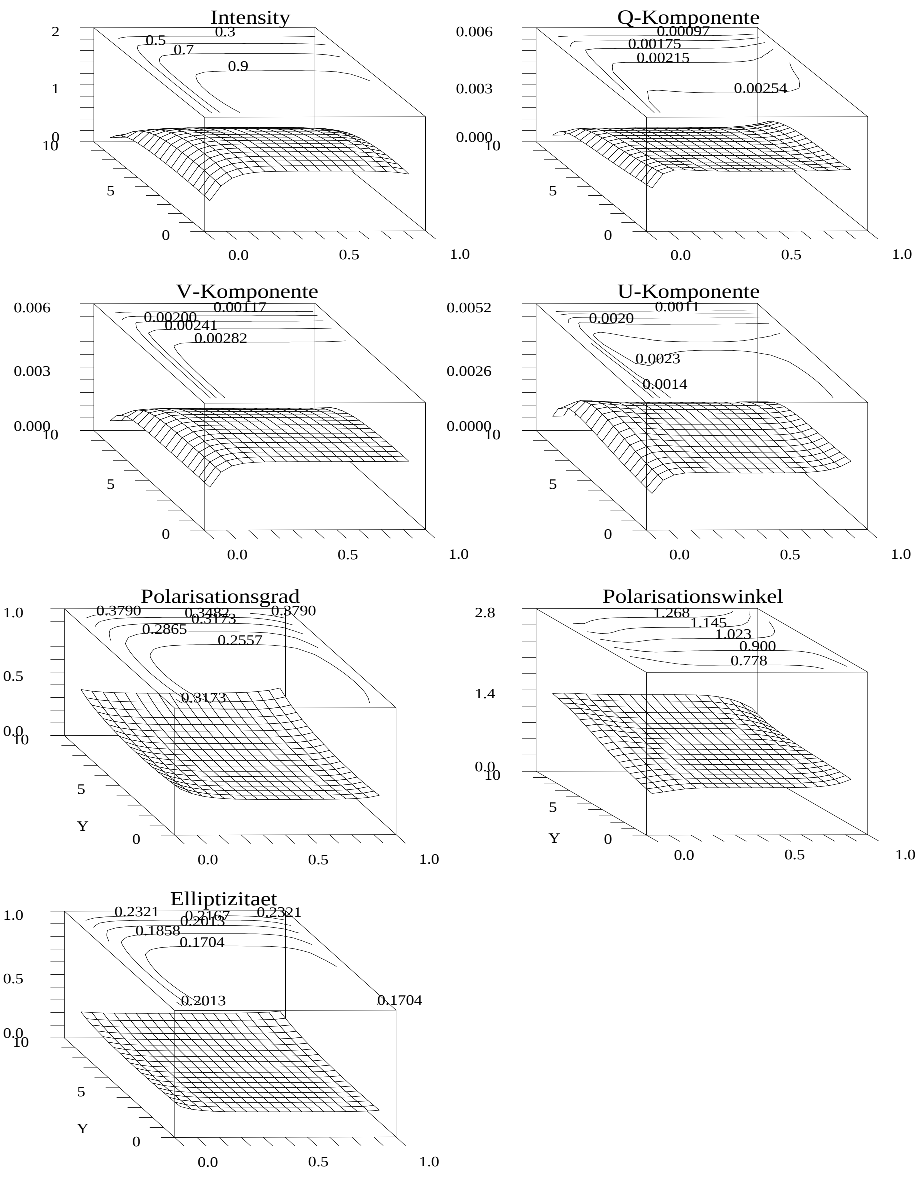


Abbildung 22: I, p, E und W für eine Scheibe mit $\tau_z = \tau_y = 10$ und $\tau_x = 1$ unter einem Blickwinkel von $\varphi = 0.375\pi$ und $\mu = -0.875$. Gezeigt ist die $(z = 10)$-Seite.

abgeleiteten Größen $\bar{p}, \bar{E}, \bar{W}$ haben den Vorteil, daß dieser Effekt durch die Quotientenbildung nicht auftritt. Man sieht also nur die tatsächliche Richtungsabhängigkeit.

Abb. (23) und Abb. (24) zeigen die Flussgrößen für Würfel mit Kantenlängen $\tau_z = 0.1$, $\tau_z = 1$ und $\tau_z = 10$. Die Größen sind stets gegen μ aufgetragen, der Scharparameter ist ε. Alle übrigen Parameter werden konstant gehalten. Wir wählen stets $\varphi = 0.625\pi$ und die Würfelform bedingt $b_1 = b_2 = 1$.

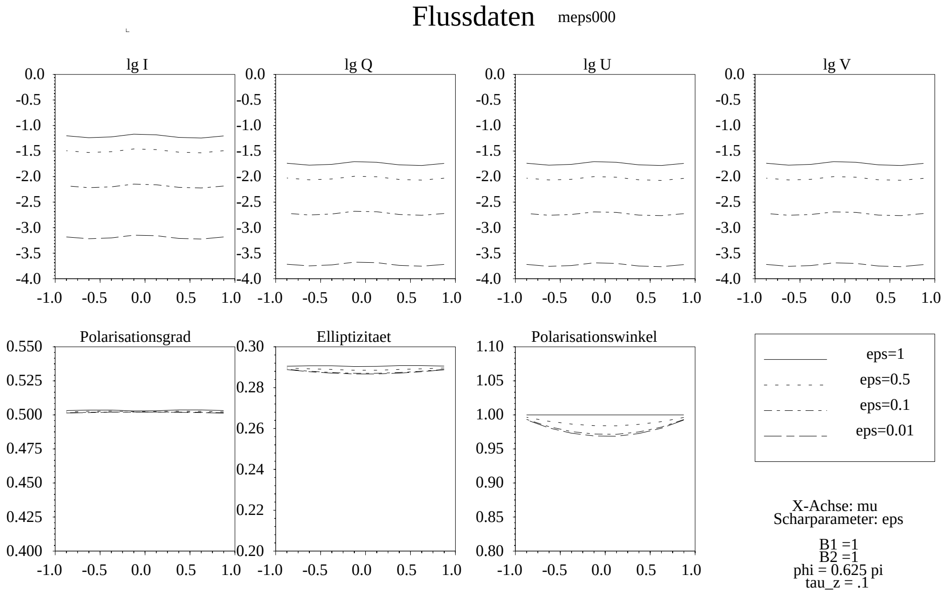
Im Fall des optisch dünnen Würfels ist die Abhängigkeit der Stokesparameter von μ nicht zu erkennen. Die absoluten Werte von $\bar{I}, \bar{Q}, \bar{U}$ und $\bar{V}$ sinken mit zunehmender Streuung, da die Emission linear vom Streuparameter abhängt. Die Streuung hat keinen erkennbaren Einfluß auf den Polarisationsgrad, alle Effekte sind noch auf die anisotrope Absorptionsmatrix zurückzuführen. Für alle Werte von ε finden wir $\bar{p} = 0.503$. Lediglich im Polarisationswinkel deutet sich eine Abhängigkeit von μ an, die mit stärker werdender Streuung zunimmt. In dieser Konfiguration dominiert also noch die konstante Absorption, während die Streuung vernachlässigt werden kann.

Beginnt der Würfel optisch dick zu werden (s. Abb. (23)), wird besonders in den $\bar{Q}, \bar{U}$ und $\bar{V}$ Komponenten die Abhängigkeit von μ deutlich. Wir haben im Abschnitt (4.2) gesehen, daß die optisch dünnen Gebiete besonders stark zu den Polarisationskomponenten beitragen. Bei Blickwinkeln von $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ sieht man den größten Bereich von optisch dünnen Gebieten. Daher finden sich in diesem Winkelbereich die Maxima von $\bar{Q}, \bar{U}$ und $\bar{V}$. Blickt man senkrecht auf eine Seite des Würfels, hat man überall einen optisch dicken Sehstrahl und damit Minima in den Stokeskomponenten $\bar{Q}, \bar{U}, \bar{V}$. Der Polarisationsgrad sinkt etwa auf $\bar{p} = 0.38$, wobei bereits eine leichte Variation mit μ und ε zu sehen ist. Der Abfall gegenüber den $\bar{p} = 0.503$ des optisch dünnen Falls ist auf das Sinken der optischen Tiefe zurückzuführen. Im Polarisationswinkel ist eine deutliche Abhängigkeit vom Streuparameter zu erkennen. Die Phasenmatrix bewirkt, daß sich der Polarisationswinkel dreht, sobald man den Würfel nicht mehr unter $\mu = \pm 1$ betrachtet. Das Minimum befindet sich bei $\mu = 0$ und sinkt mit zunehmender Streuung.

Bei einem optisch dicken Würfel (s. Abb. 24) finden wir die eben besprochenen Tendenzen fortgesetzt. $\bar{Q}, \bar{U}$ und $\bar{V}$ zeigen eine deutliche Abhängigkeit von μ. Der Polarisationsgrad sinkt weiter in den Bereich von $p \approx 0.1$. Gleichzeitig beginnt die Streuung diesem Effekt entgegenzuwirken. Den geringsten Polarisationsgrad von $\bar{p} \approx 0.07$ im Maximum findet man im Fall ohne Streuung. Bei $\varepsilon = 0.01$ erreicht man noch $\bar{p} = 0.15$ im Maximum. Der Polarisationswinkel erreicht ein Minimum von $\bar{W} = 0.45$ bei $\mu = 0$ und $\varepsilon = 0.01$.

Wir finden also, daß mit steigender optischer Tiefe der Polarisationsgrad von $\bar{p} = 0.503$ auf $\bar{p} = 0.07$, also fast um eine Zehnerpotenz, sinkt. Gleichzeitig wirkt die Streuung polarisierend, kann aber erst im optisch dicken Fall, $\tau = 10$, zu einer deutlichen Unterscheidung der Streuparameter führen. Der Polarisationswinkel ist der empfindlichste Parameter sowohl für Variationen in μ wie für den Streuparameter.

Zusammen mit Abb. (24) zeigt die Abb. (25) eine Sequenz von einem optisch dicken



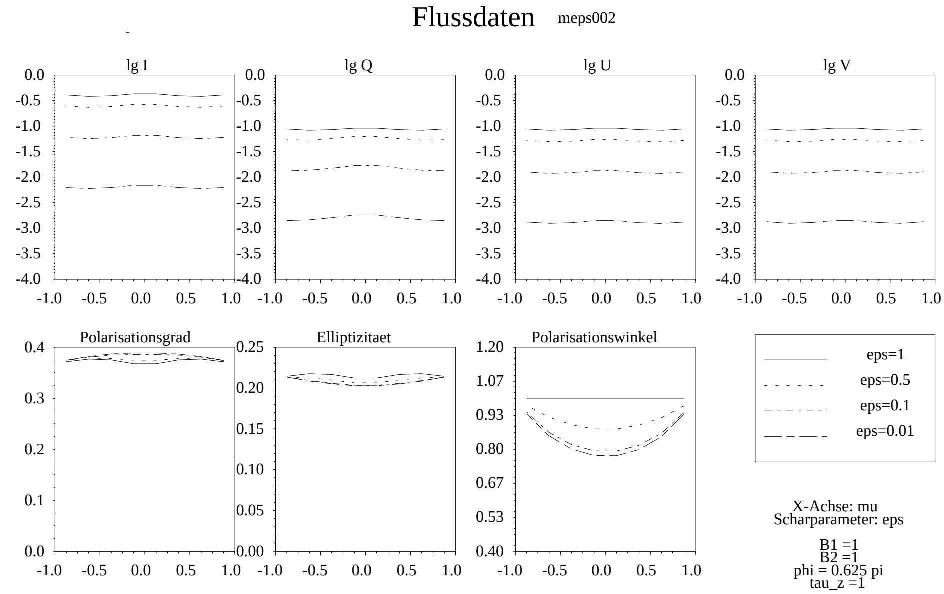


Abbildung 23: Modell mit $\tau_z = 0.1$ (unteres Bild), Modell mit $\tau_z = 0.01$ (oberes Bild). b_1, b_2 und φ sind konstant, die Abszisse ist $\mu = \cos\vartheta$.

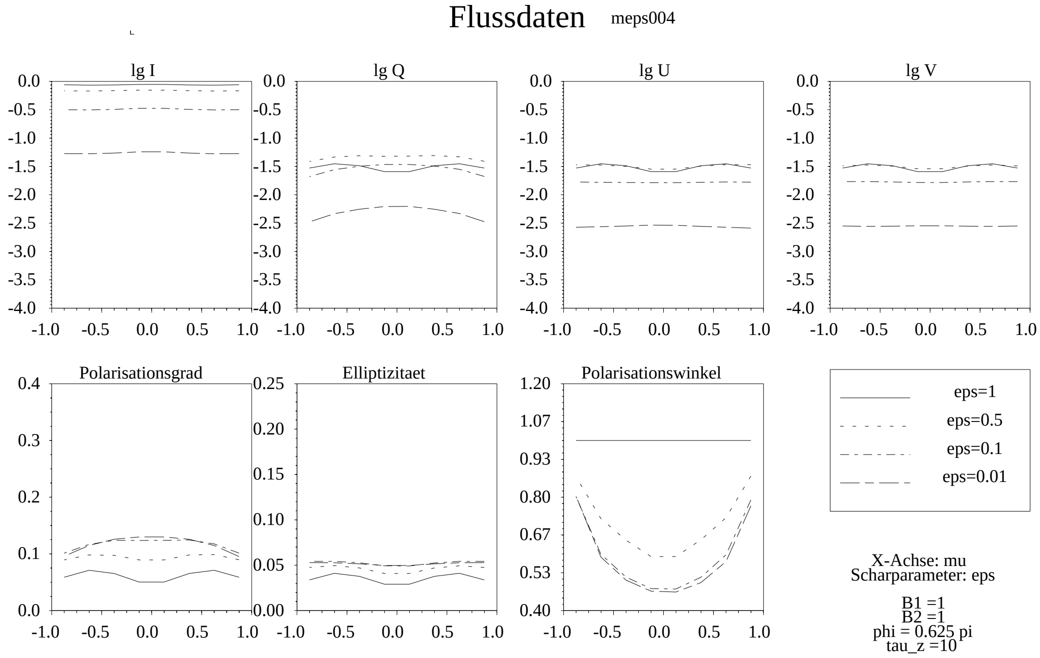


Abbildung 24: Modell mit $\tau_z = 10$

Würfel zu einer Scheibe, die in der z-Richtung und in der y-Richtung optisch dick in der x-Richtung hingegen optisch dünn $\tau_x = 0.1$ ist. Der Azimutwinkel wird wieder bei $\varphi = 0.625\pi$ fixiert. Im unteren Teil von Abb. (25) haben wir eine optisch dünne Scheibe vorliegen. Nur wenn diese nahezu von der Schmalseite her gesehen wird, können nennenswerte Effekte durch die Streuung auftreten, wie wir bei der Diskussion der Würfel gefunden haben. Daher unterscheiden sich der Polarisationsgrad, die Elliptizität und der Polarisationswinkel für verschiedene Werte von ε nicht sehr stark voneinander.

Erst wenn die Scheibe optisch dick wird, beginnt die Streuung wichtig zu werden. Auffällig ist, daß die $\bar{U}$-Komponente nicht symmetrisch in μ ist. Dies ist auf die Rayleigh-Phasenfunktion zurückzuführen. Diese Asymmetrie setzt sich in den Polarisationsgrad und den Polarisationswinkel fort. Besonders bei $\bar{W}$ ist auffällig, daß der Polarisationswinkel nun gegen den Uhrzeigersinn zu größeren Winkeln gedreht wird. Bisher haben wir für diesen Effekt keine befriedigende Erklärung gefunden. Um sicher zu gehen, daß es sich nicht um einen Programmierfehler handelt, wurde der Source-Code in den entsprechenden Routinen noch einmal einer sorgfältigen Prüfung unterzogen. Es konnte kein Fehler gefunden werden. Betrachtet man darüber hinaus das Modell mit $\tau_x = 0.1$ im oberen Teil von Abb. (25), so findet man denselben Effekt nur bei Winkeln, die näher an $\mu = -1$ liegen. Diese Beobachtung legt nahe, daß es sich auch hier um einen Effekt handelt, der erst bei großer optischer Dicke auftritt. Während bei einer Scheibe mit $\tau_x = 1$ bereits unter einer kleineren Neigung Sehstrahlen mit großer optischer Tiefe auftreten, tritt dieser Fall bei einer Scheibe mit $\tau_x = 0.1$ erst auf, wenn man diese nahezu *edge on* sieht.

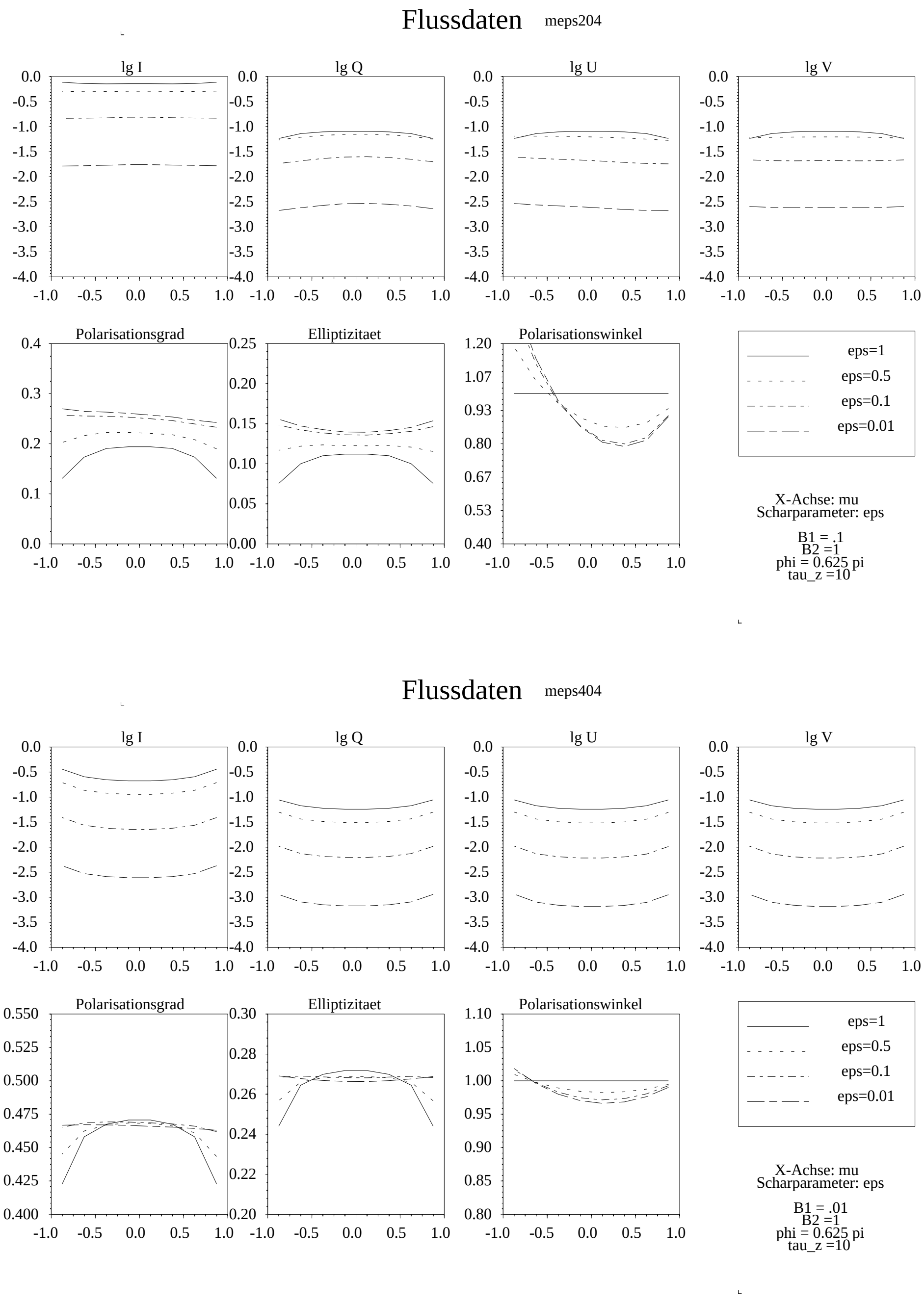
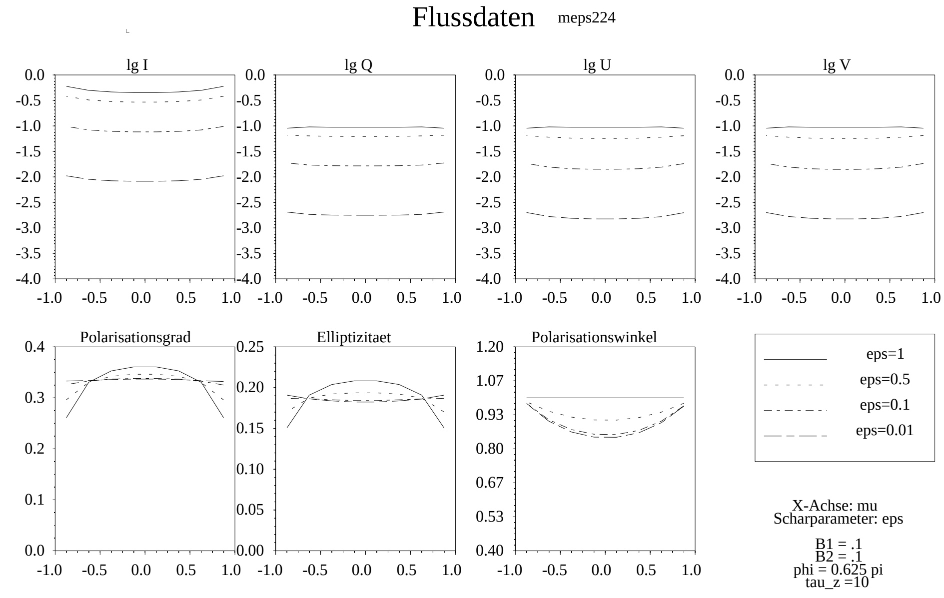


Abbildung 25: Modelle mit $\tau_z = 10$. Die Abszisse ist wieder μ, φ ist konstant. Das obere Bild zeigt eine Scheibe mit Dicke 1 $(\tau_x = 1, \tau_y = 10)$, das untere Bild zeigt eine dünne Scheibe mit $\tau_x = 0.1, \tau_y = 10$.



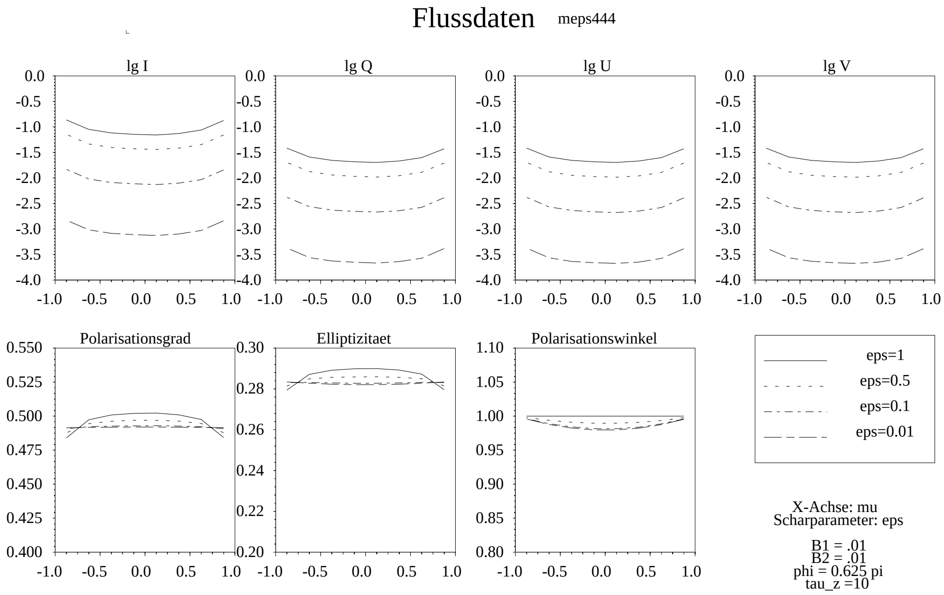


Abbildung 26: Modelle von elongierten Strukturen mit $\tau_z = 10$. Die Abszisse ist μ, φ ist konstant. Das obere Bild hat $b_1 = b_2 = 0.1$ und das untere $b_1 = b_2 = 0.01$.

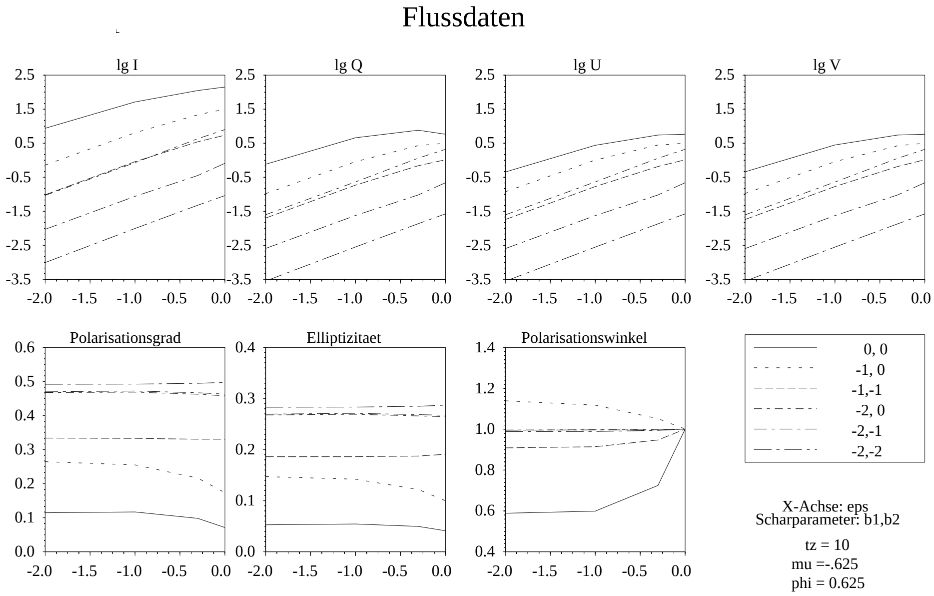


Abbildung 27: Flußgrößen gegen den Streuparameter ε. $\tau_z = 10$, φ und μ sind konstant. Die verschiedenen Kurven geben verschiedene Geometrien wieder. In der Legende sind jeweils $\lg b_1, \lg b_2$ angegeben. Die durchgezogene Linie bezeichnet also den optisch dicken Würfel.

In Abb. (26) sind die Flußdaten zweier Modelle gezeigt, die zusammen mit dem optisch dicken Würfel (Abb. (24)) eine Sequenz zu einer elongierten Struktur bilden. Es ist stets $b_1 = b_2$ d.h. es liegt stets ein quadratischer Querschnitt vor. Im oberen Modell ist $b_1 = 0.1$, im unteren $b_1 = 0.01$. Die untere Konfiguration entspricht also einem in einer Richtung optisch dicken in den beiden anderen optisch dünnen Stab. Mit einer solchen Konfiguration kann etwa eine Flußröhre in der Photosphäre eines Sterns oder der Jet eines AGNs modelliert werden. Man sieht, daß wieder der Effekt sinkender optischer Tiefe dominiert. Der Würfel hat einen Polarisationsgrad von etwa $\bar{p} \approx 0.1$, bei $b_1 = 0.1$ bewegt sich $\bar{p}$ um 0.3 und bei $b_1 = 0.01$ schließlich erreicht man $\bar{p} \approx 0.5$. Die Variation mit der Blickrichtung oder dem Streuparameter übersteigen wieder nicht einige Prozent.

Wir wollen nun nicht mehr nur einzelne geometrische Konfigurationen untersuchen, sondern eine größere Menge betrachten. Dazu halten wir die optische Tiefe in z-Richtung τ_z fest. Wir tragen die Flußgrößen gegen den Streuparameter ε auf. Der Winkel $\varphi = 0.625\,\pi$ sei ebenfalls fest. Als Scharparameter der Kurven wählen wir b_1 und b_2. In Abb (27) ist $\mu = -0.625$. Man sieht, daß unabhängig von der speziellen Konfiguration die Flußgrößen für genügend starke Streuung einem Potenzgesetz gehorchen. Da sowohl der Polarisationsgrad wie auch die Elliptizität und der Polarisationswinkel dann konstant verlaufen, ergibt sich

$$\underline{\bar{I}}(\Omega, \varepsilon, b_1, b_2, \tau_z) \approx \underline{C}(\Omega, b_1, b_2, \tau_z)\ \varepsilon^a \tag{223}$$

Wir finden desweiteren $a \approx 0.97 \pm 0.3$, also einen nahezu linearen Zusammenhang. Nur im Fall des Würfels zeigt sich eine flachere Steigung. Bei den vier Modellen, die in mindestens einer Richtung optisch sehr dünn ($\lg b_1 = -2$) oder in zwei Richtungen optisch moderat dick sind ($\lg b_1 = \lg b_2 = -1$), setzt sich die lineare Abhängigkeit auch zu kleinen Streuparametern fort. Da es sich bei der Streuung um den nichtlokalen Teil des Strahlungstransportoperators handelt, tritt dieser Zusammenhang offenbar auf, wenn das gesamte Gebiet miteinander in Wechselwirkung tritt.

4.4 Inversion der Flußdaten

Ein wichtiges Interesse bei der Modellierung der austretenden Strahlung ist die Inversion von Beobachtungsdaten. Man versucht von dem Spektrum eines astrophysikalischen Objektes auf dessen Eigenschaften zu schließen. Da wir gesehen haben (Abschnitt 2), daß Polarisation auftritt, falls die erzeugende Region nicht kugelförmig ist, kann man versuchen die Geometrieparameter aus Beobachtungen zu bestimmen. Höflich (1991) versucht dies für die Supernova 1987A. In den vorangegangenen Abschnitten und im Anhang haben wir für unsere Modelle die austretende Intensität in Abhängigkeit der Modellparameter $b_1, b_2, \tau_z, \varepsilon$ dargestellt. Wir wollen nun eine elementare Inversion unserer Daten durchführen. Das Ziel ist es also die Werte der Modellparameter über einem regelmäßigen Gitter von $g = \left[\bar{I}, \bar{p}, \bar{E}, W\right]$ darzustellen. An einem beliebigen Gitterpunkt sind die Polarisationsgrößen $g_0 = \left[\bar{I}_0, \bar{p}_0, \bar{E}_0, \bar{W}_0\right]$ gegeben. Die dazugehörigen Modellparameter bestimmen wir, indem wir das Zielfunktional

$$Z = \sum_{i=1}^{4} (g_{\text{mod}}(b_1, b_2, \tau_z, \varepsilon) - g_0)^2 \tag{224}$$

minimieren. Wir verwenden zur Optimierung ein zweistufiges Verfahren. Die erste Stufe benutzt ein dem *simulated annealing* verwandtes Verfahres namens *threshold accepting* (Dueck und Scheuer, 1988), um in die Nähe des tiefsten Minimums zu kommen. Daran schließt sich ein Simplex-Verfahren an (Press et al., 1990), das das lokale Minimum genau bestimmt. Eine weitergehende Beschreibung des Verfahrens findet sich bei Dittmann und Köppen (1995). Als feste Blickrichtung wählen wir $\varphi = 0.365\pi$ und $\vartheta = 0.125$, da ,wie im vorigen Abschnitt gezeigt, dann die Effekte maximal sind. Wir haben gesehen, daß für alle Modelle ohne Streuung $\bar{W} = 1$ sein muß. Daher kann die gefundene Lösung nicht immer eindeutig sein.

Damit erhalten wir einen Satz von Diagrammen, die es erlauben direkt aus der Kenntnis der beobachtbaren Größen $\bar{I}, \bar{p}, \bar{E}, \bar{W}$ auf die physikalischen Parameter des emittierenden Gebietes zu schließen. Abb. (28) zeigt einen Schnitt durch das vierdimensionale Gebiet. $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{W} = 0.8936$ sind konstant. Aufgetragen sind jeweils die Kontourlinien für konstante Parameter b_1, ε, τ_z gegen den Polarisationsgrad $\bar{p}$ und die Elliptizität $\bar{E}$. Der Parameter b_2 ist fast in allen Fällen gleich b_1. Es werden also stets Lösungen mit einer quadratischen Grundfläche gefunden.

In Gebieten, in denen keine Parameterkonfiguration gefunden werden konnte, so daß die

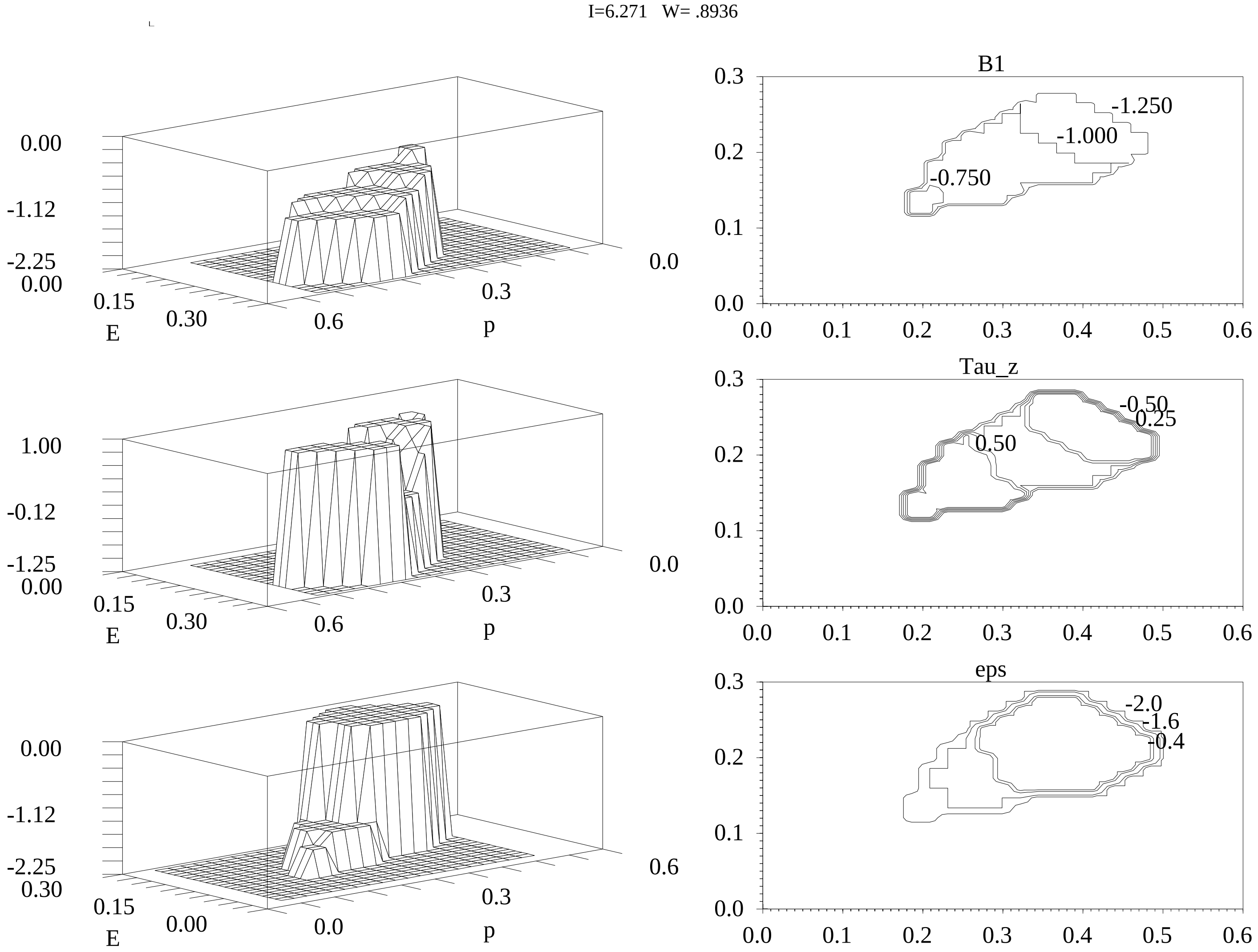


Abbildung 28: Inversion der Modelldaten. $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{W} = 0.8936$ sind konstant. In der linken Hälfte sind die Parameter b_1, τ_z, ε in Abhängigkeit von Polarisationsgrad $\bar{p}$ und Elliptizität $\bar{E}$ als 3D Plot gezeigt, in der rechten die entsprechenden Höhenlinien. Die Koordinatensysteme der 3D-Darstellungen von b_1 und τ_z sind zur besseren Einsicht in die Flächen um π um die z-Achse gedreht.

Zielfunktion einen Wert $Z \leq 0.1$ annimmt, sind die Parameter willkürlich auf einen Wert unterhalb des zulässigen Minimalwertes des Parameters gesetzt worden. Hätte man also in einer Messung $i\bar{I} = 6.271$, $\bar{W} = 0.8936$, $\bar{p} = 0.3$ und $\bar{E} = 0.2$ erhalten, ließen sich aus den Diagrammen sofort die Parameter $-1 \leq \lg b_1 \leq -0.75$, $\lg \varepsilon \geq -0.4$ und $0 \leq \lg \tau_z \leq 0.5$ bestimmen.

Aus Abb. (28) erkennt man, daß für einen hohen Polarisationsgrad und gleichzeitig eine hohe Elliptizität der Parameter b_1 fällt. Man erhält also elongierte Strukturen, Stäbe mit optisch dünner quadratischer Grundfläche. Die optische Dicke in z-Richtung ist $\tau_z = 10$ sowohl für kleine Polarisationsgrade und kleine Elliptizität wie auch für e und p groß. Im mittleren Bereich finden wir $\tau_z \approx 1$, die Strukturen sind also kürzer. Der Streuparameter steigt in derselben Weise an wie b_1.

Abb. (29) zeigt die gefundenen Parameter für dasselbe $\bar{I}$ aber für $\bar{W} = 0.6543$. Man findet für b_1 dieselben Tendenzen wie bei $\bar{W} = 0.8936$. Allerdings sind extreme Werte von $\bar{p}$ und $\bar{E}$ nicht mehr zulässig, da eine große Drehung des Polarisationswinkels nur bei starkem Einfluß der Streuung auftritt. Dies wird auch im Diagram von ε deutlich. Hier treten nur Werte von $\lg \varepsilon \leq -1$ auf.

In Abb. (30) zeigen wir einen Schnitt durch den Parameterraum bei festem $\bar{I}$ und festem $\bar{E}$. Man erkennt klar, daß Polarisationswinkel von $\bar{W} \geq 0.9$ und $\bar{W} \leq 0.68$ gar nicht auftreten können. Für hohe Polarisationsgrade nähert man sich der Geometrie des optisch dicken Würfels, während man bei $\bar{p} \leq 0.25$ und $\bar{W} \geq 0.8$ sich auf eine optisch dünne und elongierte Struktur hin bewegt. Der Streuparameter ist fast unabhängig von Polarisationsgrad und Winkel der Polarisation bei $\lg \varepsilon \approx -1.8$. Betrachtet man nun eine Sequenz von Diagrammen, bei denen die Elliptizität auf ihren Maximalwert steigt (Abb. 31 und Abbildungen im Anhang (C.1)), findet man, daß ε stets fast konstant ist. Daher ist der Streuparameter ein gutes Maß für die Elliptizität. Desweiteren fällt auf, daß bei maximaler Elliptizität nur eine Struktur mit $\tau_z = 10$, $b_1 = 0.1$ ohne Streuung ($\lg \varepsilon = 0$) vorhanden sein kann. Außerdem muß der Polarisationsgrad in der Nähe seines Maximalwertes liegen und $\bar{W} \approx 1$ sein.

Wir erhalten also folgende Ergebnisse:

1. Es treten nur Strukturen mit quadratischer Seitenfläche auf: $b_1 = b_2$
2. b_1 sinkt, wenn $\bar{p}$ und $\bar{E}$ steigen.
3. ε sinkt, wenn $\bar{p}$ und $\bar{E}$ steigen.
4. Eine deutliche Drehung des Polarisationswinkels tritt nur bei starker Streuung auf. ε sinkt, wenn $\bar{W}$ sinkt.
5. Die Elliptizität ist ein Maß für den Streuparameter ε.

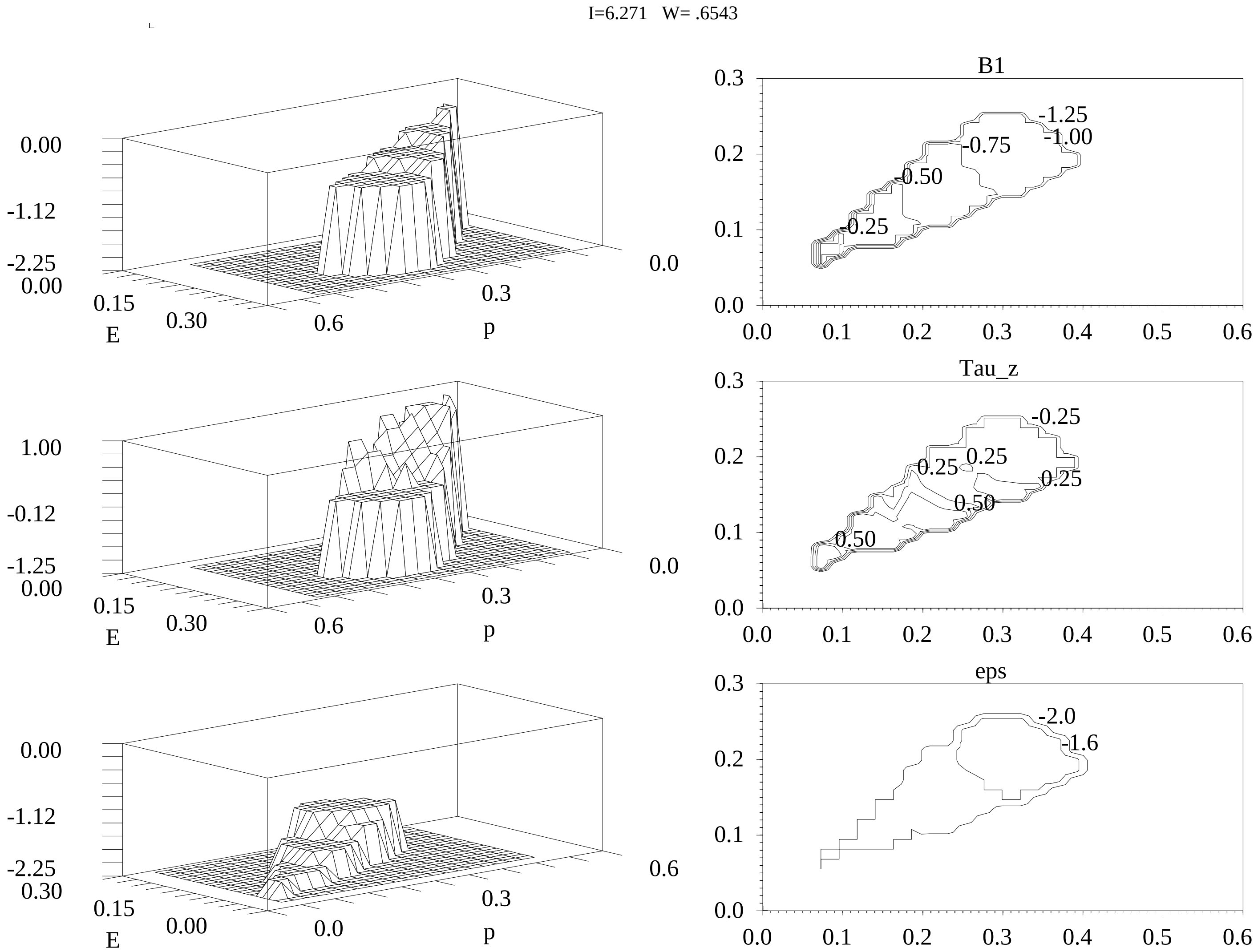


Abbildung 29: Inversion der Modelldaten. $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{W} = 0.6543$ sind konstant. In der linken Hälfte sind die Parameter b_1, τ_z, ε in Abhängigkeit von Polarisationsgrad $\bar{p}$ und Elliptizität $\bar{E}$ als 3D Plot gezeigt, in der rechten die entsprechenden Höhenlinien. Die Koordinatensysteme der 3D-Darstellungen von b_1 und τ_z sind zur besseren Einsicht in die Flächen um π um die z-Achse gedreht.

I=6.271 Ell= .1205

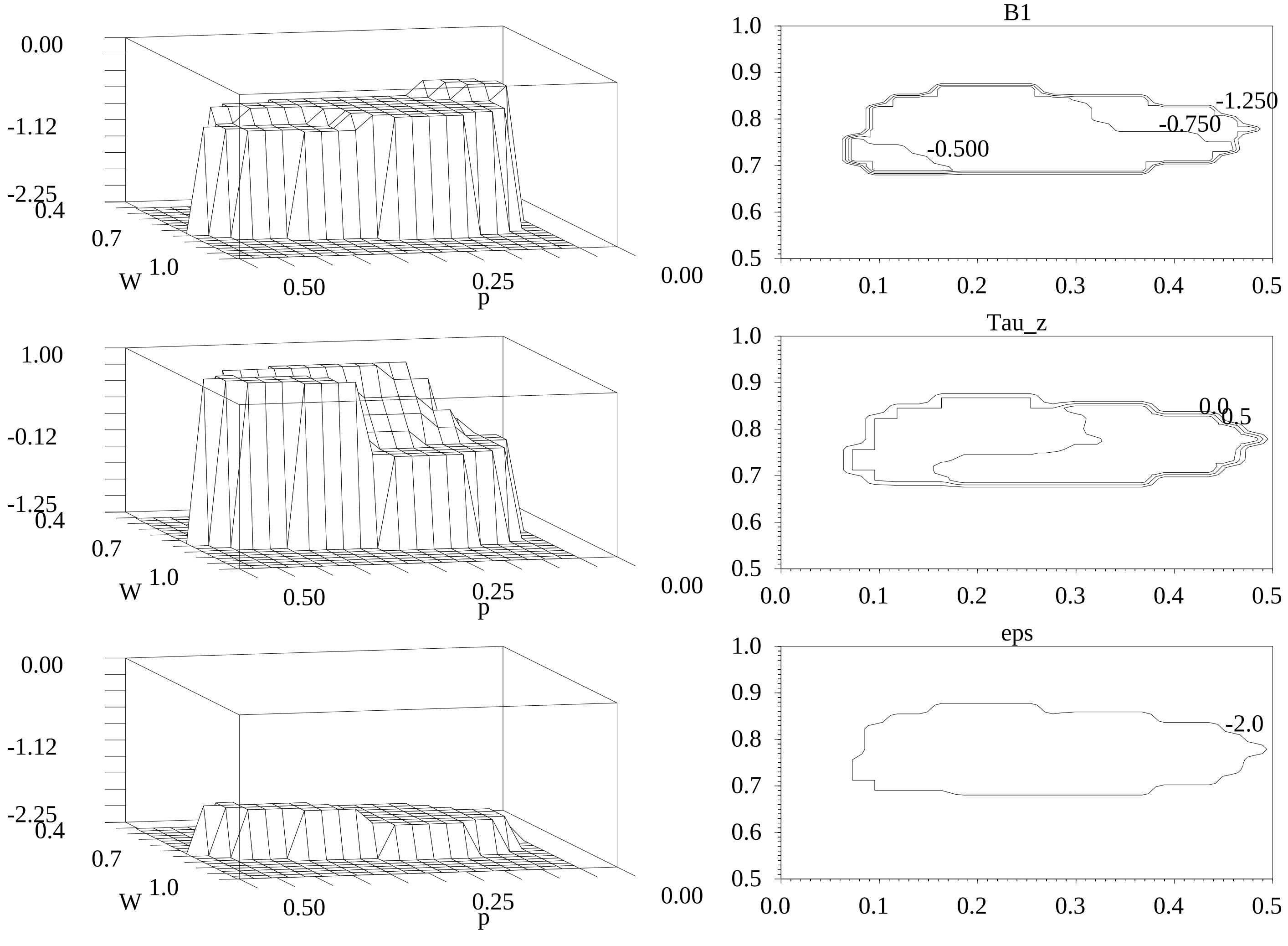


Abbildung 30: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{E} = 0.1205$.

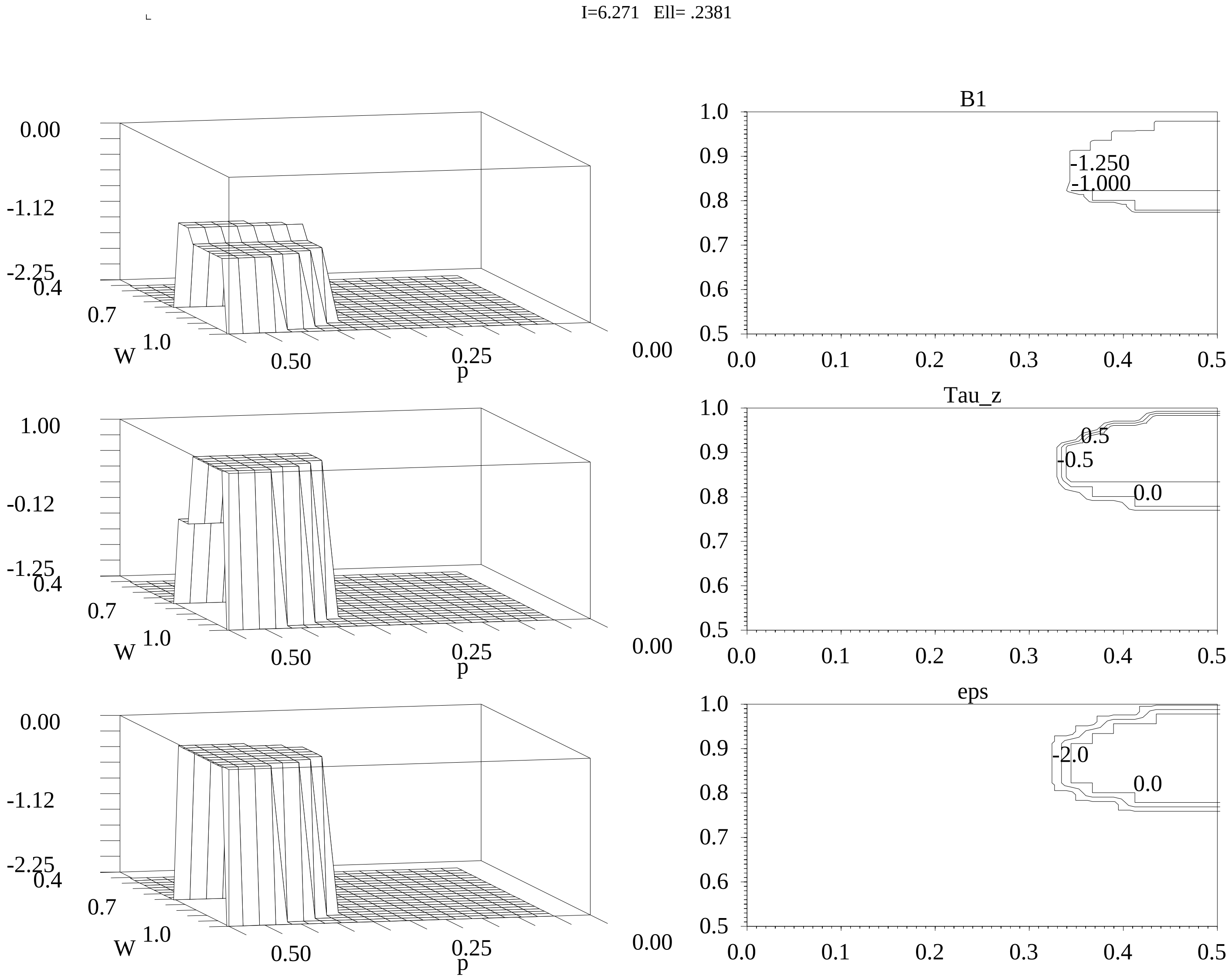


Abbildung 31: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{E} = 0.2381$.

5 Diskussion und Schlußbetrachtungen

Wir haben gezeigt, daß sich auf modernen Rechnern die Strahlungstransportgleichung in dreidimensionalen Medien unter Berücksichtigung der Polarisationseigenschaften lösen läßt. Im Fall der Rayleighstreuung läßt sich eine Zerlegung der Phasenfunktion in eine Summe von drei Matrixprodukten finden, von denen der erste Faktor nur von der Richtung des Photons nach dem Streuprozeß, der zweite nur von der Richtung vor dem Streuprozeß abhängt. Durch diese Zerlegung wurde eine Behandlung des Problems analog zum Fall des dreidimensionalen Strahlungstransportes ohne Polarisation (s. Adam, 1990) möglich. Wir lösen dann die Transportgleichung bei bekannter Quellfunktion mit Hilfe des Verfahrens der kurzen Charakteristiken. Innerhalb einer Zelle wird die Quellfunktion linear approximiert, so daß die Matrixexponentiallösung (s. Abschnitt. (2.3)) entlang des Strahls verwendet werden kann. Die Quellfunktion wird durch Jacobiiteration gefunden. Zusätzlich wird ein cg-Verfahren zur Beschleunigung der Konvergenz verwendet. Dieser Algorithmus benötigt bei $N = 4 \times 41^3 \times 256$ auf einer IBM RS6000 320 Workstation etwa vier Stunden CPU-Zeit.

Für einen Kasten mit Seitenlängen τ_x, τ_y und τ_z und einem Streuparameter ε haben wir ein Gitter von 40 Modellen gerechnet. Dabei haben wir folgende Annahmen getroffen.

- Magneto-optische Effekte können vernachlässigt werden.
- Die Extinktionsmatrix ist räumlich konstant.
- Die Emission ist räumlich konstant.

Mit diesen einfachen Annahmen erhalten wir bereits einen guten Überblick über das Verhalten der Polarisationseigenschaften eines Gebietes.

- Die Hauptbeiträge zu den Stokesparametern Q, U, V kommen aus optisch dünnen Bereichen.
- Starke Streuung verstärkt die Polarisation in optisch dicken Bereichen des Gebietes.
- Den stärksten Einfluß auf die Flußgrößen hat auch hier die optische Tiefe entlang des Sehstrahls und damit die Dimensionen des Quaders. Mit steigender optischer Tiefe sinkt der Polarisationsgrad.
- Auch für Konfigurationen, die in nur einer Richtung optisch dünn, in den anderen beiden aber optisch dick sind, dominieren die optisch dünnen Bereiche. Diese Modelle zeigen qualitativ eine starke Ähnlichkeit mit einem optisch dünnen Würfel.
- Die Streuung wirkt dem vorgenannten Effekt entgegen. Mit sinkendem Streuparameter ε steigt der Polarisationsgrad an. Dieser Effekt ist weniger ausgeprägt als die Variation mit der optischen Tiefe, so daß hier ein Effekt niedrigerer Ordnung vorliegt.

- Der Winkel der Polarisation W hängt nur sehr schwach von der optischen Tiefe ab, variiert aber deutlich mit dem Streuparameter ε.

- Für scheibenartige Strukturen wird der Polarisationswinkel gegen den Uhrzeigersinn gedreht, während bei allen anderen Konfigurationen eine Drehung mit dem Uhrzeigersinn stattfindet.

- Für nicht zu kleine Streuparameter hängen die Flußgrößen über ein Potenzgesetz von ε ab. Der Exponent liegt für fast alle Konfigurationen nahe bei eins. Nur im Fall des optisch dicken Würfels findet man einen kleineren Exponenten.

- Mit Hilfe einer einfachen Inversionsmethode haben wir Diagramme angegeben, die die unmittelbare Inversion der Flußgrößen zulassen.

Die von uns durchgeführten Untersuchungen beschränken sich noch auf recht einfache Konfigurationen. Das Verfahren ist aber sofort auch für komplexere Modelle anwendbar. Ortsabhängige Koeffizientenmatrizen und ortsabhängige Emission können ohne weiteres behandelt werden. Falls in diesen Fällen natürlich zu stark variierende Funktionen auftreten sollten, so daß die räumliche Auflösung der Strukturen nicht mehr ausreicht, müßte die Anzahl der Punkte erhöht werden. Da dies eine Frage der zur Verfügung stehenden Rechnerkapazität ist, stößt unser Program an eine praktische Grenze in einer Größenordnung von 40^3 Punkten. Ebenso lassen sich beliebige Randwerte spezifizieren, die in der vorliegenden Studie nur, um die Übersicht über die auftretenden Effekte zu bewahren, als Nullrandbedingungen gewählt wurden.

Es ist in der Astrophysik eine verbreitete Näherung nur unpolarisierte Strahlung zu betrachten. Unsere Herleitung der Transportgleichung hat gezeigt, daß sich die Gleichung für unpolarisierte Strahlung von dem Gleichungssytem für polarisierte Strahlung wesentlich unterscheidet. Zieht man zum Vergleich wieder die Unno-Lösung (vgl. Abschnitt 2.3 Gleichung 141) bei vernachlässigten magneto-optischen Effekten heran, findet man selbst in diesem einfachen Fall, daß die Abweichungen signifikant sein können. Zur Verdeutlichung zeigt Abb. (32) den relativen Fehler $\Delta I = (I_{\text{unpol.}} - I_{\text{pol.}})/I_{\text{unpol.}}$ in Prozent über der optischen Dicke T der Schicht und $\eta_5 = \sqrt{\eta_Q^2 + \eta_U^2 + \eta_V^2}$. Die Parameter haben wir zu $\alpha = \beta = \eta_I = 1$ gewählt. Im Grenzwert $T \to \infty$ nähert sich der Fehler $\Delta I = 0.5\eta_5^2/(1-\eta_5^2)$, für $\eta_5 = 0$ gehen die aus den Transportgleichungen mit und ohne Berücksichtigung der Polarisation ineinander über. Man sieht, daß gerade für optisch moderat dicke Strukturen die Fehler im Bereich von 10 % liegen. Für eine genaue Modellbildung ist daher eine Behandlung der Polarisation unerlässlich.

Laor und Netzer (1990) modellieren dünne Akkretionsscheiben in der Nähe massiver schwarzer Löcher. Allerdings lösen sie nicht die Strahlungstransportgleichung für polarisiertes Licht, sondern nehmen ein Randverdunkelungsgesetz an. Ihnen gelingt dann zu erklären, warum nur wenige AGN einen hohen Polarisationsgrad aufweisen. Für niedriege Frequenzen machen sie dafür die optische Dicke, bei hohen Frequenzen allgemein relativistische Effekte verantwortlich. Gerade diesen Effekt für niedrige Frequenzen sehen wir

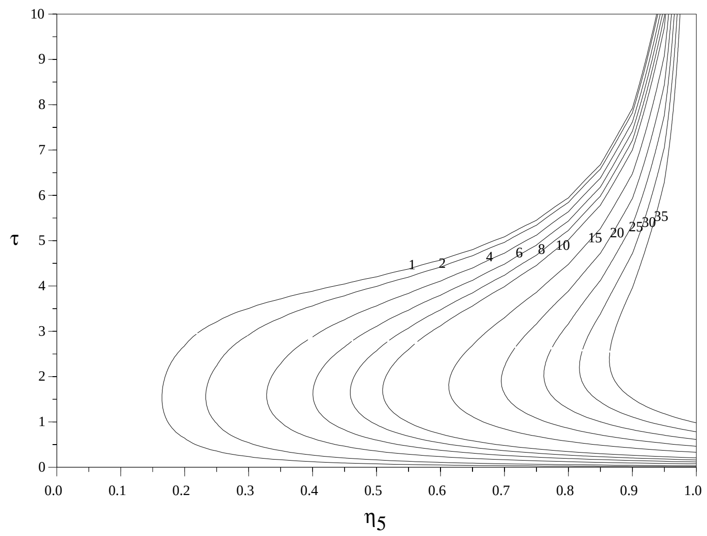


Abbildung 32: Verhältnis $\Delta I = (I_{\mathrm{unpol.}} - I_{\mathrm{pol.}})/I_{\mathrm{unpol.}}$ in Prozent der aus der Transportgleichung für unpolarisierte Strahlung gewonnenen Intensität zu der aus der Transportgleichung für polarisierte Strahlung gewonnenen. Die y-Achse gibt die optische Tiefe der Schicht, die x-Achse η_5 an. Wir haben eine Unno-Atmosphäre mit $\alpha = \beta = \eta_I = 1$ ohne Streuung angenommen.

auch in der Sequenz der Würfel (Abb. 23-24). Allerdings sehen wir auch, daß bei Scheiben, die nur in einer Richtung optisch dünn sind, dieser Effekt aufgehoben wird. Daher ist hier eine exakte Modellierung einer Scheibe notwendig.

Wir haben also gezeigt, daß die Transportgleichung im dreidimensionalen Fall tatsächlich gelöst werden kann und daß man interessante Ergebnisse erhält. Man kann also die ad-hoc Ansätze von Laor und Netzer (1990) oder Sunyaev und Titarchuk (1985) durch bessere Methoden ersetzen. Auch kann unsere Lösung zum Vergleich mit anderen Verfahren wie etwa Monte-Carlo-Rechnungen oder dem Verfahren der langen Charakteristiken herangezogen werden. Dennoch bieten sich an einigen Stellen Erweiterungen an, die aber den Rahmen dieser Arbeit überstiegen hätten.

1. Die Einträge der Extinktionsmatrix sollten durch realistische Koeffizienten ersetzt werden. Für Komponenten einer Zeeman-Linie sind diese gut bekannt. Im allgemeinen Fall aber gibt es nur wenige Ansätze, diese zu erhalten. Casini und Landi Degl'Innocenti (1993) berechnen quantenelektrodynamisch das polarisierte Spektrum des Wasserstoff Atoms, so daß wenigstens für dieses wichtige Element eine solide Grundlage vorhanden ist.

2. Bisher haben wir nur den grauen Fall betrachtet. Andererseits zeigen die Arbeiten von Stenflo (1976), daß im eindimensionalen Fall der Linientransport bereits sehr sicher behandelt werden kann. Ein wichtiger Schritt wäre es daher, auch in

drei Raumdimensionen Linien zu betrachten. Durch den zusätzlichen Freiheitsgrad werden allerdings noch einmal höhere Anforderungen an die Speichergröße gestellt.

3. Desweiteren sollten die zusätzlichen Effekte berücksichtigt werden, die auftreten, wenn sich die Photonen in einem bewegten Medium befinden. Die relevante Transportgleichung ist bereits von Acquista und Anderson (1974) formuliert worden. Insbesondere um die Anknüpfung für Beobachtungen der polarisierten Strahlung aus Akkretionsscheiben zu erreichen, ist dieser Punkt unerlässlich.

4. Schließlich sollte man weitere Streuprozesse betrachten. Zwar ist die Rayleighmatrix, mit der ja nicht nur die Rayleigh- sondern auch die Elektronenstreuung beschrieben werden kann ein wichtigen Fall, aber gerade im Hochenergiebereich werden andere Prozesse wie die Comptonstreuung dominant (Nagirner und Poutanen, 1994). Daher sollten auch diese Phasenmatrizen untersucht werden.

5. Da das eigentliche Interesse der Bestimmung physikalischer Parameter astronomischer Objekte gilt, sollte das inverse Problem intensiver betrachtet werden.

Es ist uns also gelungen die dreidimensionale Strahlungstransportgleichung mit Polarisation im Fall des Zwei-Niveau-Atoms zu lösen. Wir haben dabei auf alle Symmetrieannahmen verzichten, die das Problem in manchen Konfugurationen erheblich vereinfachen. Mit der Untersuchung der von uns gewählten Parameter ist die Grundlage gelegt für eine stärker an den Beobachtungen orientierte Modellierung konkreter astronomischer Objekte.

6 Literatur

Adam J., 1989, Dissertation, Univ. Heidelberg
Acquista C., Anderson J. L., 1974, ApJ, **191**, 567
Bohren C. F., Huffman D. R., *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* , 1983, John Wiley & Sons
Bregman J. N., 1990, A & A Review, **2**, 2
Bosma P. B., 1993, A&A, **279**, 572
Borra E. F., Landstreet J. D., 1980, ApJ Suppl.Ser., **42**, 421
Brown J. C., McLean I. S., 1977, A&A, **57**, 141
Buerger P. F., Collins G. W., 1970, ApJ, **161**, 1025
Cannon C. J., 1973, ApJ, **185**,621
Case K. M., Zweifel P. F., 1967, *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading
Casini R., Landi Degl'Innocenti E., 1993, A&A, **276**, 289
Cassinelli J. P., Hummer D. G., 1971, MNRAS, **154**,9
Chandrasekhar S., 1950, Radiative Transfer, Oxford University Press
Cropper M., Bailey J., McCowage J., Cannon R. D., Couch W. J., Walsh J. R., Strade J. O., Freeman F., 1988, MNRAS, **231**,695
Dittmann O. J., Köppen J., 1995, A&A, **297**,671
Domke H.,1975a, JQSRT, **15**, 669
Domke H.,1975b, JQSRT, **15**, 681
Draine B. T., 1988, ApJ, **333**, 848
Dueck G., Scheuer T., 1988, Heidelberg Sci. Center. Tech. Rep., 88.10.011
Faurobert-Scholl M., 1991, A&A, **246**,469
Gibbs A. G., Seto R., 1978, Journ. of Math. Phys., **19**, 2591
Glauber R. J.,1964 in *Quantum Optics and Electronics* ed. DeWitt C., Blandin A., Cohen-Tannoudji N., Gordon & Breach, New York
Grau G. K., 1978, *Quantenelektronik*, Vieweg, Braunschweig
Hansen J. E., Travis L. D., 1974, Space. Sci. Rev., **16**, 527
Hauschildt P. H., 1992, JQSRT, **47**,433
Heitler W.,1954 *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press
Hillier D. J., 1994, A&A, **289**,492
Höflich P., 1991, A&A, **246**,481
Hovenier J. W., 1987, A&A, **183**, 363
Hovenier J. W., van der Mee C. V. M., 1983, A&A, **128**, 1
Hovenier J. W., van de Hulst H. C., van der Mee C. V. M., 1986, A&A, **157**, 301
Hummer D. G., Rybicki G. B., 1971, MNRAS, **152**,1
Jefferies J., Lites B. W., Skumanich A., 1989, ApJ, **343**, 920
Jeffery D. J., 1989, ApJ Suppl.Ser., **71**, 951
Jeffery D. J., 1990, ApJ, **352**, 267
Kincaid D., Cheney W., 1991, *Numerical Analysis*, Brooks/ Cole Publ. Comp., Belmont
Kunasz P. B., Auer H., 1988, JQSRT, **39**, 67
Kuščer I., Ribarič M., 1959, Optica Acta, **6**, 42
Laor A., Netzer H., 1990, MNRAS, **242**, 560

Landi Degl'Innocenti E., 1983,Sol. Physics, **85**,3
Landi Degl'Innocenti E., 1987 in *Numerical Radiative Transfer*, ed. W. Kalkofen, Cambridge University Press
Landi Degl'Innocenti E., Landi Degl'Innocenti M.,1972, Sol. Physics, **27**,319
Landolfi M., Landi Degl'Innocenti E., Landi Degl'Innocenti M., Leroy J. L., 1993, A&A, **272**, 285
Landstreet J. D., Angel J. R. P., 1977, ApJ, **211**, 825
Mathis J. S., 1990, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **28**, 37
Martin P. G., Thompson I. B., Maza J., Angel J. R. P.,1983, ApJ, **266**, 470
Martin P. G., 1985, In *Active Galactic Nuclei*, ed. Dyson J. E., Manchester University Press
Martin B., Wickramasinghe D. T., 1979, MNRAS, **189**, 69
McCall M. L., 1984, MNRAS, **210**, 824
McCall M. L., Reid N., Bessell M. S., Wickramasinghe D. T., 1984, MNRAS, **210**, 839
Meggitt S. M. A., Wickramasinghe D. T., 1982, MNRAS, **198**, 71
Mendez M., Clocchiatti A., Benvenuto O. G., Feinstein C., Marraca H. G., 1988, ApJ, **334**,295
Mestel L., 1975 in *Physics of Ap-Stars, IAU Coll. 32*, ed. Weiss W. W., Jenkner H., Wood H. J., Wien
Miller J. S., Antonucci R. R. J., 1983, ApJ Lett., **271**, L7
Nagirner D. I., 1993, A&A, **275**,318
Nagirner D. I., Poutanen J., 1993, A&A, **275**, 325, Ng K. C., 1974, J. Chem. Phys., **61**, 2680
Olson G. L., Auer L. H., Buchler J. R., 1986, JQSRT, **35**,325 Olson G. L., Kunasz P. B., 1987, JQSRT, **38**, 325
Pahor S., Zweifel P. F., 1969, Journ. of Math. Phys., **10**, 581
Peraiah A., 1975, A&A, **40**, 75
Press W. H., Flannery, B. P., Teutolsky S. A., Vetterling W. T., 1986, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press
Schmitz F., Ulmschneider P., Kalkofen W., 1985, A&A, **148**, 217
Schulte-Ladbeck R.E., Nordsieck, K. H., Taylor M., Bjorkman K. S., Magalhaães A. M., Wolff M. J., 1992, ApJ, **387**, 347
Serkowski K., 1970, ApJ, **160**, 1083
Shakovskhoi N. M., 1965, Soviet Astron. A. J., **8**, 833
Siewert C. E., 1981, ApJ, **245**,1080
Siewert C. E., 1993, JQSRT, **50**,603
Siewert C. E., McCormick N. J., 1993, JQSRT, **50**, 531
Siewert C. E., Thomas J. R., 1990, JQSRT, **43**, 433
Siewert C. E., Thomas J. R., 1991, JQSRT, **45**, 273
Sobolev V. V., 1947, *Moving Envelopes of Stars*, Leningrad (orig.), (engl.: 1960, Harvard University Press, Cambridge)
Solanki S. K., 1993, Sp. Sc. Rev., **63**, 1
Somerville W. B., Allen R. G., Carnochan D. J., Lida He, McNally D., Martin P.G., Morgan D. H., Nandy K., Walsh J. R., Whittet D. C. B., Wilson R., Wolff M. J, 1994, ApJ, **427**, L47-L50

Stenflo J. O., 1976, A&A, **46**, 61
Stenflo J. O., Lindegren L., 1977, A&A, **59**, 367
Stenflo J. O., Stenholm L. G., 1976, A&A, **46**, 69
Stenholm L. G., Stenflo J. O., 1978, A&A, **67**, 33
Stenholm L. G., Störzer H., Wehrse R., 1991, JQSRT, **45**,47
Stockman H. S., Moore R. L., Angel J. R. P., 1984, ApJ, **279**,485
Sunyaev R. A., Titarchuk L. G., 1985, A&A, **143**,374
Svatoš J., Šolc M., 1980, Astrop. and Sp. Sc., **77**, 511
Rees D. E., Murphy G. A., Durrant C. J., 1989, ApJ, **339**, 1093
Rybicki G. B., Hummer D. G., 1983, ApJ, **274**, 380
Tomaszewski L., Landstreet J. D., McLean I. S., Coyne G. V., 1980, ApJ, **238**,935
Vinsome P. K. W., 1976, In *Proceedings of the Fourth Symposion on Reservoir Simulations*, Boulder
Unno W., 1956, Publ. Astron. Soc. Japan, **8**,108
Voshchinnikov N. V., Karjukin V. V., 1994, A&A, **288**, 883
Wickramasinghe D. T., private comm.

A Matrixexponentiallösung für eine Unno-Atmosphäre mit starken magnetooptischen Effekten

Insbesondere im Kontinuum von Sternspektren hat man es oft mit dem Fall starker magneto-optischer Effekte zu tun. Weit vom Kern der Spektrallinien entfernt fallen nämlich die Profilfunktionen der Absorptionskoeffizienten $\eta_I, \eta_Q, \eta_U, \eta_V$ schneller ab als die der Koeffizienten der Faradayrotation. Daher nehmen wir nun an, daß gilt:

$$\rho_r, \rho_w \gg \eta_I, \eta_Q, \eta_U, \eta_V \tag{225}$$

Desweiteren sei auch $\rho_r^2 \gg \rho_w$ und wie in Abschnitt (2.3) sei die Quellfunktion linear in der optischen Tiefe τ.

Die Koeffizienten der inversen Matrix $\underline{\eta}^{-1}$, die in der Unno-Lösung (Glg. 141) benötigt werden, sind dann:

$$\begin{aligned}
\eta_5 &= -\rho_r^2 && (226)\\
D &= \rho_r^2(\eta_I^2 - \eta_V^2) && (227)\\
\frac{d_0}{D} &= \frac{\eta_I}{\eta_I^2 - \eta_V^2} && (228)\\
\frac{d_1}{D} &= -\frac{1}{\eta_I^2 - \eta_V^2} && (229)\\
\frac{d_2}{D} &= \frac{1}{\rho_r^2}\frac{\eta_I}{\eta_I^2 - \eta_V^2} && (230)\\
\frac{d_3}{D} &= -\frac{1}{\rho_r^2}\frac{1}{\eta_I^2 - \eta_V^2} && (231)
\end{aligned}$$

Analog zum Fall der kleinen magneto-optischen Effekte führen wir nun wieder eine Blockmatrixnotation ein. Man sieht, daß nur in der 3×3 Untermatrix ρ der Einfluß der Faraday-Parameter auftritt. Daher haben wir nun eine Möglichkeit an der Hand, verschiedene Ordnungen von ρ zu betrachten.

$$\begin{aligned}
\underline{M} &= \begin{bmatrix} 0 & \vec{\eta}^T \\ \vec{\eta} & \rho \end{bmatrix} && (232)\\
\underline{M}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} && (233)\\
\underline{M}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho^2\vec{\eta} & \rho^3 \end{bmatrix} && (234)\\
\rho^2 &= \begin{bmatrix} -\rho_r^2 & 0 & \rho_r\rho_w\cos(2\vartheta) \\ 0 & -\rho_r^2 & \rho_r\rho_w\sin(2\vartheta) \\ \rho_r\rho_w\cos(2\vartheta) & \rho_r\rho_w\sin(2\vartheta) & 0 \end{bmatrix} && (235)
\end{aligned}$$

Die Unno-Lösung nimmt nun folgende Gestalt an:

$$\underline{I}I_{\mathrm{Unno}}(\tau) \;=\; \begin{bmatrix} \alpha+\beta\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{\eta_I^2-\eta_V^2} \begin{bmatrix} +\eta_I \\ -\eta_V \frac{\rho_w \cos(2\vartheta)}{\rho_r} \\ -\eta_V \frac{\rho_w \sin(2\vartheta)}{\rho_r} \\ -\eta_V - \eta_Q \frac{\rho_w \cos(2\vartheta)}{\rho_r} - \eta_U \frac{\rho_w \sin(2\vartheta)}{\rho_r} \end{bmatrix} \tag{236}$$

Da im Fall $\vartheta \to 0$ U gegen Null geht, ist es oft wünschenswert auch die nächste Ordnung in ρ_r noch zu berücksichtigen. Diese tritt in $\underline{M}^2$ auf.

$$\underline{M}^2 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho\vec{\eta} & \rho^2 \end{bmatrix} \tag{237}$$

Man erhält dann einen zusätzlichen Summanden U_2 der Form:

$$U_2 = \frac{\eta_I}{\eta_I^2-\eta_V^2} \frac{\eta_Q\rho_r - \eta_V\rho_w\cos(2\vartheta)}{\rho_r^2} \tag{238}$$

Leider erhält man nun einen negativen Radikanden für y. Dies liegt daran, daß unter unseren Annahmen $\underline{\eta}$ nicht mehr in $\mathcal{R}$ diagonalisiert werden kann. Daher betrachten wir die Matrixexponentialfunktion vorübergehend als eine Funktion über $\mathcal{C}$ und beschränken sie hinterher wieder auf die reelle Achse. Formell können die Gleichungen (98-101) immer noch verwendet werden, wenn man nur $y = i\frac{1}{2}\sqrt{p-\eta_5}$ setzt und $\sinh(ix) = i\sin(x)$ and $\cosh(ix) = \cos(x)$ verwendet. Die Koeffizienten der Matrixexponentialfunktion lauten dann:

$$\eta_5 = -\rho_r^2 \tag{239}$$

$$\rho_3 = \rho_r^2 \tag{240}$$

$$x = 0 \tag{241}$$

$$y = i\rho_r \tag{242}$$

$$c_0 = \frac{\exp(\eta_I\tau)}{\rho_r^2} \tag{243}$$

$$c_1 = \frac{\exp(\eta_I\tau)}{\rho_r^2}\tau \tag{244}$$

$$c_2 = \frac{\exp(\eta_I\tau)}{\rho_r^2}(1-\cos(\rho_r\tau)) \tag{245}$$

$$c_3 = \frac{\exp(\eta_I\tau)}{\rho_r^2}(\tau - \frac{1}{\rho_r}\sin(\rho_r\tau)) \tag{246}$$

Die Matrixexponentialfunktion selbst kann dann ebenfalls in der gewünschten Ordnung aus den Potenzen von $\underline{M}$ und den Koeffizienten zusammengesetzt werden.

B Katalog der Flußgrößen aller Modelle

Auf den folgenden Seiten werden für alle Modelle, die wir gerechnet haben, die Flußgrößen abgebildet. Es sind stets die über die Oberfläche integrierten Stokesparameter und die dazugehörigen Polarisationsgrade, Elliptizitäten und Polarisationswinkel gegen μ aufgetragen. Die vier Kurven entsprechen jeweils den vier möglichen Werten des Streuparameters ε.

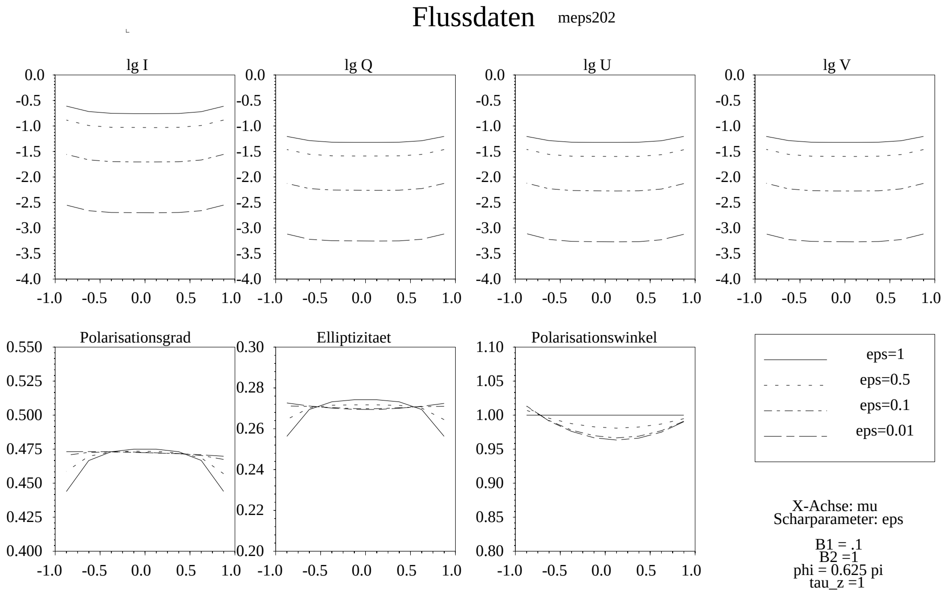


Abbildung 33: Modell mit $\tau_z = 1$, $b_1 = 0.1$ und $b_2 = 1$

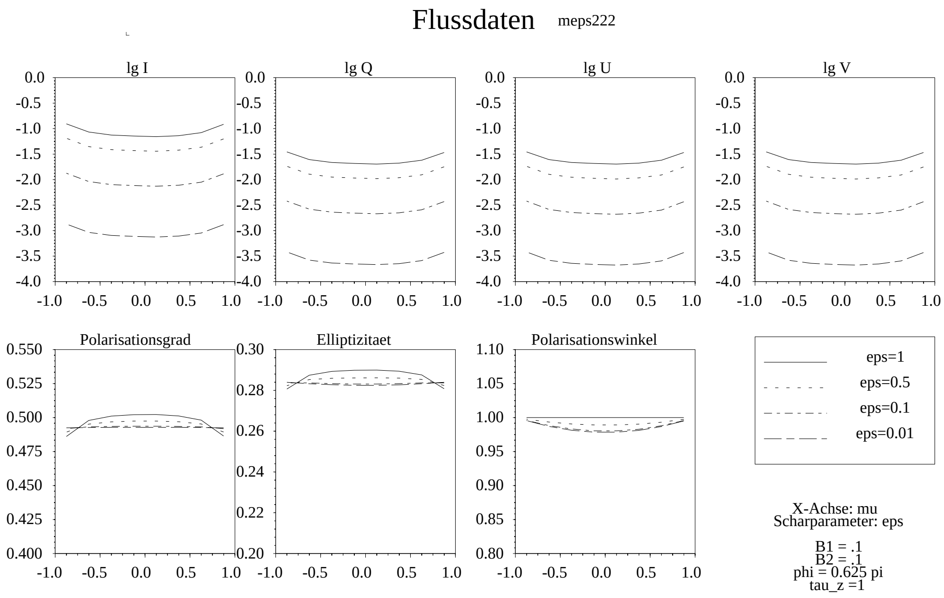


Abbildung 34: Modell mit $\tau_z = 1$, $b_1 = b_2 = 0.1$

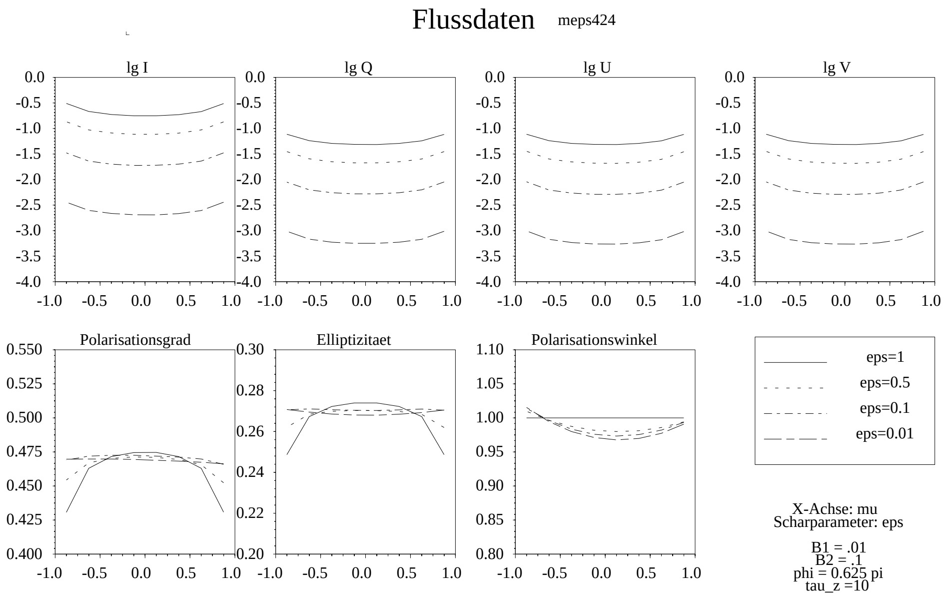


Abbildung 35: Modell mit $\tau_z = 10$, $b_1 = 0.01$ und $b_2 = 0.1$

C Katalog der Inversionsdaten

C.1 Flächen mit konstanter Intensität und konstanter Elliptizität

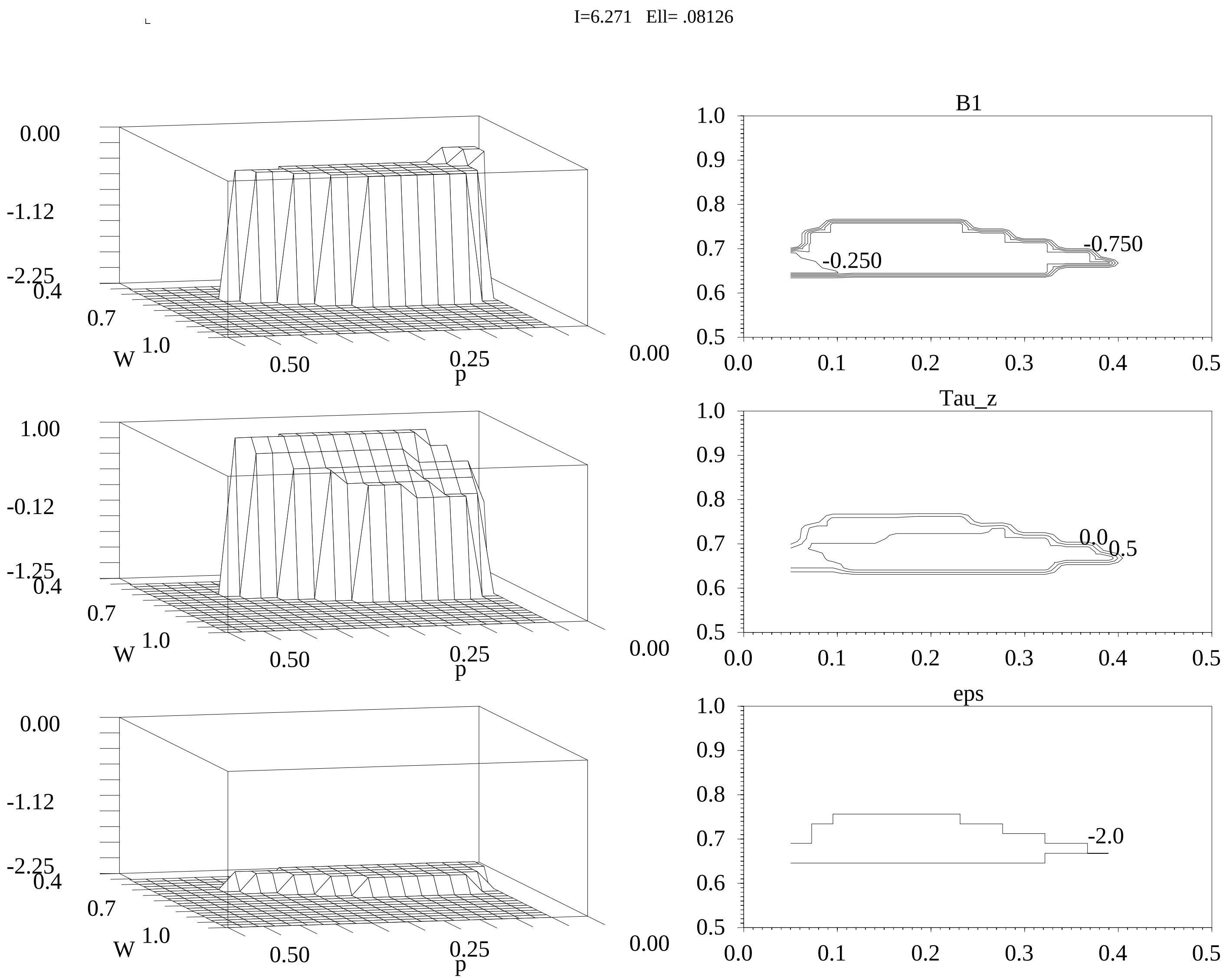


Abbildung 36: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{E} = 0.08126$.

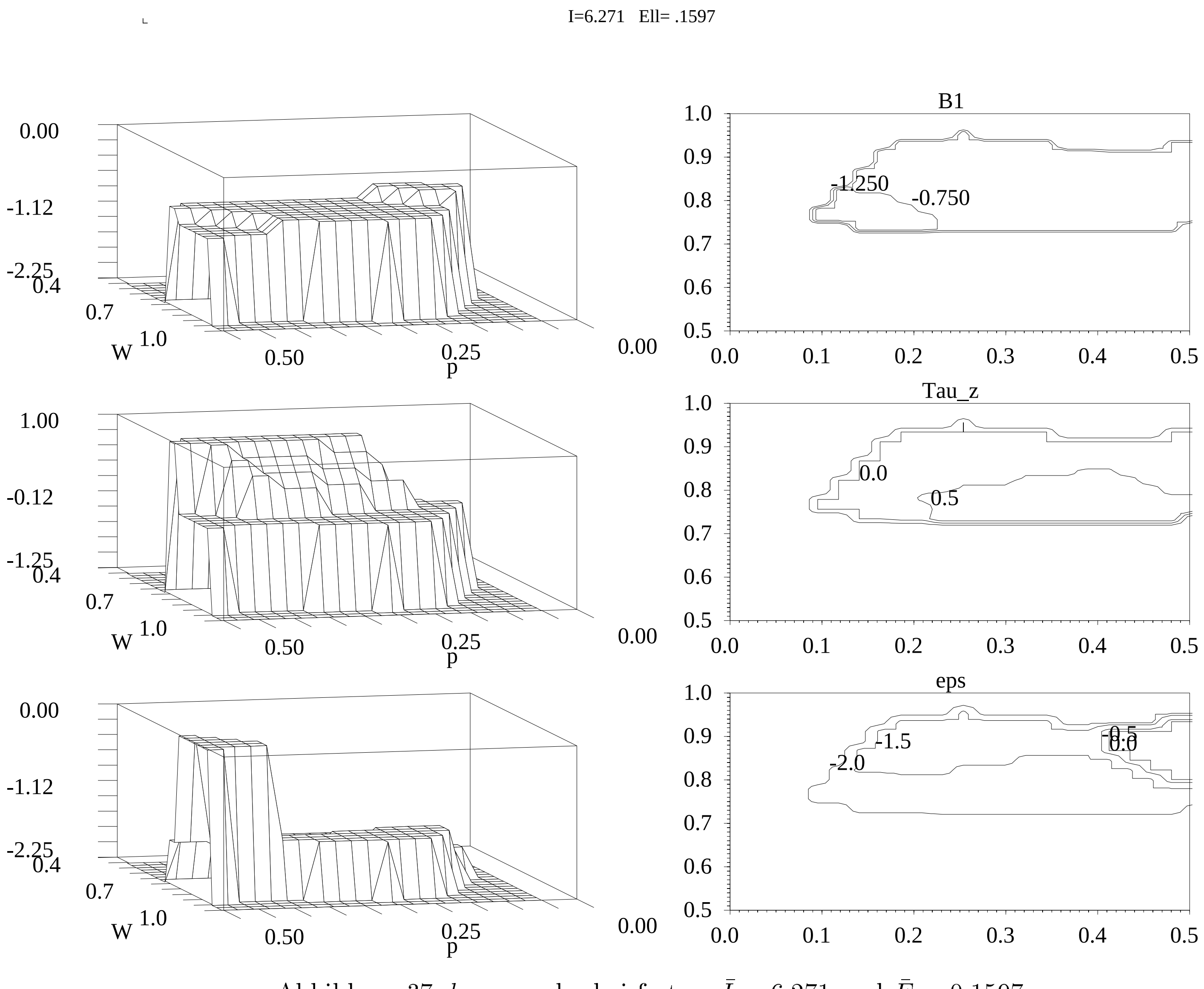


Abbildung 37: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{E} = 0.1597$.

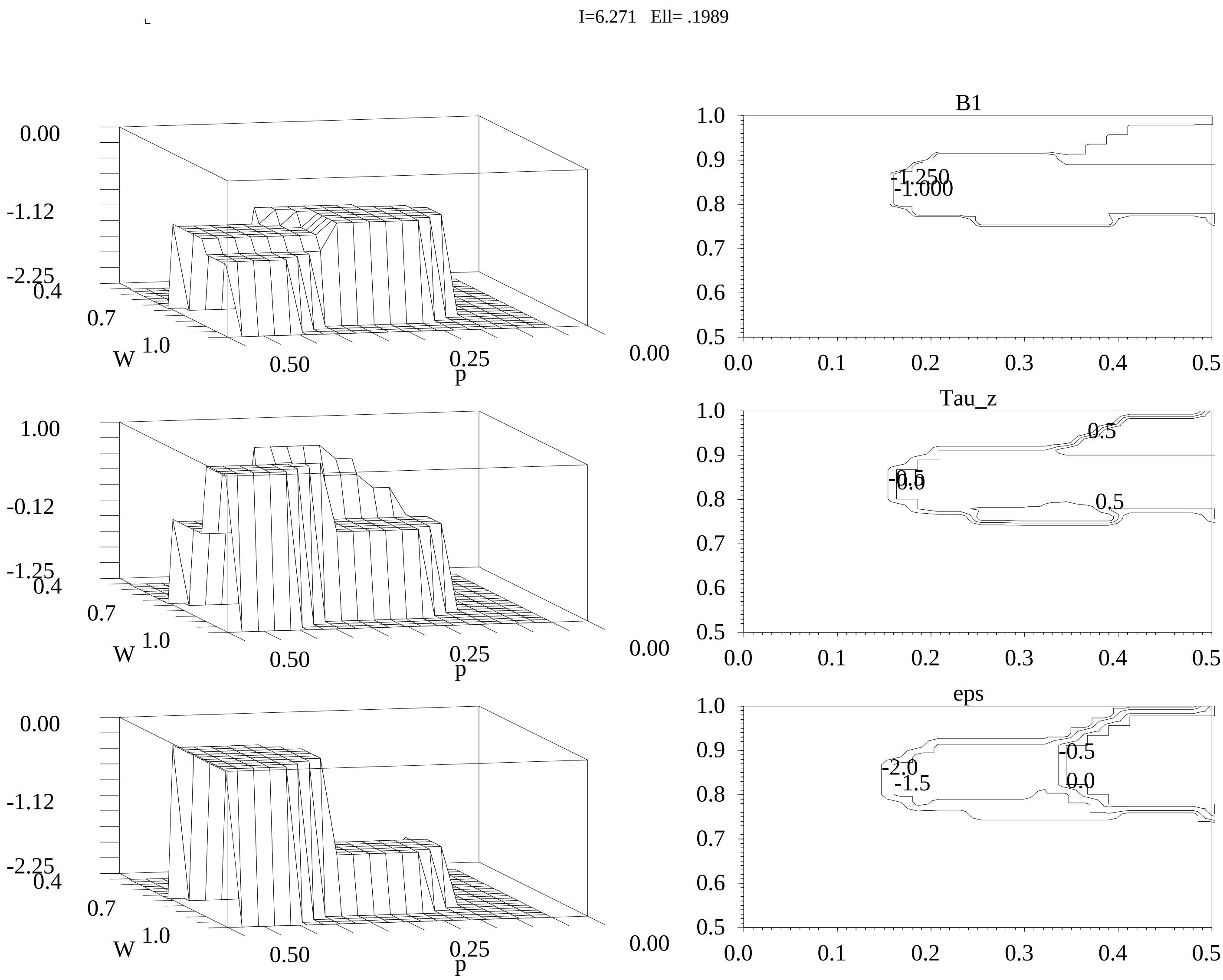


Abbildung 38: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{E} = 0.1989$.

I=6.271   Ell= .2773

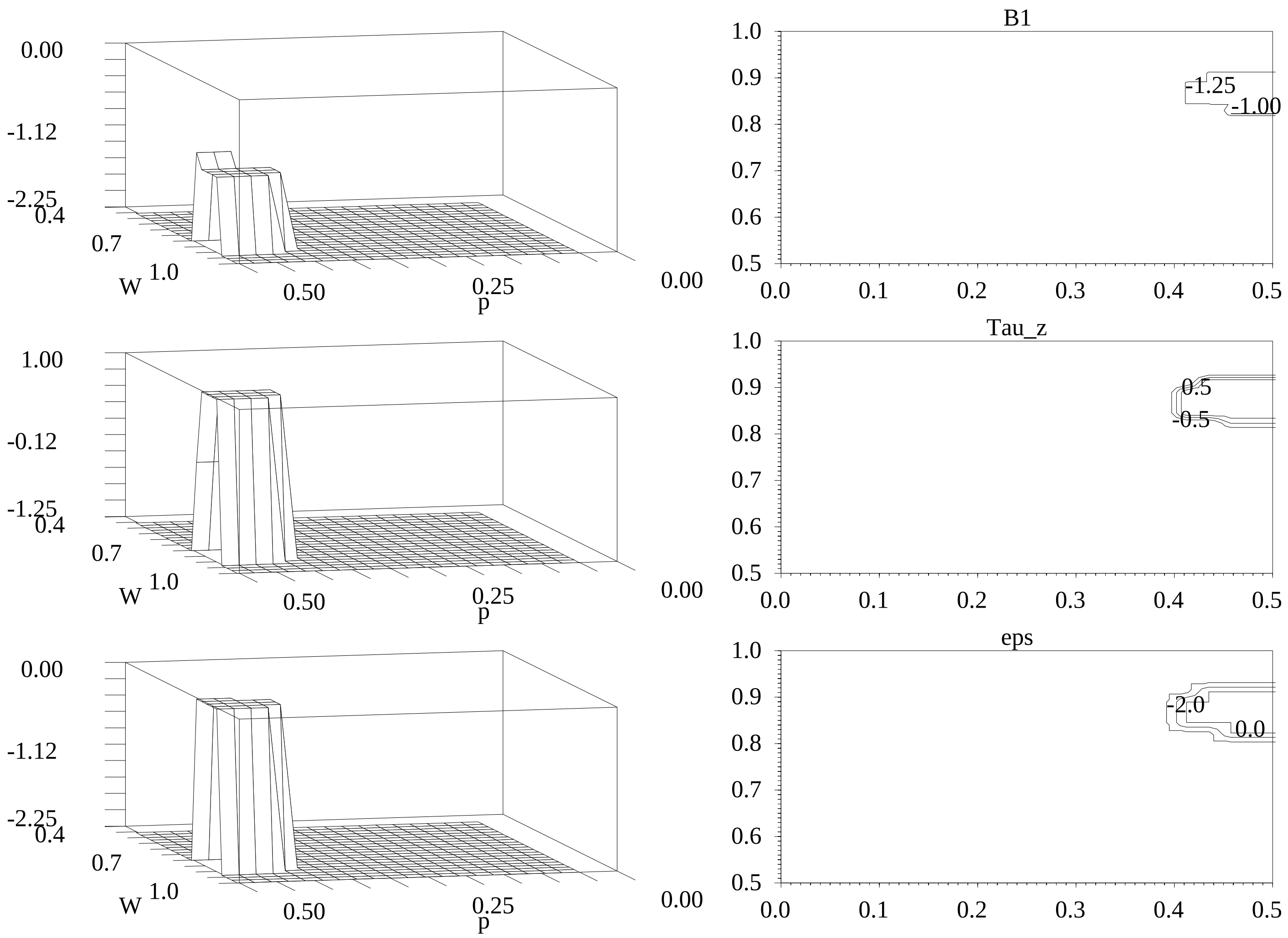


Abbildung 39: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{E} = 0.2773$.

C.2 Flächen mit konstanter Intensität und konstantem Polarisationswinkel

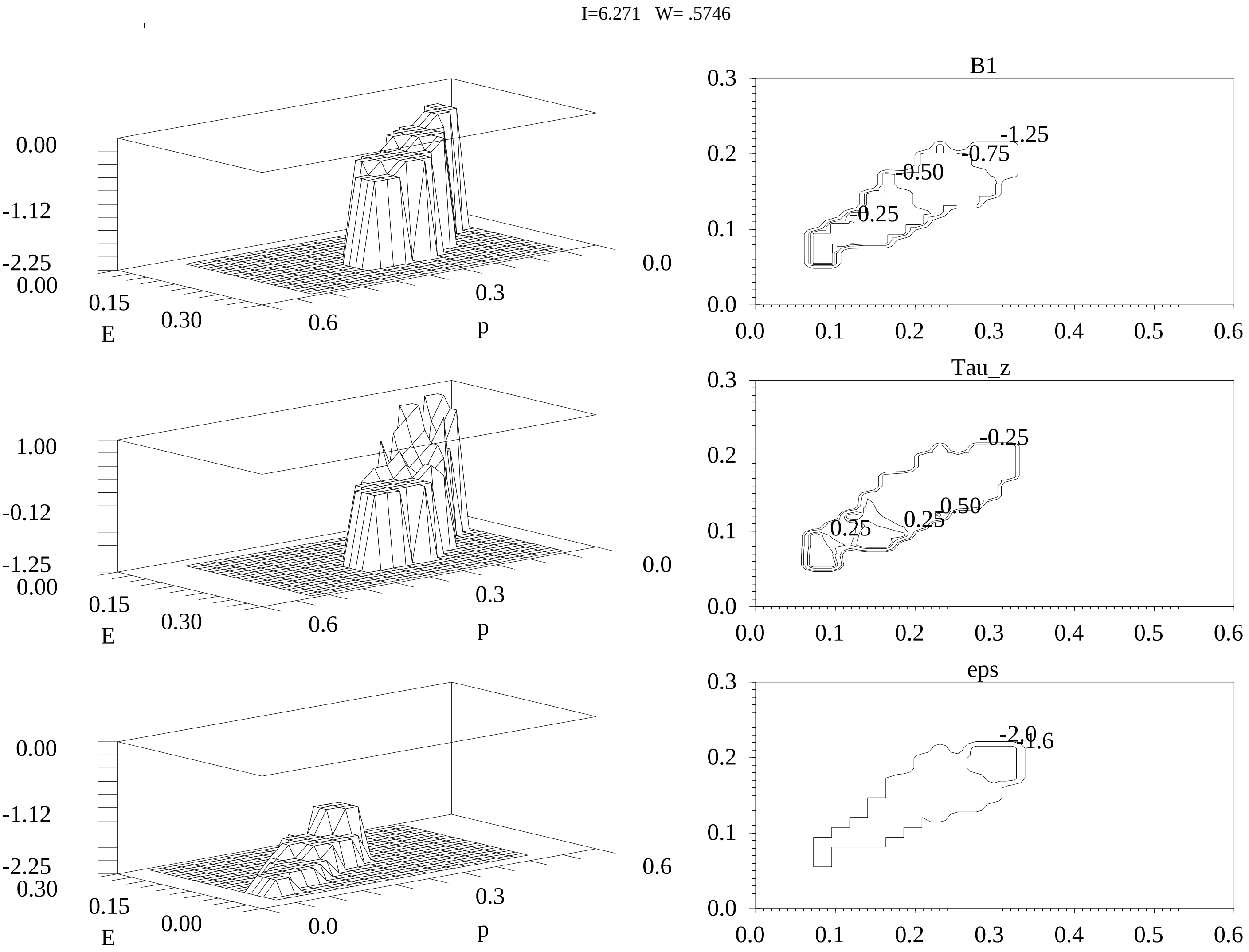


Abbildung 40: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{W} = 0.5746$.

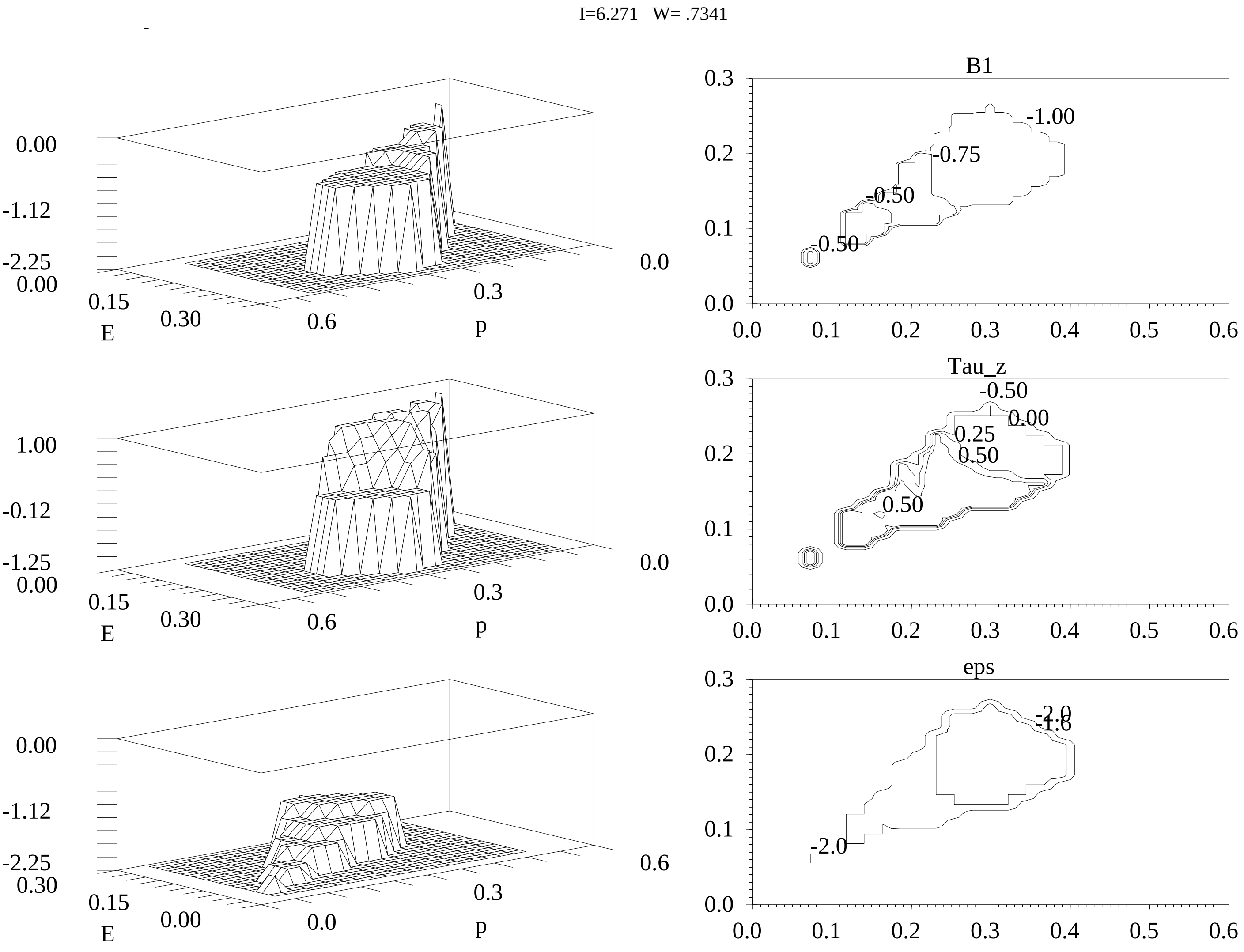


Abbildung 41: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{W} = 0.7341$.

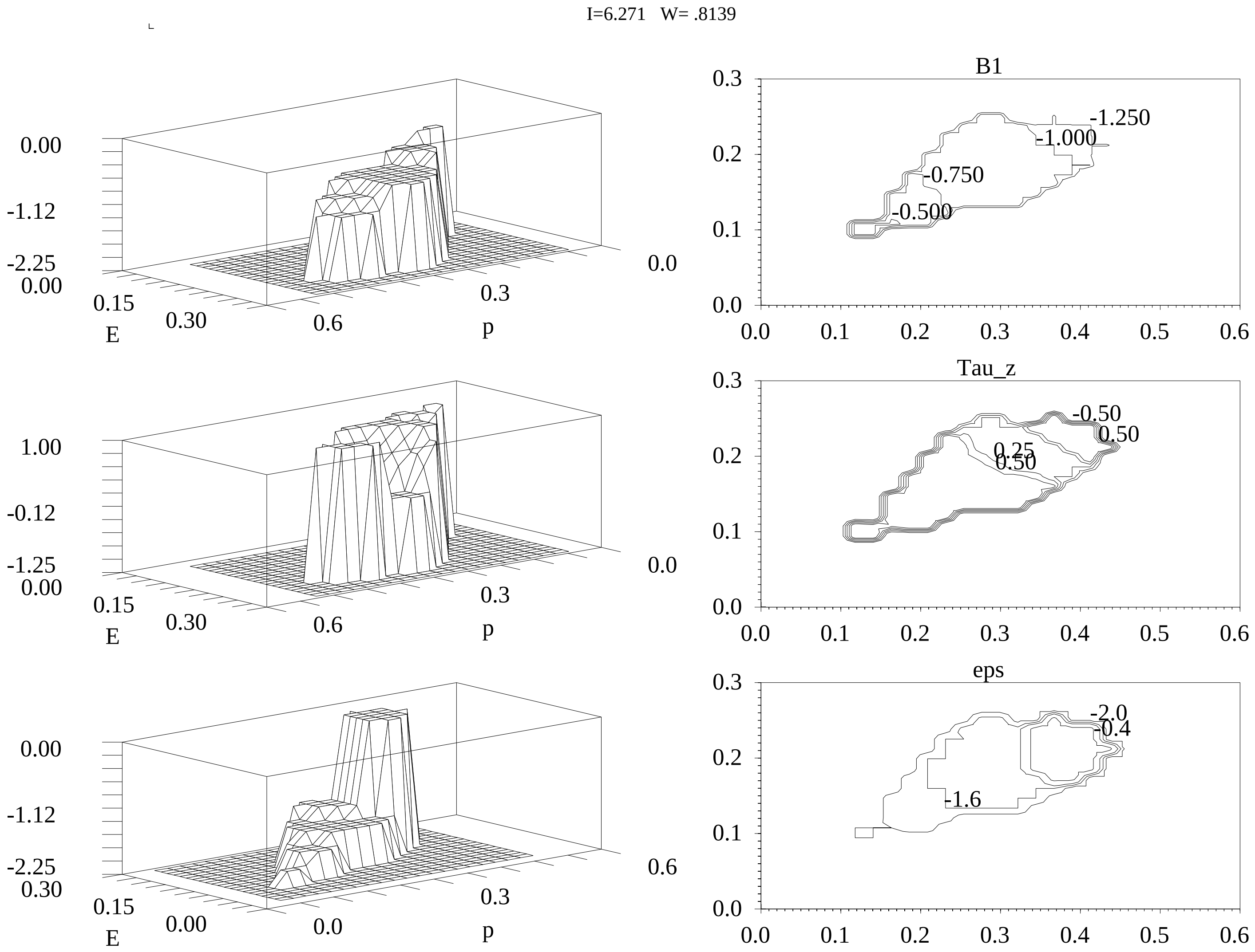


Abbildung 42: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{W} = 0.8139$.

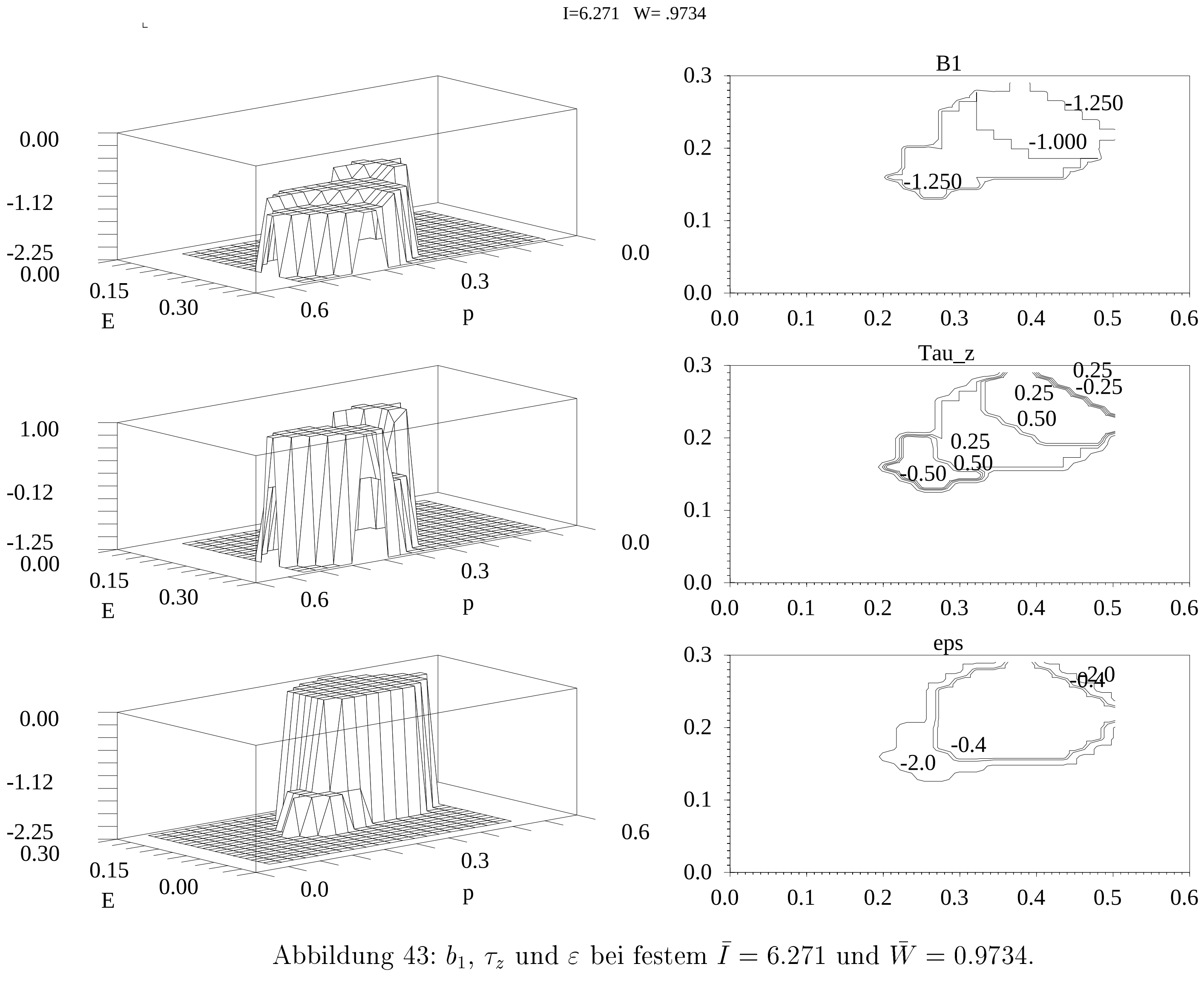


Abbildung 43: b_1, τ_z und ε bei festem $\bar{I} = 6.271$ und $\bar{W} = 0.9734$.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. R. Wehrse und Herrn Prof. Dr. W. Jäger für die Vergabe des interessanten Dissertationsthemas und die stete Gesprächs- und Hilfsbereitschaft im Verlaufe der Arbeit.

Herrn Prof. B. Wolf danke ich für die Anfertigung des Zweitgutachtens.

Den Herren Dipl.-Math. G. Kanschat, Dr. R. Papkalla, Dipl.-Phys. J. Theurer und Dr. B. Buchholz danke ich für wertvolle Hinweise und Kommentare.

Allen Mitgliedern des Instituts für theoretische Astrophysik und des Graduiertenkollegs am Interdisziplinären Zentrum für wissenschaftliches Rechnen danke ich für dir gute Arbeitsatmosphäre und die stete Hilfsbereitschaft.

Meinen Eltern möchte ich dafür danken, daß sie mir das Studium ermöglicht haben und mir immer zur Seite standen.

Meiner Frau gilt mein Dank für ihre Unterstützung.

Dem Graduiertenkolleg *Modellierung und wissenschaftliches Rechnen in Mathematik und Naturwissenschaften* danke ich für die finanzielle Unterstützung der Arbeit.