Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

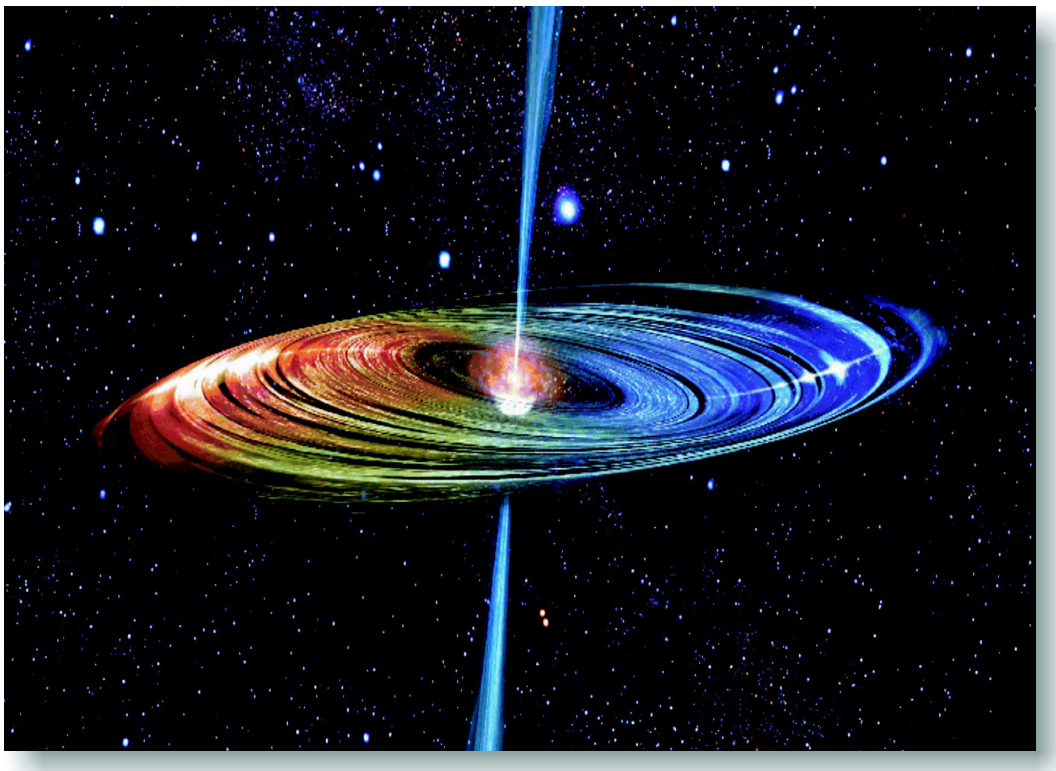
Diplomarbeit
im Studiengang Physik
vorgelegt von

Dominikus Heinzeller
aus Weilheim i. OB

2005

Das Eddington-Limit in Akkretionsscheiben

Die Diplomarbeit wurde von Dominikus Heinzeller ausgeführt am
Institut für Theoretische Astrophysik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Wolfgang J. Duschl



Seyfert-Galaxie NGC 4258 (künstlerische Darstellung). Mit freundlicher Genehmigung des National Radio Astronomy Observatory und John Kagaya

So simple a thing as a star.

Sir A. S. Eddington

Zusammenfassung

Das Eddington-Limit in Akkretionsscheiben

Das Eddington-Limit spielt, obwohl ursprünglich für Sterne abgeleitet, auch in der Theorie der Akkretionsscheiben eine entscheidende Rolle. In dieser Arbeit wird die dem Eddington-Limit entsprechende kritische Akkretionsrate für verschiedene Modelle von Akkretionsscheiben untersucht und mit der klassischen Eddington-Rate verglichen. Es wird gezeigt, daß die kritischen Akkretionsraten – abhängig vom verwendeten Akkretionsscheibenmodell – erheblich von der klassischen Größe abweichen können. Ein wesentliches Resultat dabei ist, daß die äußeren Regionen der Scheibe erheblich höhere Akkretionsraten zulassen, während sie in den inneren Regionen in der gleichen Größenordnung wie das klassische Limit liegen.

In den daran anschließenden Betrachtungen wird ein einfaches Modell, bestehend aus Akkretionsscheibe und Atmosphäre, aufgestellt und dessen möglicher Zusammenhang mit der Entstehung von Jets in den kritischen inneren Regionen von Akkretionsscheiben und dem Abtransport von Drehimpuls aus den Scheiben diskutiert.

Abstract

The Eddington-Limit in accretion discs

Although the Eddington-Limit has originally been derived for stars, it also becomes important in the theory of accretion discs. In the here presented diploma thesis, the critical accretion rate corresponding to the Eddington-Limit is calculated from various disc models. It is shown that the obtained results can differ extremely from the classical Eddington accretion rate, depending on the disc model. One main consequence thereby is the fact, that these accretion rates can be significantly higher in the outer regions, whilst getting close to the classical quantity in the inner regions of the disc.

In more detailed investigations of the inner part of the disc, a simple model is built, showing up a possible explanation for jets originating from the inner region. At the same time, this model provides a potential mechanism for transferring angular momentum out of the disc.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**
- 1.1 Notationen, Einheitensystem . . . 6
- 1.2 Das klassische Eddington-Limit . . . 7
- 1.3 Gasdruck – Strahlungsdruck . . . 9
  - 1.3.1 Anwendungsbeispiel Stern: Die Sonne . . . 9
  - 1.3.2 Anwendungsbeispiel α-Scheibe . . . 10

2 Klassische α-Scheiben **11**
- 2.1 Das Eddington-Limit in vertikaler Richtung . . . 11
  - 2.1.1 $h/s =$ const. . . . 11
  - 2.1.2 $h/s \neq$ const. . . . 15
  - 2.1.3 $h/s \neq$ const., $\kappa \neq$ const. . . . 21
- 2.2 Das Eddington-Limit in radialer Richtung . . . 24
  - 2.2.1 $h/s \neq$ const. . . . 26
  - 2.2.2 $h/s \neq$ const., $\kappa \neq$ const. . . . 28
  - 2.2.3 Obere Schranke durch die Radialgeschwindigkeit . . . 31

3 Erweiterung des klassischen Modells **36**
- 3.1 Die Rolle der Advektion . . . 36
  - 3.1.1 Modell . . . 37
  - 3.1.2 Das Eddington-Limit . . . 40
  - 3.1.3 $h/s =$ const. . . . 46
  - 3.1.4 Analytische Betrachtung im Grenzfall dünner Scheiben . . . 47
  - 3.1.5 Zusammenfassung . . . 50
- 3.2 Vertikale Akkretionsflüsse, Jets . . . 51
  - 3.2.1 Theoretische Modellierung . . . 51
  - 3.2.2 Numerische Lösung . . . 60
- 3.3 Das allgemeine Problem . . . 67
  - 3.3.1 Kräfteberechnung im System *KS'* . . . 69
  - 3.3.2 Kräfteberechnung im System *KS* . . . 76
  - 3.3.3 Umrechnung aus den Zylinderkoordinaten . . . 82

4 Zusammenfassung **89**

Literatur **91**

Anhang **93**

1 Einleitung

Als Sir Arthur Stanley Eddington (1882–1944) im Jahre 1920 als erster die Vermutung äußerte, daß Sterne ihre Energie durch Kernfusion von Wasserstoff zu Helium erzeugen, verursachte er einen drastischen Wandel der bis zu diesem Zeitpunkt akzeptierten Vorstellungen des Sternaufbaus. Eddington, der in astronomischen Kreisen auch gerne als „Vater der modernen theoretischen Astrophysik“ bezeichnet wird, konnte in den darauffolgenden Jahren viele Einzelheiten über die innere Struktur von Sternen ableiten. Unter anderem erkannte er, daß die Opazität von Sternen hauptsächlich durch die Streuung von Elektronen erzeugt wird. Diese Tatsache ließ in folgern, daß es – abhängig von der Masse des Sterns – eine Obergrenze für dessen Leuchtkraft geben müsse. Anderenfalls würde die durch den Strahlungsdruck ausgeübte Kraft die Gravitationskraft überwiegen und der Stern wäre instabil. Die Erkenntnisse der intensiven Forschung über das Innenleben der Sterne veröffentlichte Eddington 1926 in seinem Buch *The Internal Constitution of Stars*.

Sir A. S. Eddington, aus [27]

Heute kennen wir diese Obergrenze für die Leuchtkraft eines Sterns unter dem Namen *Eddington-Limit*. Obwohl es ursprünglich für Sterne, also radialsymmetrische und isotrop strahlende Objekte abgeleitet wurde, verwenden wir es in der Astronomie in vielen Bereichen. So ist es auch in der theoretischen Modellierung und der Beobachtung von Akkretionsscheiben eine wesentliche, kritische Größe.

Aber weshalb schreiben wir dem Eddington-Limit in Akkretionsscheiben eine solche Bedeutung zu?

Wie wir aus zahlreichen direkten und indirekten Beobachtungen des frühen Universums wissen, existieren in den Quasaren bereits Schwarze Löcher mit mehreren Millionen Sonnenmassen. Diese extrem massereichen Objekte hatten aber lediglich wenige hundert Millionen Jahre Zeit, um zu solchen Massen zu gelangen. Erst in den letzten Jahren war es aufgrund der großen Leistung in der Entwicklung und Anwendung neuer Beobachtungsinstrumente wie WMAP und SDSS möglich, die Parameterbereiche für die Massen und Zeitskalen genauer festzulegen. Die theoretischen Modelle gehen mittlerweile davon aus, daß diese massereichen Objekte in derart kurzen Zeiträumen nicht alleine durch Akkretion entstanden sein können – ein Argument dagegen ist eben das Eddington-Limit! Man nimmt vielmehr an, daß zusätzliche Prozesse wie die Kollision zweier Galaxien notwendig sind. In diesem Szenario verschmelzen die beiden Zentralobjekte zu einem schweren Schwarzen Loch. Verbunden damit ist die Ausbildung einer dichten und heißen Akkretionsscheibe aus Gas und Staub um das Zentralobjekt. In der darauffolgenden Phase starker Akkretion und damit starker beobachtbarer Aktivität gewinnt das Schwarze Loch enorm an Masse.

Genau an diesem Punkt treffen wir wieder auf das Eddington-Limit. Auch hier ist die maximal mögliche Akkretionsrate und damit die Wachstumsrate des Schwarzen Loches durch das Kräftegleichgewicht, verursacht durch Strahlung und Gravitation, beschränkt.

Trotz dieser offensichtlichen Relevanz des Eddington-Limits gibt es bisher nur wenige Ansätze, diese für eine spezielle Klasse von astronomischen Objekten, nämlich „gewöhnlichen Sternen“, abgeleitete Größe an die geänderte physikalische Umgebung der Akkretionsscheiben anzupassen. Alleine

die Tatsache, daß es mittlerweile zahlreiche beobachtete Systeme gibt, in denen die Akkretionsrate deutlich über der aus dem Eddington-Limit abgeleiteten Rate liegt, zeigt deutlich die Notwendigkeit der kritischen Betrachtung dieser Größe.

Zu den wenigen Ansätzen gehört die Entwicklung verbesserter Akkretionsscheibenmodelle aus den bestehenden Modellen heraus, z. B. durch Abramowicz et al. (vgl. [1], [2]). Begelman hingegen erklärt die beobachteten hohen Akkretionsraten im Rahmen des klassischen α-Modells durch Ausbildung von Inhomogenitäten in der vertikalen Struktur der Akkretionsscheibe, welche das Absorptionsvermögen drastisch reduzieren (vgl. [4]). Collin und Kawaguchi verwenden das von Abramowicz entwickelte Akkretionsscheibenmodell, um für NLS1s (*Narrow Line Seyfert 1 Galaxies*) Akkretionsraten über dem Eddington-Limit rechnerisch zu ermöglichen (vgl. [6]). Für alle diese Ansätze gilt jedoch, daß sie das Eddington-Limit für klassische Akkretionsscheiben nicht in Frage stellen.

In der vorliegenden Arbeit werden wir deshalb zunächst das klassische Akkretionsscheibenmodell, wie es von Shakura und Sunjaev 1973 aufgestellt wurde [17], intensiv betrachten. Unser Ziel wird es sein, aus diesem Modell selbst eine kritische Akkretionsrate abzuleiten und diese dann mit dem klassischen Eddington-Limit zu vergleichen (Kapitel 2). Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir auch das bereits erwähnte erweiterte Modell nach Abramowicz et al. eingehend untersuchen (Abschnitt 3.1).

Im Anschluß an die direkte Berechnung der maximal möglichen Akkretionsrate werden wir in Abschnitt 3.2 einen Ansatz vorstellen, welcher die Entstehung von Jets und einen Mechanismus zum Transport von Drehimpuls aus der Scheibe heraus zu erklären versucht. Schließlich betrachten wir in Abschnitt 3.3 eine beliebige, ausgedehnte Verteilung (strahlender) Materie, wie sie beispielsweise in der Geburtsstunde einer Akkretionsscheibe vorliegt. Wir stellen die Theorie zur Berechnung des Analogons zum klassischen Eddington-Limit auf. Die konkrete Implementierung dieser numerischen Berechnung wird allerdings nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit stattfinden.

Kapitel 4 faßt schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen. Bevor wir uns mit den klassischen Akkretionsscheiben beschäftigen, geben wir im folgenden einen Überblick über die Notation und stellen einige kurze Vorbemerkungen zum Eddington-Limit an.

Um Mißverständnisse bei der Interpretation der Scheibenmodelle in dieser Arbeit auszuschließen, ist folgendes zu beachten: Wir berechnen im allgemeinen für alle Scheiben die kritische Akkretionsrate als Funktion des Radius. Während in den klassischen Scheibentheorien die Akkretionsrate immer als konstant angenommen wird, ist dies hier nicht der Fall! Um trotzdem stationäre Lösungen zu erwarten, muß der erforderliche Anstieg bzw. Abfall der Akkretionsrate durch zusätzliche, vertikale Massenflüsse erzeugt werden.

1.1 Notationen, Einheitensystem

Abbildung 1.1 zeigt das grundlegende Modell einer (dünnen) Akkretionsscheibe, um die Bedeutung der physikalischen Größen klarzustellen. Ebenso eingezeichnet ist das Standard-Koordinatensystem. Für die vorliegende Geometrie bietet sich das Zylinderkoordinatensystem an.

In jedem Teilgebiet der Physik entwickeln sich eine oder mehrere verschiedene Notationen. Zum Leidwesen vieler weichen selbst die Bezeichnungen innerhalb eines Spezialgebietes von Autor zu Autor ab. Ebenso existieren in der Physik eine Vielzahl von Einheitensystemen, welche an die Bedürfnisse bestimmter Teilbereiche angepaßt sind. In dieser Arbeit wird durchgängig das in der Astronomie bevorzugte Gauss-System (cgs-System) verwendet. Solange die Einheiten physikalischer Größen (z. B. in Abbildungsbeschriftungen) nicht explizit angegeben sind, wird die jeweilige cgs-Einheit verwendet. Um von vornherein Klarheit zu schaffen, sind in Tab. 1.1 die wichtigsten Größen und Konstanten aufgelistet. Oft benötigen wir die Größen Temperatur, Druck und Dichte in der Symmetrieebene der

Scheibe ($z = 0$: T_c, p_c, ρ_c bzw. T, p, ρ, falls keine Mißverständnisse zu erwarten sind) und an der Oberfläche ($z = h$: T_{eff}, p_{eff}, ρ_{eff}).

Für viele Rechnungen werden wir ein System verwenden, welches fortan als Standardsystem bezeichnet werden soll. In diesem System ist das Zentralobjekt ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch mit $M = 10\,M_\odot$. Der innere Radius ergibt sich zu $s_i = 3s_g = 8{,}86 \cdot 10^6$ cm. Den äußeren Radius setzen wir (willkürlich) gleich $s_a = 10^5\,s_i$. Der Viskositätsparameter wird auf den Wert $\alpha = 0{,}10$ gesetzt, für die Akkretionsscheibe setzen wir azimutale Symmetrie voraus.

1.2 Das klassische Eddington-Limit

Das klassische Eddington-Limit geht von einer Reihe von Näherungen aus, welche die strikte Gültigkeit dieser Grenze in Frage stellen. Insbesondere im vorliegenden Fall von Akkretionsscheiben müssen einige der Annahmen neu überdacht und ggf. korrigiert werden. Die Annahmen für die Ableitung des klassischen Eddington-Limits sind im einzelnen:

1. Homogenität der effektiven Temperatur.
2. Homogenität bzgl. des Ionisationsgrads, also der Opazität; für letztere ist der Thomson-Streuquerschnitt angenommen, d. h. es wir nur die Streuung der abgestrahlten Photonen an den Elektronen betrachtet.
3. Vernachlässigung des Gasdrucks gegenüber dem Strahlungsdruck.
4. Isotrope Abstrahlung und sphärische Symmetrie des Problems.
5. Keine relativistischen Effekte.
6. Stationarität.

Dies bedeutet eine Menge von Einschränkungen an das jeweilige physikalische Problem. Nur ideale Modelle werden alle diese Voraussetzungen erfüllen können. Für Akkretionsscheiben ergeben sich naturgemäß zahlreiche Abweichungen, von denen wir nach und nach einzelne spezielle Probleme herausgreifen werden und uns so von dem idealen Modell immer weiter entfernen wollen.

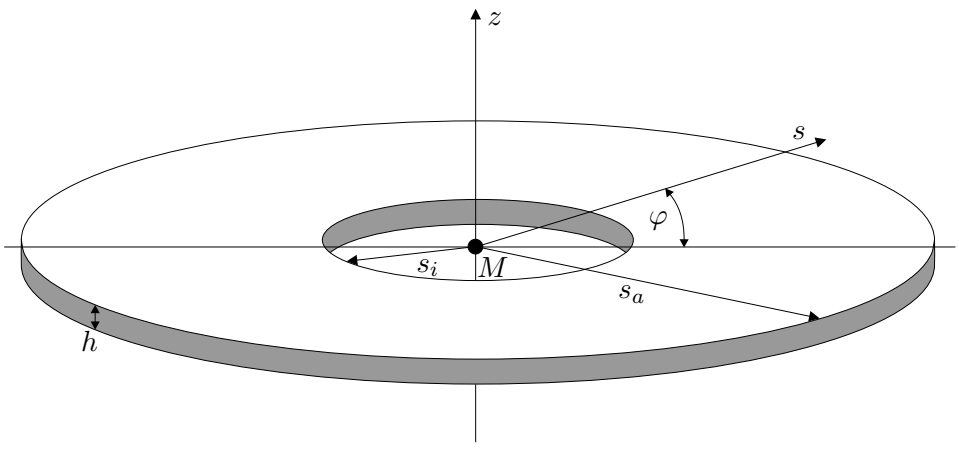


Abbildung 1.1: Modell einer dünnen Akkretionsscheibe

Tabelle 1.1: Physikalische Größen und Konstanten

Symbol	Beschreibung	Einheit/Wert
a	Strahlungskonstante	$7{,}565 \cdot 10^5\,\mathrm{erg\,cm^{-3}K^{-4}}$
α	Viskosität im Rahmen des Scheibenmodells	dimensionslos
c	Lichtgeschwindigkeit	$2{,}998 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$
c_s	Schallgeschwindigkeit	$\mathrm{cm\,s^{-1}}$
ε	normierte Scheibenhöhe h/s	dimensionslos
$f(s)$	Randbedingungsfunktion: $f(s) = 1 - \sqrt{s_i/s}$	dimensionslos
g, g_i	Schwerebeschleunigung, ggf. in Richtung i	$\mathrm{cm\,s^{-2}}$
G	Gravitationskonstante	$6{,}673 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm^3 g^{-1} s^{-2}}$
$h = h(s)$	Höhe der Scheibe am Radius s	cm
k_B	Boltzmann-Konstante	$1{,}381 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{erg\,K^{-1}}$
κ	Opazität	$\mathrm{cm^2 g^{-1}}$
κ_{es}	Opazität für Thomson-Streuung	$0{,}40\,\mathrm{cm^2 g^{-1}}$
Ω_K	Kreisfrequenz für Kepler-Rotation	$\mathrm{s^{-1}}$
L_E	klassische Eddington-Leuchtkraft	$\mathrm{erg\,s^{-1} cm^{-2}}$
M	Masse des Zentralobjektes	g
m_H	Masse des Wasserstoffatoms	$1{,}674 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}$
$\dot{M}_E$	klassische Eddington-Akkretionsrate	$\mathrm{g\,s^{-1}}$
s_a	äußerer Radius der Akkretionsscheibe	cm
$s_g = 2GM/c^2$	Schwarzschildradius	cm
s_i	innerer Radius der Akkretionsscheibe	cm
σ	Streuquerschnitt, $\sigma = \kappa m$	$\mathrm{cm^2}$
σ_T	Thomson-Streuquerschnitt	$6{,}69 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{cm^2}$
σ_{SB}	Stefan-Boltzmann-Konstante	$5{,}670 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{erg\,s^{-1} cm^{-2} K^{-4}}$
Σ	Flächendichte	$\mathrm{g\,cm^{-2}}$
τ	optische Tiefe	dimensionslos

Für das klassische Eddington-Limit (siehe Abb. 1.2) setzt man die durch Strahlung ausgeübte Kraft gleich der Gravitationskraft. Die Terme sind im einzelnen:

$$\text{Strahlung:} \qquad F_{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_T}{c}\frac{L}{4\pi R^2}\,, \tag{1.2.1}$$

$$\text{Gravitation:} \qquad F_{\mathrm{grav}} = \frac{GMm_H}{R^2}\,, \tag{1.2.2}$$

wobei die üblichen Bezeichnungen verwendet werden. Gleichsetzen ergibt

$$L_E = \frac{GMm_H c\,4\pi}{\sigma_T}\,. \tag{1.2.3}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$L_S \equiv L_{\mathrm{Scheibe}} = \frac{GM\dot{M}}{2s_i} \tag{1.2.4}$$

ergibt sich für die kritische Massenflußrate

$$\dot{M}_E = \frac{L_E 2s_i}{GM}\,. \tag{1.2.5}$$

Für ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch ist $s_i = 3s_g = 6GM/c^2$ und somit

$$\dot{M}_E = 12\frac{L_E}{c^2}\,. \tag{1.2.6}$$

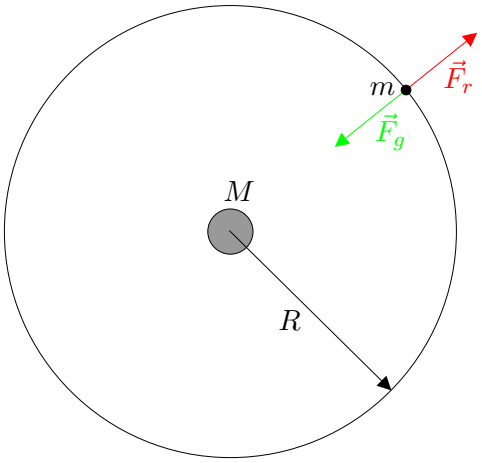


Abbildung 1.2: Grundlage des klassischen Eddington-Limits

Der Vollständigkeit halber sei gesagt, daß die Effizienz in der Umsetzung von freigesetzter Energie durch Akkretion in Leuchtkraft nur im Idealfall gleich eins ist. Dem wird durch die Einführung eines Effizienz-Faktors η ($0 \leq \eta \leq 1$) Rechnung getragen:

$$\dot{M}_E = \frac{12}{\eta} \frac{L_E}{c^2}$$

1.3 Gasdruck – Strahlungsdruck

In diesem kurzen Rechenexempel geht es um eine Abschätzung der Relevanz des Gasdrucks in Vergleich zum Strahlungsdruck, wenn das betreffende Objekt am (klassischen) Eddington-Limit strahlt. Über die Zustandsgleichung

$$p_{\text{gas}} V = N k_B T \tag{1.3.1}$$

läßt sich mit der Masse m_H der Wasserstoffatome die gesuchte Dichte des Wasserstoffgases ρ ausrechnen:

$$\rho = p_{\text{gas}} \cdot \frac{m_H}{k_B T} \tag{1.3.2}$$

Die Teilchenzahldichte ergibt sich dann einfach wie folgt:

$$n = \frac{\rho}{m_H} = \frac{p_{\text{gas}}}{k_B T} \tag{1.3.3}$$

Zur Abschätzung fordern wir naiv $p_{\text{gas}} = p_{\text{rad}}$, wobei p_{rad} für den Strahlungsdruck steht, der im Eddington-Limit genau die Gravitation kompensiert.

1.3.1 Anwendungsbeispiel Stern: Die Sonne

Für die Sonne ist mit $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{33}$ g und $R_\odot = 6{,}95 \cdot 10^{13}$ cm der Strahlungsdruck auf der Sonnenoberfläche im Eddington-Limit durch folgende Gleichungen gegeben, wobei L_E, T_E und S_E für die Eddington-Leuchtkraft, die Temperatur auf der Sonnenoberfläche und die Energieflußdichte auf der Sonnenoberfläche, jeweils im Eddington-Limit, stehen.

$$L_E = G\frac{M_\odot m_H c 4\pi}{\sigma_T} = 1{,}26 \cdot 10^{38}\frac{\text{erg}}{\text{s}} \tag{1.3.4}$$

$$T_E = \sqrt[4]{\frac{S_E}{\sigma_{\text{SB}}}} = \sqrt[4]{\frac{L_E}{4\pi R_\odot^2 \sigma_{\text{SB}}}} = 7{,}77 \cdot 10^4\,\text{K} \tag{1.3.5}$$

$$p_{\text{rad}} = \frac{S_E}{c} = \frac{L_E}{4\pi R_\odot^2 c} = p_{\text{gas}} \tag{1.3.6}$$

$$\rho = \frac{L_E m_H}{4\pi R_\odot^2 k_B T c} = 1{,}08 \cdot 10^{-8}\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \tag{1.3.7}$$

$$n = \frac{L_E}{4\pi R_\odot^2 k_B T c} = 6{,}43 \cdot 10^{15}\frac{1}{\text{cm}^3} \tag{1.3.8}$$

Vergleichen wir die erhaltene Teilchendichte mit der im Sonneninneren, nämlich $8{,}75 \cdot 10^{23}\,\text{cm}^{-3}$, so ist die kritische Dichte bei weitem überschritten. Demnach müßte der Gasdruck einen weitaus größeren Einfluß haben und das Eddington-Limit seine Bedeutung verlieren. Daß dem nicht so ist, liegt an der außerordentlich geringen Teilchenzahldichte in der Sonnenkorona, nämlich $10^8\,\text{cm}^{-3}$.

1.3.2 Anwendungsbeispiel α-Scheibe

Wir betrachten jetzt eine geometrisch dünne, optisch dicke α-Scheibe um ein Schwarzes Loch mit $M = 10M_\odot$. Für den Strahlungs- und Gasdruck gilt

$$p_{\text{rad}} = \frac{4\sigma_{\text{SB}} T_c^4}{3c} \qquad \text{und} \qquad p_{\text{gas}} = \frac{2\rho k_B T_c}{m_H}\,. \tag{1.3.9}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\rho = \frac{2}{3}\frac{\sigma_{\text{SB}} m_H}{c k_B} T_c^3\,. \tag{1.3.10}$$

In Anhang A.1 werden wir eine Beziehung zwischen der Zentraltemperatur, d. h. der Temperatur in der Symmetrieebene der Akkretionsscheibe und anderen physikalischen Größen der Scheibe, welche im Rahmen der Näherung vorgegeben werden können, herleiten. Wir greifen hier auf das Ergebnis (A.1) vor, nach dem gilt:

$$T_c^4 = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}\frac{\Omega_K c^2}{2\sigma_{\text{SB}}\alpha\kappa} \tag{A.1}$$

Der Parameter β stellt das Verhältnis von Strahlungsdruck zu Gasdruck dar, also in unserem Fall $\beta = 1$. Für eine grobe Abschätzung verwenden wir das klassische Eddington-Limit in unserem Standardsystem. Dort sind

$$L_E = 1{,}25 \cdot 10^{39}\,\frac{\text{erg}}{\text{s}}, \qquad \dot{M}_E = 1{,}67 \cdot 10^{19}\,\frac{\text{g}}{s} = 2{,}65 \cdot 10^{-7}\,\frac{M_\odot}{\text{a}}\,. \tag{1.3.11}$$

Wir setzen den so erhaltenen Wert in die Beziehungen (A.1) und (1.3.10) ein und erhalten mit $s = 10^2 s_i$ eine Temperatur von $T_c = 2{,}88 \cdot 10^6$ K. Damit folgt

$$\rho = 3{,}63 \cdot 10^{-4}\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \qquad \text{bzw.} \qquad n = 2{,}17 \cdot 10^{20}\frac{1}{\text{cm}^3}\,.$$

Wie man sieht, ist der Gasdruck in Scheiben – in der hier vorgestellten Rechnung relativ nahe am inneren Rand der Scheibe und in der Symmetrieebene – nur relevant, wenn sehr hohe Dichten vorliegen. In diesem Fall können wir den Gasdruck gegenüber dem Strahlungsdruck nicht mehr vernachlässigen.

2 Klassische α-Scheiben

In diesem Abschnitt betrachten wir die klassischen, dünnen α-Scheiben ohne Selbstgravitation. Für diese muß die Relation $\varepsilon = h/s \ll 1$ erfüllt sein. Unter Annahme einer weiterhin vorliegenden azimutalen Symmetrie wollen wir den Temperaturverlauf in der Akkretionsscheibe bei der Berechnung des Eddington-Limits berücksichtigen. Dazu betrachten wir einen dünnen Scheibenring mit innerem Radius s und radialer Dicke ds. Der Beitrag zur Leuchtkraft des Ringes ist gegeben durch

$$dL(s) = 2 \cdot 2\pi s\, ds \cdot \sigma_{\mathrm{SB}} T_{\mathrm{eff}}^4 \,. \tag{2.0.1}$$

Die einzelnen Faktoren (von links nach rechts) begründen sich durch die Abstrahlung nach oben und unten, die Fläche des Scheibenrings und das Stefan-Boltzmann-Gesetz. Wir verlassen hier also die Näherung der Homogenität der Effektivtemperatur und der sphärischen Symmetrie. Es ist offensichtlich, daß wir im allgemeinen kein globales Eddington-Limit mehr angeben können, vielmehr wir die kritische Akkretionsrate von der radialen und vertikalen Position in der Scheibe abhängen. Für stationäre Lösungen ist es naheliegend, das Minimum der kritischen Akkretionsrate als globales Minimum anzusehen – es stellt den „Flaschenhals“ bezüglich der maximal möglichen Akkretion auf das Schwarze Loch durch die Scheibe dar.

Wir untersuchen im folgenden das Eddington-Limit in vertikaler und horizontaler Richtung, zunächst für masselose, optisch dicke Scheiben.

2.1 Das Eddington-Limit in vertikaler Richtung

2.1.1 $\mathrm{h/s} = $ const.

Wir betrachten jetzt die auftretenden Kräfte für ein Testteilchen (Wasserstoffatom) im Scheibenring mit Radius s. Ein Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung besteht genau dann, wenn

$$\frac{\sigma_T}{c}\frac{L}{A_{\mathrm{rad}}} = F_{\mathrm{rad}}(z=h) = F_{\mathrm{grav}}(z=h) = G\frac{Mm_H}{s^2}\cdot\frac{h}{s} \tag{2.1.1}$$

ist. Hierbei bezeichnet A_{rad} die strahlende Fläche. Nehmen wir zunächst $h/s = \varepsilon = $ const. an. Wir erhalten mit (2.0.1)

$$\frac{\sigma_T}{c}\sigma_{\mathrm{SB}} T_{\mathrm{eff}}^4 = G\frac{Mm_H\varepsilon}{s^2}\,. \tag{2.1.2}$$

Für masselose, optisch dicke Scheiben gilt

$$\sigma_{\mathrm{SB}} T_{\mathrm{eff}}^4 = \frac{3}{8\pi}\frac{GM\dot{M}}{s^3} f(s)\,, \tag{2.1.3}$$

wobei $f(s) = \left(1 - \sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)$ die Randfunktion ist. Das ergibt

$$\frac{\sigma_T}{c}\frac{3}{8\pi}\frac{\dot{M}}{s} f(s) = m_H\varepsilon\,. \tag{2.1.4}$$

Aus (2.1.4) folgt mit (1.2.3) und (1.2.5)

$$\dot{M}(s) = \frac{8\pi c m_H \varepsilon}{3\sigma_T} \cdot \frac{s}{f(s)} = \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \cdot \frac{1}{f(s)} \cdot \frac{s}{s_i}\,. \tag{2.1.5}$$

Wir betrachten zunächst die Grenzfälle $s \to s_i$ und $s \to \infty$. Für beide Fälle divergiert $\dot{M}$, woraus wir auf die Existenz eines Minimums schließen können. Eine Divergenz für $s \to \infty$ ist nicht relevant wegen einer endlichen Ausdehnung der Scheibe, $s \le s_a$. Betrachten wir nun noch eine Scheibe, in der keine weiteren Massentransportprozesse (vertikal einströmende Materie, ...) stattfinden. Dann kann innerhalb eines gewissen Radius s_0, an dem $\dot{M}$ minimal ist, die Akkretionsrate nicht mehr ansteigen, sondern nur mehr konstant auf dem Wert ihres Minimums bleiben.

Wir bestimmen deshalb die erste Ableitung der Akkretionsrate am Eddington-Limit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\dot{M}(s) &= \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \cdot \frac{f(s) - s\cdot\frac{d}{ds}f(s)}{f^2(s)} = \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \cdot \frac{\left(1-\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right) - s\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_i}{s^3}}}{\left(1-\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)^2} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \cdot \frac{\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)^2}\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Die Extremalbedingung $\left.\frac{d}{ds}\dot{M}(s)\right|_{s=s_0} = 0$ ergibt

$$s_0 = \frac{9}{4}s_i\,. \tag{2.1.7}$$

Dieses sehr einfache Ergebnis besagt auch, daß der Engpaß für die Akkretionsrate (für masselose Scheiben) nur vom inneren Radius und somit nur von den Eigenschaften des Zentralobjektes abhängt, wie wir es auch erwarten würden. Mit (2.1.7) erhalten wir als minimale Akkretionsrate

$$\dot{M}_{\min} = \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\varepsilon}{4}\dot{M}_E = \text{ const.} \tag{2.1.8}$$

Für die Akkretionsrate als Funktion des Radius folgt somit

$$\dot{M}(s) = \begin{cases} \dfrac{9\varepsilon}{4}\dot{M}_E & s_i \le s \le s_0\,, \\ \dfrac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \cdot \dfrac{1}{f(s)} \cdot \dfrac{s}{s_i} & s_0 \le s \le s_a\,. \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Die kritische Akkretionsrate nimmt also zu kleineren Radien hin ab. Dies bedeutet, daß für Akkretionsraten über dem Minimum (2.1.8) ab einer bestimmten radialen Position ein (vertikaler) Massenverlust vorliegt (s. u.).

Setzen wir (2.1.9) in (2.0.1) ein und integrieren von s_i bis s, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_{s_i}^{s} dL(s) = \frac{3}{2}GM\int_{s_i}^{s}\dot{M}(s)\frac{f(s)}{s^2}\,ds \\ &= \begin{cases} \dfrac{27}{8}\varepsilon GM\dot{M}_E\displaystyle\int_{s_i}^{s}\frac{f(s)}{s^2}\,ds & s_i \le s \le s_0 \\ \dfrac{27}{8}\varepsilon GM\dot{M}_E\displaystyle\int_{s_i}^{s_0}\frac{f(s)}{s^2}\,ds + \frac{1}{2}GM\dot{M}_E\int_{s_0}^{s}\frac{s}{s_i}\frac{1}{f(s)}\frac{f(s)}{s^2}\,ds & s_0 \le s \le s_a \end{cases} \end{aligned}$$

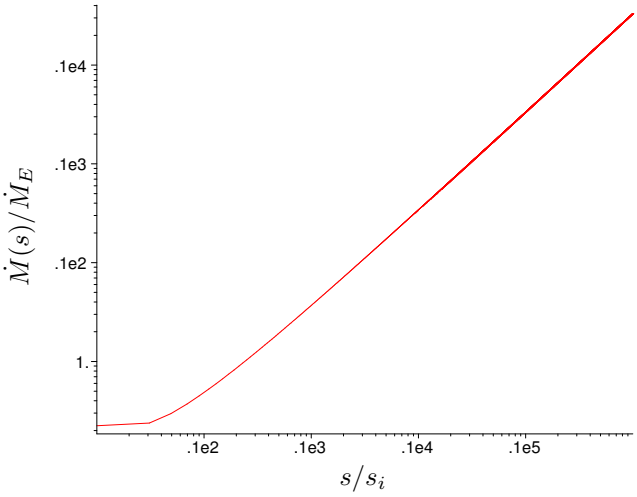


Abbildung 2.1: $\dot{M}(s)/\dot{M}_E$ als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\varepsilon = 0{,}1$

Wir erhalten damit für die Leuchtkraft der Scheibe:

$$L(s) = \begin{cases} \frac{9}{4}\varepsilon L_E \cdot \left(\frac{2\sqrt{\frac{s_i}{s}}s_i - 3s_i + s}{s} \right) & s_i \leq s \leq s_0 \\ \varepsilon L_E \left(\frac{7}{12} + \ln \frac{s}{s_0} \right) & s_0 \leq s \leq s_a \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Integrieren wir (2.1.10) über die gesamte Scheibe, d. h. bis $s = s_a$, so ist für alle vernünftigen Modelle $s_a \gg s_0$ und es ergibt sich

$$L(s_a) = \varepsilon L_E \left(\frac{7}{12} + \ln \frac{4s_a}{9s_i} \right) . \tag{2.1.11}$$

Abbildungen 2.1 und 2.2 zeigen das Verhältnis der Akkretionsrate nach (2.1.9) und das Verhältnis der Gesamtleuchtkraft der Scheibe nach (2.1.11) zu den klassischen Eddington-Größen in unserem Standardsystem. Das Minimum der Akkretionsrate beträgt in diesem Fall $0{,}23\dot{M}_E$. Gemessen an den Voraussetzungen für dünne Scheiben, $\varepsilon \ll 1$, befinden wir uns mit $\varepsilon = 0{,}1$ schon an der oberen Grenze für die Gültigkeit der Näherung. Trotzdem beträgt die kritische Akkretionsrate nur ungefähr ein fünftel der klassischen Eddington-Rate. Für $s_a = 10^5 s_i$ wird die klassische Eddington-Leuchtkraft recht gut wiedergegeben, während jedoch für kleinere Scheiben die Leuchtkraft deutlich geringer ist. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß der Ausdruck (1.2.4) auch nur für die Näherung $s_a \gg s_i$ abgeleitet ist.

Wir nehmen im folgenden an, daß die von außen in die Scheibe einströmende Materie $\dot{M}_{\text{ext}}$ über dem Minimum der kritischen Akkretionsrate liegt. Da die Akkretionsrate von s_a bis s_0 abnimmt, muß die restliche akkretierte Materie auf dem Weg nach innen in vertikaler Richtung abströmen. Der Punkt, an dem dies geschieht, ist durch $\dot{M}(s) = \dot{M}_{\text{ext}}$ festgelegt. Wir betrachten den Extremfall, nämlich $\dot{M}(s_a) = \dot{M}_{\text{ext}}$, und berechnen die Menge Ξ an abströmender Materie pro Einheitslänge, welche uns Auskunft über die mögliche Entstehung von Jets geben kann. Für $s \leq s_0$ verschwindet Ξ, da $\dot{M}$ konstant ist. Es sei also im folgenden $s_0 \leq s \leq s_a$:

$$\Xi(s) \equiv \frac{d}{ds}\dot{M} = \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \frac{1}{s_i}\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{f(s)}\right) = \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E \frac{1}{s_i}\frac{1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{s_i}{s}}}{\left(1 - \sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)^2} \tag{2.1.12}$$

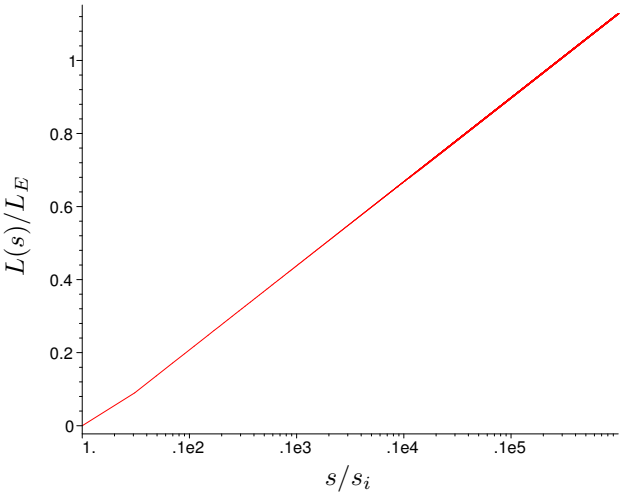


Abbildung 2.2: $L(s)/L_E$ als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\varepsilon = 0{,}1$

(2.1.12) erfüllt die Anschlußbedingung $\Xi(s_0) = 0$, wie leicht nachzurechnen ist. Für $s \to \infty$ gilt

$$\Xi(s) \to \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E\frac{1}{s_i} = \text{const.}\,, \tag{2.1.13}$$

d. h. bei zunehmendem Radius strebt die Massenverlustrate gegen einen konstanten Wert Ξ_0. Für die gesamte Scheibe lautet die Massenverlustrate pro Einheitsradius also

$$\Xi(s) = \begin{cases} 0 & s_i \le s \le s_0\,, \\ \dfrac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E\dfrac{1}{s_i}\dfrac{1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{s_i}{s}}}{\left(1-\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)^2} & s_0 \le s \le s_a\,. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Wir untersuchen jetzt, ob $\Xi(s)$ ein Maximum bei einem gewissen Radius s_1 hat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Xi(s) &= \frac{\varepsilon}{3}\dot{M}_E\frac{1}{s_i}\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{s_i}{s^3}}\left(1-\sqrt{\frac{r_i}{r}}\right)-\sqrt{\frac{s_i}{s^3}}\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)^3} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Longleftrightarrow\ s_1 &= 9s_i \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Für den Maximalwert der Massenverlustrate folgt mit (2.1.12)

$$\begin{aligned} \Xi_{\max} \equiv \Xi(s_1) &= \frac{3\varepsilon}{8}\dot{M}_E\frac{1}{s_i} = \frac{6\varepsilon}{8}\frac{1}{GM}L_E \stackrel{(1.2.3)}{=} \frac{\pi\varepsilon}{3}\frac{m_H c}{\sigma_T} \\ &= \varepsilon\cdot 7{,}54\cdot 10^{10}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s\,cm}} = \varepsilon\cdot 1{,}20\cdot 10^{-15}\frac{M_\odot}{\mathrm{a\,cm}}\,. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Dies bedeutet, daß die maximale Verlustrate im Falle von geometrisch dünnen, optisch dicken Akkretionsscheiben in der Näherung $\varepsilon = \text{const.}$ lediglich von dieser Größe abhängig ist! In realen Systemen ist ε natürlich nicht konstant; ebenso wird die Wechselwirkung von Strahlung mit Materie nicht nur durch Thomson-Streuung gegeben sein, sondern eine Temperatur- und Dichteabhängigkeit aufweisen. Abbildung 2.3 zeigt die Massenverlustrate pro Längeneinheit als Funktion des normierten Radius.

Eine wichtige Anmerkung zuletzt: Durch die Vorgabe eines konstanten Verhältnisses von Höhe zu Radius konnten wir eine Gleichung für die kritische Akkretionsrate aufstellen, ohne weitere Näherungen bezüglich der Opazität oder des Verhältnisses von Gas- zu Strahlungsdruck einzuführen. Wir

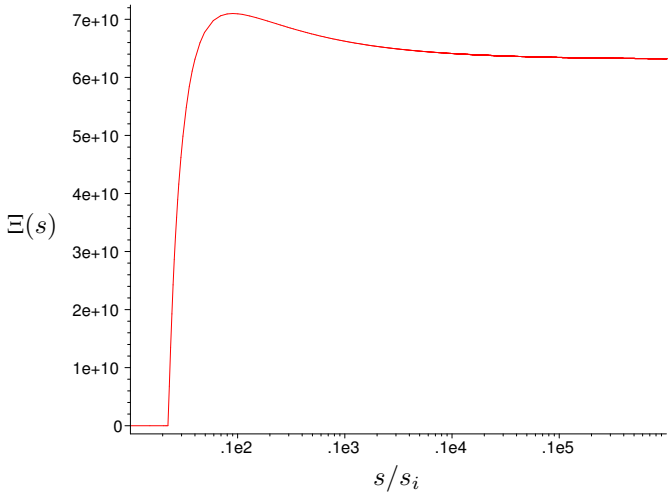


Abbildung 2.3: Massenausflußrate $\Xi(s)$ als Funktion des normierten Radius

werden in Abschnitt 2.1.3 noch den Wechselwirkungsquerschnitt und seine Abhängigkeit von den Systemgrößen ansprechen; in genügend dichten und genügend heißen Scheiben dominiert jedoch die Thomson-Streuung von Photonen an Elektronen und die maximale Massenverlustrate ist konstant, solange $\varepsilon \approx$ const.

Betrachten wir die aus dem Kräftegleichgewicht entstehende Bestimmungsgleichung für die Höhe der Scheibe,

$$\frac{h}{s} = \frac{3}{8\pi}\frac{\kappa}{c}\frac{\dot{M}f(s)}{s}\,, \tag{2.1.17}$$

und beachten wir die Voraussetzung $h \ll s$, dann ist sofort klar, daß das Modell eine einfache Abschätzung für die Akkretionsrate festlegt, wenn wir in der Näherung dünner Scheiben bleiben wollen. Wir nehmen als Grenze für die Gültigkeit dünner Scheiben $\varepsilon \leq 0{,}1$ an und erhalten für die Akkretionsrate

$$\dot{M} \leq \frac{1}{10}\cdot\frac{s}{3s_i f(s)}\cdot\dot{M}_E\,. \tag{2.1.18}$$

Die radiale Position des Minimums s_0 und der Wert der Akkretionsrate an dieser Stelle sind durch (2.1.8) und (2.1.7) gegeben:

$$s_0 = \frac{9}{4}s_i; \qquad \dot{M} \leq 0{,}23\cdot M_E$$

Wir können daraus schließen, daß sich Akkretionsscheiben in der hier betrachteten Näherung so lange beliebig an die Akkretionsrate durch Veränderung ihrer Höhe anpassen, bis die Massenflußrate einen kritischen Wert von ca. 20% der klassischen Eddington-Rate erreicht. Für höhere Massenflußraten wird die Scheibe nicht mehr als dünn zu behandeln sein. In Kapitel 3.1 wollen wir genau diesen Fall betrachten. Vorerst bleiben wir jedoch bei den klassischen, dünnen Akkretionsscheiben.

2.1.2 $\mathrm{h/s} \neq$ const.

Wir wollen nun die Näherung aus dem vorherigen Abschnitt aufgeben. Die Größe h/s soll nicht länger konstant gehalten werden, sondern aus den Scheibengleichungen vorgegeben sein. Wie wir im folgenden sehen werden, führt dies zu einer überraschenden Erkenntnis.

Wir betrachten zunächst die Strahlungsdruckkraft an der Scheibenoberfläche:

$$F_{\text{rad}} \overset{(1)}{=} \frac{\sigma_T}{c} \cdot \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4 \overset{(2)}{=} \frac{\kappa m_H}{c} \cdot \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4 \tag{2.1.19}$$

Dabei wurden für die einzelnen Schritte das Stefan-Boltzmann-Gesetz (1) und die gewöhnliche Definition (2) verwendet, also keine weiteren Näherungen eingesetzt.

Für die Gravitationskraft gilt im Fall masseloser Scheiben

$$\begin{aligned} F_{\text{g}} &\overset{(1)}{=} -\frac{GMm_H}{s^2} \cdot \frac{h}{s} \overset{(2)}{=} m_H g_z(h) \\ &\overset{(3)}{=} -m_H \frac{p}{\rho} \frac{1}{h} \overset{(4)}{=} -m_H \frac{aT_c^4}{3} \frac{1}{\rho h} \\ &\overset{(2)}{=} -m_H \frac{aT_c^4}{3} \frac{2}{\Sigma} \overset{(5)}{=} -\frac{a}{8} m_H T_{\text{eff}}^4 \frac{\tau}{\Sigma} \\ &\overset{(2)}{=} -\frac{a}{8} m_H T_{\text{eff}}^4 \frac{\kappa\Sigma}{2\Sigma} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{4} \frac{\kappa m_H}{c} \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4 \,. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Dabei entsprechen die Nummern über den Gleichungen der Verwendung folgender Sachverhalte bzw. Näherungen:

(1) masselose, dünne Scheibe
(2) Definition
(3) hydrostatisches Gleichgewicht
(4) Strahlungsdruck-dominiert, d. h. Vernachlässigung des Gasdrucks
(5) Energietransport nur durch Strahlung, d. h. $T_c^4 = (3\tau)/(16) \cdot T_{\text{eff}}^4$;
diese Beziehung folgt aus den Scheibengleichungen, siehe [12, S. 81]

Im Kräftegleichgewicht $F_{\text{g}} + F_{\text{rad}} = 0$ würde dann $1 - (1/4) \overset{!}{=} 0$ folgen! Um die Ursache der Inkonsistenz zu finden, untersuchen wir die vorgenommenen Näherungen einzeln:

Energietransport durch Strahlung: Wie wir in Abschnitt 3.1 eingehend diskutieren werden, werden weitere Möglichkeiten des Energietransportes, wie z. B. Advektion, erst bei Verlassen der Näherung dünner Scheiben relevant. Wir wollen diese Näherung daher beibehalten.

Vernachlässigung des Gasdrucks: Bei der Umformung der Gravitationskraft haben wir in einem Schritt den Druck p nur durch den Strahlungsdruck ersetzt. Nehmen wir die restlichen Näherungen vorerst als sinnvoll an und beachten wir, daß sich der Druck additiv aus Strahlungs- und Gasdruck zusammensetzt, $p = p_{\text{rad}} + p_{\text{gas}}$, dann erhalten wir folgende Aussage:

$$\frac{3}{4} F_{\text{rad}} - m_H \frac{p_{\text{gas}}}{\rho} \frac{1}{h} = 0$$

Mit der Definition des Gasdrucks und (2.1.19) gilt dann

$$\frac{3}{4} \frac{\kappa m_H}{c} \cdot \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4 - m_H \frac{2\rho k_B T_c}{\rho m_H} \frac{1}{h} = 0 \,. \tag{2.1.21}$$

Eine wesentliche Aussage dieser Gleichung ist $p_{\text{gas}} = 3p_{\text{rad}}$ bzw. $p_{\text{gas}} = 3/4\, p$ und $p_{\text{rad}} = 1/4\, p$. Wir wollen gleich den allgemeineren Fall betrachten, nämlich

$$\frac{p_{\text{rad}}}{p_{\text{gas}}} = \beta \,, \qquad p_{\text{gas}} = \frac{1}{1+\beta} p \,, \qquad p_{\text{rad}} = \frac{\beta}{1+\beta} \,.$$

Dann gilt für die Eddington-Bedingung (2.1.21)

$$\frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{\kappa m_H}{c}\cdot\sigma_{\text{SB}}T_{\text{eff}}^4 - m_H\frac{2\rho k_B T_c}{\rho m_H}\frac{1}{h} = 0\,. \tag{2.1.22}$$

Im Fall (2.1.21) ist $\beta = 1/3$. Für gewöhnlich läßt sich das physikalische Modell einer Akkretionsscheibe durch elf Gleichungen (siehe [12, 85–86]) mit den elf Unbekannten v_s, Σ, Ω_K, h, ρ, ν, c_s, p, T_c, κ, τ und den drei freien Parametern M, $\dot{M}$, α angeben. Durch die Eddington-Bedingung erhalten wir zusätzlich (2.1.22). Diese Gleichung ist eine echte zusätzliche Gleichung und ersetzt nicht etwa eine der elf Gleichungen. Wir können also einen der Parameter, in diesem Fall die kritische Akkretionsrate $\dot{M}$, durch das Gleichungssystem bestimmen. Zudem erhalten wir wegen

$$p_{\text{rad}}/p_{\text{gas}} = \beta \tag{2.1.23}$$

eine weitere, dreizehnte Gleichung, welche uns erlaubt den Parameter β echt zu bestimmen! Wie in Anhang B für $\kappa = \kappa_{\text{es}} = \text{const.}$ gezeigt wird, folgt aus den Scheibengleichungen, der Eddington-Bedingung (2.1.22) und dem Verhältnis (2.1.23) exakt

$$\beta = \frac{1}{3}, \qquad p_{\text{rad}} = \frac{1}{4}p, \qquad p_{\text{gas}} = \frac{3}{4}p\,. \tag{B.9}$$

Ebenso ergibt sich aus den zwölf Gleichungen folgender Ausdruck für die Massenflußrate:

$$\dot{M} = \frac{1}{f(s)}\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{8^{3/8}}{3^{1/2}}\cdot\frac{k_B^{1/2}c^{5/4}}{m_H^{1/2}\alpha^{1/8}\kappa^{9/8}\sigma_{\text{SB}}^{1/8}\Omega_K^{7/8}} \tag{B.9}$$

Unter Vernachlässigung der Randfunktion ist

$$\dot{M} \propto \frac{s^{21/16}}{\alpha^{1/8}M^{7/16}}\,.$$

Die weiteren Proportionalitäten folgen mit Hilfe der nach $\dot{M}$ aufgelösten Gleichungen (siehe Anhang B).

In einer dünnen, klassischen α-Scheibe passen sich die physikalischen Größen Druck, Temperatur, Dichte, … an jeder beliebigen radialen Position gerade so an die Akkretionsrate an, daß der zentrale Gasdruck gerade dreimal so groß ist wie der zentrale Strahlungsdruck. Woher stammt nun dieser exakte Faktor 3? Aufgrund der Lösungen (B.9) läßt sich vermuten, daß bei Verlassen der Näherung $\kappa = \kappa_{\text{es}} = \text{const.}$ der Wert und die Konstanz von β variieren werden (siehe unten). Wie groß sind die Unterschiede, falls β einen anderen Wert zwischen null (nur Gasdruck) und unendlich (nur Strahlungsdruck) annimmt? Abbildungen 2.4–2.13 zeigen die relevanten physikalischen Größen der Standard-Akkretionsscheibe für verschiedene (konstante) Werte von β. Die einzelnen Farben stehen hierbei für $\beta = 1/9$ (rot), $\beta = 1/3$ (grün), $\beta = 1$ (blau), $\beta = 3$ (gelb), $\beta = 9$ (türkis).

Wir betrachten das so erhaltene Scheibenmodell kritisch. Auffällig ist zunächst, daß außer $\dot{M}$ und v_s keine der physikalischen Größen von der Randbedingung abhängig ist. Dies ändert sich natürlich, wenn wir – wie bereits im Abschnitt zuvor – stationäre Scheiben ohne zusätzliche vertikale Materie-Einströmungen betrachten. Dann nämlich bleibt die Akkretionsrate ab der Position s_0 des radialen Minimums auf dem minimalen Wert $\dot{M}_{\text{min}}$ konstant. Für diese Größen gilt

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{841}{441}s_i \approx 1{,}91 s_i\,, \\ \dot{M}_{\text{min}} &= (1{,}11\ \ldots\ 4{,}39)\cdot 10^{-2}\dot{M}_E \qquad \text{für} \qquad \beta = \frac{1}{9}\ \ldots\ 9\,. \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

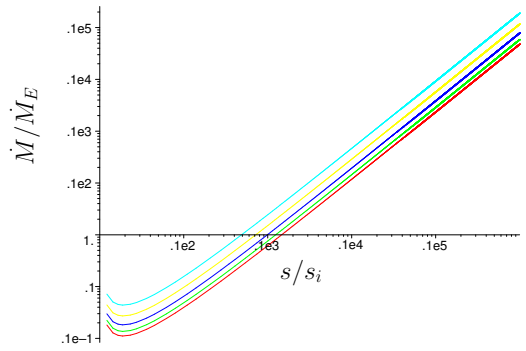


Abbildung 2.4: Kritische Akkretionsrate $\dot{M}/\dot{M}_E$ als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

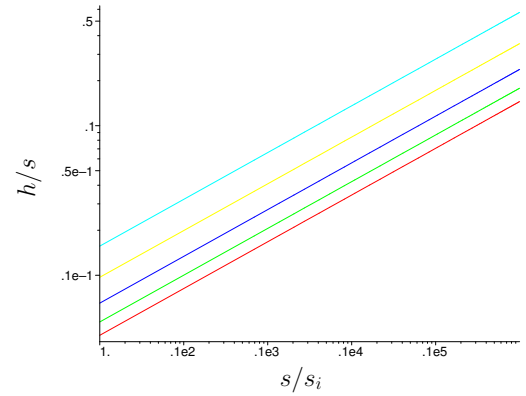


Abbildung 2.5: Relative Höhe h/s als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

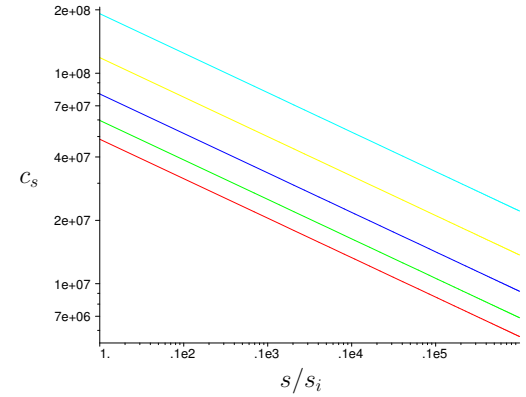


Abbildung 2.6: Schallgeschwindigkeit c_s als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

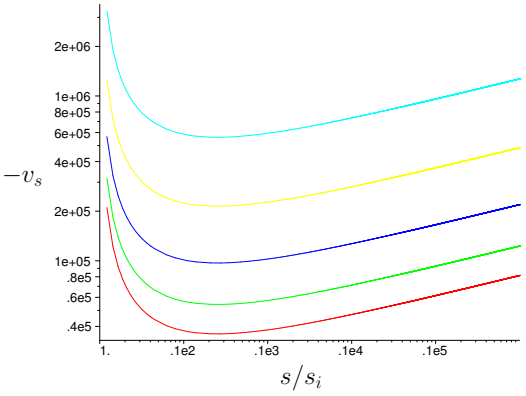


Abbildung 2.7: Radialgeschwindigeit v_s als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

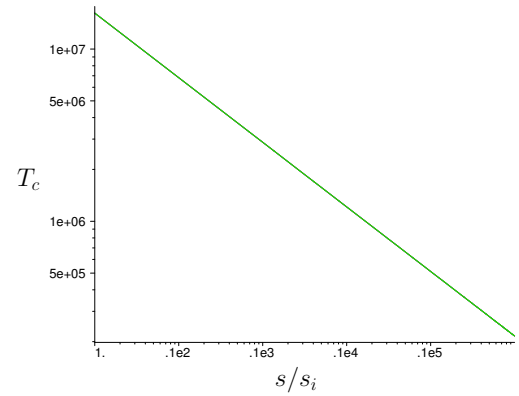


Abbildung 2.8: Zentraltemperatur T_c als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

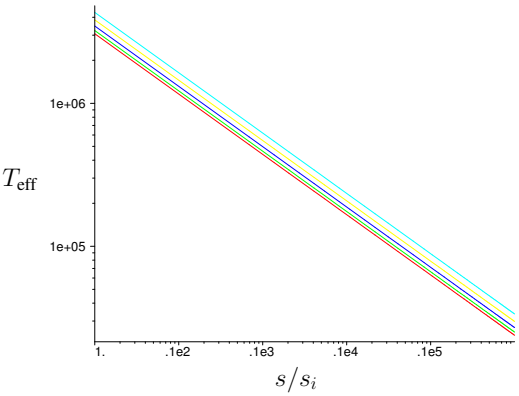


Abbildung 2.9: Effektivtemperatur T_{eff} als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

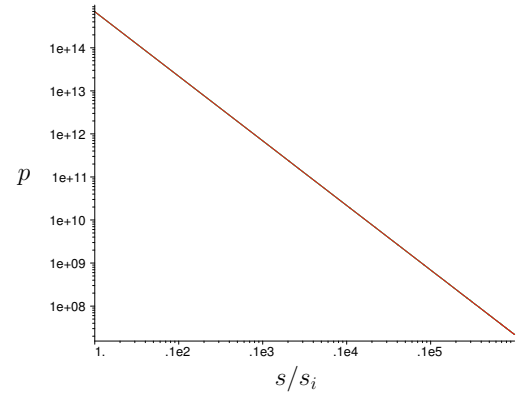


Abbildung 2.10: Zentraldruck p als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

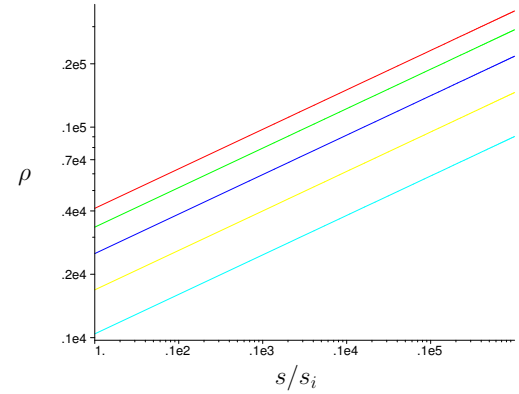


Abbildung 2.11: Zentraldichte ρ als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

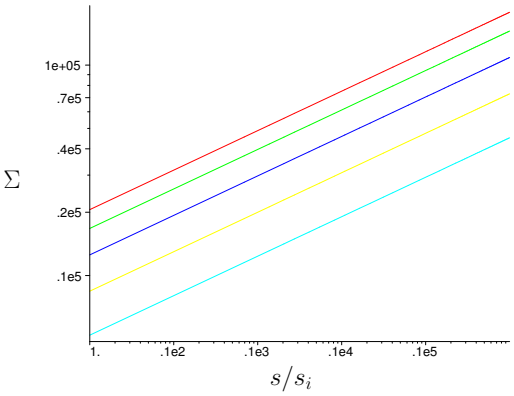


Abbildung 2.12: Oberflächendichte Σ als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

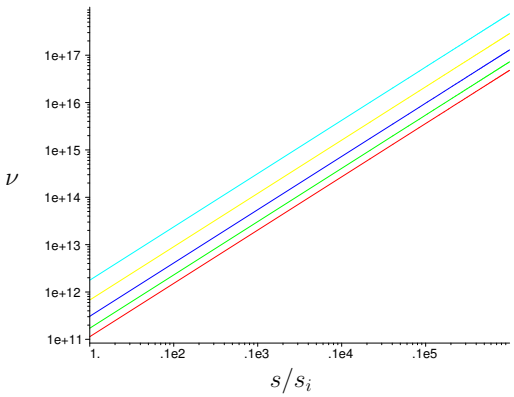


Abbildung 2.13: Viskosität ν als Funktion des normierten Radius s/s_i für $\kappa = \kappa_{\text{es}}$

Desweiteren fällt auf, daß neben dem totalen Zentraldruck $p = p_{\text{rad}} + p_{\text{gas}}$ auch die Zentraltemperatur T_c unabhängig von dem Parameter β ist. Dies ist im Rahmen der Näherung $\kappa = \kappa_{\text{es}} = \text{const.}$ nicht verwunderlich. Die Eddington-Bedingung (2.1.22) entspricht

$$\begin{aligned} & A_1 \cdot T_{\text{eff}}^4 &&= B_1 \cdot \frac{p}{\rho h} \\ \Longleftrightarrow \quad & A_2 \cdot \frac{T_c^4}{\tau} &&= B_2 \cdot \frac{p}{\Sigma} \\ \Longleftrightarrow \quad & A_3 \cdot \frac{T_c^4}{\kappa\Sigma} &&= B_2 \cdot \frac{p}{\Sigma} \\ \overset{\kappa=\kappa_{\text{es}}}{\Longleftrightarrow} \quad & A_4 \cdot T_c^4 &&= B_3 \cdot p\,, \end{aligned}$$

wobei wir konstante Faktoren mit A bzw. B zusammengefaßt haben. Alle weiteren Größen liegen in einem annehmbaren Wertebereich für Akkretionsscheiben mit der gegebenen Zentralmasse und Viskositätsbeschreibung. Wie wir gesehen haben, gilt für das vorliegende Modell

$$p_{\text{gas}} = 3 p_{\text{rad}}\,.$$

Die Näherung vernachlässigbaren Gasdrucks ist also stark verletzt und muß für sinnvolle Berechnungen der kritischen Akkretionsrate für reine Thomson-Streuung aufgegeben werden – entgegen unserer ersten Überschlagsrechnung in Abschnitt 1.3. Es liegt die Vermutung nahe, daß die Näherung konstanter Opazität für das vorliegende Problem zu weitgehend ist. Darauf wollen wir im folgenden eingehen.

2.1.3 $\mathrm{h/s} \neq$ const., $\kappa \neq$ const.

Wir verlassen die Näherung reiner Thomson-Streuung und berechnen das so entstehende Limit für die Akkretionsrate im Fall $\varepsilon \neq$ const.

Zur Ersetzung der Opazität $\kappa = \kappa_{\mathrm{es}}$ aus dem klassischen Eddington-Limit gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum einen existieren Approximations- und Interpolationsformeln, zum anderen tabellierte Werte für die verschiedenen Temperaturbereiche, siehe z. B. Semenov et al. [16] für Temperaturen zwischen 5 K und 10^4 K oder Iglesias und Rodgers [10] für höhere Temperaturen.

Da es uns in erster Linie um eine qualitative Betrachtung der Veränderung der kritischen Akkretionsrate geht, verwenden wir zunächst eine allgemeine Parametrisierung von κ:

$$\kappa = \kappa_0 \cdot T^{\kappa_T} \cdot \rho^{\kappa_\rho} \tag{2.1.25}$$

Die Herleitung der Systemgrößen erfolgt wieder analog Anhang B. Ein interessantes Resultat dabei ist, daß – unabhängig von der Parametrisierung – β wieder den Wert $1/3$ annimmt! Für die anderen Größen gilt

$$\frac{T_c}{T_c^{(\kappa_{\mathrm{es}})}} = 2^{\delta(3+\kappa_\rho)-3/4} \cdot \frac{\Omega_K^{\delta-1/4} c^{\delta(2+\kappa_\rho)-1/2} (3\beta)^{\delta\kappa_\rho} k_B^{\delta\kappa_\rho} \kappa_{\mathrm{es}}^{1/4}}{\alpha^{\delta-1/4} \sigma_{\mathrm{SB}}^{\delta(1+\kappa_\rho)-1/4} \kappa_0^{\delta} m_H^{\delta\kappa_\rho}}, \tag{2.1.26}$$

$$\frac{\dot{M}}{\dot{M}^{(\kappa_{\mathrm{es}})}} = \left(\frac{\kappa_{\mathrm{es}}}{\kappa_0} \cdot \left(\frac{3ck_B}{2\sigma_{\mathrm{SB}} m_H} \right)^{\kappa_\rho} \cdot \left(\frac{2^{\delta(3+\kappa_\rho)} \alpha^{\delta} \sigma_{\mathrm{SB}}^{\delta(1+\kappa_\rho)} \kappa_0^{\delta} m_H^{\delta\kappa_\rho}}{\Omega_K^{\delta} c^{\delta(2+\kappa_\rho)} (3\beta)^{\delta\kappa_\rho} k_B^{\delta\kappa_\rho}} \right)^{3\kappa_\rho+\kappa_T} \right)^{9/8}, \tag{2.1.27}$$

$$\frac{h}{h^{(\kappa_{\mathrm{es}})}} = \left(\frac{\kappa_{\mathrm{es}}}{\kappa_0} \cdot \left(\frac{3ck_B}{2\sigma_{\mathrm{SB}} m_H} \right)^{\kappa_\rho} \cdot \left(\frac{2^{\delta(3+\kappa_\rho)} \alpha^{\delta} \sigma_{\mathrm{SB}}^{\delta(1+\kappa_\rho)} \kappa_0^{\delta} m_H^{\delta\kappa_\rho}}{\Omega_K^{\delta} c^{\delta(2+\kappa_\rho)} (3\beta)^{\delta\kappa_\rho} k_B^{\delta\kappa_\rho}} \right)^{3\kappa_\rho+\kappa_T} \right)^{1/8}, \tag{2.1.28}$$

wobei $\delta = \dfrac{1}{4 + 3\kappa_\rho + \kappa_T}$. Als Beispiel verwenden wir die Kramers-Opazität

$$\kappa_R = 5 \cdot 10^{24} \rho \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \right] T_c\,[\mathrm{K}]^{-7/2} \frac{\mathrm{cm}^2}{g}. \tag{2.1.29}$$

Dann gelten für (2.1.26)–(2.1.28) mit dem normierten Radius $\xi = s/s_i$

$$\frac{T_c}{T_c^{(\kappa_{\mathrm{es}})}} = \frac{2{,}43 \cdot 10^{-1}}{\xi^{3/56}} \approx \frac{2{,}43 \cdot 10^{-1}}{\xi^{0{,}054}}, \tag{2.1.30}$$

$$\frac{\dot{M}}{\dot{M}^{(\kappa_{\mathrm{es}})}} = \frac{5{,}86 \cdot 10^{-3}}{\xi^{27/112}} \approx \frac{5{,}86 \cdot 10^{-3}}{\xi^{0{,}24}}, \tag{2.1.31}$$

$$\frac{h}{h^{(\kappa_{\mathrm{es}})}} = \frac{5{,}65 \cdot 10^{-1}}{\xi^{3/112}} \approx \frac{5{,}65 \cdot 10^{-1}}{\xi^{0{,}027}}. \tag{2.1.32}$$

Abbildungen 2.14–2.16 zeigen das Verhältnis der Zentraltemperaturen, die neu berechnete Akkretionsrate $\dot{M}$ und $\dot{M}^{(\kappa_{\mathrm{es}})}$ im Verhältnis zu klassischen Eddington-Rate und die relativen Höhen h/s und $h^{(\kappa_{\mathrm{es}})}/s$. Es zeigt sich, daß im Fall der Kramers-Opazität die Zentraltemperatur, die kritische Akkretionsrate und damit auch die Höhe der Scheibe geringer ist.

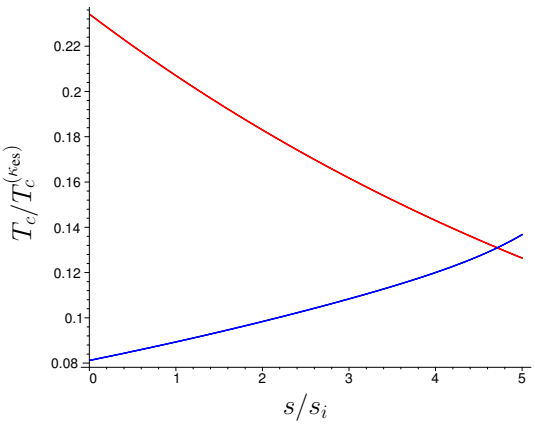


Abbildung 2.14: $T_c/T_c^{(\kappa_{es})}$ als Funktion des normierten Radius s/s_i für κ nach der Interpolationsformel (2.1.34) (blau) und für die Kramers-Opazität κ_R (rot)

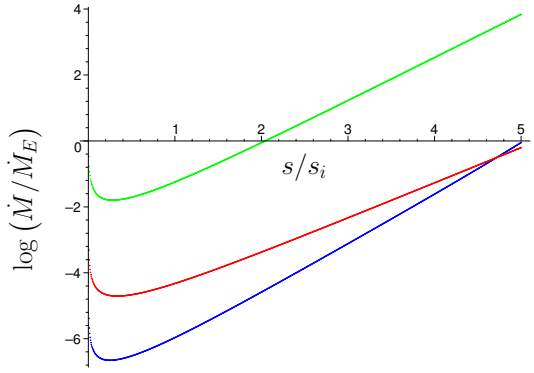


Abbildung 2.15: $\dot{M}/\dot{M}_E$ als Funktion des normierten Radius s/s_i für κ nach der Interpolationsformel (blau), für die Kramers-Opazität κ_R (rot) und für Thomson-Streuung (grün)

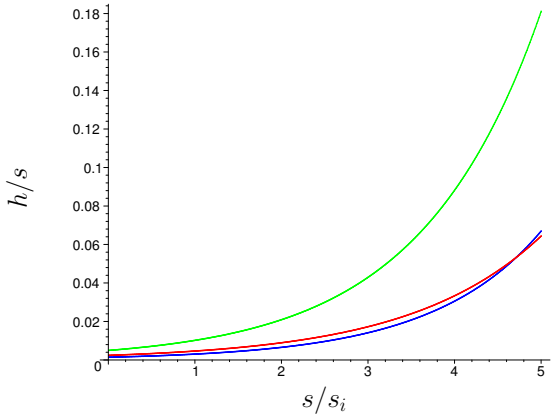


Abbildung 2.16: h/s als Funktion des normierten Radius s/s_i für κ nach der Interpolationsformel (blau), für die Kramers-Opazität κ_R (rot) und für reine Thomson-Streuung (grün)

Tabelle 2.1: Parametersatz zur Interpolation der Opazität nach (2.1.34)

Beitrag i	**Symbol**	$\kappa_{\mathbf{i,0}}$	$\kappa_{\mathbf{i},\rho}$	$\kappa_{\mathbf{i,T}}$
Staub mit Eishülle	κ_{Eis}	$2{,}0 \cdot 10^{-4}$	0	2
Dampfförmiges Eis	$\kappa_{\text{Eis, dampff.}}$	$1{,}0 \cdot 10^{16}$	0	-7
Staubteilchen	κ_{Staub}	$1{,}0 \cdot 10^{-1}$	0	$1/2$
Dampfförmiger Staub	$\kappa_{\text{Staub, dampff.}}$	$2{,}0 \cdot 10^{81}$	1	-24
Moleküle	$\kappa_{\text{Eis, dampff.}}$	$1{,}0 \cdot 10^{-8}$	$2/3$	3
H^--Ion	κ_{H^-}	$1{,}0 \cdot 10^{-36}$	$1/3$	10
Gebunden-Frei- und Frei-Frei-Übergänge	κ_{Atom}	$1{,}5 \cdot 10^{20}$	1	$-7/2$
Elektronen-Streuung	κ_{e^-}	$0{,}348$	0	0

Ebenfalls in diesen Abbildungen enthalten sind die Ergebnisse rein numerischer Berechnungen unter Verwendung eines Approximationsansatzes für die Opazität: Nach Gail (priv. Komm.) können die einzelnen Beiträge κ_i zur gesamten Opazität κ durch den Ansatz

$$\kappa_i = \kappa_{i,0} \cdot T^{\kappa_{i,T}} \cdot \rho^{\kappa_{i,\rho}} \tag{2.1.33}$$

approximiert werden. Die gesamte Opazität kann durch die Interpolationsformel (Gail, priv. Komm.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} &= \left[\frac{1}{\kappa_{\text{Eis}}^4} + \frac{T_0^{10}}{T_0^{10} + T^{10}} \cdot \frac{1}{\kappa_{\text{Eis, dampff.}}^4 + \kappa_{\text{Staub}}^4} \right]^{1/4} \\ &\quad + \left[\frac{1}{\kappa_{\text{Staub, dampff.}}^4 + \kappa_{\text{Mol}}^4 + \kappa_{H^-}^4} + \frac{1}{\kappa_{\text{Atom}}^4 + \kappa_{e^-}^4} \right]^{1/4} \end{aligned} \tag{2.1.34}$$

beschrieben werden. Dabei ist $T_0 = 3000\,\text{K}$ und es gelten für die einzelnen Beiträge i die in Tab. 2.1 gegebenen Werte. Man beachte, daß (2.1.34) eine Interpolationsformel ist und keine physikalische Modellierung der Opazität in Dichte und Temperatur darstellt. Wie in Abb. 2.14–2.16 zu sehen ist, liegen die Lösungen $\dot{M}$, T_c, h/s für Opazitäten nach (2.1.34) für weite Bereiche der Scheibe nochmals deutlich unter den Lösungen für die Kramers-Opazität. Lediglich bei großen Radien liegen wegen der starken Temperaturabhängigkeit der Kramers-Opazität die Lösungen nach der Interpolationsformel über den Lösungen für die Kramers-Opazität. Für beide Lösungen gilt, daß die Annahme dünner Scheiben wesentlich besser erfüllt ist als für reine Thomson-Streuung. Ebenso zeigt sich, daß die kritische Akkretionsrate $\dot{M}$ immer kleiner als die klassische Eddington-Rate $\dot{M}_E$ ist – dies ist für reine Elektronenstreuung nicht der Fall.

Abschließend wollen wir darauf hinweisen, daß durch das Aufgeben der Näherung reiner Thomson-Streuung zwar die Systemgrößen $\dot{M}, T_c$ und h und damit praktisch alle weiteren physikalischen Größen verändert werden. Jedoch erhalten wir weiterhin aus den Gleichungen die Relation $\beta = 1/3$. Das Verhältnis von Gas- zu Strahlungsdruck ist für das vertikale Eddington-Limit also unabhängig von der Opazität, wie folgende kurze Umformungen zeigen:

Wie in Anhang B gezeigt wird, erhalten wir folgendes Gleichungssystem für Eddington-limitierte Akkretionsraten, wobei wir konstante Terme der Übersichtlichkeit halber zu den Konstanten A–D zusammengefaßt haben:

$$\text{(I)} \qquad h = A \cdot (1+\beta) \cdot \frac{T_c}{\kappa \Omega_K^2 \dot{M} f(s)}$$

$$\text{(II)} \quad \dot{M} f(s) = B \cdot h^3 \Omega_K \frac{T_c^3}{\beta}$$

$$\text{(III)} \quad T_c^4 = C \cdot \frac{\dot{M}^2 f(s)^2 \Omega_K \kappa}{h^2}$$

$$\text{(IV)} \quad h = D \cdot \kappa \dot{M} f(s)$$

Mit Hilfe von (I) und (IV) folgt zunächst

$$\text{(I)}' \quad (\dot{M} f(s))^2 = \frac{A}{D}(1+\beta)\frac{T_c}{\kappa^2 \Omega_K^2}\,.$$

Wir kombinieren (II) und (III) und verwenden zusätzlich (IV) und (I)$'$. Das ergibt

$$\text{(II)}' \quad T_c^4 = \frac{\beta^2 \Omega_K}{(1+\beta)^2 \kappa} \cdot \frac{1}{A^2 B^2 C D^2}\,.$$

Aus (III) und (IV) folgt noch

$$\text{(III)}' \quad T_c^4 = \frac{C}{D^2}\frac{\Omega_K}{\kappa}\,.$$

(II)$'$ und (III)$'$ ergeben somit eine Bestimmungsgleichung für β:

$$\beta^2 = (1+\beta)^2 \cdot A^2 B^2 C^2 = (1+\beta)^2 \cdot \frac{1}{16} \tag{2.1.35}$$

Im letzten Schritt haben wir die Konstanten wieder eingesetzt. Wie man leicht nachprüft, wird (2.1.35) wegen $\beta \geq 0$ nur für $\beta = 1/3$ erfüllt.

Als letzte verbleibende Näherung in diesem Modell bleibt nun noch der Energietransport. Die Annahme, daß Energietransport ausschließlich durch Strahlung erfolgt, führt zu der Beziehung

$$T_c^4 = \frac{3\tau}{16} T_{\text{eff}}^4\,, \tag{2.1.36}$$

welche in der Berechnung von β nach obigem Gleichungssystem eine entscheidende Rolle spielt. In realen Systemen treten neben radiativer Kühlung weitere Kühlungsprozesse auf wie z. B. Advektion. Dies erfordert aber genügend hohe Temperaturen und ist im Rahmen des Modells dünner α-Scheiben nicht enthalten. Im Rahmen der *Slim-disc*-Theorie (siehe Abschnitt 3.1) werden wir genau diese Erweiterung der klassischen Theorie ansprechen und den Einfluß auf das Eddington-Limit untersuchen.

2.2 Das Eddington-Limit in radialer Richtung

In diesem Abschnitt wenden wir uns dem Eddington-Limit in radialer Richtung zu. Bereits die Tatsache, daß die Gravitationskraft wegen des Faktors h/s in vertikaler Richtung viel schwächer ist, läßt uns intuitiv vermuten, daß – falls ein Limit existiert – es wesentlich größer sein muß als in vertikaler Richtung. Desweiteren müssen wir für die Berechnung der radialen Strahlungsdruckkraft berücksichtigen, daß ein Teilchen am Ort s sowohl den (auswärts zeigenden) Strahlungsdruck von $s - ds$, als auch den (einwärts zeigenden) von $s + ds$ erfährt – wir können also nicht einfach das Stefan-Boltzmann-Gesetz anwenden und die absolute Größe der Strahlungsdruckkraft am Ort s berechnen, sondern müssen den radialen Gradienten dF_{rad}/ds betrachten. Andererseits müssen wir auch berücksichtigen, daß das Testteilchen sich mit der Geschwindigkeit v_φ in azimutaler Richtung bewegt und somit auch die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden muß (siehe Abb. 2.17).

Wir gehen wieder Schritt für Schritt vor und betrachten das Kräftegleichgewicht für ein Teilchen in der Symmetrieebene der Scheibe ($z = 0$) unter verschiedenen Vereinfachungen.

Zunächst aber stellen wir die einzelnen auf das Teilchen wirkenden Kräfte zusammen. Radial nach außen wirkende Kräfte sind positiv, radial nach innen wirkende Kräfte negativ.

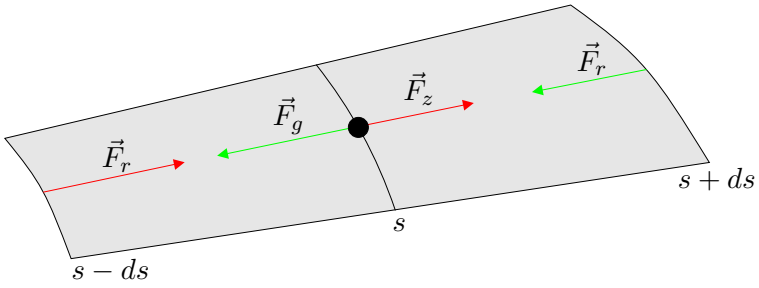


Abbildung 2.17: Skizze zur Berechnung der Gesamtkraft in radialer Richtung

1. Gravitationskraft des Zentralobjektes:

$$F_{\text{grav}} = -\frac{GMm_H}{s^2} \tag{2.2.1}$$

   Dies gilt wegen $h \ll s$ für $0 < z \leq h$ näherungsweise, für $z = 0$ sogar exakt.

2. Zentrifugalkraft aus der Rotationsbewegung:

$$F_{\text{zent}} = m_H s\, \Omega^2 \tag{2.2.2}$$

   Ω ist hierbei die Kreisfrequenz.

3. Resultierende Kraft aus dem Strahlungs- und Gasdruck:

$$F_{\text{rad}} \;=\; \frac{\sigma_T}{c} \cdot \text{radialer Fluß} \;=\; -\frac{m_H}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{2.2.3}$$

4. In der Scheibe auftretende viskose Kräfte:

$$F_\nu = -\frac{m_H}{2}\frac{\partial v_s^2}{\partial s} + m_H \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} - m_H \nu \frac{v_s}{s^2} \tag{2.2.4}$$

Prinzipiell hätten wir auch einfach die radiale Komponente der Navier-Stokes-Gleichung für Rotationsbewegungen in Zylinderkoordinaten aufstellen, die Gravitationskraft berücksichtigen und die Vereinfachungen azimutaler Symmetrie und verschwindender vertikaler Gradienten der Radialgeschwindigkeit,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0\,,$$

einsetzen können. Das Ergebnis ist dasselbe.

Wir bemerken sogleich: Im Modell dünner α-Scheiben ist die Annahme Keplersche Rotation enthalten. Dies bedeutet $\Omega = \Omega_K$ und damit

$$F_{\text{zent}} = -F_{\text{grav}}\,. \tag{2.2.5}$$

Mit (2.2.5) würde in der Kräftebilanz ein infinitesimal kleiner Temperaturgradient das Testteilchen schon nach außen treiben, wenn es nicht die Reibungskräfte gäbe. Daß dies keine realistische Vorstellung ist, zeigt allein schon die Tatsache, daß in jeder Scheibe ein Temperaturgradient vorliegt und keiner dieser Scheiben „auseinanderfliegt“, sondern stattdessen Materie nach innen transportiert wird. In Akkretionsscheiben sorgt die Reibungskraft aufgrund der differentiellen Rotation dafür, daß die Materie Rotationsenergie abgibt, ihre Rotationsgeschwindigkeit abnimmt und somit nach innen wandert. Es existieren nun zwei Möglichkeiten, einen sinnvollen Ansatz für die Gravitations- und die Zentrifugalkraft aufzustellen:

1. Wir parametrisieren den Effekt der Reibung durch einen Faktor ξ ($0 < \xi < 1$) in der Zentrifugalkraft. Dann gilt für die Summe aus Zentrifugal- und Gravitationskraft

$$F_{\text{zent, grav}} = -(1-\xi)\frac{GMm_H}{s^2}\,. \tag{2.2.6}$$

   Wir geben den Parameter ξ als konstant vor und stellen dann eine Gleichung für $\dot{M}$ auf. Dies bedeutet, eine weitere, relativ unrealistische Annahme in der Berechnung zu verwenden.

2. Wir verwenden den komplizierteren, aber sicher realistischeren Ansatz für die Reibungskräfte nach (2.2.4).

Wir werden den zuletzt genannten Weg wählen und die Reibungskräfte direkt einsetzen. Die Navier-Stokes-Gleichung nimmt mit (2.2.5) folgende Form an:

$$F_{\text{ges}}^{(r)} \;=\; F_{\text{rad}} + F_\nu \;=\; -\frac{m_H}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{m_H}{2}\frac{\partial v_s^2}{\partial s} + m_H\nu\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} - m_H\nu\frac{v_s}{s^2} \tag{2.2.7}$$

Die dazu erforderlichen Größen berechnen wir in den folgenden Abschnitten für $h/s = \text{const.}$ zusammen mit $\kappa = \text{const.}$ und für $h/s \neq \text{const.}$ zusammen mit $\kappa \neq \text{const.}$, wie wir es auch für die vertikale Richtung getan haben.

Es ist offensichtlich, daß (2.2.7) auf eine (Differential-)Gleichung für eine der Unbekannten, z. B. $\beta(s)$ führt. Wir benötigen also Randbedingungen zur Lösung. Da am inneren Rand durch die divergierende Randfunktion $f(s)$ nur sehr schwierig Aussagen zu treffen sind, werden wir die Randbedingungen am äußeren Rand festlegen, z. B.

$$\beta(s_a) \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\partial\beta(s)}{\partial s}\right|_{s=s_a}\,.$$

Wie wir im weiteren Verlauf sehen werden, spielt die Randbedingung jedoch nur eine unbedeutende Rolle: Bei der numerischen Integration für $h/s \neq \text{const.}$ gleichen sich die Lösungen für extrem verschiedene Randbedingungen $\beta(s_a)$ innerhalb der ersten Integrationsschritte bis auf geringe Unterschiede an, so daß wir einfach durch „Ausprobieren“ einen glatten Verlauf der Funktionen am äußeren Rand herstellen können. Wie wir bei der Betrachtung des vertikalen Eddington-Limits schon gesehen haben, lassen sich die Gleichungen mit etwas Aufwand ohne die unrealistische Annahme $h/s = \text{const.}$ lösen. Wir werden also sogleich den Fall $h/s \neq \text{const.}$ betrachten.

2.2.1 $\mathrm{h/s} \neq$ const.

Wie wir bereits bei der Diskussion der kritischen Akkretionsrate in vertikaler Richtung gesehen haben, benötigen wir zur vollständigen Lösung des Gleichungssystems neben der Eddington-Bedingung $F_{\text{ges}} = 0$ die Parametrisierung des Druckes. Wir verwenden die gleiche Notation wie zuvor:

$$p_{\text{rad}}/p_{\text{gas}} = \beta \tag{2.1.23}$$

Für die weiteren benötigten Größen gelten dann die im Anhang A hergeleiteten Beziehungen:

$$\begin{aligned}
T_c &= \left(\frac{\beta(s)^2}{(1+\beta(s))^2}\cdot\frac{2c^2\Omega_K}{\kappa\alpha\sigma_{\text{SB}}}\right)^{1/4}\,,\\
v_s &= -\frac{\alpha^{3/4}(1+\beta(s))^{1/2}\beta(s)^{1/2}2^{5/4}k_B c^{1/2}}{m_H s f(s)\Omega_K^{3/4}\kappa^{1/4}\sigma_{\text{SB}}^{1/4}}\,,\\
\nu &= \frac{2^{9/4}}{3}\cdot\frac{\alpha^{3/4}(1+\beta(s))^{1/2}\beta(s)^{1/2}k_B c^{1/2}}{m_H\Omega_K^{3/4}\kappa^{1/4}\sigma_{\text{SB}}^{1/4}}\,.
\end{aligned}$$

Wir berücksichtigen für die Navier-Stokes-Gleichung (2.2.7)

$$p = p_{\text{rad}} + p_{\text{gas}} = p_{\text{rad}} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = p_{\text{rad}} \frac{1+\beta}{\beta} = p_{\text{rad}} \frac{1+\beta}{\beta} \,.$$

und erhalten für (2.2.3)

$$\begin{aligned} F_{\text{rad}} &= -m_H \frac{p}{\rho} \frac{\partial \ln p}{\partial s} = -m_H \frac{p}{\rho} \left(4 \frac{\partial \ln T_c}{\partial s} - \frac{1}{(1+\beta)\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \\ &= -m_H \frac{3}{2} \cdot \frac{\nu \Omega_K}{\alpha} \left(-\frac{3}{2s} + \frac{2}{(1+\beta)\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{1}{(1+\beta)\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \\ &= \frac{9}{4} \frac{m_H \nu \Omega_K}{\alpha s} - \frac{3}{2} \frac{m_H \nu \Omega_K}{\alpha (1+\beta)\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} \,. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Für die Navier-Stokes-Gleichung (2.2.7) gilt dann

$$\begin{aligned} F_{\text{ges}}^{(r)} &= \frac{9}{4} \frac{m_H \nu \Omega_K}{\alpha s} - \frac{3}{2} \frac{m_H \nu \Omega_K}{\alpha (1+\beta)\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{9}{8} m_H \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\nu^2}{f(s)^2 s^2} \right) \\ &\quad - \frac{3}{2} m_H \nu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\nu}{f(s)\, s} \right) + \frac{3}{2} m_H \frac{\nu^2}{f(s)\, s^3} \,. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Wir lösen die Eddington-Bedingung $F_{\text{ges}}^{(r)} = 0$ mit den Beziehungen für T_c und ν numerisch. Wie bereits erwähnt, kommt es auf die Randbedingung $\beta(s_a)$ nicht an. Wir demonstrieren dies durch die Verwendung zweier extrem verschiedener Randbedingungen, nämlich zum einen

$$\beta(s_a) = 3{,}5 \cdot 10^4, \qquad \left. \frac{\partial \beta}{\partial s} \right|_{s=s_a} = 0 \,, \tag{2.2.10}$$

welches einem glatten Funktionsverlauf entspricht, zum anderen

$$\beta(s_a) = 9 \cdot 10^{-9}, \qquad \left. \frac{\partial \beta}{\partial s} \right|_{s=s_a} = 0 \tag{2.2.11}$$

als stark davon abweichenden Startwert. Die Randbedingung (2.2.10) entspricht den Werten $\dot{M}(s_a) = 9{,}36 \cdot 10^{25} \text{g}\,\text{s}^{-1} = 5{,}58 \cdot 10^6 \dot{M}_E$, während (2.2.11) zu $2{,}40 \cdot 10^{12} \text{g}\,\text{s}^{-1} = 1{,}43 \cdot 10^{-7} \dot{M}_E$ führt. Beide Lösungen gleichen sich innerhalb weniger Integrationsschritte an (vgl. Abb. 2.18), die Wahl der Randbedingung spielt damit keine wichtige Rolle.

Abbildung 2.18 zeigt die radialen Akkretionsraten und das vertikale Limit nach (B.9) bezogen auf die klassische Eddington-Rate. Im Gegensatz zur vertikalen Richtung liegen die Akkretionsraten in radialer Richtung für die gesamte Scheibe deutlich über dem klassischen Eddington-Limit und damit auch um einige Größenordnungen über dem vertikalen Limit. Der Anstieg bei $s \to s_i$ ist wieder auf die Randfunktion $f(s)$ zurückzuführen. Wie sehen jedoch die weiteren Größen in diesen Scheiben aus? Abbildungen 2.19–2.21 zeigen die Verhältnisse jeweils nur für die Randbedingung (2.2.10), welche offensichtlich die bessere Wahl ist.

Wie Abb. 2.19 zeigt, liegt der Betrag der Radialgeschwindigkeit deutlich über der Schallgeschwindigkeit. Obendrein sind beide Geschwindigkeiten wesentlich höher als die Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^{10} \text{cm}\,\text{s}$! Das ist physikalisch natürlich nicht sinnvoll. Desweiteren zeigt Abb. 2.20, daß für Akkretionsraten dieser Größenordnung der Strahlungsdruck absolut dominiert, der Gasdruck also vernachlässigt werden kann. Schließlich können wir in Abb. 2.21 sehen, daß die Voraussetzung $h/s \ll 1$ für

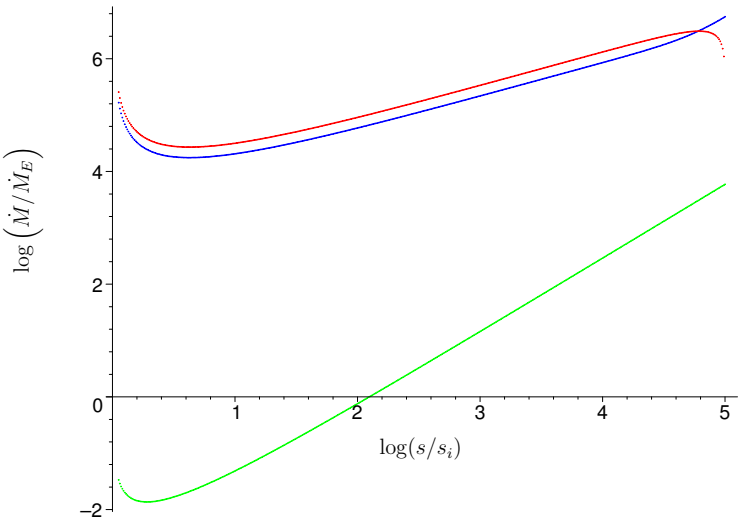


Abbildung 2.18: Radiales und vertikales Limit für die Akkretionsrate mit $\varepsilon \neq$ const. im Verhältnis zum klassischen Eddington-Limit $\dot{M}_E$. Blau: radiales Limit für die Randbedingung (2.2.10); rot: radiales Limit für (2.2.11); grün: vertikales Limit nach (B.9)

das Scheibenmodell um Größenordnungen verletzt ist. Für reine Thomson-Streuung können wir daraus folgern, daß das Eddington-Limit in radialer Richtung überhaupt keine Rolle spielen wird. Zu bemerken ist auch, daß die optische Tiefe sich über die Scheibe stark ändert: Während die Voraussetzung des Scheibenmodells, nämlich optisch dicke Scheiben, am äußeren Rand sehr gut erfüllt ist ($\tau(s_a) \approx 10^3$), wird sie für kleine Radien stark verletzt ($\tau(s_i) \approx 10^{-2}$). Auch damit liegen wir außerhalb des Gültigkeitsbereichs dünner α-Scheiben.

Wir haben bereits für das vertikale Eddington-Limit gesehen, daß die Opazität starken Einfluß auf die kritischen Akkretionsraten hat. Wir wollen im nächsten Abschnitt untersuchen, ob für andere Streuprozesse das Limit in radialer Richtung doch noch eine Rolle spielen kann.

2.2.2 $\mathrm{h/s} \neq$ const., $\kappa \neq$ const.

Für eine Abschätzung des Einflusses der Opazität und zum Vergleich mit der Behandlung des vertikalen Eddington-Limits betrachten wir im folgenden wieder den Ansatz (2.1.25):

$$\kappa = \kappa_0 \cdot T^{\kappa_T} \cdot \rho^{\kappa_\rho} \tag{2.1.25}$$

Wir erhalten in diesem Fall für die Zentraltemperatur

$$T_c = \left(\frac{2c^2 \Omega_K \beta^{2+\kappa_\rho}}{\kappa_0 \chi^{\kappa_\rho} \alpha \sigma_{\mathrm{SB}} (1+\beta)^2} \right)^{1/(4+3\kappa_\rho+\kappa_T)} \tag{2.2.12}$$

mit $\chi = \dfrac{2\sigma_{\mathrm{SB}} m_H}{3ck_B}$. Die Viskosität wird dann zu

$$\nu = (1+\beta)^{1/2} \beta^{1/2+\kappa_\rho/4} \cdot \frac{2^{9/4} c^{1/2} \alpha^{3/4} k_B}{3\kappa_0^{1/4} \chi^{\kappa_\rho/4} \sigma_{\mathrm{SB}}^{1/4} m_H \Omega_K^{3/4} T_c^{(3\kappa_\rho+\kappa_T)/4}} \cdot \tag{2.2.13}$$

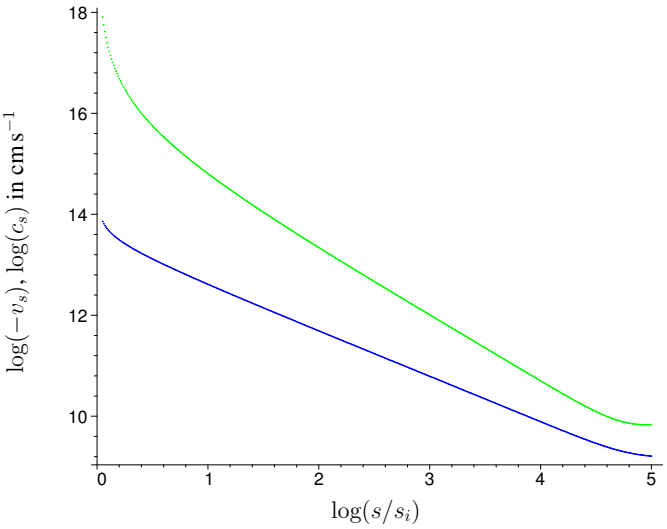


Abbildung 2.19: Radialgeschwindigkeit (grün) und Schallgeschwindigkeit (blau) für $\varepsilon \neq$ const.

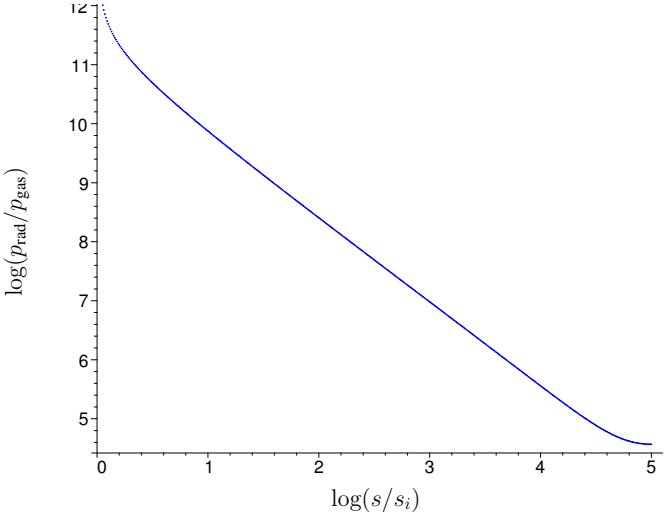


Abbildung 2.20: Verhältnis β von Strahlungsdruck zu Gasdruck für $\varepsilon \neq$ const.

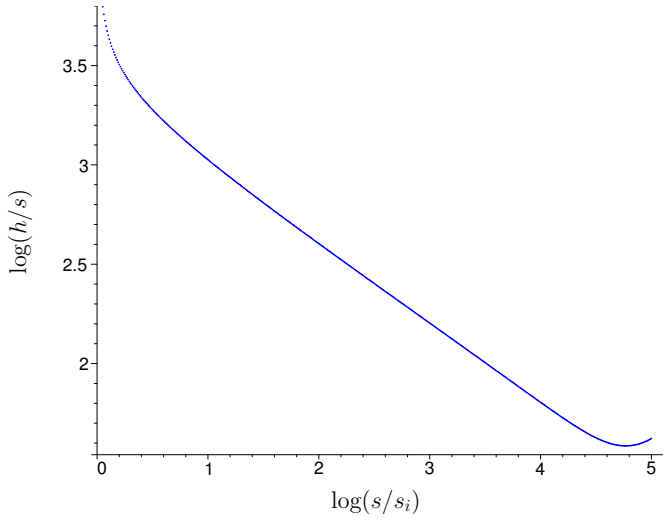


Abbildung 2.21: $\varepsilon = h/s$ im Fall reiner Thomson-Streuung

Für die Radialgeschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} v_s &= -\frac{3}{2}\frac{\nu}{f(s)\,s} \\ &= -(1+\beta)^{1/2}\beta^{1/2+\kappa_\rho/4}\cdot\frac{2^{5/4}c^{1/2}\alpha^{3/4}k_B}{\kappa_0^{1/4}\chi^{\kappa_\rho/4}\sigma_{\text{SB}}^{1/4}m_H\Omega_K^{3/4}T_c^{(3\kappa_\rho+\kappa_T)/4}f(s)\,s}\,. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Wir ersparen uns das Einsetzen von T_c in die Gleichungen für ν und v_s; es genügt zu wissen, daß wir alle drei Größen als Funktion von s und $\beta(s)$ darstellen können. Ausgangsgleichung ist wieder die Navier-Stokes-Gleichung (2.2.7):

$$F_{\text{ges}}^{(r)} = -m_H\frac{p}{\rho}\frac{\partial\ln p}{\partial s} - \frac{m_H}{2}\frac{\partial v_s^2}{\partial s} + m_H\nu\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} - m_H\nu\frac{v_s}{s^2} \tag{2.2.7}$$

Der Ausdruck für die Strahlungsdruckkraft wird im Anhang C hergeleitet. Wir erhalten

$$-m_H\frac{p}{\rho}\frac{\partial\ln p}{\partial s} = \frac{3}{2}\frac{m_H\nu\Omega_K}{\alpha}\cdot\frac{1}{4+3\kappa_\rho+\kappa_T}\cdot\left(\frac{6}{r} - \frac{4+\kappa_\rho(1+4\beta)-\kappa_T}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right). \tag{C.1}$$

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Ausdruck für Thomson-Streuung ($\kappa_\rho = \kappa_T = 0$) in den zuvor erhaltenen Ausdruck (2.2.8) übergeht.

Damit wird die Navier-Stokes-Gleichung zu

$$\begin{aligned} F_{\text{ges}}^{(r)} &= \frac{3}{2}\frac{m_H\nu\Omega_K}{\alpha}\cdot\frac{1}{4+3\kappa_\rho+\kappa_T}\cdot\left(\frac{6}{r} - \frac{4+\kappa_\rho(1+4\beta)-\kappa_T}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) \\ &\quad -\frac{m_H}{2}\frac{\partial v_s^2}{\partial s} + m_H\nu\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} - m_H\nu\frac{v_s}{s^2}\,. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Wir setzen hier die Gleichungen (2.2.14)–(2.2.14) ein und lösen die so entstehende Differentialgleichung für β numerisch. Dabei verwenden wir wieder die Kramers-Opazität (2.1.29). Wie zuvor im Abschnitt (2.2.1) für reine Thomson-Streuung spielt die Randbedingung $\beta(s_a)$ kaum eine Rolle, da sich die Lösungen innerhalb der ersten Integrationsschritte bis auf – für diese Größenordnung – geringe Abweichungen angleichen. Ein glatter Verlauf für die kritische Akkretionsrate ergibt sich für die Randbedingung

$$\beta(s_a) = 7{,}3\cdot 10^4, \qquad \left.\frac{\partial\beta}{\partial s}\right|_{s=s_a} = 0\,. \tag{2.2.16}$$

Als stark davon abweichenden Startwert wählen wir wie zuvor

$$\beta(s_a) = 9\cdot 10^{-9}, \qquad \left.\frac{\partial\beta}{\partial s}\right|_{s=s_a} = 0\,. \tag{2.2.17}$$

Abbildung 2.22 zeigt die radialen Akkretionsraten und das vertikale Limit, wie es in Abschnitt 2.1.3 bestimmt wurde, bezogen auf die klassische Eddington-Rate. Abbildungen 2.23–2.25 zeigen wie zuvor die Radial- und Schallgeschwindigkeit, das Verhältnis von Strahlungs- zu Gasdruck und das Verhältnis h/s. Zusätzlich zeigt 2.26 die sich ergebende Opazität κ. Für diese gilt im Fall der Kramers-Opazität

$$\kappa = \frac{22{,}18\cdot(1+\beta)^{2/7}\cdot(s/s_i)^{3/14}}{\beta^{10/7}} \overset{\beta\gg 1}{\approx} \frac{22{,}18\cdot(s/s_i)^{3/14}}{\beta^{8/7}}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}\,. \tag{2.2.18}$$

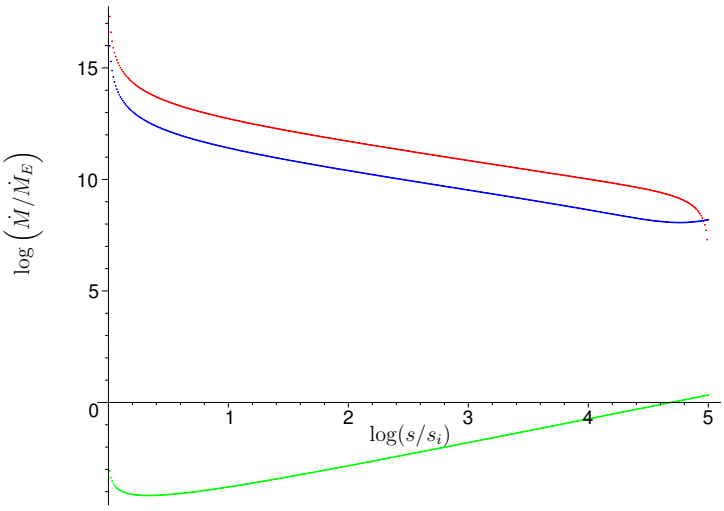


Abbildung 2.22: Radiales und vertikales Limit für die Akkretionsrate mit $\varepsilon \neq$ const. im Verhältnis zum klassischen Eddington-Limit $\dot{M}_E$. Blau: radiales Limit für die Randbedingung (2.2.16); rot: radiales Limit für (2.2.17); grün: vertikales Limit nach Abschnitt 2.1.3

Die Abbildungen zeigen, daß für die Kramers-Opazität die kritische Akkretionsrate noch höher liegt als für reine Thomson-Streuung und damit der Unterschied zum klassischen Eddington-Limit und zur vertikalen kritischen Rate noch größer ist. Die Geschwindigkeiten v_s und c_s unterscheiden sich kaum für die verschiedenen Opazitäten. So gilt weiterhin $|v_s| > c_s \gg c$. Ebenso liegt das Verhältnis h/s in derselben Größenordnung wie für den Fall reiner Thomson-Streuung und ist immer größer als 1. Das Verhältnis von Strahlungs- zu Gasdruck ist um 1–2 Größenordnungen kleiner als für reine Thomson-Streuung, jedoch gilt weiterhin $\beta \gg 1$. Die Opazität nimmt von $10^{-2} \approx 10 \cdot \kappa_{\mathrm{es}}$ am äußeren Rand ab bis zu 10^{-10} am inneren Rand. Dies bedeutet wie im Fall reiner Thomson-Streuung auch eine Abnahme der optischen Tiefe von ungefähr 10^3 am äußeren Rand (optisch dick) zu 10^{-2} am inneren Rand (optisch dünn).

Wie im Fall reiner Thomson-Streuung liegt die Eddington-Bedingung jenseits den Annahmen des α-Modells dünner Akkretionsscheiben und die kritische Akkretionsrate ist sogar um 10–20 Größenordnungen größer als das vertikale Eddington-Limit. Es bestätigt sich also unsere Vermutung, daß das radiale Eddington-Limit keine Rolle spielt und die sich ergebenden Verhältnisse nicht im Rahmen des klassischen α-Modells behandelt werden können. Wir verzichten deshalb auch auf die Berechnung des Limits gemäß der Interpolationsformel (2.1.34).

2.2.3 Obere Schranke durch die Radialgeschwindigkeit

Wie wir in den beiden vorherigen Abschnitten gesehen haben, ergeben sich für das radiale Eddington-Limit physikalisch unsinnige Radial- und Schallgeschwindigkeiten. Wir versuchen deshalb, eine obere Schranke für $\dot{M}$ zu finden, so daß diese Geschwindigkeiten noch sinnvolle Werte annehmen und wir das Modell dünner α-Scheiben anwenden können. Dabei verlangen wir $|v_s| < c_s$ und $c_s \leq c$, d. h. wir setzen als kritische Grenzen

$$v_s = Ac_s\,, \qquad c_s = Bc\,. \tag{2.2.19}$$

Für die konkreten numerischen Berechnungen verwenden wir $A = -1/3$ und fordern zugleich $B \leq 1$. Es ist klar, daß bei diesen Geschwindigkeiten schon Korrekturen an den Modellen angebracht werden

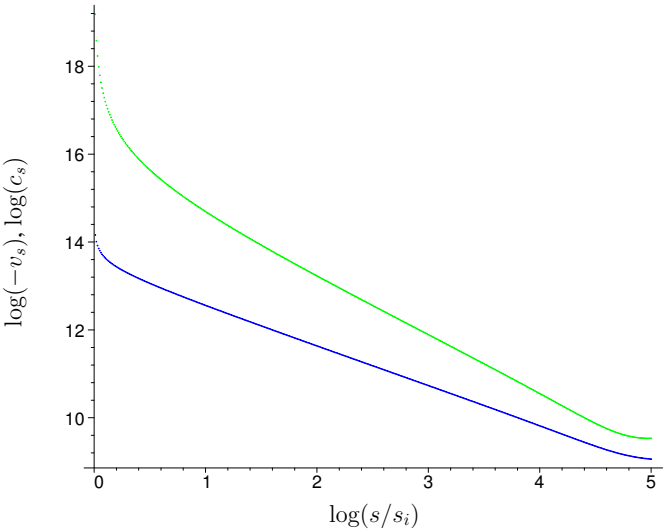


Abbildung 2.23: Radialgeschwindigkeit (grün) und Schallgeschwindigkeit (blau) für $\varepsilon \neq$ const. und Kramers-Opazität

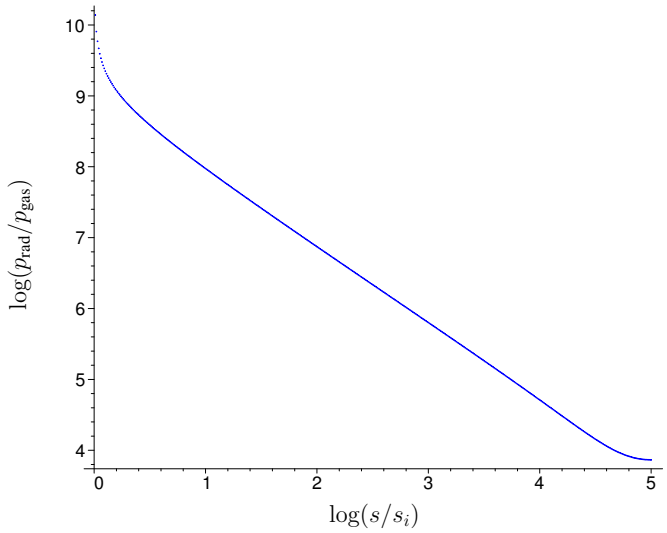


Abbildung 2.24: Verhältnis β von Strahlungsdruck zu Gasdruck für $\varepsilon \neq$ const. und Kramers-Opazität

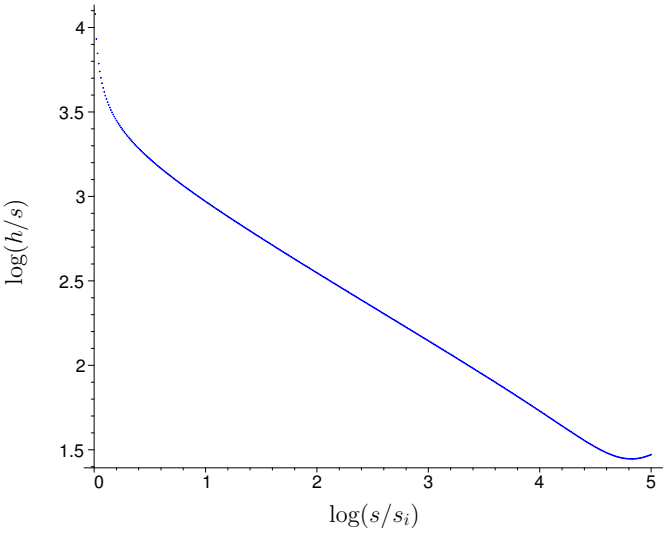


Abbildung 2.25: $\varepsilon = h/s$ für die Kramers-Opazität $\kappa \neq$ const.

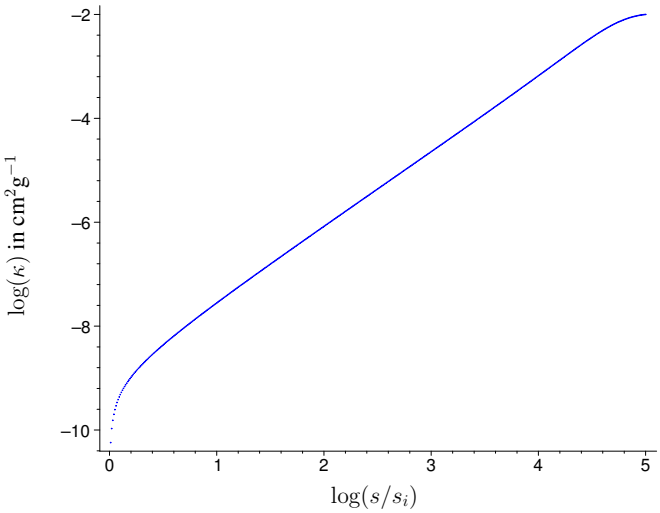


Abbildung 2.26: Kramers-Opazität für die Lösung der Differentialgleichung (2.2.15)

müssen – es geht hier aber nur um eine Abschätzung der Größenordnung von β. Aus den Scheibengleichungen folgt dann

$$(1+\beta)\beta = A^2 \frac{\Omega_K^{7/2} f(s)^4 s^4 m_H^2 \kappa^{1/2} \sigma_{\text{SB}}^{1/2}}{2^{5/2} \alpha^{7/2} k_B^2 c} \,. \tag{2.2.20}$$

Da in der Approximationsformel (2.1.25),

$$\kappa = \kappa_0 \cdot T^{\kappa_T} \cdot \rho^{\kappa_\rho} \,, \tag{2.1.25}$$

die reine Thomson-Streuung mit enthalten ist, setzen wir diesen Ansatz ein und erhalten dann als Bedingung

$$(1+\beta)^{1+\delta_1} \beta^{1+\kappa_\rho\delta_2-\delta_1} = A^2 \frac{\kappa_0^{\delta_2} 2^{(\delta_1-5)/2+\kappa_\rho\delta_2} m_H^{2+\kappa_\rho\delta_2} \Omega_K^{7/2} f(s)^4 s^4}{\alpha^{(7+\delta_1)/2} k_B^{2+\kappa_\rho\delta_2} \sigma_{\text{SB}}^{(\delta_1-1)/2-\kappa_\rho\delta_2} c^{1-\delta_1+\kappa_\rho\delta_2} 3^{\kappa_\rho\delta_2}} \,, \tag{2.2.21}$$

wobei

$$\delta_1 = \frac{3\kappa_\rho + \kappa_T}{4 + 3\kappa_\rho + \kappa_T}, \qquad \delta_2 = \frac{2}{4 + 3\kappa_\rho + \kappa_T} \,.$$

Die Bedingung 2.2.21 analytisch nach β aufzulösen, ist für allgemein gegebenes κ nicht möglich. Wenn wir jedoch annehmen, daß $\beta \gg 1$ ist, dann wird eine analytische Lösung möglich:

$$\beta = \left(A^2 \frac{\kappa_0^{\delta_2} 2^{(\delta_1-5)/2+\kappa_\rho\delta_2} m_H^{2+\kappa_\rho\delta_2} \Omega_K^{7/2} f(s)^4 s^4}{\alpha^{(7+\delta_1)/2} k_B^{2+\kappa_\rho\delta_2} \sigma_{\text{SB}}^{(\delta_1-1)/2-\kappa_\rho\delta_2} c^{1-\delta_1+\kappa_\rho\delta_2} 3^{\kappa_\rho\delta_2}} \right)^{1/(2+\kappa_\rho\delta_2)} \tag{2.2.22}$$

Für Thomson-Streuung folgt

$$\beta_{\text{Thomson}} = 8{,}87 \cdot 10^5 f(s)^2 (s/s_i)^{-5/8} \,, \tag{2.2.23}$$

für die Kramers-Opazität hingegen

$$\beta_{\text{Kramers}} = 9{,}23 \cdot 10^4 f(s)^{7/9} (s/s_i)^{-4/9} \,. \tag{2.2.24}$$

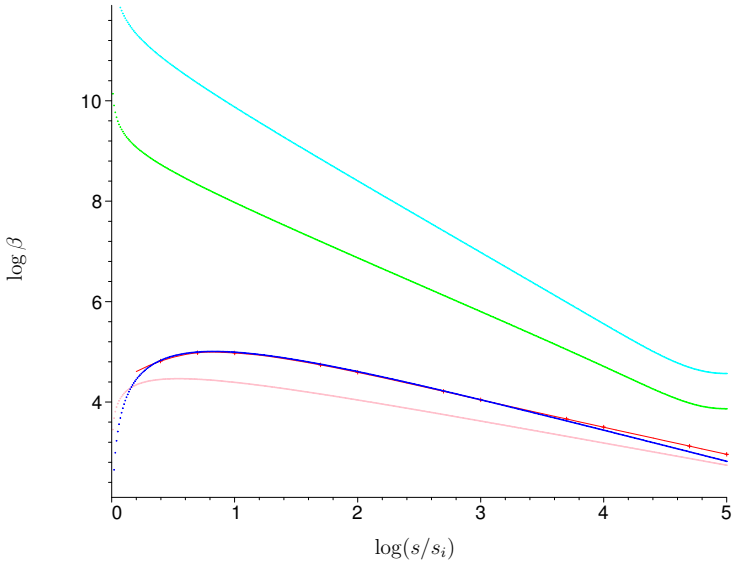


Abbildung 2.27: Obere Schranken $\beta = p_{\text{rad}}/p_{\text{gas}}$ limitierte radiale Geschwindigkeiten. Blau: β_{Thomson}; pink: β_{Kramers}; rot: $\beta_{\text{Interpolation}}$. Zum Vergleich sind die Werte β für das radiale Eddington-Limit eingetragen. Grün: β_{Thomson}; türkis: β_{Kramers}

Zusätzlich berechnen wir β nach (2.2.22) noch für Opazitäten nach der Interpolationsformel (2.1.34) – das ist nur noch numerisch möglich und zudem sehr rechenaufwendig. Wir berechnen daher nur einige diskrete Punkte und erzeugen anschließend einen Fit mittels Spline-Interpolation.

In Abb. 2.27 zeigen wir β_{Thomson}, β_{Kramers}, $\beta_{\text{Interpolation}}$ und zum Vergleich die in den vorherigen Abschnitten berechneten Verhältnisse von Strahlungs- und Gasdruck. Wir erkennen darin, daß für Scheiben, die nur durch die Radialgeschwindigkeit limitiert sind, Thomson-Streuung eine gute Annahme ist, da sie relativ gut mit der Interpolationsformel übereinstimmt. Erwartungsgemäß ist die Streuung nach dem Rosseland-Mittel keine gute Annahme.

Abbildung 2.28 zeigt die kritische Akkretionsrate, die sich allein aus der Limitierung $|v_s| < c_s$ ergibt. Als Vergleich dazu ist das Eddington-Limit in vertikaler Richtung für Thomson-Streuung eingetragen. Daran sehen wir, daß bereits die Beschränkung $|v_s| \leq c_s$ Akkretionsraten um zwei Größenordnungen größer als das vertikale Eddington-Limit erlaubt. Dies bestärkt unsere Schlußfolgerung, daß das radiale Eddington-Limit nicht von Bedeutung ist. Schließlich müssen wir überprüfen, ob unsere in dieser Berechnung verwendeten Annahmen standhalten. Klar ist, daß die Forderung $\beta \gg 1$ gut erfüllt ist.[1] Für die Radialgeschwindigkeit ergibt sich

$$v_s \approx -2{,}59 \cdot 10^4 \frac{\beta \cdot (s/s_i)^{1/8}}{f(s)} = -\frac{1}{3} c_s = [-5{,}74 \cdot 10^9 \ldots -7{,}23 \cdot 10^7] \, \frac{\text{cm}}{\text{s}} \,. \tag{2.2.25}$$

Wegen $c_s = -3v_s$ folgt

$$c_s \approx [1{,}72 \cdot 10^{10} \ldots 2{,}17 \cdot 10^8] \, \frac{\text{cm}}{\text{s}} \,. \tag{2.2.26}$$

Der Maximalwert von c_s entspricht $0{,}57c$, also etwas mehr als die Hälfte der Lichtgeschwindigkeit. Für das Verhältnis h/s gilt

$$\varepsilon = h/s = 5{,}97 \cdot 10^{-3} \beta^{1/2} (s/s_i)^{5/16} = [6{,}44 \cdot 10^{-2} \ldots 5{,}61] \,, \tag{2.2.27}$$

[1] Mit dieser Annahme haben wir die Lösungszweige $\beta \approx 1$ und $\beta \ll 1$ von vornherein ausgeschlossen. Analoge Betrachtungen unter diesen beiden Annahmen ergeben aber auch keine konsistenten Lösungen.

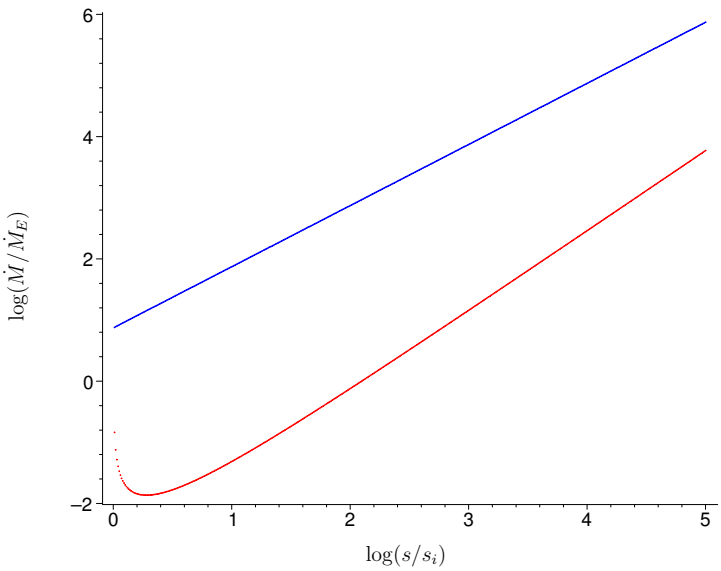


Abbildung 2.28: Kritische Akkretionsraten $\dot{M}/\dot{M}_E$. Blau: Limitierte Radialgeschwindigkeit, β_{Thomson}; rot: Vertikales Eddington-Limit, Thomson-Streuung

die Voraussetzungen dünner Scheiben sind also deutlich verletzt. Wie bereits oben erwähnt, müßten hier schon einige wesentliche Korrekturen am Model angebracht werden. Bei einer kleineren Wahl der Grenzen für die Geschwindigkeiten sinkt natürlich auch β und damit $\dot{M}$. Wie wir aber an den Größen v_s, c_s für das vertikale Eddington-Limit mit $\beta = 1/3$ sehen können, erlaubt die Beschränkung durch die Radialgeschwindigkeit trotzdem deutlich größere Akkretionsraten.

3 Erweiterung des klassischen Modells

Wie wir bisher gesehen haben, setzt die Verwendung des klassischen Modells dünner α-Scheiben sehr starke Bedingungen an das System und schränkt den Gültigkeitsbereich für unsere Betrachtungen stark ein. In diesem Kapitel verlassen wir zunächst das klassische Modell und wenden uns in Abschnitt 3.1 dickeren Akkretionsscheiben zu. Anschließend betrachten wir in Abschnitt 3.2 mögliche vertikale und radiale Massenflüsse oberhalb einer dünnen α-Scheibe.

3.1 Die Rolle der Advektion

Nach der bisherigen Behandlung des vertikalen, aber vor allem des radialen Eddington-Limits müssen wir uns auch die Frage stellen, inwieweit wir im Grenzfall geometrisch dünner Scheiben arbeiten können. Zwar läßt sich für dünne Akkretionsscheiben ein vertikales Eddington-Limit ableiten, welches – außer für große Radien – auch die Bedingung $h/s \ll 1$ erfüllt, in radialer Richtung allerdings ist dies nicht mehr gegeben. Aus (2.1.17) läßt sich das Verhältnis $\varepsilon = h(s)/s$ für gegebene Akkretionsrate $\dot{M}$ berechnen. Wie wir bereits in Abschnitt (2.1.1) gezeigt haben, bedeutet diese Forderung $\dot{M} \ll \dot{M}_E$ an der Position des radialen Minimums $s \approx 2s_i$.

Wir betrachten ein System mit einem von außen einströmendem Massenfluß, welcher über dieser Grenze liegt. Für sehr große Radien sei die Forderung $h/s \ll 1$ erfüllt. Dieses System wird sicherlich nicht bis zu dem kritischen Radius s_{kr}, an welchem die kritische Akkretionsrate gleich dem radialen Massenfluß wird, eine dünne α-Scheibe bleiben! Bei $s \to s_{\mathrm{kr}}$ wird die Scheibe zunehmend dicker und somit bereits früher das Modell dünner Scheiben verletzen.

Wie aus der Theorie der Akkretionsscheiben bekannt ist, existieren weitere Kühlmechanismen neben dem Energietransport durch Strahlung, welcher v. a. bei dickeren Scheiben relevant werden. Die bedeutendste Rolle spielt hierbei die Advektion. Diese verursacht ab $\varepsilon \approx 1$ gar den Großteil der Kühlung der Scheibe. Dies bedeutet, daß die Effizienz der Strahlungserzeugung durch Akkretion abnimmt. Mit anderen Worten: Es ist zu erwarten, daß der Strahlungsdruck weniger stark mit der Akkretionsrate steigt und somit für unser betrachtetes Kräftegleichgewicht mehr Materie akkretiert werden kann, ohne daß der Strahlungsdruck die Gravitation übersteigen muß. Es treten dabei neben der (horizontalen) Advektion noch weitere Effekte auf, wie z. B. die Abweichungen von Kepler-Rotation.

In diesem Abschnitt betrachten wir den Übergang geometrisch dünner Scheiben zu einer allgemeineren Beschreibung, für welche die Bedingung $\varepsilon \ll 1$ nicht mehr erfüllt sein muß. Grundlage dieser Beschreibung ist die sog. *Slim-disc*-Theorie nach Abramowicz et al. [2]. Diese Scheiben stellen eine Übergangsphase von dünnen Scheiben zu echten „dicken Scheiben“ dar. Diese „dicken Scheiben“ sind definiert durch $\varepsilon \gg 1$. Die Bezeichnung als Scheibe und nicht als Wolke begründet sich lediglich in dem vorhandenen Drehimpuls.

Wir gehen daher nur auf die Übergangsphase ein, d. h. $\varepsilon \lessapprox 1$. Im Abschnitt 3.1.1 werden die Grundannahmen, d. h. die Gemeinsamkeiten und die Differenzen mit der Theorie dünner Scheiben dargelegt und die daraus resultierenden Gleichungen vorgestellt. In den darauffolgenden Abschnitten 3.1.2–3.1.4 wird die numerische Lösung der Gleichungen und der Konsistenztest im Limes dünner Scheiben behandelt.

3.1.1 Modell

Für das *Slim-disc*-Modell läßt sich wie im Modell dünner Scheiben die $1+1$-Zonen-Näherung anwenden, d. h. eine entkoppelte Betrachtung der vertikalen Richtung von der radialen Richtung. Das Modell behandelt keine Selbstgravitation, die Viskositätsbeschreibung folgt der der α-Scheiben. Ebenfalls enthalten ist die Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts in vertikaler Richtung, welches uns bei dünnen Scheiben im Eddington-Limit den konstanten Faktor $\beta = p_{\text{rad}}/p_{\text{gas}} = 1/3$ lieferte.

Während im Modell dünner Scheiben konsequent nur Terme niedrigster Ordnung in ε mitgeführt werden, ist dies für *Slim-discs* nicht mehr möglich. Physikalisch betrachtet entspricht dies einer korrekteren Behandlung der schallnahen Massenflüsse (nach dem Modell dicker Scheiben) in der Akkretionsscheibe. Dies bewirkt, daß in die Impulsbilanz zwei zusätzliche Terme aufgenommen werden müssen, nämlich zum einen die Dynamik in radialer Richtung (Akkretionsgeschwindigkeit), $v_s\, dv_s/ds$, und der radiale Druckgradient, $\rho^{-1} dp/ds$. Diese Terme sind uns bei der Diskussion des radialen Eddington-Limits bereits in der Impulsbilanz begegnet. Im Gegensatz zu dünnen Scheiben wird das Material nicht mehr mit Kepler-Geschwindigkeit um das Zentralobjekt rotieren. Während der Energietransport in dünnen Scheiben nur durch Strahlung erfolgt, spielt hier die Advektion eine zunehmende Rolle, d. h. in der Energiegleichung muß die advektive, horizontale Heizrate $v_s\, T\, dS/ds$ berücksichtigt werden.

Zusätzlich berücksichtigt das Modell noch den Gasdruck in folgender Näherung:

$$\eta = \frac{p_{\text{gas}}}{p_{\text{gas}} + p_{\text{rad}}} = \frac{p_{\text{gas}}}{p} \qquad \Longrightarrow \qquad p_{\text{gas}} = \eta p \quad \wedge \quad p_{\text{rad}} = (1-\eta)p \tag{3.1.1}$$

Zwischen η und dem in Kapitel 2 verwendeten Parameter β gilt die Beziehung

$$\beta = \frac{1-\eta}{\eta} \qquad \text{bzw.} \qquad \eta = \frac{1}{1+\beta}\,.$$

Damit läßt sich ein (Differential-)Gleichungssystem aufstellen:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \left(\Omega^2 - \Omega_K^2\right) s - v_s \frac{dv_s}{ds} \tag{3.1.2}$$

$$\tilde{F}_{\text{rad}} = B_2 \frac{c}{\kappa\rho}\frac{4\sigma}{3c}\frac{T^4}{h} \tag{3.1.3}$$

$$\tilde{F}_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi s}\left\{\dot{M}(l-l_0)\left(-\frac{d\Omega}{ds}\right) + B_3 \dot{M} T \frac{dS}{ds}\right\} \tag{3.1.4}$$

$$T\,dS = \frac{p}{\rho}\left[\left(12 - \frac{21}{2}\eta\right)\frac{dT}{T} - (4-3\eta)\frac{d\rho}{\rho}\right] \tag{3.1.5}$$

$$\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{p_{\text{rad}}}{p_{\text{gas}}} = \frac{2\sigma_{\text{SB}} m_H}{3ck_B}\frac{T^3}{\rho} \tag{3.1.6}$$

$$p = \tilde{\Omega}_K^2 h^2 \frac{\rho}{B_1} \tag{3.1.7}$$

$$p = (1-\beta)^{-1}\frac{4\sigma}{3c}T^4 \tag{3.1.8}$$

$$\dot{M}(l-l_0) = 4\pi s^2 \alpha h p \tag{3.1.9}$$

$$l = s^2\Omega \tag{3.1.10}$$

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{GM}{s^3}}, \qquad \tilde{\Omega}_K = \sqrt{\frac{GM}{(s^2+h^2)^{3/2}}} \tag{3.1.11}$$

$$h = \varepsilon s \tag{3.1.12}$$

$$\dot{M} = -B_2 4\pi s h \rho v_s \tag{3.1.13}$$

Der Vollständigkeit halber sind hier alle verwendeten Zusammenhänge noch einmal aufgeführt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde die s-Abhängigkeit nicht explizit angegeben.

Die Gleichungen unterscheiden sich allerdings in wenigen Punkten von denen in der Originalarbeit [2]. So wurde die Radialgeschwindigkeit v_s aus Konsistenzgründen hier mit einem negativen Vorzeichen versehen, was aber wegen des Terms $v_s\, dv_s/ds = (-v_s)\, d(-v_s)/ds$ keine weiteren Auswirkungen hat.

In (3.1.5) findet sich in [2] der Ausdruck $(4-\eta)\, d\rho/\rho$ statt $(4-3\eta) d\rho/\rho$. Die Autoren bauen das Modell auf den in einer früheren Arbeit hergeleiteten Gleichungen auf (vgl. [14]). In dieser früheren Arbeit findet sich jedoch der Ausdruck $(4-3\eta)d\rho/\rho$. Mittels folgender Überlegung können wir die Richtigkeit unserer Version verifizieren: (3.1.5) ist nichts anderes als eine Schreibweise des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik, wobei als thermodynamische Funktionen ρ und T gewählt wurden. Mit (3.1.1) gilt

$$\begin{aligned} dP &= \frac{dp}{d\rho} d\rho + \frac{dp}{dT} dT \\ &= \frac{dp_{\text{gas}}}{d\rho} d\rho + \frac{dp_{\text{gas}}}{dT} dT + \frac{dp_{\text{rad}}}{dT} dT \\ &= \frac{p_{\text{gas}}}{\rho} d\rho + \frac{p_{\text{gas}}}{T} dT + 4\frac{p_{\text{rad}}}{T} dT \\ &= \eta \frac{p}{\rho} d\rho + \eta \frac{p}{T} dT + 4(1-\eta)\frac{p}{T} dT \end{aligned}$$

und damit

$$d\ln P = \eta\, d\ln \rho + (4-3\eta)\, d\ln T\,. \tag{3.1.14}$$

Der erste Hauptsatz läßt sich wie folgt schreiben:

$$T\, dS = d\!\!'Q = C_p\, dT - \frac{\delta}{\rho}\, dP \tag{3.1.15}$$

Dabei ist δ gegeben durch die Relation

$$d\ln \rho = \chi\, d\ln P - \delta\, d\ln T\,, \tag{3.1.16}$$

aus welcher mit (3.1.14)

$$\chi = \frac{1}{\eta} \qquad \text{und} \qquad \delta = \frac{4-3\eta}{\eta} \tag{3.1.17}$$

folgt. Zur Berechnung der spezifischen Wärme bei konstantem Druck benötigen wir noch die innere Energie des Gases. In unserem Fall müssen wir nur die kinetische Energie und die Energie durch Strahlung berücksichtigen, d. h. wir vernachlässigen die Ionisierungsenergie. Dann gilt[2]

$$\begin{aligned} C_p &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + \frac{P}{\rho T}\delta = \frac{k_B}{m_H} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{4(1-\eta)(4+\eta)}{\eta^2}\right) \\ &= \frac{\eta p}{\rho T} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{4(1-\eta)(4+\eta)}{\eta^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

[2]Für die Ableitung der inneren Energie und der spezifischen Wärme siehe [3, Anhang A,B].

Wir setzen (3.1.17) und (3.1.18) in den 1. Hauptsatz ein und erhalten

$$TdS = \frac{p}{\rho}\left[\left(12 - \frac{21}{2}\eta\right)\frac{dT}{T} - (4-3\eta)\frac{d\rho}{\rho}\right]. \tag{3.1.5}$$

Damit ist klar, daß der Ausdruck $(4-3\eta)d\rho/\rho$ korrekt ist und in [2] ein Fehler vorliegt.

Desweiteren haben wir in (3.1.11) zwei „Winkelgeschwindigkeiten“ Ω_K und $\tilde{\Omega}_K$ definiert. Erstere stellt die tatsächliche Kepler-Geschwindigkeit dar, letztere ist ein theoretisches Konstrukt. In der Theorie klassischer dünner α-Scheiben mit $h \ll s$ ergibt sich für das hydrostatische Gleichgewicht

$$\frac{p}{h} = -\rho g_z = -\rho\frac{GM}{(s^2+h^2)^{3/2}}\cdot h \approx -\rho\frac{GM}{s^3}\cdot h = -\rho\Omega_K^2 h\,. \tag{3.1.19}$$

In dickeren Scheiben mit $h \approx s$ ist diese Vereinfachung nicht mehr möglich. Wir definieren daher $\tilde{\Omega}_K$ wie in (3.1.11), wodurch sich das hydrostatische Gleichgewicht als

$$\frac{p}{h} = -\rho\tilde{\Omega}_K^2 h$$

schreiben läßt. Dies entspricht (3.1.7), abgesehen von der Korrekturgröße B_1. In dem ursprünglichen *Slim-disc*-Modell entspricht dieses B_1 gerade einem künstlich eingeführten Korrekturfaktor, um weiterhin die Näherung (3.1.19) verwenden zu können. Wie sich im folgenden aber zeigen wird, ist der Parameter B_1 nicht beliebig frei wählbar. Wir werden daher den exakten Ausdruck für g_z verwenden. Im Gegensatz zu Abramowicz et. al vernachlässigen wir jedoch die relativistischen Korrekturen der Winkelgeschwindigkeit am inneren Rand, da wir dies bisher für alle Berechnungen getan haben.

Ebenso sind die Größen B_2 und B_3 dimensionslose Parameter des *Slim-disc*-Modells der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und werden im Rahmen der Theorie vorgegeben. Die physikalischen Größen p, ρ und T beziehen sich auf die Zentralebene der Scheibe bei $z = 0$. Es ist $l_0 = l_K(s_i) = s_i^2\Omega_K(s_i)$; diese Konstante sorgt dafür, daß das viskose Drehmoment am inneren Rand der Scheibe verschwindet, es stellt also eine Randbedingung dar. In unseren Modellen ist die Zentralmasse ein Schwarzes Loch und der innere Rand ist durch den innersten stabilen Orbit, d. h. 3 Schwarzschildradien gegeben. Für diesen Fall ist die Randbedingung recht realistisch, was im Fall der Akkretion auf einen Stern sicher nicht der Fall ist – dort entspricht der innere Rand in etwa der Sternoberfläche, an welcher die viskosen Kräfte nicht verschwinden.

Wir wollen das Differentialgleichungssystem auf die Variablen h, l und $\dot{M}$ reduzieren. Alternativ zu l könnten wir auch Ω als gesuchtes Ergebnis wählen, die Beziehung zwischen den beiden Größen ist durch (3.1.10) gegeben. Die Größen S (Entropie) und $\tilde{F}_{\text{rad}}$ (Strahlungsfluß) werden wir durch das DGL-System eliminieren und nicht weiter betrachten.

Die Reduktion von (3.1.2)–(3.1.9) auf zwei Gleichungen mit den vier Unbekannten $\dot{M}$, η, h und l ergibt

$$\frac{l^2}{l_K^2} = 1 + \frac{h^2}{(l-l_0)}\frac{s^3}{(s^2+h^2)^{3/2}}\cdot \tag{3.1.20}$$

$$\cdot\left(\frac{sh}{\dot{M}B_1}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{M}(l-l_0)}{s^2h}\right) + \frac{\alpha^2 s^3}{B_1^2B_2^2}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{sh^2}{(s^2+h^2)^{3/2}(l-l_0)}\right)\right)$$

und

$$\frac{B_2 c}{B_1 \kappa}\tilde{\Omega}_K^2 h(1-\eta) =$$

$$\frac{1}{4\pi s}\dot{M}\Bigg[(l-l_0)\left(\frac{2l}{s^3}-\frac{1}{s^2}\frac{dl}{ds}\right)+\frac{B_3}{B_1}\tilde{\Omega}_K^2 h^2\cdot$$
$$\cdot\left(-\left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln\dot{M})}{ds}-\left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(l-l_0))}{ds}+\left(3-\frac{21}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(1-\eta))}{ds}\right.$$
$$\left.+\left(-10+\frac{33}{4}\eta\right)\frac{1}{s}+\left(9-\frac{51}{8}\eta\right)\frac{d(\ln h)}{ds}\right)\Bigg]. \qquad (3.1.21)$$

Es liegt auf der Hand, daß diese Gleichungen analytisch nicht gelöst werden können und stattdessen numerische Verfahren benötigt werden. Desweiteren haben wir hier nur zwei Gleichungen für vier Unbekannte angegeben, da die Gleichungen so übersichtlicher bleiben und bereits in der richtigen Form für den Grenzfall klassischer dünner Scheiben geschrieben sind. Durch das Differentialgleichungssystem läßt sich noch eine weitere Größe eliminieren, jedoch verbleiben wir mit zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Zur Bestimmung der dritten Größe haben wir zwei Möglichkeiten:

1. Wir verwenden die Eddington-Bedingung verschwindender Gesamtkraft an der Scheibenoberfläche. Wie wir im folgenden (siehe Abschnitt 3.1.2) sehen werden, legt diese Bedingung – genau wie im Fall dünner Scheiben – das Verhältnis η fest und ermöglicht einen direkten Vergleich der kritischen Akkretionsraten der beiden Modelle.

2. Wir geben das Verhältnis aus ε von radialer Dicke und Radius vor. Dies erlaubt einen direkten Vergleich der Änderung von $\dot{M}$ zwischen dünnen und dickeren Scheiben bei gleicher Dicke. In Abschnitt 3.1.3 werden wir diese Lösung betrachten.

Wir haben es mit zwei Differentialgleichungen ersten Grades zu tun, d. h. wir benötigen zwei Randbedingungen. Wie für dünne Scheiben lassen sich durch die innere Randbedingung, welche als der Ausdruck $l - l_0$ in den Gleichungen auftritt, keine vernünftigen Randbedingungen am inneren Rand definieren. Wir geben die Randbedingungen daher am äußeren Rand vor.

Es ist anzumerken, daß der Faktor κ nur an einer Stelle in den beiden Gleichungen auftritt – außerhalb der Differentiale. Wir können also ohne weiteres einen der Approximationsansätze (2.1.25) bzw. (2.1.34) verwenden und mit den Ergebnissen reiner Thomson-Streuung vergleichen.

3.1.2 Das Eddington-Limit

In der ersten Betrachtung nehmen wir als zusätzliche Gleichung das Eddington-Limit hinzu, um somit einen der verbleibenden drei Parameter vorgeben zu können. Die Eddington-Bedingung verschwindender Gesamtkraft aus Gravitation und Strahlung entspricht

$$\frac{\kappa m_H}{c}\tilde{F}_{\text{rad}} = \frac{GMm_H}{(s^2+h^2)^{3/2}}\cdot h = m_H\tilde{\Omega}_K^2 h\,.$$

Mit (3.1.2)–(3.1.9) folgt

$$\begin{aligned}\frac{\kappa m_H}{c}\tilde{F}_{\text{rad}} &= B_2\frac{m_H}{\rho}\frac{4\sigma}{3c}\frac{T^4}{h} = B_2\frac{m_H}{\rho}\frac{p_{\text{rad}}}{h}\\ &= (1-\eta)B_2\frac{m_H}{h}\frac{p}{\rho} = (1-\eta)\frac{B_2}{B_1}m_H\tilde{\Omega}_K^2 h\,. \qquad (3.1.22)\end{aligned}$$

Tabelle 3.1: *Slim-discs* mit Eddington-Bedingung und reiner Thomson-Streuung

Lösungen für dünne Scheiben

$\mathbf{B_1}$	η	$\mathbf{l(s_a)}$	$\mathbf{h(s_a)}$	**Farbe**
$1/2$	$11/12$	$0{,}01 l_K$	$0{,}1 s_a$	rot
$3/2$	$3/4$	$0{,}01 l_K$	$0{,}2 s_a$	blau
4	$1/3$	$0{,}01 l_K$	$0{,}6 s_a$	grün

Lösungen für dicke Scheiben

$\mathbf{B_1}$	η	$\mathbf{l(s_a)}$	$\mathbf{h(s_a)}$	**Farbe**
$1/2$	$11/12$	$0{,}01 l_K$	$0{,}4 s_a$	rot
$3/2$	$3/4$	$0{,}01 l_K$	$0{,}8 s_a$	blau
4	$1/3$	$0{,}01 l_K$	$1{,}4 s_a$	grün

Die Eddington-Bedingung ist also gleichbedeutend mit

$$\eta = p_{\text{gas}}/p = 1 - \frac{B_1}{B_2}\,. \tag{3.1.23}$$

Durch die Vorgabe von B_1 und B_2 läßt sich also das Verhältnis von Gas- zu Gesamtdruck und damit auch von Gas- zu Strahlungsdruck steuern. Wegen $0 < \eta < 1$ ist aber klar, daß der Parameterbereich von B_1 und B_2 eingeschränkt ist.

In der ursprünglichen Arbeit von Paczyński und Bisnovatyi-Kogan [14] werden die Parameter B_i ausführlich diskutiert. Die Autoren verwenden die Näherung reinen Strahlungsdrucks, d. h. $B_1 = B_2 = 6$ und damit $\eta = 0$.

Abramowicz et al. [2] verwenden eine andere Numerierung der Parameter als in der früheren Arbeit, weshalb beim Vergleich der Zahlenwerte Vorsicht geboten ist (unsere Konvention richtet sich nach Abramowicz et al.). Sie setzen auf der einen Seite $\eta = 2/5$, auf der anderen Seite aber $B_1 = 6$ und $B_2 = 1/2$. Dies würde eigentlich $\eta = -11$ entsprechen und ist damit entweder eine Verletzung der vertikalen Stabilität der Scheiben oder aber eine grundlegende Verletzung der Physik!

Wir folgen bei der Wahl der Parameter B_2 und B_3 Paczyński und Bisnovatyi-Kogan und setzen $B_2 = 6$ und $B_3 = 1/2$. Für unsere Ergebnisse variieren wir B_1 zwischen 0 und B_2, um die Auswirkungen des Verhältnisses von Gasdruck zu Strahlungsdruck auf die Akkretionsscheibe zu untersuchen.

Bevor wir die zwei Differentialgleichungen (3.1.21) und (3.1.20) lösen können, müssen wir noch eine der drei unbekannten Größen durch die anderen beiden ausdrücken. Aus dem Gleichungssystem lassen sich p, ρ und T als Funktion von $\dot{M}$, η und h darstellen, ohne (3.1.6) zu verwenden. Setzen wir diese Größen in (3.1.6) ein, so folgt

$$\frac{(1-\eta)^{1/4}}{\eta} = \frac{m_H G M h^{9/4} \sigma_{\text{SB}}^{1/4} \pi^{1/4} \alpha^{1/4} s^{1/2}}{3^{1/4} c^{1/4} k_B \dot{M}^{1/4} (l - l_0)^{1/4} (s^2 + h^2)^{3/2} B_1}\,. \tag{3.1.24}$$

Prinzipiell könnten wir uns jetzt frei entscheiden, welche der drei Größen l, $\dot{M}$ oder h wir ersetzen wollen. Eine analytische Lösung ist allerdings für $\dot{M}$ am einfachsten, für l sehr viel komplexer und für h nicht möglich. Wir lösen (3.1.24) also nach $\dot{M}$ auf und verwenden das Computeralgebrasystem Maple für die numerische Berechnung:

$$\dot{M} = \frac{h^9 \eta^4 \pi m_H^4 s^2 \alpha \sigma_{\text{SB}} G^4 M^4}{3(1-\eta) k_B^4 (l - l_0) c (s^2 + h^2)^6 B_1^4} \tag{3.1.25}$$

Wir berechnen das System für verschiedene Parameter B_1, jeweils für Thomson-Streuung und interpolierte Opazitäten nach (2.1.34). Tabelle 3.1 zeigt die Werte der Parameter mit den verwendeten Randbedingungen. Diese wurden so ermittelt, daß sie zum einen in einem für das Modell zulässigen Wertebereich liegen und zum anderen einen glatten Kurvenverlauf ergeben. Dabei lassen sich jeweils

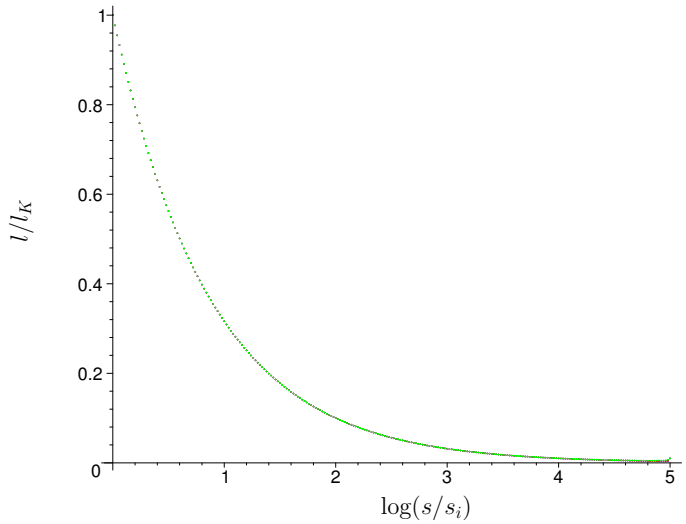


Abbildung 3.1: l/l_K für Thomson-Streuung und dünne *Slim-discs*

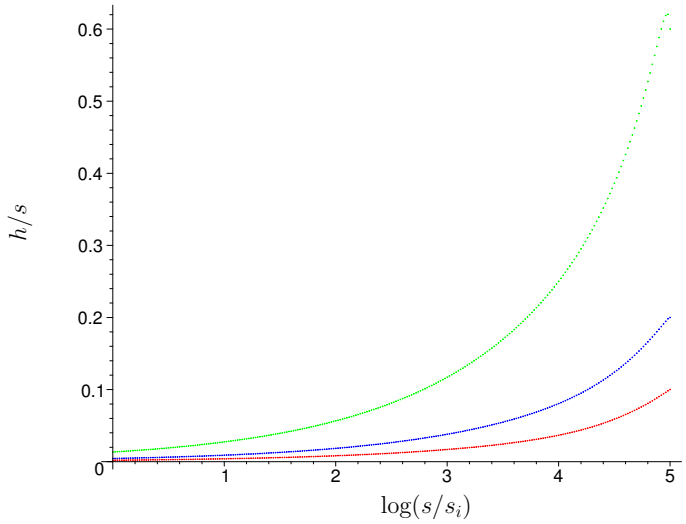


Abbildung 3.2: h/s für Thomson-Streuung und dünne *Slim-discs*

Lösungen für dünne und dicke Scheiben konstruieren, je nach Wahl der äußeren Randbedingungen. Allen Lösungen gemein ist jedoch, daß sich ein glatter Kurvenverlauf (d. h. ohne Knicke und Polstellen) nur für fast verschwindende Rotation am äußeren Rand einstellt. Dies ist aber verständlich, denn Rotation bewirkt eine nach außen treibende Zentrifugalkraft und bremst damit den Akkretionsmechanismus. Geben wir am äußeren Rand einen größeren Drehimpuls vor, dann wird die Rotation durch viskose Reibung innerhalb eines kleinen radialen Bereiches abgebremst und es stellt sich derselbe Verlauf ein wie für $l(s_a) = 0{,}01 l_K$.

Abbildungen 3.1–3.5 zeigen die Ergebnisse der numerischen Berechnung für dünne Scheiben. In den Abb. 3.3 und 3.4 wurden die Ergebnisse für Thomson-Streuung und interpolierte Opazitäten eingezeichnet. Da sich die Ergebnisse für unterschiedliche Opazitäten in den Größen h, l und v_s und c_s kaum unterscheiden, zeigen die restlichen Abbildungen nur die Resultate für Thomson-Streuung.

Der Drehimpuls nimmt von größeren Radien aus zu kleineren Radien hin zu und erreicht am inneren Rand schließlich den Wert für Kepler-Rotation. Wir können dies verstehen, indem wir die s-Abhängigkeit des Kepler-Drehimpulses betrachten: $l_K \propto s^{1/2}$. Im Rahmen der *Slim-disc*-Theorie wird durch radiale Advektion zwar ein effizienter Mechanismus zum Energietransport bereitgestellt, jedoch

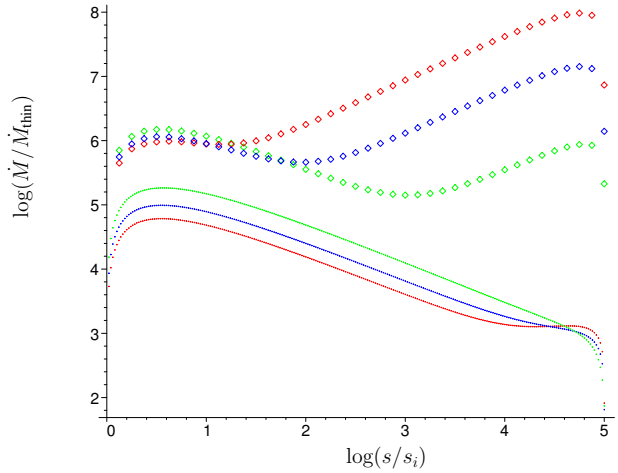


Abbildung 3.3: Vergleich der kritischen Akkretionsrate von dünnen *Slim-discs* und klassischen dünnen Scheiben für Thomson-Streuung (durchgezogene Linien) und Opazitäten nach der Interpolationsformel (gepunktet)

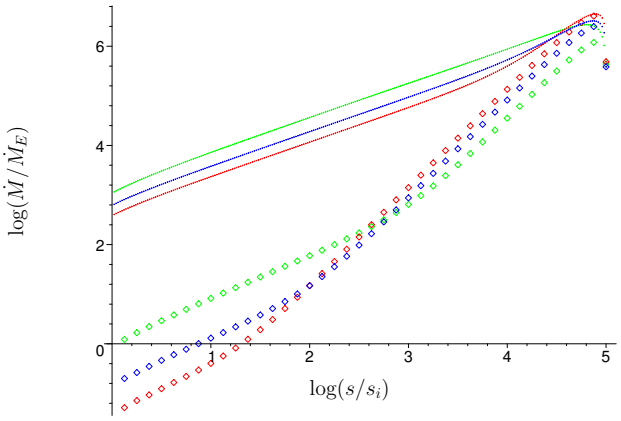


Abbildung 3.4: Kritische Akkretionsrate im Vergleich zur klassischen Eddington-Rate für Thomson-Streuung (durchgezogene Linien) bzw. interpolierten Opazitäten (gepunktet) und dünne *Slim-discs*

nicht zum Transport von Drehimpuls. Wir können Abb. 3.1 also so interpretieren, daß die Teilchen ihren Drehimpuls im Inneren der Scheibe kaum abgeben können und dieser damit im Verhältnis zum kleiner werdenden Kepler-Drehimpuls wächst. Währenddessen zeigt Abb.3.2, daß für Akkretionsscheiben im Rahmen dieses Modells erheblich höhere Akkretionsraten möglich sind als für klassische, dünne α-Scheiben – für Opazitäten nach der Interpolationsformel ist dieser Effekt noch stärker als für reine Thomson-Streuung. Die Berechnung der Raten für dünne Scheiben erfolgt mittels (B.9), also für $\eta = 3/4$ und entspricht damit dem Druckverhältnis der blauen Kurven. Es ist gut zu sehen, daß für steigendes Verhältnis h/s die Akkretionsraten für *Slim-discs* gegenüber denen der dünnen Scheiben ebenfalls wachsen.

Die kritische Akkretionsrate liegt selbst für mäßig dicke Scheiben um 3 Größenordnungen über der klassischen Eddington-Rate (vgl. Abb. 3.3), sofern wir nur Thomson-Streuung betrachten. Ursache dafür ist die Advektion, welche effizient frei werdende Energie in der Scheibe transportieren kann, ohne für zusätzlichen Strahlungsdruck zu sorgen. Dies scheint zunächst einen Widerspruch zu ergeben, da Advektion nur eintritt, wenn die Temperaturen ausreichend hoch sind und damit auch wieder Strahlungsdruck vorliegt. Tatsächlich aber steigt die Effizienz des advektiven Energietransports mit steigender Temperatur in stärkerem Maße als der Strahlungsdruck zunimmt. Daher bleiben die Akkretionsraten trotz geringerer Höhe der Scheibe für kleine Radien sehr hoch. Hier sind die Temperaturen und Dichten deutlich höher als in den äußeren Regionen der Scheibe ($T \approx 10^6\,\mathrm{K}$, $\rho \approx 10^{-5}\,\mathrm{g\,cm^3}$). Bei Verwendung interpolierter Opazitäten stellen sich in den inneren Regionen um 3 Größenordnungen

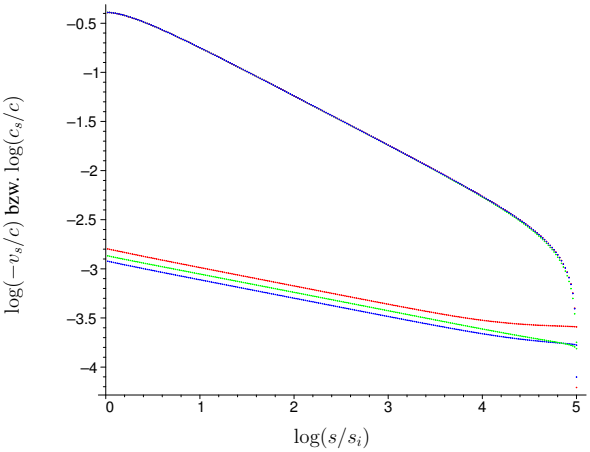


Abbildung 3.5: Verhältnis von Radialgeschwindigkeit v_s (obere Kurve) bzw. Schallgeschwindigkeit c_s (untere Kurve) zur Lichtgeschwindigkeit für Thomson-Streuung und dünne *Slim-discs*

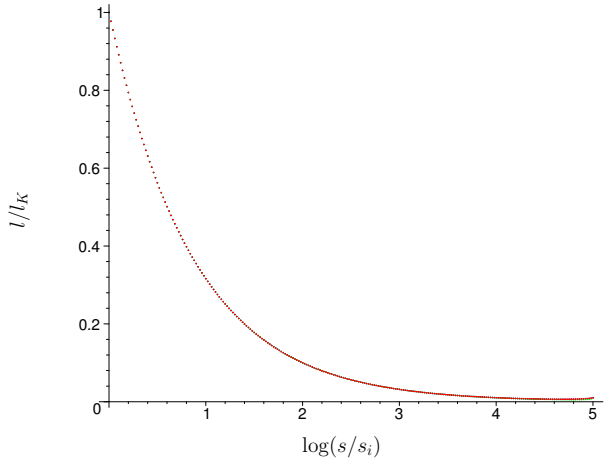


Abbildung 3.6: l/l_K für Thomson-Streuung und dicke *Slim-discs*

niedrigere kritische Akkretionsraten ein, dort gilt $\dot{M} \approx \dot{M}_E$ (abhängig von B_1). Neben der Thomson-Streuung spielt in den heißen Bereichen der Scheibe zunehmend die Streuung an H^--Ionen eine Rolle, welche stark temperaturabhängig ist.

Abbildung 3.5 zeigt schließlich das Verhältnis von Radialgeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit. Wir sehen zum einen, daß der Betrag der Radialgeschwindigkeit um ungefähr zwei Größenordnungen über der Schallgeschwindigkeit liegt. Obwohl die Behandlung schallnaher Flüsse einer der Hauptpunkte der *Slim-disc*-Theorie ist, liegen die Verhältnisse hier, v. a. für kleinere Radien, aber deutlich außerhalb der Gültigkeit des Modells. In solchen Scheiben käme es bereits bei sehr großen Radien zu Stoßfronten, welche die Physik grundlegend ändern würden. Zu beachten ist auch, daß der Betrag der Radialgeschwindigkeit für kleine Radien auf bis zu 30% der Lichtgeschwindigkeit steigt. Hier wären bereits große relativistische Korrekturen gefordert, welche die Radialgeschwindigkeit verringern könnten und damit das Verhältnis $|v_s|/c_s$ noch etwas absenken würden.

Die unterschiedlichen Anfangsbedingungen $h(s_a)$ resultieren aus den numerischen Einschränkungen der Berechenbarkeit: Für kleinere Werte als $0{,}6s_a$ gibt es keine numerischen Lösungen für Scheiben mit einem hohen Anteil von Strahlungsdruck am Gesamtdruck. Das ist zu erwarten, denn durch den Strahlungsdruck wird die Scheibe „aufgeblasen“. Bei einem höheren Gasdruck-Anteil lassen sich sehr viel dünnere Scheiben berechnen, welche dann auch geringere Akkretionsraten aufweisen.

Wir wenden uns jetzt den dickeren Scheiben zu. Abbildungen 3.6–3.10 zeigen die Ergebnisse der numerischen Berechnung. Für den Verlauf des Drehimpulses gilt die gleiche Argumentation wie zuvor.

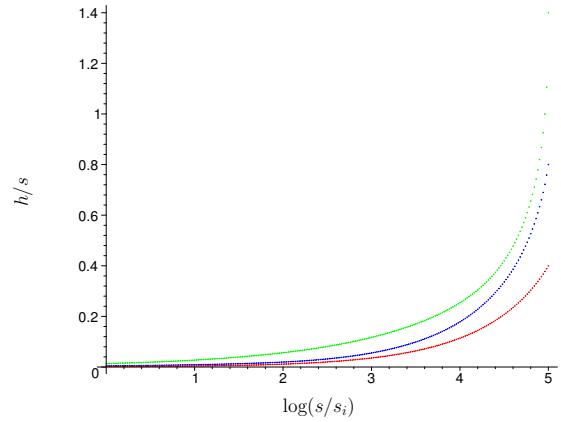


Abbildung 3.7: h/s für Thomson-Streuung und dicke *Slim-discs*

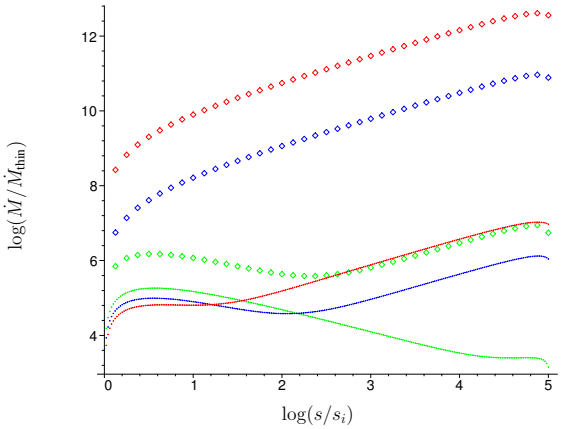


Abbildung 3.8: Vergleich der kritischen Akkretionsrate von dicken *Slim-discs* und klassischen dünnen Scheiben für Thomson-Streuung (durchgezogene Linien) und Opazitäten nach der Interpolationsformel (2.1.34) (gepunktet)

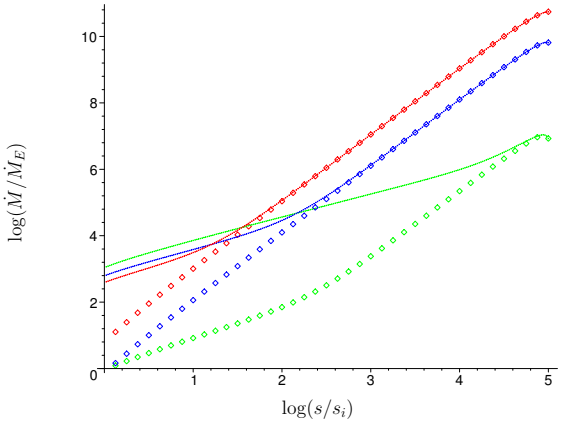


Abbildung 3.9: Kritische Akkretionsrate im Vergleich zur klassischen Eddington-Rate $\dot{M}_E$ für Thomson-Streuung (durchgezogene Linien) bzw. interpolierten Opazitäten (gepunktet) und dicke *Slim-discs*

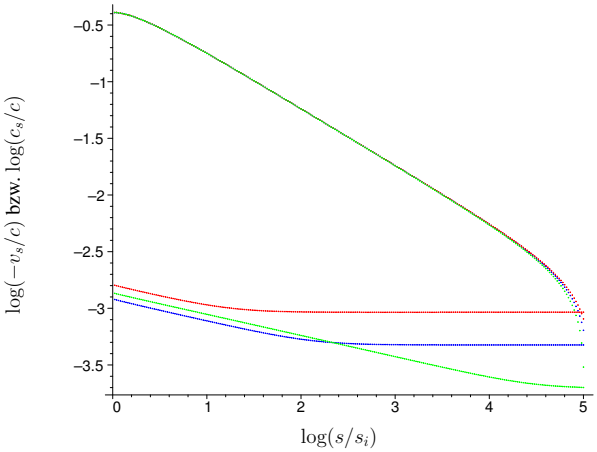


Abbildung 3.10: Verhältnis von Radialgeschwindigkeit v_s (obere Kurve) bzw. Schallgeschwindigkeit c_s (untere Kurve) zur Lichtgeschwindigkeit für Thomson-Streuung und dicke *Slim-discs*

Im Gegensatz zu den dünneren *Slim-discs* zeigt sich nun aber, daß Gasdruck-dominierte Scheiben trotz geringerer Dicke als Strahlungsdruck-dominierte Scheiben deutlich höhere kritische Akkretionsraten aufweisen. Dies ist vor allem für die äußeren Bereiche der Scheibe der Fall, in denen die Temperaturen und Dichten für die Strahlungsdruck-dominierten Scheiben so klein geworden sind, daß kaum mehr Advektion auftritt. Die Diskussion der kritischen Akkretionsraten im Vergleich zu denen dünner Scheiben und zum klassischen Eddington-Limit $\dot{M}_E$ schließt sich den dünneren *Slim-discs* an, wobei $\dot{M}$ aufgrund des größeren Verhältnisses h/s relativ zu $\dot{M}_{\text{thin}}$ bzw. $\dot{M}_{\text{E}}$ noch höher ist. Wir können dies durch effizientere Advektion erklären, da dicke *Slim-discs* heißer und dichter sind als dünne. Bemerkenswerterweise liegen die kritischen Raten in den inneren Bereichen – abhängig von B_1 – wieder in der Größenordnung des klassischen Eddington-Limits. Für Abb. 3.10 gilt dasselbe wie im Fall dünnerer *Slim-discs*: Relativistische Effekte und die Ausbildung von Stoßfronten müßten v. a. für kleine Radien berücksichtigt werden!

3.1.3 $\mathrm{h/s} = \mathrm{const.}$

Zum direkten Vergleich der möglichen Akkretionsraten von *Slim-discs* und klassischen dünnen Scheiben betrachten wir zwei Scheiben der gleichen Höhe h, wir geben also die relative Höhe der Scheibe ε als Parameter vor. Damit wird das Verhältnis η zu einer aus (3.1.20) und (3.1.21) berechenbaren Größe. Da wir weiterhin vertikal stabile Scheiben fordern, muß die Eddington-Bedingung, d. h. (3.1.23) weiterhin erfüllt sein. Das bedeutet

$$B_1 = B_1(s) = B_2 \cdot (1 - \eta)\,. \tag{3.1.26}$$

Durch die Vorgabe von ε wird der Parameter B_1 eine berechenbare Größe mit radialer Abhängigkeit. Wir eliminieren $\dot{M}$ gemäß (3.1.25) und lösen das Gleichungssystem für η und l numerisch mit Maple. Für die beiden Randbedingungen gilt wiederum, daß sich die Lösungen für beliebige Randbedingungen innerhalb eines kleinen radialen Bereiches angleichen. Wir verwenden deshalb wieder solche Randbedingungen, für die sich ein glatter Kurvenverlauf ergibt, siehe Tab. 3.2.

Abbildungen 3.11–3.14 zeigen die Resultate der Berechnungen für Thomson-Streuung. Zusätzlich sind in Abb. 3.13 die Ergebnisse der numerischen Berechnung mit Opazitäten gemäß der Interpolationsformel (2.1.34) eingezeichnet – es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung für alle ε zwischen $0{,}1$ und $1{,}5$. Das bedeutet, daß diese Scheiben über den gesamten radialen Bereich ausreichend heiß sind, um die Beiträge anderer Streumechanismen vernachlässigen zu können. Wir sehen weiterhin, daß für kleinere ε die kritischen Akkretionsraten geringer werden, wie wir es auch erwarten. Durch den

Tabelle 3.2: *Slim-discs* mit $h/s = \text{const.}$

ε	$\eta(\mathbf{s_a})$	$\mathbf{l(s_a)}$	**Farbe**
0,1	0,96	$0{,}01 l_K$	türkis
0,3	0,66	$0{,}01 l_K$	grau
0,7	0,30	$0{,}01 l_K$	pink
1,5	0,33	$0{,}01 l_K$	grün

effizienten Transportmechanismus der Advektion sind sie jedoch um viele Größenordnungen höher als für klassische, dünne α-Scheiben – dies gilt vor allem für kleine Radien, bei welchen die kritische Akkretionsrate in den dünnen α-Scheiben unter der Eddington-Rate $\dot{M}_E$ liegt. Abbildung 3.14 zeigt schließlich, daß für konstantes ε der Gasdruck zum einen für kleiner werdende Radien im Verhältnis zum Gesamtdruck sinkt und zum anderen nur für dünnere Scheiben dominant werden kann.

Wir weisen nochmal besonders darauf hin, daß in der gesamten Arbeit immer die für den jeweiligen Radius maximal mögliche Akkretionsrate berechnet wird. In dem hier betrachteten Fall steigt die Akkretionsrate mit kleiner werdendem Radius. Das läßt sich – wenn überhaupt – nur durch vertikalen Masseneinfluß erreichen. Wie bereits im Abschnitt 3.1.2 gezeigt, fällt bei Berechnung des Eddington-Limits die Höhe h der Scheibe immer stärker ab als der Radius s, so daß die Annahme $\varepsilon = \text{const.}$ nicht realistisch ist. Inwieweit Massenflüsse oberhalb der Scheibe auftreten und ob diese zu vertikalen Massenzuflüssen führen können, wird in Abschnitt 3.2 untersucht werden.

Die *Slim-disc*-Theorie ist so konstruiert, daß sie im Grenzfall $\varepsilon \ll 1$ in die klassische Theorie dünner α-Scheiben übergeht. Die in den bisherigen Betrachtungen berechneten Verhältnisse $\dot{M}/\dot{M}_{\text{thin}}$ sind jedoch auch für kleine ε sehr hoch. Wir vollziehen den Grenzfall $\varepsilon \ll 1$ im folgenden nach, um die Gleichungen (3.1.20) und (3.1.21) zu überprüfen.

3.1.4 Analytische Betrachtung im Grenzfall dünner Scheiben

Wir betrachten den Limes $h \to 0$: Dann wird (3.1.20) offensichtlich zu

$$\frac{l^2}{l_K^2} = 1\,,$$

was eben dem Resultat dünner Scheiben entspricht. Damit ist $\tilde{\Omega}_K = \Omega_K$ und somit $\dfrac{dl}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{l}{s}$. Gleichung (3.1.21) wird zu

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\pi s}\dot{M}\Bigg[& (l-l_0)\,\frac{3l}{2s^3} + \frac{B_3}{B_1}\Omega_K^2 h^2 \cdot \\ & \cdot\Bigg(-\left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln\dot{M})}{ds} - \left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(l-l_0))}{ds} \\ & + \left(3-\frac{21}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(1-\eta))}{ds} + \left(-10+\frac{33}{4}\eta\right)\frac{1}{s} + \left(9-\frac{51}{8}\eta\right)\frac{d(\ln h)}{ds}\Bigg)\Bigg]. \end{aligned}$$

Solange h, η und l „vernünftige“ Funktionen des Radius s sind (d. h. keine Unstetigkeiten und Polstellen aufweisen), erhalten wir im Limes $h \to 0$ daher

$$0 = \frac{1}{4\pi s}\dot{M}\,(l-l_0)\,\frac{3l}{2s^3} \quad \forall\, s \in [s_i; s_a] \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{M} = 0\,.$$

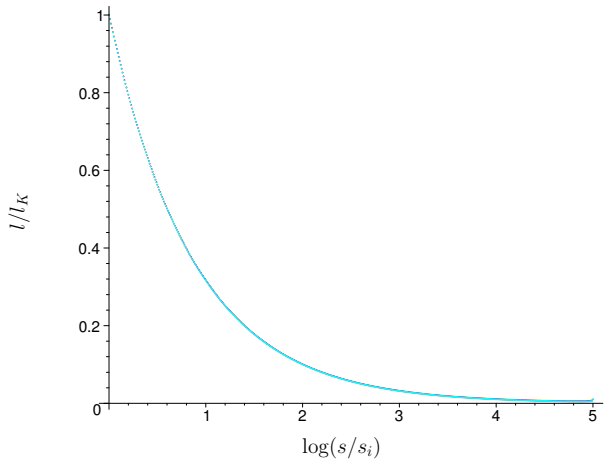


Abbildung 3.11: l/l_K für Thomson-Streuung und $\varepsilon = \text{const}$. Türkis: $\varepsilon = 0{,}1$; grau: $\varepsilon = 0{,}3$; pink: $\varepsilon = 0{,}7$; grün: $\varepsilon = 1{,}5$

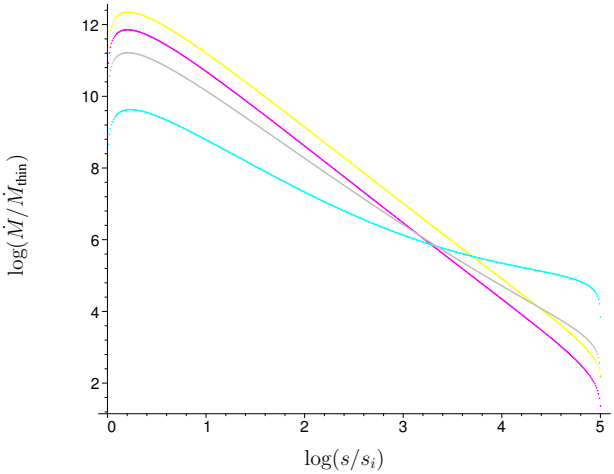


Abbildung 3.12: Vergleich der kritischen Akkretionsrate von dicken *Slim-discs* und klassischen dünnen Scheiben für Thomson-Streuung und $\varepsilon = \text{const}$.

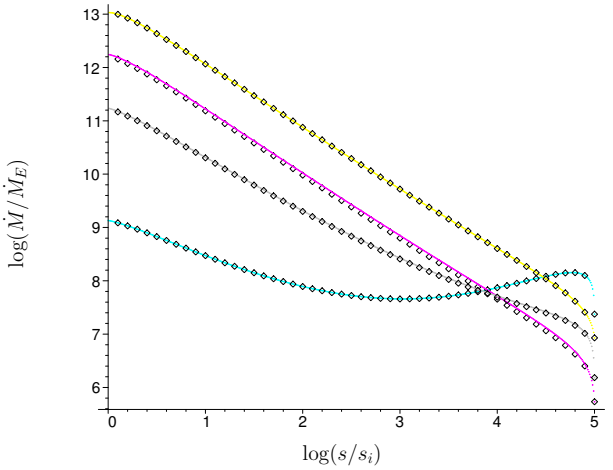


Abbildung 3.13: Kritische Akkretionsrate im Vergleich zur klassischen Eddington-Rate $\dot{M}_E$ für Thomson- Streuung und $\varepsilon = \text{const}$. Zum Vergleich sind schwarz noch die mittels der Interpolationsformel (2.1.34) berechneten kritischen Akkretionsraten eingezeichnet.

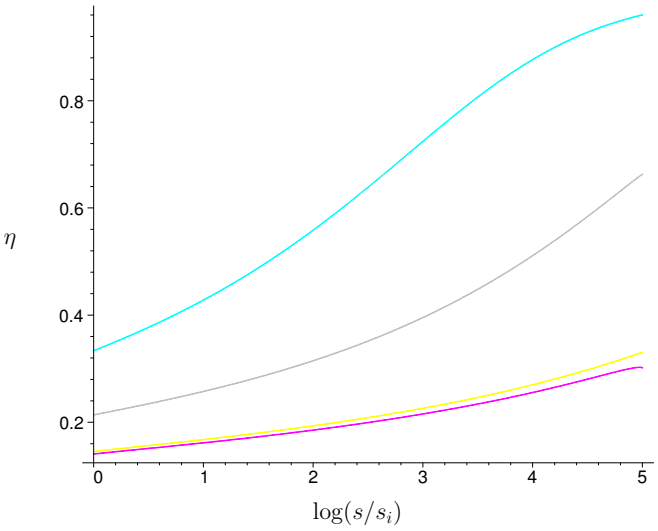


Abbildung 3.14: Anteil des Gasdrucks η am Gesamtdruck für Thomson-Streuung und $\varepsilon = \text{const.}$

Auch dies entspricht dem klassischen Grenzfall für $h \to 0$. Nun wollen wir aber den Fall $h/s \ll 1 \wedge h \neq 0$ betrachten. An den Betrachtungen zu (3.1.20) ändert sich nichts, jedoch müssen wir (3.1.21) eingehender betrachten, genauer gesagt den Term

$$\frac{B_3}{B_1}\Omega_K^2 h^2 \cdot \left(-\left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln \dot{M})}{ds} - \left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(l-l_0))}{ds} + \left(3-\frac{21}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(1-\eta))}{ds} + \left(-10+\frac{33}{4}\eta\right)\frac{1}{s} + \left(9-\frac{51}{8}\eta\right)\frac{d(\ln h)}{ds}\right).$$

Wir verwenden $h = \varepsilon s$ und fordern $\varepsilon \approx \text{const.}$ Für den Grenzfall $h/s \ll 1$ ist diese Annahme durchaus plausibel. Für Funktionen X dieser Art läßt sich die Abschätzung

$$\frac{s}{X}\frac{dX}{ds} \approx \mathcal{O}(1)$$

machen. Derselben Argumentation folgend gilt die Abschätzung auch für $\dot{M}$ und η. Letzteres ist für Eddington-limitierte Scheiben sogar konstant. Obiger Ausdruck nimmt also die Form

$$\begin{aligned}
&\frac{B_3}{B_1}\Omega_K^2 h^2 \cdot \left(-\left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln \dot{M})}{ds} - \left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(l-l_0))}{ds} + \left(3-\frac{21}{8}\eta\right)\frac{d(\ln(1-\eta))}{ds} \right.\\
&\qquad \left. + \left(-10+\frac{33}{4}\eta\right)\frac{1}{s} + \left(9-\frac{51}{8}\eta\right)\frac{d(\ln h)}{ds}\right)\\
\approx\ &\frac{B_3}{B_1}\Omega_K^2 \varepsilon^2 s \cdot \left(-\left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\cdot\mathcal{O}(1) - \left(1-\frac{3}{8}\eta\right)\cdot\mathcal{O}(1) + \left(3-\frac{21}{8}\eta\right)\cdot\mathcal{O}(1) \right.\\
&\qquad \left. + \left(-10+\frac{33}{4}\eta\right)\cdot\mathcal{O}(1) + \left(9-\frac{51}{8}\eta\right)\cdot\mathcal{O}(1)\right)\\
\approx\ &\frac{B_3}{B_1}\Omega_K^2 \varepsilon^2 s \cdot \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

an, wobei wir $0 < \eta < 1$ verwendet haben. Damit ergibt (3.1.21) im Grenzfall $h/s \ll 1$ zusammen mit $l \approx l_K$:

$$\begin{aligned}\frac{B_2 c}{B_1 \kappa}\Omega_K^2 \varepsilon s(1-\eta) &\approx \frac{1}{4\pi s}\dot{M}\left[(l_K - l_0)\,\frac{3 l_K}{2s^3} + \frac{B_3}{B_1}\Omega_K^2\varepsilon^2 s \cdot \mathcal{O}(1)\right] \\ &= \dot{M}\frac{\left(1-\frac{l_0}{l_K}\right)}{4\pi}\frac{3l_K^2}{2s^4} + \dot{M}\frac{B_3}{4\pi B_1}\Omega_K^2\varepsilon^2\cdot\mathcal{O}(1) \\ &= \dot{M}\frac{\left(1-\sqrt{\frac{s_i}{s}}\right)}{4\pi}\frac{3\Omega_K^2}{2} + \dot{M}\frac{B_3}{4\pi B_1}\Omega_K^2\varepsilon^2\cdot\mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

Vernachlässigen wir nun den Term quadratischer Ordnung gegenüber dem von ε unabhängigen Term auf der rechten Seite (die restlichen Faktoren sind von der gleichen Ordnung), so folgt mit der Definition der Randfunktion $f(s) = (1 - \sqrt{s_i/s})$

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{B_2 c}{B_1\kappa}\varepsilon s(1-\eta)\cdot f^{-1}(s)\frac{8\pi}{3} = (1-\eta)\frac{B_2}{B_1}\cdot\frac{8\pi}{3}\frac{c}{\kappa}\frac{h}{f(s)} \\ &= \Upsilon^{-1}\cdot\dot{M}_{\text{thin}}(s)\end{aligned}$$

mit dem Korrekturfaktor

$$\Upsilon = \Upsilon(s) = \frac{B_1}{B_2}\cdot\frac{1}{1-\eta}\,.$$

Im Fall Eddington-limitierter Scheiben gilt $\eta = 1 - B_1/B_2$ und damit $\Upsilon = 1$.

3.1.5 Zusammenfassung

Wie wir gesehen haben, tritt für dicker werdende Scheiben neben den Energietransport durch Strahlung ein weiterer Mechanismus, nämlich der Energietransport durch horizontale Advektion. Das bewirkt eine verringerte Effizienz in der Umwandlung von Akkretionsrate in Leuchtkraft. Für die Bestimmung des Eddington-Limits bedeutet das ein höheres Akkretionslimit Im Vergleich zu dünnen Scheiben.

Die Näherung $\varepsilon = h/s = $ const. liefert für *Slim-discs* keine sinnvollen Ergebnisse: Einerseits sind die berechneten Akkretionsraten extrem hoch, andererseits benötigt dieses Modell massiven vertikalen Masseneinfluß über die gesamte Scheibe.

Wie stark sich die Akkretionsraten von dünnen Scheiben und *Slim-discs* unterscheiden, ist von mehreren Faktoren abhängig: Zum einen bewirkt die Verwendung interpolierter Opazitäten eine deutliche Steigerung des Verhältnisses $\dot{M}/\dot{M}_{\text{thin}}$, aber trotzdem eine Verringerung von $\dot{M}$ gegenüber $\dot{M}_E$. Zum anderen ist das Verhältnis abhängig von der Randbedingung $h(s_a)$. Diese kann sich am äußeren Rand so einstellen, daß die Scheibe für ein von außen vorgegebenes $\dot{M}(s_a)$ gerade am Eddington-Limit existiert. Eine Obergrenze an die Akkretionsrate ist dann wiederum durch den Gültigkeitsbereich der *Slim-disc*-Theorie gegeben: $h/s \lessapprox 1$. Im inneren Bereich der Scheibe ergeben sich die kritischen Akkretionsraten zu ungefähr $0{,}1\dot{M}_E$ bis $10\dot{M}_E$.

Schließlich haben wir gezeigt, daß die *Slim-disc*-Theorie im Grenzfall $h/s \ll 1$ in die klassische Theorie dünner α-Scheiben übergeht und den durch die Modellparameter B_i entstehenden Korrekturfaktor für $\dot{M}$ berechnet.

3.2 Vertikale Akkretionsflüsse, Jets

Wir wollen hier an die Diskussion des Eddington-Limits in vertikaler Richtung anknüpfen. Wie wir bereits gesehen haben, lassen sich für die vertikale Richtung kritische Akkretionsraten berechnen, welche abhängig von der jeweiligen radialen Position sind. Je nachdem, ob die kritische Akkretionsrate für kleiner werdende Radien sinkt oder steigt, muß für eine Scheibe, welche am jeweiligen Limit existiert, die zuviel vorhandene bzw. fehlende Materie durch vertikale Materieflüsse ausgeglichen werden. Inwieweit solche Flüsse auftreten können und ob dies evtl. mit Jets in Verbindung gebracht werden kann, soll in dem nun folgenden Abschnitt untersucht werden. Zunächst werden in Abschnitt 3.2.1 die zugrundeliegenden Gleichungen abgeleitet, Abschnitt 3.2.2 behandelt die konkrete Berechnung und stellt die Resultate vor.

3.2.1 Theoretische Modellierung

Wir bleiben im Grenzfall geometrisch dünner, nicht selbstgravitierender Scheiben und stellen folgendes Gedankenexperiment auf: Wir betrachten ein Testteilchen, welches sich oberhalb der Scheibe an einem bestimmten Punkt aufhält und nun entweder auf die Scheibe herunterfallen kann oder von der Scheibe abgeblasen wird. Gleichzeitig kann es sich in radialer Richtung bewegen. Wenn sich an der Oberfläche der Scheibe immer ein Kräftegleichgewicht zwischen Strahlung und Gravitation einstellt (was ja genau die Aussage des Eddington-Limits ist), dann kann es eventuell in einem bestimmen vertikalen Abstand z über der Scheibe einen Punkt geben, an dem die nun zu berücksichtigende gesamte Abstrahlung der Scheibe größer wird als die Gravitation. Existiert ein solcher kritischer Punkt $\mathbf{x}_0$, dann wird sich das Teilchen an dieser Stelle nicht weiter an die Scheibe annähern können und wir haben, abhängig von der vertikalen Geschwindigkeit der Teilchen, eine Barriere für vertikal einströmende Materie gefunden. Als weitere Annahme in diesem Abschnitt verwenden wir die Näherung reiner Thomson-Streuung, $\kappa = \kappa_{\text{Thomson}} = 0{,}4\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$.

Kraft auf ein Testteilchen

Um zu überprüfen, ob ein wie oben beschriebener Punkt $\mathbf{x}_0$ überhaupt existieren kann, betrachten wir die Abstandsabhängigkeiten der auftretenden Kräfte. In Abb. 3.15 sind die auftretenden Abstände skizziert. Dabei kürzen wir mit $\mathbf{x}_i = (s,\varphi,z)_i$ die dreidimensionalen Zylinder-Koordinaten ab. Dabei ist $z = h(s) + \tilde{z}$, die Größe $\tilde{z}$ stellt also den Abstand des Testteilchens von der Scheibenoberfläche an der entsprechenden radialen Position dar.

Unser Testteilchen befinde sich an der Stelle $\mathbf{x}_0$. Von der Oberfläche der Scheibe geht die Strahlungsdruckkraft

$$\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0) = \int_{A_{\text{Scheibe}}} d\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0)$$

aus. Der Beitrag eines Flächenelementes ist dabei

$$d\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0) \quad = \quad \frac{\kappa m_{\text{TT}}}{c}\,\frac{\sigma T_{\text{eff}}^4(\mathbf{x}_1)}{4\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0|^2}\,s\,ds\,d\varphi\cdot\frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0|}\,.$$

Zur Berechnung des Abstandes verwenden wir das Abstandsmaß in Zylinderkoordinaten:

$$|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0| = \sqrt{(h_0+\tilde{z}_0-h_1)^2 + s_0^2 + s_1^2 - 2s_0s_1\cos(\varphi_0-\varphi_1)} \tag{3.2.1}$$

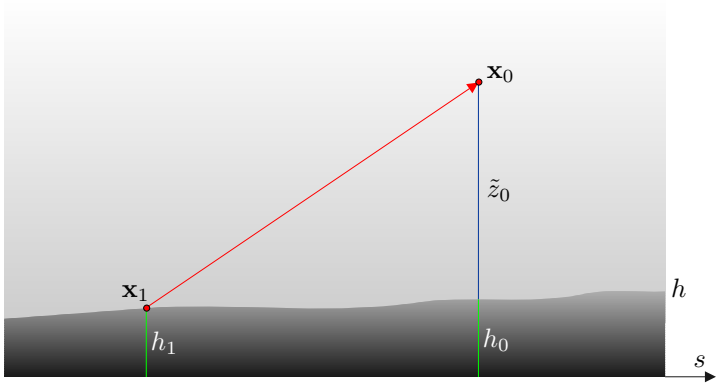


Abbildung 3.15: Skizze zur Berechnung der auftretenden Kräfte

Wir verwenden $z_1 = h(s_1)$, $z_0 = h(s_0) + \tilde{z}_0$ und verwenden die azimutale Symmetrie der Effektivtemperatur. Damit wird

$$\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\sigma_T}{c} \int ds \int d\varphi \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4(s) \cdot s \cdot ((s_0 - s)\mathbf{e}_s + s(\varphi_0 - \varphi)\mathbf{e}_\varphi + (h(s_0) + \tilde{z}_0 - h(s))\mathbf{e}_z)}{4\pi \left((h(s_0) + \tilde{z}_0 - h(s))^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos(\varphi_0 - \varphi)\right)^{(3/2)}} .$$

Für das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung interessiert uns nur der Beitrag der Komponente von $d\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)$ in vertikaler Richtung, d. h. $dF_{\text{rad}}^{(z)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) = \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)$. Ebenso gilt für den Beitrag in radialer Richtung $dF_{\text{rad}}^{(s)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) = \mathbf{e}_s \cdot d\mathbf{F}_{\text{rad}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)$. Mit der Definition der Effektivtemperatur im vorliegenden Scheibenmodell,

$$\sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}(s)^4 = \frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}}{s^3} f(s) , \tag{3.2.2}$$

der Orthogonalität der Basisvektoren $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ und Relation (2.1.17),

$$h(s) = \frac{3}{8\pi} \frac{\kappa}{c} \dot{M} f(s) , \tag{2.1.17}$$

wird dann daraus

$$F_{\text{rad}}^{(z)}(\mathbf{x}_0) = A \int ds \int d\varphi \frac{\dot{M}(s)f(s) \cdot \left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)}{s^2 \left(\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos(\varphi_0 - \varphi)\right)^{(3/2)}}$$

bzw.

$$F_{\text{rad}}^{(s)}(\mathbf{x}_0) = A \int ds \int d\varphi \frac{\dot{M}(s)f(s) \cdot (s_0 - s\cos(\varphi_0 - \varphi))}{s^2 \left(\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos(\varphi_0 - \varphi)\right)^{(3/2)}}$$

mit den Konstanten

$$A = \frac{3}{32\pi^2}\frac{\kappa m_{\mathrm{TT}} GM}{c}, \qquad B = \frac{3}{8\pi}\frac{\kappa}{c}\,.$$

Wegen der azimutalen Symmetrie der Scheibe können wir o. B. d. A. $\varphi_0 = 0$ wählen. Zudem ist $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$. Wir geben die Integrationsgrenzen an und erhalten schließlich

$$F^{(z)}_{\mathrm{rad}}(\mathbf{x}_0) = \tag{3.2.3}$$
$$A\int_{s_i}^{s_a} ds \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\dot{M}(s)f(s)\cdot\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)}{s^2\left(\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos\varphi\right)^{(3/2)}}$$

und

$$F^{(s)}_{\mathrm{rad}}(\mathbf{x}_0) = \tag{3.2.4}$$
$$A\int_{s_i}^{s_a} ds \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\dot{M}(s)f(s)\cdot(s_0 - s\cos\varphi)}{s^2\left(\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos\varphi\right)^{(3/2)}}\,.$$

Weiter benötigen wir die Gravitationskraft, welche in vertikaler und radialer Richtung auf das Teilchen wirkt. Mit $C = GMm_{\mathrm{TT}}$ gilt

$$\begin{aligned} F^{(z)}_{\mathrm{grav}}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{e}_z = -\frac{GMm_{\mathrm{TT}}}{|\mathbf{x}_0|^2}\cdot\frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|}\cdot\mathbf{e}_z \\ &= -\frac{GMm_{\mathrm{TT}}\cdot(h(s_0)+\tilde{z}_0)}{\left(s_0^2 + (h(s_0)+\tilde{z}_0)^2\right)^{(3/2)}} \\ &= -GMm_{\mathrm{TT}}\cdot\frac{(B\dot{M}(s_0)f(s_0)+\tilde{z}_0)}{\left(s_0^2 + \left(B\dot{M}(s_0)f(s_0)+\tilde{z}_0\right)^2\right)^{(3/2)}} \\ &= -\frac{C\cdot(B\dot{M}(s_0)f(s_0)+\tilde{z}_0)}{\left(s_0^2 + \left(B\dot{M}(s_0)f(s_0)+\tilde{z}_0\right)^2\right)^{(3/2)}}\,, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$F^{(s)}_{\mathrm{grav}}(\mathbf{x}_0) = -\frac{C\cdot s_0}{\left(s_0^2 + \left(B\dot{M}(s_0)f(s_0)+\tilde{z}_0\right)^2\right)^{(3/2)}}\,. \tag{3.2.6}$$

Damit haben wir die notwendigen Gleichungen zur Berechnung der radialen und vertikalen Gesamtkraft aufgestellt. Wie nachfolgender Gedankengang zeigt, ergibt sich aber ein Problem: Nehmen wir an, die Position unseres Testteilchens nähert sich immer mehr der Scheibenoberfläche (dabei ist es unerheblich, ob sich die radiale Position ändert). Wie betrachten also, mathematisch ausgedrückt, den Fall $\tilde{z}_0 \to 0$, $s_0 = \text{const}$. Dann gilt

$$F^{(z)}_{\mathrm{rad}}(\mathbf{x}_0) = AB\int_{s_i}^{s_a} ds \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\dot{M}(s)f(s)\cdot\left(\dot{M}(s_0)f(s_0) - \dot{M}(s)f(s)\right)}{s^2\left(B\left(\dot{M}(s_0)f(s_0) - \dot{M}(s)f(s)\right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos\varphi\right)^{(3/2)}}$$

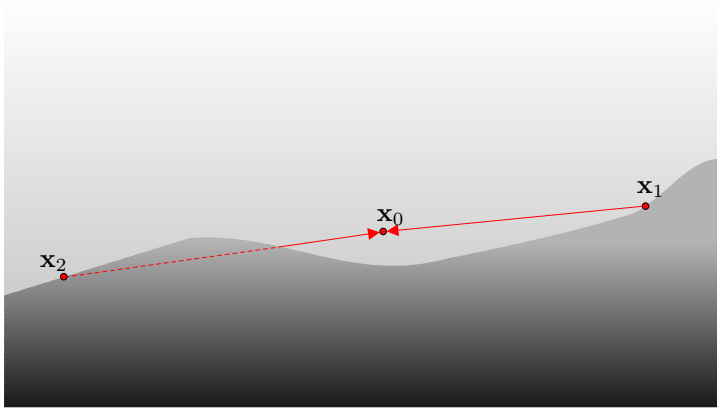


Abbildung 3.16: Die emittierende Fläche bei $\mathbf{x}_2$ ist für das Testteilchen bei $\mathbf{x_0}$ nicht sichtbar

und

$$F_{\mathrm{rad}}^{(s)}(\mathbf{x}_0) = A \int_{s_i}^{s_a} ds \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\dot{M}(s) f(s) \cdot (s_0 - s\cos\varphi)}{s^2 \left(\left(B\,\dot{M}(s_0) f(s_0) - B\,\dot{M}(s) f(s) \right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2 s_0 s \cos\varphi \right)^{(3/2)}} .$$

Dies bedeutet, daß das Teilchen nach wie vor die Strahlung der gesamten Scheibe sieht! Eine physikalisch sinnvolle Forderung ist aber, daß das Teilchen bei zunehmender Annäherung an die Scheibe nur mehr die lokale Umgebung der Scheibe wahrnimmt; dann nämlich erhalten wir im Grenzfall $\tilde{z}_0 \to 0$ wieder das Eddington-Limit, wie es bisher in der Arbeit berechnet wurde. Ebenso unbefriedigend ist das für die in den früheren Abschnitten zwar sinnvolle, aber jetzt unpassende theoretische Konstrukt einer harten Scheibenoberfläche: Dieses bedeutet, daß bis zur Höhe $h(s)$ eine heiße, gasgefüllte Scheibe und für $z > h(s)$ nichts als Vakuum vorliegt.

Wir verbessern das Modell dahingehend, daß wir über der Akkretionsscheibe eine Atmosphäre aufbauen, welche durch Absorption dafür sorgt, daß das Testteilchen hauptsächlich seine lokale Umgebung sieht. Um die Berechnung der Absorption entlang der Sichtlinie einfach zu halten, lösen wir den Strahlungstransport unter folgender Annahme: Die Atmosphäre absorbiert zwar zum Teil die von der Scheibe emittierte Strahlung, ist aber selbst hinreichend dünn und kalt, daß ihre eigene Emission vernachlässigt werden kann. Die Atmosphäre transportiert die absorbierte Energie also hauptsächlich durch Diffusion. Auch die von der Atmosphäre ausgehende Gravitationskraft auf das Teilchen können wir vernachlässigen.

Eine weitere Verbesserung des Modells besteht darin, bei der Berechnung der Sichtlinie die Oberflächenform der Scheibe zu berücksichtigen. Wie Abb. 3.16 an einem Beispiel zeigt, wird die von $\mathbf{x}_2$ emittierte Strahlung in Richtung $\mathbf{x}_0$ durch die Scheibe selbst wieder absorbiert und erreicht das Testteilchen nicht.[3] Solche Punkte werden bei der Berechnung der resultierenden Kräfte ausgeschlossen.

Konstruktion der Atmosphäre I

Für die folgende Behandlung sei darauf hingewiesen, daß die so konstruierte Atmosphäre kein realistisches physikalisches Modell darstellen soll. Wir benötigen ohnehin nur ihre Eigenschaft als absorbierendes Medium und müssen uns um die korrekte physikalische Beschreibung ihre weiteren Eigenschaften keine großen Sorgen machen.

[3] Würden wir die Emission durch die Atmosphäre betrachten, wäre das Modell hier deutlich komplizierter.

Ein oft verwendetes Modell für Atmosphären über Akkretionsscheiben oder um Sterne sind sog. graue Atmosphären. Sie zeichnen sich durch eine frequenzunabhängige Extinktion (d. h. frequenzunabhängige Energie-Verluste durch Absorption und Streuung) aus. In unserem Fall ist die Absorption in der Atmosphäre wie in der Scheibe durch Thomson-Streuung bestimmt. Wir erzeugen die Atmosphäre unter der Näherung vernachlässigbaren Gasdrucks an der Scheibenoberfläche, was bei hinreichend hohen Akkretionsraten zumindest näherungsweise erfüllt ist. Weiterhin nehmen wir an, daß die Schallgeschwindigkeit c_s innerhalb der Scheibe und der Atmosphäre näherungsweise nur vom Radius abhängt und nicht von der vertikalen Position. Eine bzgl. der z-Richtung konstante Schallgeschwindigkeit entspricht eigentlich der Annahme einer isothermen Schichtung der Atmosphäre. Wie gut diese Annahme erfüllt ist, werden wir im Nachhinein überprüfen müssen.

Für klassische, dünne α-Scheiben gilt (3.2.2) und damit für den Druck an der Scheibenoberfläche

$$p_{\text{eff}}(s) = \frac{GM\dot{M}(s)}{2\pi c s^3} f(s)\,. \tag{3.2.7}$$

Für die Schallgeschwindigkeit gilt

$$c_s(s) = h(s)\cdot\Omega_K(s) \overset{(2.1.17)}{=} \frac{3}{8\pi}\frac{\kappa}{c}\dot{M}(s) f(s)\Omega_K(s) \tag{3.2.8}$$

und damit

$$\rho_{\text{eff}}(s) = \frac{p_{\text{eff}}(s)}{c_s(s)^2} = \frac{32\pi c}{9\kappa^2\dot{M}(s)f(s)}\,. \tag{3.2.9}$$

Für das oben erwähnte Modell einer grauen Atmosphäre gilt

$$\rho(s,z) = \zeta\cdot\rho_{\text{eff}}(s)\cdot\exp\left\{-\frac{(z-h(s))^2}{2h(s)^2}\right\}, \tag{3.2.10}$$

$$\tau(s,z) = -\int_{h(s)}^{z}\kappa\rho(s,z')dz' + \tau_{\text{eff}} = \frac{2}{3} - \kappa\rho_{\text{eff}}(s)\int_{h(s)}^{z}\exp\left\{-\frac{(z'-h(s))^2}{2h(s)^2}\right\}dz', \tag{3.2.11}$$

$$T(s,z) = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}\left(\tau(s,z)+\frac{2}{3}\right)^{1/4}, \tag{3.2.12}$$

$$p(s,z) = \frac{p_{\text{eff}}(s)}{\rho_{\text{eff}}(s)}\cdot\rho(s,z) = \zeta\cdot p_{\text{eff}}(s)\cdot\exp\left\{-\frac{(z-h(s))^2}{2h(s)^2}\right\}, \tag{3.2.13}$$

wobei wir als Skalierungsfaktor in der Exponentialfunktion die aktuelle Höhe $h(s)$ verwendet haben, da sie die einzige für die Scheibe in vertikaler Richtung definierte Größe ist. Der hier eingeführte Korrekturfaktor ζ steht für die Annahme einer ausreichend dünnen Atmosphäre und eines vernachlässigbaren Gasdrucks. Wir setzen ζ auf einen konstanten Wert kleiner als eins und erzeugen so eigentlich eine Unstetigkeit in der Dichte beim Übergang von der Scheibe zur Atmosphäre. Stattdessen könnten wir einen komplizierteren Ausdruck zu verwenden, welcher diese Stufe ausschmiert. Im Rahmen des Atmosphärenmodells ist unsere Konstruktion aber ausreichend.

Die optische Tiefe an der Scheibenoberfläche wird definiert als $\tau_{\text{eff}} = \tau(s,h(s)) = 2/3$. Die Bestimmungsgleichung (3.2.12) für die Temperaturschichtung wird auch Eddington-Barbier-Näherung genannt und ist im wesentlichen das Ergebnis einer genäherten Lösung der Strahlungstransportgleichung für die Atmosphäre.

Abbildungen 3.17–3.20 zeigen Dichte ρ, optische Tiefe τ, Temperatur T und Druck p in der so konstruierten Atmosphäre unter den Annahmen

$$\dot{M}(s) = \eta\dot{M}_E = 10\cdot\dot{M}_E, \qquad \zeta = 0{,}1\,. \tag{3.2.14}$$

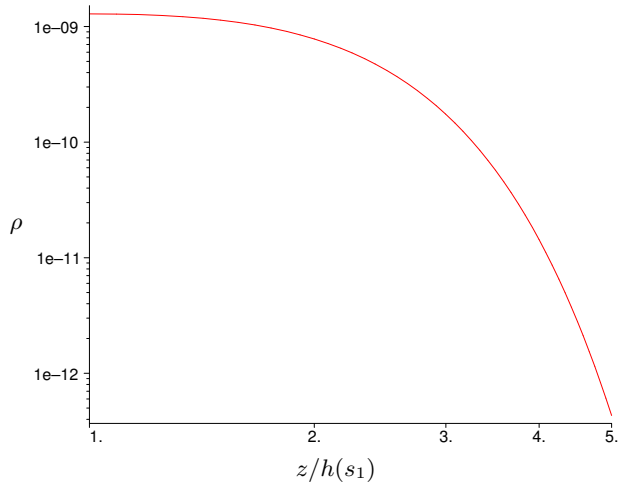


Abbildung 3.17: Dichteverlauf $\rho(s_1,z)$ in der grauen Atmosphäre; $s_1 = 10^3 s_i$

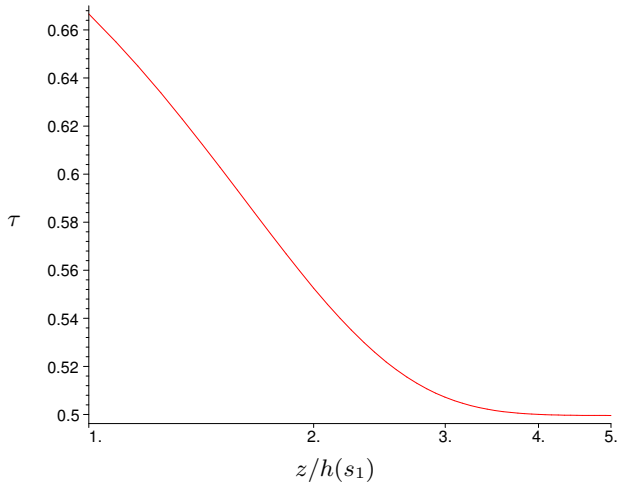


Abbildung 3.18: Verlauf der optischen Tiefe $\tau(s_1,z)$ in der grauen Atmosphäre; $s_1 = 10^3 s_i$

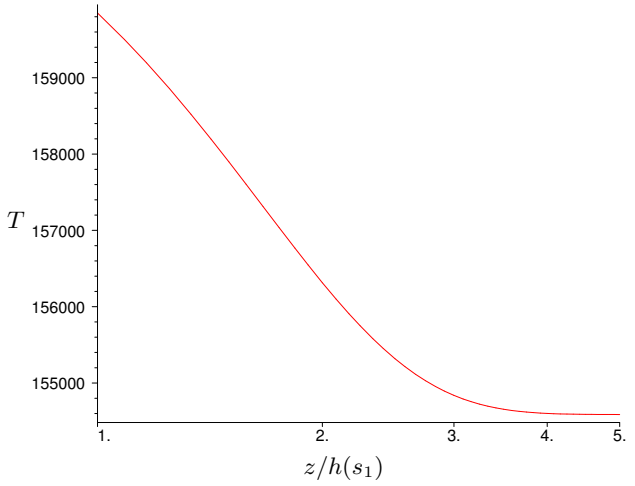


Abbildung 3.19: Temperaturverlauf $T(s_1,z)$ in der grauen Atmosphäre; $s_1 = 10^3 s_i$

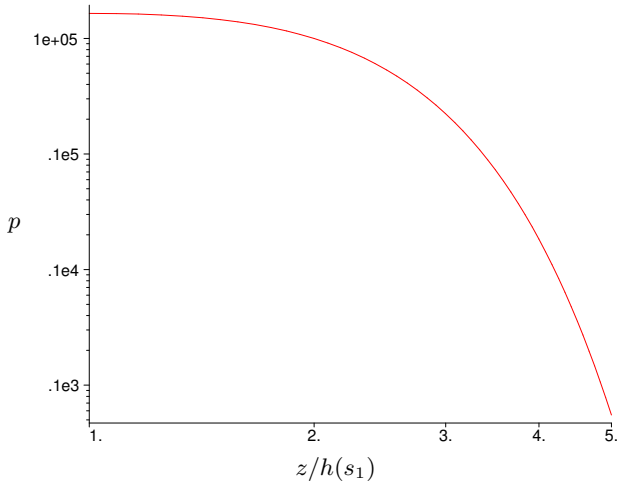


Abbildung 3.20: Druckverlauf $p(s_1,z)$ in der grauen Atmosphäre; $s_1 = 10^3 s_i$

Für diese Annahmen gilt bei z. B. $s_1 = 10^3 s_i$, d h. $f(s_1) \approx 1$,

$$\rho_{\text{eff}}(s_1) \approx 1{,}3 \cdot 10^{-8}\,\text{g cm}^{-3}, \qquad p_{\text{eff}}(s_1) \approx 1{,}6 \cdot 10^{6}\,\text{g s}^{-2}\text{cm}^{-1},$$
$$T_{\text{eff}}(s_1) \approx 1{,}6 \cdot 10^{5}\,\text{K}, \qquad h(s_1) \approx 2{,}6 \cdot 10^{8}\,\text{cm} \approx 3 \cdot 10^{-4} s_a\,.$$

Wie Abb. 3.19 zeigt, ist die Annahme einer isothermen vertikalen Schichtung gut erfüllt, da aufgrund der geringen Dichte die optische Tiefe nur schwach variiert. Ab $z \approx 5h(s)$ nimmt in diesem Modell die Dichte so geringe Werte an, daß die optische Tiefe und damit auch die Temperatur konstant bleiben. Die Ursache hierfür liegt in der Einführung des Faktors ζ: Würden wir statt $\zeta = 0{,}1$ den Wert $\tilde{\zeta} = 1$ einsetzen, so wäre $\tau(s,z) = 0$ bereits bei $z \approx 1{,}5h(s)$, was einer extrem dünnen Atmosphäre entspräche. Der Druck ist in diesem Modell direkt proportional zur Dichte und nimmt wie diese ab $z \approx 5h(s)$ sehr schnell ab.

Für die weitere Behandlung der vertikalen Massenflüsse benötigen wir wegen der vereinfachenden Annahme reiner Thomson-Streuung nur die Bestimmungsgleichung (3.2.10) für die Dichte $\rho(s,z)$.

Berechnung der Sichtlinie

Wir behandeln jetzt die Berechnung der Sichtlinie von einem strahlenden Flächenelement bei $\mathbf{x}_1$ zu dem Testteilchen am Ort $\mathbf{x}_0$. Dafür geben wir die beiden Ortsvektoren noch einmal an:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} s_0 \cos\varphi_0 \\ s_0 \sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \\ h(s_0) + \tilde{z}_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \cos\varphi_1 \\ s_1 \sin\varphi_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \cos\varphi_1 \\ s_1 \cos\varphi_1 \\ h(s_1) \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} s_0 - s_1 \cos\varphi_1 \\ -s_1 \sin\varphi_1 \\ \tilde{z}_0 + h(s_0) - h(s_1) \end{pmatrix}$$

und

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| = \left((\tilde{z}_0 + h(s_0) - h(s_1))^2 + s_0^2 + s_1^2 - 2 s_0 s_1 \cos\varphi_1\right)^{1/2}\,.$$

Wir parametrisieren die Sichtlinie mit ψ:

$$\mathbf{x}(\psi) = \mathbf{x}_1 + \psi \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1) = (1-\psi)\mathbf{x}_1 + \psi\mathbf{x}_2, \qquad 0 \le \psi \le 1 \tag{3.2.15}$$

Die Koordinaten des Punktes $\mathbf{x}(\psi)$ lauten dann:

$$\begin{aligned} s(\psi) &= \sqrt{(1-\psi)^2 s_1^2 + \psi^2 s_0^2 + 2\psi(1-\psi)s_0 s_1 \cos\varphi_1} \\ \varphi(\psi) &= \arctan \frac{(1-\psi)s_1 \sin\varphi_1}{(1-\psi)s_1\cos\varphi_1 + \psi s_0} \\ z(\psi) &= (1-\psi)h(s_1) + \psi \cdot (h(s_0) + \tilde{z}_0) \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Damit haben wir zwei Dinge gewonnen: Zum einen gestattet uns der Test $z(\psi) \le h(s(\psi))$ festzustellen, ob wir längs der Sichtlinie die Scheibe streifen oder gar durchstoßen. Zum anderen können wir jetzt bei der Berechnung der auf das Teilchen treffenden Strahlung der einzelnen Flächenelemente jeweils die Absorption durch die Atmosphäre berücksichtigen. Wir bezeichnen sie, da die Bezeichnung τ bereits für den vertikalen Verlauf der optischen Tiefe vergeben ist, mit $\varsigma(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0)$:

$$\varsigma(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0) = \kappa\,|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| \int_0^1 \rho(\mathbf{x}(\psi))\,d\psi \tag{3.2.17}$$

Da wir von einer nicht-emittierenden Atmosphäre ausgehen, wird der Beitrag eines Flächenelements am Punkte $\mathbf{x}_1$ um den Faktor $\exp(-\varsigma(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0))$ abgeschwächt. Wir erhalten so zusammen mit (3.2.3) und (3.2.4) die korrigierten Gleichungen für die Strahlungsdruckkräfte in vertikaler und radialer Richtung, nämlich

$$F_{\text{rad}}^{(z)}(\mathbf{x}_0) = \tag{3.2.18}$$
$$A\int_{s_i}^{s_a} ds \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\dot{M}(s)f(s)\cdot\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)\cdot\exp\{-\varsigma(\mathbf{x}(s,\varphi),\mathbf{x}_0)\}}{s^2\left(\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos\varphi\right)^{(3/2)}}$$

und

$$F_{\text{rad}}^{(s)}(\mathbf{x}_0) = \tag{3.2.19}$$
$$A\int_{s_i}^{s_a} ds \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\dot{M}(s)f(s)\cdot(s_0 - s\cos\varphi)\cdot\exp\{-\varsigma(\mathbf{x}(s,\varphi),\mathbf{x}_0)\}}{s^2\left(\left(B\,\dot{M}(s_0)f(s_0) + \tilde{z}_0 - B\,\dot{M}(s)f(s)\right)^2 + s_0^2 + s^2 - 2s_0 s\cos\varphi\right)^{(3/2)}}\,.$$

Für die emittierenden Flächenelemente der Scheibe gilt $z = h(s)$, daher genügt in der Exponentialfunktion die Angabe $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s,\varphi)$.

Inneres Randgebiet – Konstruktion der Atmosphäre II

Bevor wir endgültig zur Anwendung des bisher Hergeleiteten kommen können, müssen wir noch das innere Randgebiet der Akkretionsscheibe betrachten. Wir integrieren für die Berechnung der Strahlungsdruckkräfte über die gesamte Scheibe und berechnen dabei die jeweils wirksame optische Tiefe ς. Dabei wird ein Teil der Sichtlinien sicherlich durch das Gebiet innerhalb des inneren Radius der Scheibe s_i laufen. Die physikalische Beschreibung der Vorgänge innerhalb des inneren Radius sind bisher

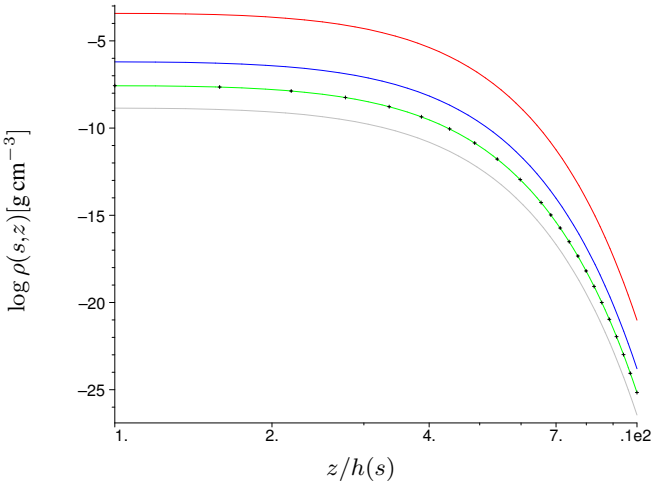


Abbildung 3.21: Verlauf von $\rho(s,z)$ als Funktion von z für verschiedene Radien s. Rot: $s = 0{,}1 s_i$; blau: $s = 0{,}5 s_i$; grün: $s = 1{,}1 s_i$. Zum Vergleich ist schwarz gepunktet bzw. als graue Linie die „echte“ Funktion $\rho(s,z)$ für $s = 1{,}1 s_i$ bzw. $s = 10^2 s_i$ eingezeichnet

nicht wirklich verstanden. Zudem treten schon bei Erreichen des inneren Radius – verursacht durch die Randbedingung $f(s)$ – Schwierigkeiten auf: So gilt z. B. $h(s_i) = 0$, $T_{\mathrm{eff}}(s_i) = 0$, …

Wir umgehen die Hindernisse wie folgt: Wir benötigen für $0 \le s \le s_i$ definierte Funktionen h, ρ und κ. Für die Opazität gelte auch hier die Annahme reiner Thomson-Streuung. Wir definieren:

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{3}{8\pi}\dfrac{\kappa}{c}\dot{M}(s)\, f(s) & 1{,}1 s_i \le s \le s_a \\ \dfrac{3}{8\pi}\dfrac{\kappa}{c}\dot{M}(1{,}1 s_i)\, f(1{,}1 s_i) & 0 \le s < 1{,}1 s_i \end{cases}$$

$$\rho(s,z) = \begin{cases} \zeta \cdot \rho_{\mathrm{eff}}(s) \cdot \exp\left\{-\dfrac{(z-h(s))^2}{2h(s)^2}\right\} & 1{,}1 s_i \le s \le s_a \\ \zeta \cdot \rho_{\mathrm{eff}}(1{,}1 s_i)\dfrac{(1{,}1 s_i)^4}{(s+10^4\,\mathrm{cm})^4} \cdot \exp\left\{-\dfrac{(z-h(1{,}1 s_i))^2}{2h(1{,}1 s_i)^2}\right\} & 0 \le s < 1{,}1 s_i \end{cases}$$

Die beiden Ansätze sind empirisch und aufgrund folgender Überlegungen entstanden: Erstens sollte der Übergang weg von der Randbedingung $f(s)$ so spät wie möglich erfolgen und die Größen h und ρ kontinuierlich weiterführen. Zweitens erwarten wir von dem physikalisch nicht bekannten inneren Bereich, daß er heiß und dicht und daher stark absorbierend sein wird. Die dafür benötigte hohe Dichte erhalten wir durch den zusätzlichen Faktor

$$\frac{(1{,}1 s_i)^4}{(s+10^4\,\mathrm{cm})^4} \approx 9 \cdot 10^3 \ldots 1 \qquad \text{für} \qquad s = 0 \ldots 1{,}1 s_i\,, \tag{3.2.20}$$

wobei für unsere Standardscheibe $1{,}1 s_i = 9{,}75 \cdot 10^6\,\mathrm{cm} \gg 10^4\,\mathrm{cm}$ ist. Gegenüber einer so künstlich eingeführten Dichte ist natürlich Skepsis angebracht. Abbildung 3.21 zeigt, daß der Verlauf von $\rho(s,z)$ als Funktion von z für $s \le 1{,}1 s_i$ im Rahmen unseres Modelles akzeptabel ist.

Es ist anzumerken, daß wir relativistische Korrekturen im inneren Gebiet der Scheibe nahe am zentralen Schwarzen Loch nicht berücksichtigt haben – aufgrund aller bisher verwendeten Näherungen und Annahmen wäre das auch nicht sinnvoll.

Mit diesen Vorbereitungen werden wir im nächsten Abschnitt 3.2.2 auf die numerische Lösung des Problems und die Ergebnisse eingehen.

3.2.2 Numerische Lösung

Das Ziel in Abschnitt 3.2 ist die Berechnung der Gesamtkraft auf ein Testteilchen am Punkt $\mathbf{x}_0$, welche durch die Strahlung der Scheibe und die Gravitation des Zentralobjektes entsteht. Wir verwenden im folgenden wieder die Annahmen $\dot{M}(s) = \eta\dot{M}_E = \text{const.}$ und $\kappa = \kappa_{\text{Thomson}}$.

Eine rein analytische Lösung von (3.2.18) und (3.2.19) als Funktion von $\mathbf{x}_0 = (s_0,0,h(s_0)+\tilde{z}_0)$ ist nicht möglich. Wir müssen folglich die Teilchenpositionen diskretisieren. Für eine effiziente numerische Berechnung diskretisieren wir auch die Scheibenoberfläche. Dazu legen wir mit N_s, N_φ bzw. $N_{\tilde{z}}$ die Anzahl der Gitterpunkte in radialer, azimutaler und vertikaler Richtung fest. Wir verwenden ein logarithmisches Gitter in s,z bzw. ein lineares Gitter in φ und setzen die Grenzen wie folgt:

$$\begin{aligned} s_{\text{min}} &= s_i & s_{\text{max}} &= s_a \\ \varphi_{\text{min}} &= 0 & \varphi_{\text{max}} &= 2\pi \\ \tilde{z}_{\text{min}} &= 10^2\,\text{cm} & \tilde{z}_{\text{max}} &= 10^9\,\text{cm} \\ \Longrightarrow\quad z_{\text{min}}(s) &= h(s) + 10^2\,\text{cm} & z_{\text{max}}(s) &= h(s) + 10^9\,\text{cm} \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Dabei ist zu beachten, daß wegen $h(s) \approx \text{const.}$ für $s \gg s_i$ auch $z_{\text{min}}(s) \approx \text{const.}$ und $z_{\text{max}}(s) \approx \text{const.}$ gilt. In diesem Fall ist mit $h(s) \approx 2{,}7 \cdot 10^7$ cm

$$z_{\text{max}}(s) \approx 37\,h(s) \approx 10^{-3}\,s_a \qquad (s \gg s_i)\,. \tag{3.2.22}$$

Die Obergrenze für die Berechnung in vertikaler Richtung ist deutlich größer als die Höhe der Scheibe, sie beträgt dennoch nur 10% des äußeren Scheibenradius. Der Grund dafür ist folgender: Wie wir im vorherigen Abschnitt betont haben, nehmen die Temperatur und die optische Tiefe bereits ab $\tilde{z} = z - h(s) \approx 4h(s)$ konstante Werte ungleich null an, während der Druck und die Dichte rasch auf null abfallen. Die Strahlungsdruckkraft der Scheibe wird dadurch stärker absorbiert als es in einer realistischen Atmosphäre dar Fall wäre. Falls überhaupt eine positive, d. h. von der Scheibe wegtreibende Kraft in vertikaler oder radialer Richtung entsteht, dann wird dies in einem geringen Abstand über der Scheibe geschehen.

Die numerische Berechnung wird in einem Fortran-Programm realisiert. Wir verwenden eine Gitterauflösung von $N_s = N_\varphi = N_{\tilde{z}} = 100$ Punkten und setzen wie in (3.2.14) $\eta = 10$ und $\zeta = 0{,}1$. Die Teilchenposition ist jetzt gegeben durch $\mathbf{x} = (s_k,\varphi_{l=0},\tilde{z}_m)$ mit

$$\begin{aligned} s_k &= s_i \cdot 10^{k\Delta s}\,, & \Delta k &= \frac{\log(s_a) - \log(s_i)}{N_s}\,, \\ \varphi_l &= l \cdot \Delta\varphi,\,, & \Delta\varphi &= \frac{2\pi}{N_\varphi}\,, \\ \tilde{z}_m &= \tilde{z}_{\text{min}} \cdot 10^{m\Delta\tilde{z}}\,, & \Delta\tilde{z} &= \frac{\log(\tilde{z}_{\text{max}}) - \log(\tilde{z}_{\text{min}})}{N_{\tilde{z}}}\,. \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Abbildungen 3.22 und 3.23 zeigen die Ergebnisse der Berechnung. In Abb. 3.22 sind rot diejenigen Punkte $\mathbf{x}_0$ eingetragen, für die die Gesamtkraft in vertikaler Richtung positiv, d. h. von der Scheibe wegtreibend ist. In grün ist zusätzlich die Oberfläche der Scheibe markiert, welche zum inneren Rand hin durch den Faktor $f(s)$ um fast zwei Größenordnungen abnimmt. Zu beachten ist die logarithmische Skala in s- und in z-Richtung. Es zeigt sich, daß für kleine Radien bis $\approx 10^2 s_i$ die Kraft positiv, d. h. von der Scheibenoberfläche wegtreibend ist. Dieser Bereich erstreckt sich umso weiter in radialer Richtung, je höher die Teilchenposition über der Scheibenoberfläche ist. Im Bereich $10^2 s_i < s < 10^4 s_i$ ist

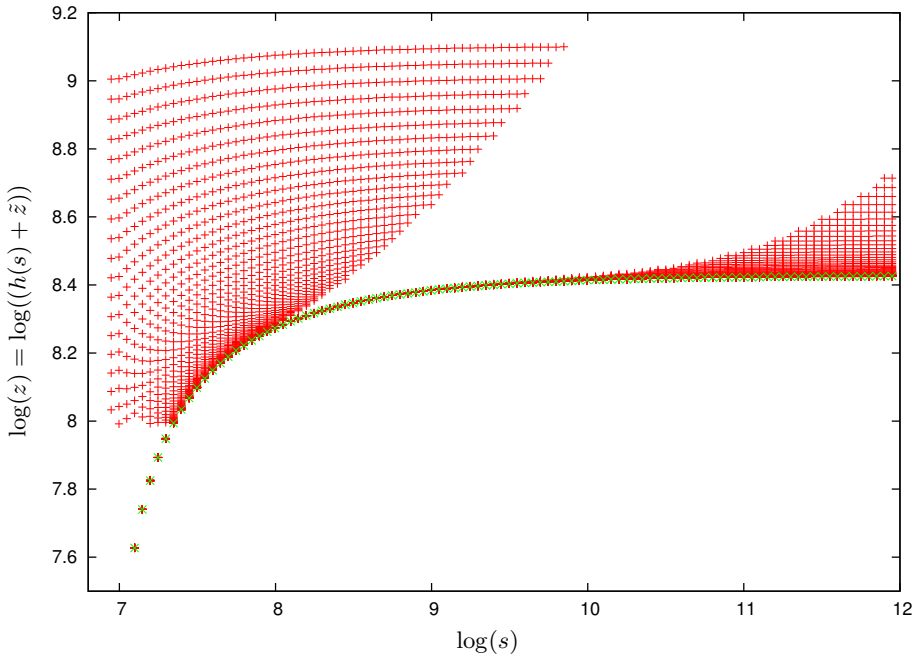


Abbildung 3.22: Ergebnisse der numerischen Berechnung der Gesamtkraft in vertikaler Richtung. Rot markiert sind die Positionen positiver radialer Gesamtkraft, zusätzlich ist grün markiert die Scheibenoberfläche eingetragen

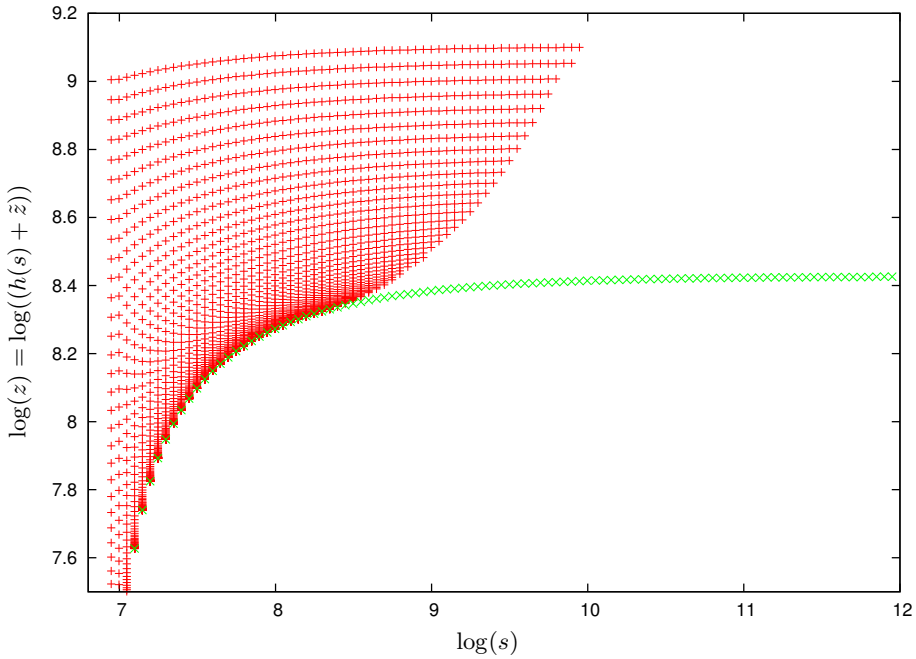


Abbildung 3.23: Ergebnisse der numerischen Berechnung der Gesamtkraft in radialer Richtung. Rot markiert sind die Positionen positiver radialer Gesamtkraft, zusätzlich ist grün markiert die Scheibenoberfläche eingetragen

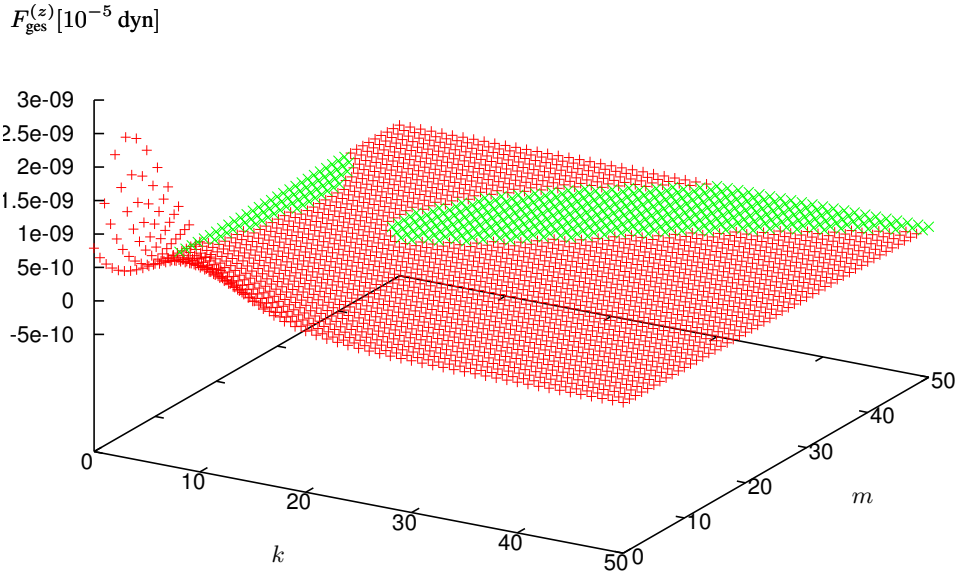


Abbildung 3.24: Ergebnisse der numerischen Berechnung der Gesamtkraft in vertikaler Richtung. Rot: $F_{\text{ges}}^{(s)} > 0$; grün: $F_{\text{ges}}^{(s)} < 0$

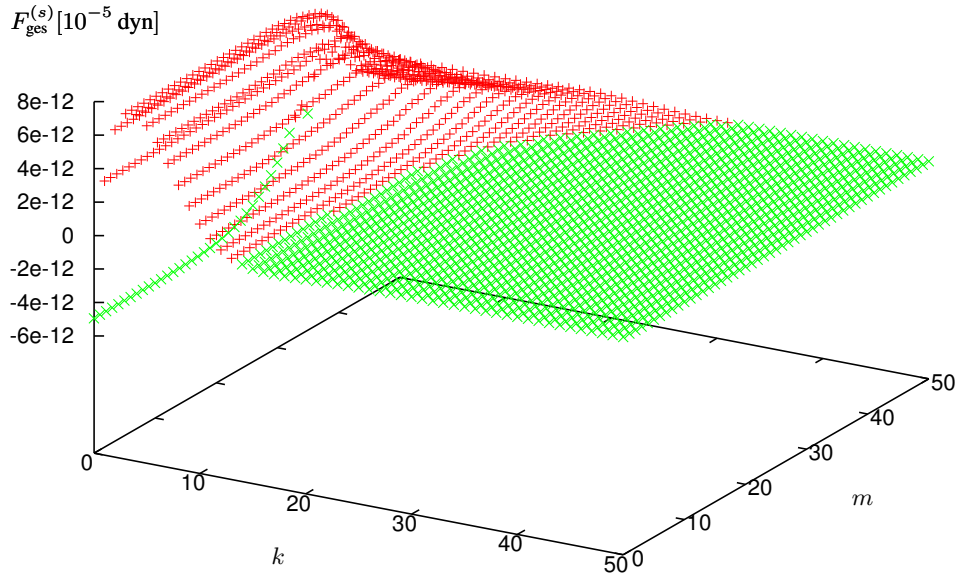


Abbildung 3.25: Ergebnisse der numerischen Berechnung der Gesamtkraft in radialer Richtung. Rot: $F_{\text{ges}}^{(s)} > 0$; grün: $F_{\text{ges}}^{(s)} < 0$

die Gesamtkraft attraktiv, wobei sich dieser Bereich für größere z zu größeren Radien verlagert, sozusagen einen „Kanal“ bildet. Bei größeren Radien wird dann die Kraft nahe an der Scheibenoberfläche wieder repulsiv. Diese ungewöhnliche Form resultiert daraus, daß neben der reinen Strahlungsverdünnung (proportional zu „1/Abstandsquadrat“) und der kleiner werdenden Gravitationskraft (ebenfalls proportional zu „1/Abstandsquadrat“, es existiert aber nur eine Quelle, nämlich das Schwarze Loch im Zentrum der Akkretionsscheibe) auch noch die Sichtbarkeitseffekte wegen der gekrümmten Oberfläche und die Absorption durch die Atmosphäre berücksichtigt werden.

Analog zeigt Abb. 3.23 dieselben Berechnungen für die radiale Komponente. Hier besitzt das innere, radial repulsive Gebiet fast die gleiche Form wie in vertikaler Richtung – ein Hinweis darauf, daß in diesem Gebiet die Strahlungsdruckkraft einfach sehr hoch ist. Dies hängt natürlich auch damit zusammen, daß durch die Integration über die gesamte Scheibe die heißen, strahlenden Flächenelemente „auf der anderen Seite“ bzw. über den gesamten Kreisring eine Kraft auf die Teilchen in diesem Gebiet ausüben. Im Gegensatz zur vertikalen Richtung fehlt der kleine Bereich radial positiver Kräfte bei großen Radien.

Um eine Vorstellung über die Stärke der wirkenden Kräfte zu erhalten, zeigen Abb. 3.24 und 3.25 die Größe der Gesamtkraft in vertikaler und radialer Richtung als Funktion der bei der Diskretisierung eingeführten Größen k und m (siehe (3.2.23)). Die Skalierung in k und m ist natürlich eine andere als zuvor in s und z, daher unterscheidet sich die Form der Gebiete positiver Kräfte von den zuvor gezeigten Abbildungen. Es ist deutlich zu sehen, daß die positiven Kräfte im inneren Gebiet der Scheibe sowohl für die vertikale, als auch für die radiale Komponente um mindestens zwei Größenordnungen höher sind als die restlichen positiven und negativen Kräfte. Obwohl wir den starken Anstieg der in z-Richtung wirkenden Kräfte für $k < 10$ und $m < 5$ nicht überbewerten wollen, ist die vertikale Komponente im inneren Bereich höher als die radiale Komponente. Dies läßt sich anschaulich erklären: Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den vertikalen und radialen Kräften ist, daß bei $\tilde{z} \to 0$ aufgrund der Projektion auf die jeweilige Richtung gerade die am nächsten liegenden Flächenelemente in radialer Richtung kaum mehr, in vertikaler Richtung dafür umso mehr beitragen. Die Strahlung dieser Flächenelemente erleidet aufgrund der geringen Entfernung eine geringere Strahlungsverdünnung und auch eine geringere Absorption durch die Atmosphäre.

Nachdem wir die auf ein Testteilchen wirkenden Kräfte in radialer und vertikaler Richtung für alle diskretisierten Position oberhalb der Scheibe berechnet haben, können wir jetzt die Bewegung eines solchen Testteilchens in diesem Feld beschreiben.

Trajektorie eines Testteilchens

Um die Bahn eines Testteilchens in dem diskretisierten, zweidimensionalen Feld zu beschreiben, verwenden wir wieder Fortran. Die zugrundeliegende Physik ist aufgrund aller unserer Annahmen (keine Auswirkungen der allg. Relativitätstheorie, keine Wechselwirkung mit der Atmosphäre, sphärische Symmetrie, ...) einfach: Wir benötigen lediglich die klassischen kinematischen Gesetze und die spezielle Relativitätstheorie.

Bei der Berechnung der Gesamtkräfte ergeben sich für die vertikale Richtung Kräfte bis zu einer Größenordnung von 10^{-5}dyn, was für ein Wasserstoffatom einer Beschleunigung von $10^{19}\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ entspricht! Solch hohe Kräfte liegen aber nur sehr nahe an der Scheibenoberfläche und nahe am inneren Rand vor, siehe Abb. 3.24. Das bedeutet, daß wir bei der Bewegung des Teilchens die relativistische Massenzunahme berücksichtigen müssen.

Die Bewegungsgleichungen für das Teilchen lauten, wobei wir den Index 0 für die Teilchenposition ab jetzt weglassen, um mit dem Index i die diskreten Zeitschritte zu kennzeichnen:

$$
\begin{aligned}
s_{i+1} &= s_i + v_i^{(s)}\,\Delta t_i + \frac{1}{2}\left(\frac{F_{\text{ges}}^{(s)}(s_i,\tilde{z}_i)}{\gamma_i m_H} + \frac{\xi^2}{\gamma_i}\frac{GM}{s_i^2}\cdot\frac{s_0}{s_i}\right)\Delta t_i^2 \\
\tilde{z}_{i+1} &= \tilde{z}_i + v_i^{(\tilde{z})}\,\Delta t_i + \frac{1}{2}\frac{F_{\text{ges}}^{(\tilde{z})}(s_i,\tilde{z}_i)}{\gamma_i m_H}\,\Delta t_i^2 \\
v_{i+1}^{(s)} &= v_i^{(s)} + \left(\frac{F_{\text{ges}}^{(s)}(s_i,\tilde{z}_i)}{\gamma_i m_H} + \frac{\xi^2}{\gamma_i}\frac{GM}{s_i^2}\cdot\frac{s_0}{s_i}\right)\Delta t_i \\
v_{i+1}^{(\tilde{z})} &= v_i^{(\tilde{z})} + \frac{F_{\text{ges}}^{(\tilde{z})}(s_i,\tilde{z}_i)}{\gamma_i m_H}\,\Delta t_i \\
\gamma_i &= \left(\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\left(v_i^{(s)}\right)^2+\left(v_i^{(\tilde{z})}\right)^2\right)}\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.2.24}
$$

Die Bestimmungsgleichungen für s_{i+1} und $v_{i+1}^{(s)}$ bedürfen einer Erläuterung: Das Testteilchen in der Akkretionsscheibe wird wegen seiner Vorgeschichte einen bestimmten Drehimpuls l_0 tragen. Dies führt zur Zentrifugalkraft $F_{\text{zent}}^{(s)} = (m_H/\gamma_0)\cdot(l_0^2/s_0^3)$. Wir setzen als Startbedingung

$$
\Omega_0 = s_0^2 l_0 = \xi\cdot\Omega_K(s_0) = \xi\cdot\sqrt{\frac{GM}{s_0^3}}\,, \qquad 0\le\xi\le 1\,.
$$

Bewegt sich das Teilchen in radialer Richtung in der dünnen Atmosphäre ohne weitere Wechselwirkung, so bleibt sein Drehimpuls erhalten. Im Schritt j sei die Position des Teilchen s_j. Dann gilt

$$
F_{\text{zent}}^{(s)} = \frac{m_H}{\gamma_j}\frac{l_j^2}{s_j^3} = \frac{m_H}{\gamma_j}\frac{l_0^2}{s_j^3} = \frac{m_H}{\gamma_j}\frac{s_0^4\Omega_0^2}{s_j^3} = \frac{m_H}{\gamma_j}\xi^2\frac{GM}{s_j^2}\frac{s_0}{s_j}\,.
$$

Das ist exakt der letzte Term in der Bestimmungsgleichung für s_{i+1} bzw. $v_{i+1}^{(s)}$ in (3.2.24).

Bei der Festlegung der Zeitschritte Δt_i müssen wir folgende Dinge beachten:

1. Aufgrund der großen Unterschiede der auf das Teilchen wirkenden Kräfte ist es nicht sinnvoll, konstante Zeitschritte Δt zu wählen. Wählen wir nämlich Δt zu groß, dann kann es beim Zeitschritt $i \to i+1$ dazu kommen, daß die Teilchengeschwindigkeit insgesamt höher wird als die Lichtgeschwindigkeit. Wählen wir die Zeitschritte andererseits zu klein, verschwenden wir in den Bereichen schwächerer Beschleunigung unnötig Rechenzeit.

2. Ein bekanntes Problem in numerischen Berechnungen sind auftretende Instabilitäten. Die Berechnung der Teilchentrajektorien erfolgt in einem expliziten Verfahren. Die Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung (kurz: CFL-Bedingung, vgl. [5]) besagt in diesem Fall, daß für ein stabiles Verhalten die Zeitschritte Δt_i so klein gewählt sein müssen, daß sowohl radial als auch vertikal keine Gitterzellen auf der Bahn der Trajektorie übersprungen werden.

Wir geben somit für jeden Schritt $i \to i+1$ einen Wert $\Delta t_i = \Delta t_{i,\,\text{standard}}$ vor. Dann überprüfen wir nacheinander folgende drei Kriterien:

(1) Obere Grenze durch die Lichtgeschwindigkeit:

$$\left(v_{i+1}^{(s)}\right)^2 + \left(v_{i+1}^{(\tilde{z})}\right)^2 \overset{!}{\leq} \iota c^2$$

Der Faktor $\iota < 1$ wird zusätzlich eingeführt, da bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit $\gamma \to \infty$ gilt. Um weitere numerische Probleme wie z. B. $\gamma \to \infty$ zu vermeiden, setzen wir in den Berechnungen $\iota = 1/2$.

(2) CFL-Bedingung in vertikale Richtung: $|m(i+1) - m(i)| \overset{!}{\leq} 1$

(3) CFL-Bedingung in radiale Richtung: $|k(i+1) - k(i)| \overset{!}{\leq} 1$

Die Anordnung der (vertauschbaren) Schritte (1)–(3) ist so gewählt, daß nach unseren Erwartungen (1) die stärkste Bedingung und (3) die schwächste Bedingung darstellt. Ist das jeweilige Kriterium nicht erfüllt, verkleinern wir Δt_i und testen das Kriterium erneut.

Abbildung 3.26 zeigt die Teilchentrajektorien für verschiedene Startpositionen des Teilchens. Die Testteilchen wurden an verschiedenen radialen Positionen jeweils knapp über der Scheibenoberfläche positioniert. Als Startbedingung wurde $\xi = 0{,}9$ verwendet: Für $\dot{M} = 10\dot{M}_E$ können wir bei großen Radien sicherlich auf das Modell dünner Akkretionsscheiben zurückgreifen, in welchem die Teilchen näherungsweise Kepler-Drehimpuls besitzen. Bei kleinen Radien rotieren die Teilchen im Rahmen des jetzt besser passenden *Slim-disc*-Modells ebenfalls nahezu mit Kepler-Drehimpuls (vgl. 3.1). Durch die Näherung einer dünnen Atmosphäre bleibt der Drehimpuls eines Teilchens nach dem Verlassen der Scheibe konstant. Für die gebundenen Bahnen bedeutet dies, daß die von außen einfallenden Teilchen wesentlich schneller rotieren als die Scheibe selbst. Dies kann nach dem Auftreffen zu einem dissipativen Effekt in der Scheibe führen – ein interessanter Gesichtspunkt, den wir hier aber nicht weiter verfolgen.

Für die gebundenen Bahnen des Systems, d. h. für auf die Scheibenoberfläche zurückfallende Teilchen ist der Startpunkt der jeweils radial äußere Schnittpunkt mit der Scheibenoberfläche. Ebenfalls eingezeichnet sind die Oberfläche der Akkretionsscheibe und die Bereiche positiver vertikaler Gesamtkraft. Da sich der Bereich positiver radialer Gesamtkraft für kleine Radien kaum davon unterscheidet, wurde er nicht eingezeichnet. Die Trajektorien zeigen uns mehrere interessante Eigenschaften des Systems.

- In den radial äußeren Gebieten, in denen vertikale Abstoßung stattfindet, ist aufgrund des geringen Drehimpulses und der radial attraktiven Kraft eine radiale Einwärtsdrift zu beobachten. Gleichzeitig steigt das Teilchen vertikal auf und erreicht den oben erwähnten „Kanal“ attraktiver vertikaler Gesamtkraft. Das zwingt das Teilchen, dem Verlauf des Kanals zurück zur Scheibe zu folgen. Die durchgezogene rote Linie und die gestrichelte türkise Linie zeigen dieses Verhalten sehr deutlich, die gestrichelte schwarze Linie zeigt ein ähnliches Verhalten. Das Teilchen startet bei größerem Radius s_0 und steigt daher im repulsiven vertikalen Feld weiter auf. Die radiale Einwärtsdrift wird wegen der zeitlich länger wirksamen radialen Beschleunigung so hoch, daß das Teilchen den Kanal bei kleinen Radien wieder verläßt. Durch die anschließende vertikale Beschleunigung weg von der Scheibe kann die gebundene Bahn zwar nicht verlassen werden, doch genügt der Effekt, das Teilchen direkt in das Zentralobjekt zu treiben.[4]

[4] Spätestens hier wären Korrekturen aufgrund der allgemeinen Relativitätstheorie nötig.

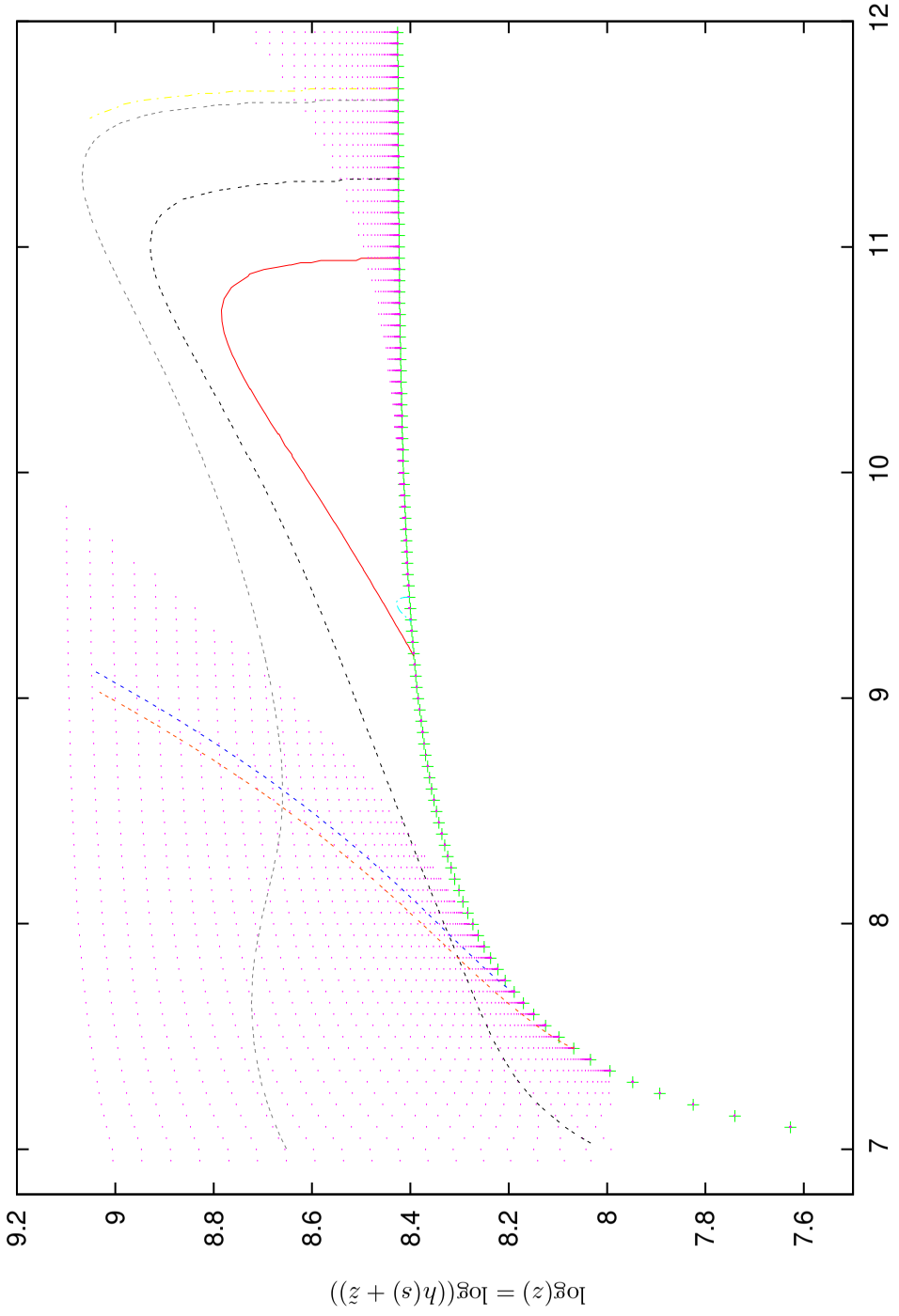


Abbildung 3.26: Trajektorien eines Testteilchens mit verschiedenen Startpunkten im Kraftfeld der Akkretionsscheibe. Das Teilchen startet mit $0{,}9$-fachem Kepler-Drehimpuls. Durchgezogene rote Linie, und gestrichelte schwarze, gelbe, hellblaue und türkise Linie: gebundene Bahn. Gestrichelte rote und dunkelblaue Linie: freie Bahn. Gepunktet sind die Bereiche vertikal repulsiver Kraft eingezeichnet, durch grüne Kreuze ist die Scheibenoberfläche gekennzeichnet

- Die hellblau und gelb gestrichelten Trajektorien beschreiben eine analoge Bahn. Die Rechnung für die gelbe Trajektorie bricht allerdings ab, da das Teilchen die Grenzen des Rechengebietes verläßt. Wir erwarten, daß das Teilchen in dem Kanal einen größeren Bogen beschreibt und schließlich wieder in den Bereich repulsiver radialer und vertikaler Kräfte gelangt. Interessant wäre herauszufinden, ob das Teilchen dabei genügend Beschleunigung erfährt, um das System verlassen zu können oder aber ähnlich der schwarzen Trajektorie in das Zentrum der Scheibe getrieben wird. Die Krümmung der hellblauen Trajektorie bei kleinen Radien läßt ein solches Verhalten vermuten. Dafür müßten wir allerdings den gesamten Aufbau der Atmosphäre verändern, was wir zwar im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr, aber in der Fortsetzung davon angehen wollen.

- Die rot und blau gestrichelten Trajektorien beschreiben ein gänzlich anderes Verhalten: Getrieben von den repulsiven Kräften sowohl in vertikaler, als auch in radialer Richtung wird das Testteilchen regelrecht aus dem System hinausgeschossen. Für die numerischen Rechnungen haben wir eine andere Teilchenmasse m_{TT} verwendet. Die Beschleunigung auf ein Testteilchen der Masse m_H ist nämlich so hoch, daß zur Erfüllung der Bedingung (1) (s. o.) die Zeitschritte so klein werden, daß die Berechnung wegen $s_{i+1} - s_i \approx 0$ und $\tilde{z}_{i+1} - \tilde{z}_i \approx 0$ einfriert. Da die Kräfte $F^{(s)}_{\mathrm{ges}}$, $F^{(\tilde{z})}_{\mathrm{ges}}$ aber für die Masse eines Wasserstoffatoms berechnet wurden, müssen wir den Zentrifugalterm mit dem Faktor m_H/m_{TT} skalieren.

  Für ein Teilchen der Masse $m_{\mathrm{TT}} = 10^{12} m_H$ ergeben sich beim Verlassen des Rechengebietes nach $t = 129\,\mathrm{s}$ Geschwindigkeiten von

  $$v^{(s)} = 1{,}04 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}, \qquad v^{(\tilde{z})} = 8{,}48 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

  Die Radialgeschwindigkeit ist nun größer als die Vertikalgeschwindigkeit, da ein nennenswerter Teil der radialen Beschleunigung bei größeren $\tilde{z}$ erfolgt. Hier kann das Teilchen „über die stark absorbierende Zentralregion blicken“ und ist somit der Strahlung der kompletten inneren Scheibenregion ausgesetzt. Wegen der großen Höhe ist die vertikale Komponente der resultierenden Strahlungsdruckkraft hier viel kleiner als die radiale Komponente.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir darauf hinweisen, daß die bisher erhaltenen Ergebnisse interessante Erklärungen für die durch Beobachtungen bekannte Entstehung von Jets in den inneren Regionen von Akkretionsscheiben bedeuten könnten. Zudem könnte auf diese Weise effektiv Drehimpuls aus der Akkretionsscheibe heraustransportiert werden. In unserer Berechnung schießen wir schwere Teilchen mit einem hohen Drehimpuls (0,9-facher Kepler-Drehimpuls) aus dem System hinaus. Gerade dieser Punkt ist in den Akkretionsscheibentheorien noch immer ein offenes Problem.

3.3 Das allgemeine Problem

Wir wollen schließlich eine allgemeine Distribution von Materie in einem System betrachten, d. h. eine allgemeine Dichte-, Emissions- und Absorptionsverteilung. Für dieses System wollen wir die resultierende Gesamtkraft auf ein Teilchen berechnen. Die Motivation für diesen Abschnitt ist das Szenario einer ausgedehnten Wolke aus Gas und Staub, aus welcher sich im Lauf der Zeit aufgrund von Gravitation und Drehimpuls eine Akkretionsscheibe entwickeln wird. Durch die frei werdende Energie, die viskosen Prozesse bei der Kontraktion und weitere einsetzende Prozesse kann bereits in dieser frühen Phase der Scheibe auch die Strahlung wichtig werden und ihren Entstehungsprozeß entscheidend verändern. Die Frage, wann und unter welchen Bedingungen die Strahlung wichtig wird, ist nichts

anderes als die Untersuchung des Eddington-Limits für Akkretionsscheiben, auch wenn es hier kaum mehr vergleichbar mit seiner ursprünglichen Definition für Sterne ist.

Bekanntermaßen ist die Lösung des Strahlungstransportproblems, noch dazu in drei Dimensionen, keine leichte Aufgabe. Wir verwenden daher folgende Näherung: Wir berechnen die Strahlungsdruckkraft auf ein Testteilchen durch Summation über die Beiträge aller Emissionsquellen der Verteilung unter der Annahme, daß die emittierenden Quellen untereinander im Gleichgewicht sind. Wir nehmen also an, daß die Auswirkungen der Emission einer Quelle auf die anderen Quellen in den Verteilungsfunktionen der Emissivität und des Absorptionsvermögens schon berücksichtigt sind.

Zunächst setzen wir das Teilchen in den Ursprung des Koordinatensystems – hier können wir bequem in Kugelkoordinaten die Gravitationskraft und die Strahlungsdruckkraft bestimmen. Wir wollen die Kräfteverhältnisse aber für alle Teilchen der Verteilung berechnen. Es ist klar, daß wir dann für die Kräfteberechnung eine Koordinatentransformation durchführen müssen. Am einfachsten geschieht dies, wenn beide Koordinatensysteme kartesische Koordinaten verwenden. Dies hat auch den Vorteil, daß für jedes Teilchen alle Gitterzellen gleich groß und gleich orientiert sind. In Kugelkoordinaten müßten wir für jede Teilchenposition die vorgegebene Verteilung erneut transformieren. Die Formulierung der Kräfte, v. a. der Strahlungsdruckkraft, in kartesischen Koordinaten ist jedoch nicht trivial.

Erschwerend kommt hinzu, daß als potentielle Anfangsverteilungen meist Akkretionsscheiben in einem frühen Stadium verwendet werden sollen. Diese Verteilungen liegen für gewöhnlich in diskretisierten Zylinderkoordinaten vor. Wir beschäftigen uns deshalb in Abschnitt 3.3.3 mit der Umrechnung des diskreten Gitters in Zylinderkoordinaten in ein diskretes kartesisches Gitter.

Wir weisen darauf hin, daß im Rahmen dieser Arbeit die theoretischen Grundlagen zur Behandlung dieses Problems geschaffen werden. Die numerische Lösung, realisiert z. B. in Fortran, soll im Anschluß an diese Arbeit in Angriff genommen werden. Eine Ausnahme bildet die Transformation des Zylinderkoordinatensystems, für welche in Abschnitt 3.3.3 erste Ergebnisse gezeigt werden.

Koordinatensysteme

Wir bezeichnen mit den Koordinaten X, Y, Z (bzw. R, Θ, Φ für Kugelkoordinaten und S, Φ, Z für Zylinderkoordinaten) das Koordinatensystem *KS*, in dem das Zentrum der Verteilung (das zukünftige Zentrum der Akkretionsscheibe) im Ursprung sitzt. Die Ausdehnung des Systems nehmen wir der einfacheren Berechnung wegen im kartesischen System mit $-X_0 \cdots + X_0$, $-Y_0 \cdots + Y_0$, $-Z_0 \cdots + Z_0$, im sphärischen System mit $R = 0 \ldots R_{\text{max}}$, $\Theta = 0 \ldots \pi$, $\Phi = 0 \ldots 2\pi$ an. Die Grenzen sind jeweils so gewählt, daß außerhalb des festgelegten Raumes keine Emission und keine gravitative Anziehung mehr erzeugt wird, die von diesen Punkten ausgehenden Kräfte also verschwinden. Sollte eine Umrechnung von sphärischen in kartesische Koordinaten (oder umgekehrt) nötig sein, so können die jeweils nicht definierten Bereiche einfach mit verschwindender Dichte und Emissivität aufgefüllt werden.

Entsprechend bezeichnen wir mit x, y, z (bzw. r, ϑ, φ für Kugelkoordinaten und s, φ, z für Zylinderkoordinaten) das Koordinatensystem *KS'*, in dem das Teilchen im Ursprung sitzt. Die Ausdehnung des dreidimensionalen Raumes läuft von $-x_0$ bis $+x_0$, entsprechend für die y- und z-Richtung. Wir legen die Achsen des Systems *KS'* parallel zu denen des Systems *KS*, so lassen sich die Transformationen des Gitters einfach durch Addition des Ortsvektors $\vec{X}_{\text{TT}}$ des Testteilchens im System *KS* berechnen. Für Kugelkoordinaten ist dies nicht nicht so einfach möglich. Hier sehen wir auch schon die erste Schwierigkeit der folgenden Berechnungen: Die auftretenden Kräfte lassen sich sehr viel einfacher in Kugelkoordinaten berechnen, jedoch ist ein Wechsel von *KS* zu *KS'* (oder umgekehrt) in Kugelkoordinaten ein enormer Aufwand: Aufgrund verschieden orientierter Gitterzellen und unterschiedlich großer Volumina der einzelnen Zellen in den diskreten, numerischen Berechnungen müssen hier gewichtete Mittelungen über die Dichte, die Emissivität und das Absorptionsvermögen erfolgen.

Wir leiten zunächst die Ausdrücke für die Kräfte im System *KS'* in Kugelkoordinaten ab und schreiben diese anschließend in kartesischen Koordinaten. Eine Transformation in das (kartesische) System *KS* ist dann problemlos möglich.

3.3.1 Kräfteberechnung im System *KS'*

Hier sitzt das Teilchen im Ursprung des Koordinatensystems, d. h. $\vec{x}_{\mathrm{TT}} = 0$. Die Masse des Testteilchens sei im folgenden m_{TT}.

3.3.1.1 Gravitationskraft

Wir berechnen die Gravitationskraft zunächst in Kugelkoordinaten. Im kontinuierlichen Fall ist sie durch

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{grav}}(\vec{0}) &= \int_{\mathrm{V}} d^3x\, G \cdot \frac{m_{\mathrm{TT}}\rho(\vec{x}) \cdot \vec{x}}{r^3} \\
&= m_{\mathrm{TT}}G \int_0^{r_{\max}} dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2 \sin\vartheta\, \frac{\rho(\vec{x})}{r^2} \cdot \vec{e}_r \\
&= m_{\mathrm{TT}}G \int_0^{r_{\max}} dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin\vartheta\, \rho(\vec{x}) \cdot \vec{e}_r \\
&= m_{\mathrm{TT}}G \int_0^{r_{\max}} dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin\vartheta\, \rho(\vec{x}) \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\
&= m_{\mathrm{TT}}G \int_0^{r_{\max}} dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho(\vec{x}) \cdot \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ 1/2\sin(2\vartheta) \end{pmatrix} \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

gegeben. Die Kraft $\vec{F}_{\mathrm{grav}}(\vec{0})$ entspricht in der Spaltenvektordarstellung natürlich auch wieder kartesischen Koordinaten. Gehen wir zum diskreten Fall über, erfordert dies eine Zerlegung des Gitters. Wir setzen $\delta r = r_{\max}/N_r$, $\delta\vartheta = \pi/N_\vartheta$ und $\delta\varphi = 2\pi/N_\varphi$. Dann erhalten wir für die Gravitationskraft:

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_{\mathrm{grav}}(\vec{0}) = \\
&\qquad m_{\mathrm{TT}}G \sum_{k=1}^{N_r} \delta r \sum_{j=0}^{N_\vartheta} \delta\vartheta \sum_{i=1}^{N_\varphi} \delta\varphi\, \rho(k\,\delta_r, j\,\delta\vartheta, i\,\delta\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \sin^2(j\,\delta\vartheta)\cos(i\,\delta\varphi) \\ \sin^2(j\,\delta\vartheta)\sin(i\,\delta\varphi) \\ 1/2\sin(2j\,\delta\vartheta) \end{pmatrix} \qquad (3.3.2)
\end{aligned}$$

Die Summationsreichweite für die radiale Richtung von $k = 1$ an begründet sich dadurch, daß $k = 0$ den Ort des Teilchens beschreibt. In azimutaler Richtung entspricht $i = 0$ dem Wert $i = N_\varphi$, so daß wir mit einer Summation ab $i = 1$ die doppelte Zählung der Zellen mit $\varphi = 0 = 2\pi$ vermeiden.

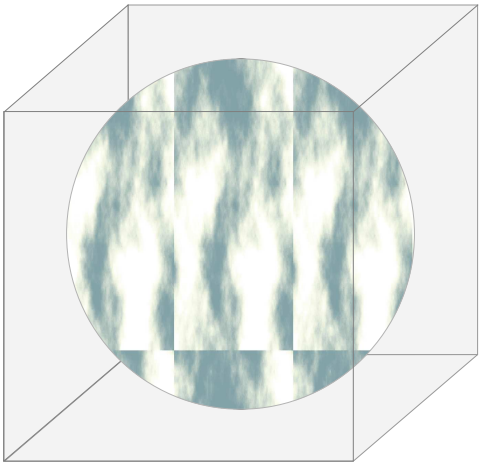


Abbildung 3.27: Skizze der in einen Würfel eingesperrten Kugel

In kartesischen Koordinaten schreibt sich die Gravitationskraft im kontinuierlichen Fall als

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{grav}}(\vec{0}) &= \int_{\text{V}} d^3x\, G \cdot \frac{m_{\text{TT}}\rho(\vec{x}) \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \\
&= m_{\text{TT}}G \int_{-x_0}^{+x_0} dx \int_{-y_0}^{+y_0} dy \int_{-z_0}^{+z_0} dz \cdot \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x}|^3} \cdot \vec{x} \\
&= m_{\text{TT}}G \int_{-x_0}^{+x_0} dx \int_{-y_0}^{+y_0} dy \int_{-z_0}^{+z_0} dz \cdot \frac{\rho(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

wobei wir das Volumenintegral über die Kugel mit Radius r_{max} durch ein Volumenintegral über einen Würfel ersetzt haben. Die zusätzlichen Bereiche des Würfels (vgl. Abb. 3.27) werden mit $\rho = 0$ aufgefüllt. Im diskreten Fall ergibt dies mit $\delta x = x_0/N_x$, $\delta y = y_0/N_y$, $\delta z = z_0/N_z$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{grav}}(\vec{0}) &= m_{\text{TT}}G \sum_{k_x=-N_x}^{N_x} \delta x \sum_{k_y=-N_y}^{N_y} \delta y \sum_{k_z=-N_z}^{N_z} \delta z \cdot \rho(k_x\,\delta x, k_y\,\delta y, k_z\,\delta z) \\
&\quad \cdot \frac{1}{\left((k_x\,\delta x)^2 + (k_y\,\delta y)^2 + (k_z\,\delta z)^2\right)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} k_x\,\delta x \\ k_y\,\delta y \\ k_z\,\delta z \end{pmatrix}. \qquad (3.3.4)
\end{aligned}$$

Hier muß derjenige Summationspunkt $(k_x, k_y, k_z) = (0, 0, 0)$ ausgeschlossen werden, an dem sich das Teilchen selbst befindet.

3.3.1.2 Strahlungsdruckkraft

Der Ausgangspunkt ist der allgemeine Ansatz

$$F_{\text{rad}}(\vec{0}) = -\frac{\kappa(\vec{0}) \cdot m_{\text{TT}}}{c} \cdot I(\vec{0}),$$

wobei $I(\vec{0})$ die Intensität am Ort des Teilchens darstellt. Diese erhält man durch Lösung der Strahlungstransportgleichung in oben beschriebener Näherung. Wir beginnen mit einem sphärischen Koordinatensystem, um die vektorielle Kraft pro Raumwinkel zu bestimmen:

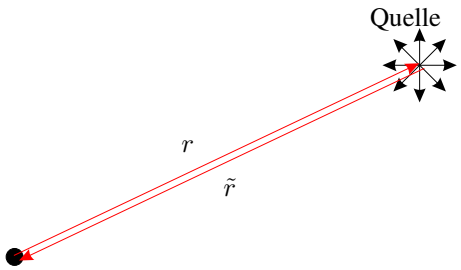


Abbildung 3.28: Skizze zum Strahlungstransport

$$\vec{F}_{\text{rad},d\Omega}(\vec{0}) = -\frac{\kappa(\vec{0}) \cdot m_{\text{TT}}}{c} \cdot \vec{e}_r \; I(0,\vartheta,\varphi)$$

Das Minuszeichen rührt daher, daß die Strahlungsdruckkraft abstoßend, also antiparallel zum Verbindungsvektor von Testteilchen und Strahlungsquelle wirkt. Wir berücksichtigen, daß die Intensität I eine über die Frequenz ν integrierte Größe ist. Dies gilt auch für den Absorptionskoeffizienten am Ort des Testteilchens:

$$\vec{F}_{\text{rad},d\Omega}(\vec{0}) = -\frac{m_{\text{TT}}}{c} \cdot \vec{e}_r \int_0^\infty \kappa_\nu(\vec{0}) I_\nu(0,\vartheta,\varphi) d\nu$$

Die Gesamtkraft erhalten wir durch Integration über alle Raumwinkel:

$$\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{0}) = \int_{4\pi} \vec{F}_{\text{rad},d\Omega}(\vec{0}) \; d\Omega = -\frac{m_{\text{TT}}}{c} \int_{4\pi} d\Omega \; \vec{e}_r \int_0^\infty \kappa_\nu(\vec{0}) I_\nu(0,\vartheta,\varphi) d\nu$$

Die Intensität $I_\nu(0,\vartheta,\varphi)$ ergibt sich aus der Strahlungstransportgleichung:

$$dI_\nu(r,\vartheta,\varphi) = \varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi)dr - m_{\text{TT}}\kappa_\nu(r,\vartheta,\varphi) I_\nu(r,\vartheta,\varphi) dr$$

Es ist zu beachten, daß κ_ν aufgrund der bisherigen Schreibweise in der Arbeit der Massenabsorptionskoeffizient ist, während in der Strahlungstransportgleichung für gewöhnlich der Linienabsorptionskoeffizient mit κ_ν bezeichnet wird. Wir müssen daher die Teilchenmasse m_{TT} als zusätzlichen Faktor mitführen.

Betrachten wir einen Punkt mit den Koordinaten $r_1,\vartheta_1,\varphi_1$ und berechnen die Intensität, die von diesem Punkt aus am Ort des Testteilchen wirkt, so müssen wir im Koordinatensystem *KS'* die Integration wie folgt ausführen:

$$I_\nu(0,\vartheta_1,\varphi_1) = \int_{r_1}^0 d\tilde{r} \left(\varepsilon_\nu(\tilde{r},\vartheta_1,\varphi_1) - m_{\text{TT}}\kappa_\nu(\tilde{r},\vartheta_1,\varphi_1) I_\nu(\tilde{r},\vartheta_1,\varphi_1) \right)$$

Wegen $d\tilde{r} = -dr$ (vgl. Abb. 3.28) entspricht dies

$$I_\nu(0,\vartheta_1,\varphi_1) = \int_0^{r_1} dr \left(\varepsilon_\nu(r,\vartheta_1,\varphi_1) - m_{\text{TT}}\kappa_\nu(r,\vartheta_1,\varphi_1) I_\nu(r,\vartheta_1,\varphi_1) \right) .$$

Diese Gleichung wird (nun wieder allgemein) gelöst durch

$$\begin{aligned} I_\nu(0,\vartheta,\varphi) \;\; = \;\; & \int_0^{r_{\max}} \varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi) \cdot \exp\left\{ -m_{\text{TT}} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi) dr' \right\} dr \\ & + I_\nu(r_{\max},\vartheta,\varphi) \exp\left\{ -m_{\text{TT}} \int_0^{r_{\max}} \kappa_\nu(r,\vartheta,\varphi) dr \right\} . \end{aligned}$$

Wählen wir nun einfach $r_{\max}$ so, daß für $r \geq r_{\max}$ die Emissivität für alle Frequenzen und für alle Raumwinkel verschwindet, so ist $I_\nu(r_{\max},\vartheta,\varphi) = 0$ und wir erhalten

$$I_\nu(0,\vartheta,\varphi) = \int_0^{r_{\max}} \varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi) \cdot \exp\left\{-m_{\mathrm{TT}} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi) dr'\right\} dr\,.$$

Für die Strahlungsdruckkraft ergibt dies

$$\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{0}) = -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c} \int_{4\pi} d\Omega\, \vec{e}_r \int_0^\infty d\nu\, \kappa_\nu(\vec{0}) \int_0^{r_{\max}} dr\, \varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi) \cdot \exp\left\{-m_{\mathrm{TT}} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi) dr'\right\}.$$

Da der Einheitsvektor in radialer Richtung nicht von r abhängt, können wir ihn unter das Integral ziehen. Gleiches gilt für den Absorptionskoeffizienten am Ort des Teilchens. Zudem lassen sich die Integrationen in ν und r vertauschen. Mit $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{0}) &= -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_{\max}} dr \int_0^\infty d\nu\, \sin\vartheta\, \vec{e}_r\, \kappa_\nu(\vec{0}) \cdot \varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi) \\
&\qquad \cdot \exp\left\{-m_{\mathrm{TT}} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi) dr'\right\} \\
&= -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_{\max}} dr \int_0^\infty d\nu \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ 1/2\sin(2\vartheta) \end{pmatrix} \kappa_\nu(\vec{0}) \cdot \varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi) \\
&\qquad \cdot \exp\left\{-m_{\mathrm{TT}} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi) dr'\right\}\,. \qquad (3.3.5)
\end{aligned}$$

Im diskreten Fall betrachten wir auch in ν diskretisierte Werte der Emissivität und des Absorptionsvermögens. Wir nehmen an, es gibt ein $\nu_{\min}$ und ein $\nu_{\max}$, so daß für $\nu < \nu_{\min}$ und $\nu > \nu_{\max}$ keine oder nur vernachlässigbare Emission stattfindet. Dann ist $\delta\nu = (\nu_{\max} - \nu_{\min})/N_\nu$. Dies ergibt mit obiger Zerlegung des Gitters

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{0}) &= -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c} \sum_{j=0}^{N_\vartheta} \delta\vartheta \sum_{i=1}^{N_\varphi} \delta\varphi \sum_{k=1}^{N_r} \delta r \sum_{l=0}^{N_\nu} \delta\nu \begin{pmatrix} \sin^2(j\,\delta\vartheta)\cos(i\,\delta\varphi) \\ \sin^2(j\,\delta\vartheta)\sin(i\,\delta\varphi) \\ 1/2\sin(2j\,\delta\vartheta) \end{pmatrix} \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta\nu}(\vec{0}) \\
&\qquad \cdot\varepsilon_{\nu_{\min}+l\,\delta\nu}(k\,\delta r, j\,\delta\vartheta, i\,\delta\varphi) \exp\left\{-m_{\mathrm{TT}} \sum_{k'=1}^{k} \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta\nu}(k'\,\delta r, j\,\delta\vartheta, i\,\delta\varphi)\,\delta r\right\}\,. \qquad (3.3.6)
\end{aligned}$$

Die Diskussion zur Festlegung der Summationsgrenzen ist dieselbe wie im Fall der Gravitationskraft in Abschnitt 3.3.1.1. Die Schwierigkeit besteht nun darin, den kontinuierlichen und den diskreten Fall in kartesischen Koordinaten auszudrücken. Wir betrachten zunächst den kontinuierlichen Fall:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{0}) &= -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c} \overbrace{\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_{\max}} dr\, r^2 \sin\vartheta}^{(1)} \int_0^\infty d\nu\, \frac{\vec{e}_r}{r^2}\, \kappa_\nu(\vec{0}) \cdot \varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi) \\
&\qquad \cdot \exp\left\{-m_{\mathrm{TT}} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi) dr'\right\}\,.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck (1) entspricht dem Integral über das Volumen der Kugel. Dies können wir wie zuvor in Abschnitt 3.3.1.1 durch das Integral über einen Würfel in kartesischen Koordinaten setzen, dessen zusätzlichen Bereiche (siehe Abb. 3.27) mit $\varepsilon_\nu = \kappa_\nu = 0$ aufgefüllt werden.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{0}) &= -\frac{m_{\text{TT}}}{c}\int_V dV \int_0^\infty d\nu\, \frac{\vec{e}_r}{r^2}\,\kappa_\nu(\vec{0})\cdot\varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi)\cdot\exp\left\{-m_{\text{TT}}\int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi)dr'\right\}\\ &= -\frac{m_{\text{TT}}}{c}\int_{-x_0}^{+x_0} dx\int_{-y_0}^{+y_0} dy\int_{-z_0}^{+z_0} dz\int_0^\infty d\nu\,\frac{\vec{e}_r\cdot\kappa_\nu(\vec{0})\cdot\varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi)}{(x^2+y^2+z^2)}\\ &\qquad\cdot\exp\left\{-m_{\text{TT}}\int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi)dr'\right\}\end{aligned}$$

Nun müssen nur noch der Einheitsvektor $\vec{e}_r$, die Emissivität und das innere Integral längs des radialen Linienelements in kartesischen Koordinaten formuliert werden. Dazu benötigen wir folgende Umrechnungen:

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \tan\varphi = \frac{y}{x},\quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.3.7}$$

Das Linienelement in radialer Richtung ist

$$dr' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)\ .$$

Da für die innere radiale Integration die Winkel ϑ und φ in Kugelkoordinaten als konstant vorgegeben sind, können wir uns auch in kartesischen Koordinaten für eine der drei Variablen x, y, z als Integrationsvariable entscheiden und die anderen beiden Variablen entsprechend parametrisieren. Dabei müssen jedoch Integrationen in speziellen Richtungen gesondert behandelt werden. Wir verwenden zunächst x' als Integrationsvariable. In diesem Fall ist x, also die durch das äußere Integral festgelegte Größe, die obere Integrationsgrenze. Für den Fall $x \neq 0$ und y, z beliebig gilt dann mit (3.3.7)

$$\begin{aligned} y = \tan\varphi\cdot x \quad &\Longrightarrow\quad dy = \tan\varphi\cdot dx\,,\\ z = \frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\tan\vartheta}\cdot x \quad &\Longrightarrow\quad dz = \frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\tan\vartheta}\cdot dx\,,\\ r = \sqrt{1+\tan^2\varphi+\frac{1+\tan^2\varphi}{\tan^2\vartheta}}\cdot x \quad &\Longrightarrow\quad dr = \sqrt{1+\tan^2\varphi+\frac{1+\tan^2\varphi}{\tan^2\vartheta}}\cdot dx\,. \end{aligned}$$

Für die innere Integration folgt dann wegen $\varphi = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$

$$\begin{aligned}\int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi)dr' &= \int_0^x \kappa_\nu\left(x',\tan\varphi\cdot x',\frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\tan\vartheta}\cdot x'\right)\\ &\qquad\cdot\sqrt{1+\tan^2\varphi+\frac{1+\tan^2\varphi}{\tan^2\vartheta}}\,dx'\\ &= \sqrt{1+\tan^2\varphi+\frac{1+\tan^2\varphi}{\tan^2\vartheta}}\\ &\qquad\cdot\int_0^x \kappa_\nu\left(x',\tan\varphi\cdot x',\frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\tan\vartheta}\cdot x'\right)dx'\,.\end{aligned}$$

Das Zeichen $\oint$ ist eine Abkürzung für

$$\oint_a^b f(c)\,dc = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(c)\,dc & a < b \\ \displaystyle -\int_a^b f(c)\,dc = \int_b^a f(c)\,dc & a > b \end{cases}$$

und hier notwendig, da für radiale Integrationswege immer $r \geq 0$ gilt. Wir verwenden (3.3.7):

$$\begin{aligned} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\varphi)dr' &= \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{1+y^2/x^2}{\sin^2\vartheta/\cos^2\vartheta}}\cdot\oint_0^x \kappa_\nu\left(x',\frac{y}{x}\cdot x',\frac{z}{x}\cdot x'\right)\,dx' \\ &= \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{(1+y^2/x^2)\,z^2/r^2}{(1-z^2/r^2)}}\cdot\oint_0^x \kappa_\nu\left(x',\frac{y}{x}\cdot x',\frac{z}{x}\cdot x'\right)\,dx' \\ &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}+\frac{(x^2+y^2)\,z^2/r^2}{x^2\,(r^2-z^2)/r^2}}\cdot\oint_0^x \kappa_\nu\left(x',\frac{y}{x}\cdot x',\frac{z}{x}\cdot x'\right)\,dx' \\ &= \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2}}\cdot\oint_0^x \kappa_\nu\left(x',\frac{y}{x}\cdot x',\frac{z}{x}\cdot x'\right)\,dx' \end{aligned}$$

Für die Strahlungsdruckkraft ergibt sich dann im kontinuierlichen Fall mit

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{rad}}(\vec{0}) &= -\frac{m_{\text{TT}}}{c}\int_{-x_0}^{+x_0}dx\int_{-y_0}^{+y_0}dy\int_{-z_0}^{+z_0}dz\int_0^\infty d\nu\,\frac{\kappa_\nu(\vec{0})\cdot\varepsilon_\nu\,(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &\quad\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\exp\left\{-m_{\text{TT}}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2}}\cdot\oint_0^x \kappa_\nu\left(x',\frac{y}{x}\cdot x',\frac{z}{x}\cdot x'\right)\,dx'\right\} \end{aligned} \tag{3.8a}$$

Wie bereits erwähnt, läßt sich dies nur unter der Einschränkung $x \neq 0$ angeben. Für den Fall $x = 0$ liegt der radiale Integrationsweg in der y-z-Ebene. Deshalb können wir für den Fall $x = 0$, $y \neq 0$ und z beliebig die Variable y' als Integrationsvariable wählen:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{\tan\vartheta}\cdot y \quad &\Longrightarrow \quad dz = \frac{1}{\tan\vartheta}\cdot dy \\ r = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\vartheta}}\cdot y \quad &\Longrightarrow \quad dr = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\vartheta}}\cdot dy \end{aligned}$$

Wegen $x = 0$ ist $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, und die innere Integration läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \int_0^r \kappa_\nu(r',\vartheta,\pi/2)dr' &= \sqrt{1+\frac{z^2}{y^2}}\cdot\oint_0^y \kappa_\nu\left(0,y',\frac{z}{y}\cdot y'\right)\,dy' \\ &= \sqrt{\frac{y^2+z^2}{y^2}}\cdot\oint_0^y \kappa_\nu\left(0,y',\frac{z}{y}\cdot y'\right)\,dy'\,. \end{aligned}$$

Damit wird die Strahlungsdruckkraft zu

$$\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{0}) = -\frac{m_{\text{TT}}}{c}\int_{-x_0}^{+x_0} dx\,\delta(x,0)\int_{-y_0}^{+y_0} dy\int_{-z_0}^{+z_0} dz\int_0^{\infty} d\nu\,\frac{\kappa_\nu(\vec{0})\cdot\varepsilon_\nu(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\exp\left\{-m_{\text{TT}}\sqrt{\frac{y^2+z^2}{y^2}}\cdot\not\int_0^y \kappa_\nu\left(x,y',\frac{z}{y}\cdot y'\right)\,dy'\right\}. \tag{3.8b}$$

Hierbei bezeichnet $\delta(x,0)$ die Kronecker-Delta-Funktion $\delta(0)$ für die Variable x.

Schließlich betrachten wir noch den Fall $x = y = 0$ und $z \neq 0$ – also die Integration längs der z-Achse. Hier ist einfach

$$r = z \quad\Longrightarrow\quad dr = dz\,.$$

Dabei ist $\vartheta = 0$; dagegen ist φ nicht definiert, wir können daher o. B. d. A. $\varphi = \pi/2$ setzen. Wir erhalten

$$\int_0^r \kappa_\nu(r',0,\pi/2)dr' = \not\int_0^z \kappa_\nu\left(0,0,z'\right)\,dz'$$

und damit für die Strahlungsdruckkraft

$$\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{0}) = -\frac{m_{\text{TT}}}{c}\int_{-x_0}^{+x_0} dx\,\delta(x,0)\int_{-y_0}^{+y_0} dy\,\delta(y,0)\int_{-z_0}^{+z_0} dz\int_0^{\infty} d\nu\,\frac{\kappa_\nu(\vec{0})\cdot\varepsilon_\nu(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\exp\left\{-m_{\text{TT}}\not\int_0^z \kappa_\nu\left(x,y,z'\right)\,dz'\right\}. \tag{3.8c}$$

Den Fall $x = y = z = 0$ müssen wir nicht betrachten, denn an diesem Ort befindet sich unser Testteilchen.

Nun wollen wir zum diskreten Fall übergehen. Wir zerlegen das Gitter wie in Abschnitt 3.3.1.1. Wir benötigen noch $k_{x,\text{TT}} = k_{y,\text{TT}} = k_{z,\text{TT}} = 0$ und erhalten für den Fall $k_x \neq k_{x,\text{TT}}$, k_y, k_z beliebig:

$$\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{0}) = -\frac{m_{\text{TT}}}{c}\sum_{\substack{k_x=-N_x\\ k_x\neq k_{x,\text{TT}}}}^{N_x}\delta x\sum_{k_y=-N_y}^{N_y}\delta y\sum_{k_z=-N_z}^{N_z}\delta z\sum_{l=0}^{N_\nu}\delta\nu\;\kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}(\vec{0})\cdot\begin{pmatrix} k_x\,\delta x\\ k_y\,\delta y\\ k_z\,\delta z\end{pmatrix} \cdot\frac{\varepsilon_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}(k_x\,\delta x,k_y\,\delta y,k_z\,\delta z)}{((k_x\,\delta x)^2+(k_y\,\delta y)^2+(k_z\,\delta z)^2)^{3/2}} \cdot\exp\left\{-m_{\text{TT}}\sqrt{\frac{(k_x\,\delta x)^2+(k_y\,\delta y)^2+(k_z\,\delta z)^2}{(k_x\,\delta x)^2}} \cdot\sum_{k'_x=k_{x,\text{TT}}\pm1}^{k_x}\kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\left(k'_x\,\delta x,\frac{k_y\,\delta y}{k_x\,\delta x}\cdot(k'_x\,\delta x),\frac{k_z\,\delta z}{k_x\,\delta x}\cdot(k'_x\,\delta x)\right)\delta x\right\} \tag{3.9a}$$

Das Zeichen $\sum$ entspricht wie $\not\int$ einer positiven Summation, unabhängig davon ob $k_{x,\text{TT}}$ kleiner oder größer als k_x ist. Die Summation beginnt bei $k_{x,\text{TT}}+1$ für $k_{x,\text{TT}} < k_x$ und bei $k_{x,\text{TT}}-1$ für $k_{x,\text{TT}} > k_x$.

Der zweite Fall $k_x = k_{x,\mathrm{TT}}$, $k_y \neq k_{y,\mathrm{TT}}$ und k_z beliebig ergibt

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{0}) &= -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c}\,\delta x \sum_{\substack{k_y=-N_y\\ k_y\neq k_{y,\mathrm{TT}}}}^{N_y} \delta y \sum_{k_z=-N_z}^{N_z} \delta z \sum_{l=0}^{N_\nu} \delta\nu\; \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}(\vec{0}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k_y\,\delta y \\ k_z\,\delta z \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{\varepsilon_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\,(0,k_y\,\delta y, k_z\,\delta z)}{((k_y\,\delta y)^2+(k_z\,\delta z)^2)^{3/2}} \cdot \exp\left\{ -m_{\mathrm{TT}} \sqrt{\frac{(k_y\,\delta y)^2+(k_z\,\delta z)^2}{(k_y\,\delta y)^2}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{k_y'=k_{y,\mathrm{TT}}\pm 1}^{k_y} \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\left(0, k_y'\,\delta y, \frac{k_z\,\delta z}{k_y\,\delta y}\cdot(k_y'\,\delta y)\right)\,\delta y \right\}. \end{aligned} \tag{3.9b}$$

Für den letzten Fall $k_x = k_{x,\mathrm{TT}}$, $k_y = k_{y,\mathrm{TT}}$, $k_z \neq k_{z,\mathrm{TT}}$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{0}) &= -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c}\,\delta x\,\delta y \sum_{\substack{k_z=-N_z\\ k_z\neq k_{z,\mathrm{TT}}}}^{N_z} \delta z \sum_{l=0}^{N_\nu} \delta\nu\; \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}(\vec{0}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z\,\delta z \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{\varepsilon_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\,(0,0,k_z\,\delta z)}{|k_z\,\delta z|^3} \cdot \exp\left\{ -m_{\mathrm{TT}} \sum_{k_z'=k_{z,\mathrm{TT}}\pm 1}^{k_z} \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\left(0,0,k_z'\,\delta z\right)\,\delta z \right\}. \end{aligned} \tag{3.9c}$$

3.3.1.3 Zentrifugalkraft

Die Berechnung der Zentrifugalkraft unterscheidet sich grundlegend von den ersten beiden Kräften. Im allgemeinen werden die Teilchen um das potentielle Zentrum des Systems rotieren. So ist es einfacher, die Zentrifugalkraft im System *KS* zu berechnen, in dem das Rotationszentrum im Ursprung liegt. Da letztendlich alle Kräfte in *KS* verglichen werden, genügt dies auch. In Abschnitt 3.3.2.1 werden diese Berechnungen durchgeführt.

3.3.2 Kräfteberechnung im System *KS*

In diesem Koordinatensystem besitzt das Testteilchen den Ortsvektor $\vec{X}_{\mathrm{TT}}$. Wir zerlegen das kartesische Gitter gemäß

$$\Delta X = \frac{X_0}{N_X},\ \Delta Y = \frac{Y_0}{N_Y},\ \Delta Z = \frac{Z_0}{N_Z}$$

und das Gitter in Kugelkoordinaten gemäß

$$\Delta R = \frac{R_{\max}}{N_R},\ \Delta\Theta = \frac{\pi}{N_\Theta},\ \Delta\Phi = \frac{2\pi}{N_\Phi}\,.$$

3.3.2.1 Zentrifugalkraft

Allgemein ist die Zentrifugalkraft gegeben durch

$$\vec{F}_{\text{zent}} = m_{\text{TT}} \cdot \vec{a}_{\text{zent}} = m_{\text{TT}} \cdot \left| \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) \right| ,$$

wobei $\vec{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens ist. Betrachten wir eine beliebig vorgegebene Geschwindigkeit $\vec{V}_{\text{TT}}$. In Kugelkoordinaten ausgedrückt ist sie durch

$$\vec{V}_{\text{TT}} = V_R \cdot \vec{e}_R + R\, V_\Theta \cdot \vec{e}_\Theta + R \sin\Theta\, V_\Phi \cdot \vec{e}_\Phi$$

gegeben, wobei die Geschwindigkeitsanteile V_Θ und V_Φ mit Skalenfaktoren multipliziert werden. V_Θ und V_Φ sind somit in der Einheit rad/s anzugeben.

Mit der Definition der Zentrifugalkraft, den Eigenschaften des Orthogonalsystems der Kugelkoordinaten und der Beziehung $V = \Omega \cdot R$ für Geschwindigkeitsanteile senkrecht zur radialen Richtung erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{\text{zent}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= \frac{m_{\text{TT}}}{R} \cdot \left(R^2 V_\Theta^2 + (R \sin\Theta)^2 V_\Phi^2 \right) \\ &= m_{\text{TT}} R \cdot \left(V_\Theta^2 + \sin^2\Theta\, V_\Phi^2 \right) . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Für den Übergang vom kontinuierlichen Fall zum Gitter diskretisieren wir noch die Geschwindigkeit mittels der Einführung diskreter Zeitschritte ΔT und kürzen $\Delta K_{\text{TT}}/\Delta T$ mit $\tilde{K}_{\text{TT}}$ ab (analoges gilt für J_{TT}, I_{TT}). Mit $\vec{X}_{\text{TT}} = (K_{\text{TT}} \cdot \Delta R, J_{\text{TT}} \cdot \Delta\Theta, I_{\text{TT}} \cdot \Delta\Phi)$ gilt

$$\vec{V}_{\text{TT}} = (\Delta R\, \tilde{K}_{\text{TT}})\, \vec{e}_R + (\Delta R\, K_{\text{TT}}) \cdot (\Delta\Theta\, \tilde{J}_{\text{TT}})\, \vec{e}_\Theta + (\Delta R\, K_{\text{TT}}) \cdot \sin(\Delta\Theta\, J_{\text{TT}}) \cdot (\Delta\Phi\, \tilde{I}_{\text{TT}})\, \vec{e}_\Phi .$$

Hierbei haben wir schon beachtet, daß $\Delta\Theta$ und $\Delta\Phi$ aus der Zerlegung des Gitters in Kugelkoordinaten stammen und daher noch mit den entsprechenden Skalenfaktoren multipliziert werden müssen. Für die Zentrifugalkraft gilt dann

$$F_{\text{zent}}(\vec{X}_{\text{TT}}) = m_{\text{TT}}(K_{\text{TT}} \cdot \Delta R) \cdot \left((\Delta\Theta\, \tilde{J}_{\text{TT}})^2 + \sin^2(J_{\text{TT}} \cdot \Delta\Theta) \cdot (\Delta\Phi\, \tilde{I}_{\text{TT}})^2 \right) . \tag{3.11}$$

Falls sich das Testteilchen direkt im Ursprung aufhält ($K_{\text{TT}} = 0$), verschwindet die Zentrifugalkraft – der Grenzfall ist hier also enthalten und muß nicht getrennt betrachtet werden.

Um die Zentrifugalkraft in kartesischen Koordinaten anzugeben, verwenden wir

$$\vec{e}_R = \begin{pmatrix} \cos\Phi\, \sin\Theta \\ \sin\Phi\, \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\Theta = \begin{pmatrix} \cos\Phi\, \cos\Theta \\ \sin\Phi\, \cos\Theta \\ -\sin\Theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\Phi = \begin{pmatrix} -\sin\Phi \\ \cos\Phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

zusammen mit $\vec{V}_{\text{TT}} = V_R \cdot \vec{e}_R + R\, V_\Theta \cdot \vec{e}_\Theta + R \sin\Theta\, V_\Phi \cdot \vec{e}_\Phi$ und erhalten nach Umformen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} V_R &= V_X \cos\Phi \sin\Theta + V_Y \sin\Phi \sin\Theta + V_Z \cos\Theta = \frac{V_X X + V_Y Y + V_Z Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} , \\ V_\Theta &= \frac{1}{R} \left(V_X \cos\Phi \cos\Theta + V_Y \sin\Phi \cos\Theta - V_Z \sin\Theta \right) = \frac{V_X XZ + V_Y YZ - V_Z(X^2 + Y^2)}{(X^2 + Y^2 + Z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} , \\ V_\Phi &= \frac{1}{R \sin\Theta} \left(-V_X \sin\Phi + V_Y \cos\Phi \right) = \frac{-V_X Y + V_Y X}{X^2 + Y^2} . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Zentrifugalkraft im kontinuierlichen Fall

$$\begin{aligned} F_{\text{zent}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= m_{\text{TT}}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ &\quad \cdot\left(\frac{\left(V_X XZ + V_Y YZ - V_Z(X^2+Y^2)\right)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2(X^2+Y^2)} + \frac{X^2+Y^2}{X^2+Y^2+Z^2}\frac{(-YV_X+XV_Y)^2}{(X^2+Y^2)^2}\right) \\ &= m_{\text{TT}}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ &\quad \cdot\left(\frac{\left(V_X XZ + V_Y YZ - V_Z(X^2+Y^2)\right)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2(X^2+Y^2)} + \frac{(-YV_X+XV_Y)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)(X^2+Y^2)}\right) \\ &= m_{\text{TT}}\cdot\left(\frac{X^2(V_Y^2+V_Z^2)+Y^2(V_X^2+V_Z^2)+Z^2(V_X^2+V_Y^2)}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}}\right. \\ &\qquad \left. -2\frac{YZV_YV_Z+XYV_XV_Y+XZV_XV_Z}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

und im diskreten Fall mit

$$V_X = \Delta X\frac{\Delta K_{X,\text{TT}}}{\Delta t} = \Delta X\cdot\tilde{K}_{X,\text{TT}}, \qquad V_Y = \Delta Y\cdot\tilde{K}_{Y,\text{TT}}, \qquad V_Z = \Delta Z\cdot\tilde{K}_{Z,\text{TT}}$$

schließlich

$$\begin{aligned} F_{\text{zent}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= m_{\text{TT}}\cdot\Big[(K_{X,\text{TT}}\cdot\Delta X)^2\left((\Delta Y\cdot\tilde{K}_{Y,\text{TT}})^2+(\Delta Z\cdot\tilde{K}_{Z,\text{TT}})^2\right) \\ &\qquad +(K_{Y,\text{TT}}\cdot\Delta Y)^2\left((\Delta X\cdot\tilde{K}_{X,\text{TT}})^2+(\Delta Z\cdot\tilde{K}_{Z,\text{TT}})^2\right) \\ &\qquad +(K_{Z,\text{TT}}\cdot\Delta Z)^2\left((\Delta X\cdot\tilde{K}_{X,\text{TT}})^2+(\Delta Y\cdot\tilde{K}_{Y,\text{TT}})^2\right) \\ &\qquad -2\Big((K_{Y,\text{TT}}\cdot\Delta Y)(K_{Z,\text{TT}}\cdot\Delta Z)(\Delta Y\cdot\tilde{K}_{Y,\text{TT}})(\Delta Z\cdot\tilde{K}_{Z,\text{TT}}) \\ &\qquad +(K_{X,\text{TT}}\cdot\Delta X)(K_{Y,\text{TT}}\cdot\Delta Y)(\Delta X\cdot\tilde{K}_{X,\text{TT}})(\Delta Y\cdot\tilde{K}_{Y,\text{TT}}) \\ &\qquad +(K_{X,\text{TT}}\cdot\Delta X)(K_{Z,\text{TT}}\cdot\Delta Z)(\Delta X\cdot\tilde{K}_{X,\text{TT}})(\Delta Z\cdot\tilde{K}_{Z,\text{TT}})\Big)\Big] \\ &\quad\cdot\left((K_{X,\text{TT}}\cdot\Delta X)^2+(K_{Y,\text{TT}}\cdot\Delta Y)^2+(K_{Z,\text{TT}}\cdot\Delta Z)^2\right)^{-3/2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Im kartesischen System ist die Zentrifugalkraft nur für $\vec{X}_{\text{TT}} \neq 0$ definiert. Um die vektorielle Größe zu erhalten, muß $F_{\text{zen}}(\vec{X}_{\text{TT}})$ noch mit dem Einheitsvektor in Richtung des Teilchens, $\vec{e}_{\text{TT}} = \vec{X}_{\text{TT}}/|\vec{X}_{\text{TT}}|$, multipliziert werden. Das ergibt im kontinuierlichen Fall mit (3.10)

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{zent}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= m_{\text{TT}}\cdot\left(\frac{X^2(V_Y^2+V_Z^2)+Y^2(V_X^2+V_Z^2)+Z^2(V_X^2+V_Y^2)}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}\right. \\ &\qquad \left. -2\frac{YZV_YV_Z+XYV_XV_Y+XZV_XV_Z}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}\right)\cdot\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.12}$$

und im diskreten Fall mit (3.11)

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{zent}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= m_{\text{TT}} \cdot \Big[(K_{X,\text{TT}} \cdot \Delta X)^2 \left((\Delta Y \cdot \tilde{K}_{Y,\text{TT}})^2 + (\Delta Z \cdot \tilde{K}_{Z,\text{TT}})^2\right) \\ &\quad +(K_{Y,\text{TT}} \cdot \Delta Y)^2 \left((\Delta X \cdot \tilde{K}_{X,\text{TT}})^2 + (\Delta Z \cdot \tilde{K}_{Z,\text{TT}})^2\right) \\ &\quad +(K_{Z,\text{TT}} \cdot \Delta Z)^2 \left((\Delta X \cdot \tilde{K}_{X,\text{TT}})^2 + (\Delta Y \cdot \tilde{K}_{Y,\text{TT}})^2\right) \\ &\quad -2\Big((K_{Y,\text{TT}} \cdot \Delta Y)(K_{Z,\text{TT}} \cdot \Delta Z)(\Delta Y \cdot \tilde{K}_{Y,\text{TT}})(\Delta Z \cdot \tilde{K}_{Z,\text{TT}}) \\ &\quad +(K_{X,\text{TT}} \cdot \Delta X)(K_{Y,\text{TT}} \cdot \Delta Y)(\Delta X \cdot \tilde{K}_{X,\text{TT}})(\Delta Y \cdot \tilde{K}_{Y,\text{TT}}) \\ &\quad +(K_{X,\text{TT}} \cdot \Delta X)(K_{Z,\text{TT}} \cdot \Delta Z)(\Delta X \cdot \tilde{K}_{X,\text{TT}})(\Delta Z \cdot \tilde{K}_{Z,\text{TT}})\Big)\Big] \\ &\quad \cdot \frac{\begin{pmatrix} K_{X,\text{TT}} \cdot \Delta X \\ K_{Y,\text{TT}} \cdot \Delta Y \\ K_{Z,\text{TT}} \cdot \Delta Z \end{pmatrix}}{\left((K_{X,\text{TT}} \cdot \Delta X)^2 + (K_{Y,\text{TT}} \cdot \Delta Y)^2 + (K_{Z,\text{TT}} \cdot \Delta Z)^2\right)^2} . \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3.2.2 Gravitationskraft

Analog obiger Konvention bezeichnet $\vec{X}$ den Ortsvektor im System *KS*, $\vec{x}$ den Ortsvektor im System *KS'*. Es gilt $\vec{X} = \vec{x} + \vec{X}_{\text{TT}}$, beziehungsweise für die einzelnen Komponenten

$$x = X - X_{\text{TT}}, \qquad y = Y - Y_{\text{TT}}, \qquad z = Z - Z_{\text{TT}} .$$

Um die Integrationsgrenzen einfach zu halten, vergrößern wir das Gebiet wie bisher und füllen die zusätzlichen Räume mit verschwindender Dichte und Emissivität auf. Die Gravitationskraft läßt sich im kontinuierlichen Fall schreiben als

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{grav}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= m_{\text{TT}} G \int_{-X_0}^{+X_0} dX \int_{-Y_0}^{+Y_0} dY \int_{-Z_0}^{+Z_0} dZ \cdot \frac{\rho(X,Y,Z)}{|\vec{X} - \vec{X}_{\text{TT}}|^3} \cdot (\vec{X} - \vec{X}_{\text{TT}}) \\ &= m_{\text{TT}} G \int_{-X_0}^{+X_0} dX \int_{-Y_0}^{+Y_0} dY \int_{-Z_0}^{+Z_0} dZ \cdot \begin{pmatrix} X - X_{\text{TT}} \\ Y - Y_{\text{TT}} \\ Z - Z_{\text{TT}} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{\rho(X,Y,Z)}{((X - X_{\text{TT}})^2 + (Y - Y_{\text{TT}})^2 + (Z - Z_{\text{TT}})^2)^{3/2}} . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Im diskreten Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{grav}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= m_{\text{TT}} G \sum_{K_X=-N_X}^{N_X} \Delta X \sum_{K_Y=-N_Y}^{N_Y} \Delta Y \sum_{K_Z=-N_Z}^{N_Z} \Delta Z \cdot \begin{pmatrix} K_X \, \Delta X - X_{\text{TT}} \\ K_Y \, \Delta Y - Y_{\text{TT}} \\ K_Z \, \Delta Z - Z_{\text{TT}} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{\rho(K_X \, \Delta X, K_Y \, \Delta Y, K_Z \, \Delta Z)}{((K_X \, \Delta X - X_{\text{TT}})^2 + (K_Y \, \Delta Y - Y_{\text{TT}})^2 + (K_Z \, \Delta Z - Z_{\text{TT}})^2)^{3/2}} . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Hier muß wieder derjenige Summationspunkt (K_X, K_Y, K_Z) ausgeschlossen werden, für welchen $\vec{X} = \vec{X}_{\mathrm{TT}}$ bzw. $K_X\,\Delta X - X_{\mathrm{TT}} = K_Y\,\Delta Y - Y_{\mathrm{TT}} = K_Z\,\Delta Z - Z_{\mathrm{TT}} = 0$ ist. In (3.15) ist noch $X_{\mathrm{TT}} = K_{X,\mathrm{TT}}\Delta X$, $Y_{\mathrm{TT}} = K_{Y,\mathrm{TT}}\Delta Y$ und $Z_{\mathrm{TT}} = K_{Z,\mathrm{TT}}\Delta Z$ einzusetzen.

3.3.2.3 Strahlungsdruckkraft

Für die durch den Strahlungsdruck ausgeübte Kraft gilt mit gleichen Bezeichnungen wie für die Gravitationskraft im kontinuierlichen Fall und für den Fall $X \neq X_{\mathrm{TT}}$, Y, Z beliebig:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{X}_{\mathrm{TT}}) \;=\; & -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c}\int_{-X_0}^{+X_0} dX \int_{-Y_0}^{+Y_0} dY \int_{-Z_0}^{+Z_0} dZ \int_0^{\infty} d\nu \cdot \begin{pmatrix} X - X_{\mathrm{TT}} \\ Y - Y_{\mathrm{TT}} \\ Z - Z_{\mathrm{TT}} \end{pmatrix} \\
& \cdot \frac{\kappa_\nu(X_{\mathrm{TT}},Y_{\mathrm{TT}},Z_{\mathrm{TT}}) \cdot \varepsilon_\nu\,(X,Y,Z)}{((X - X_{\mathrm{TT}})^2 + (Y - Y_{\mathrm{TT}})^2 + (Z - Z_{\mathrm{TT}})^2)^{3/2}} \\
& \cdot \exp\left\{ -m_{\mathrm{TT}} \sqrt{\frac{(X - X_{\mathrm{TT}})^2 + (Y - Y_{\mathrm{TT}})^2 + (Z - Z_{\mathrm{TT}})^2}{(X - X_{\mathrm{TT}})^2}} \right. \\
& \qquad \cdot \not\int_{X_{\mathrm{TT}}}^{X} \kappa_\nu \left(X', Y_{\mathrm{TT}} + \frac{Y - Y_{\mathrm{TT}}}{X - X_{\mathrm{TT}}} \cdot (X' - X_{\mathrm{TT}}), \right. \\
& \qquad\qquad \left. \left. Z_{\mathrm{TT}} + \frac{Z - Z_{\mathrm{TT}}}{X - X_{\mathrm{TT}}} \cdot (X' - X_{\mathrm{TT}}) \right) dX' \right\}
\end{aligned} \tag{3.16a}$$

Im Fall $X = X_{\mathrm{TT}}$, $Y \neq Y_{\mathrm{TT}}$, Z beliebig, reduziert sich der Ausdruck auf

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{X}_{\mathrm{TT}}) \;=\; & -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c}\int_{-X_0}^{+X_0} dX\; \delta(X,X_{\mathrm{TT}}) \int_{-Y_0}^{+Y_0} dY \int_{-Z_0}^{+Z_0} dZ \int_0^{\infty} d\nu \cdot \begin{pmatrix} X - X_{\mathrm{TT}} \\ Y - Y_{\mathrm{TT}} \\ Z - Z_{\mathrm{TT}} \end{pmatrix} \\
& \cdot \frac{\kappa_\nu(X_{\mathrm{TT}},Y_{\mathrm{TT}},Z_{\mathrm{TT}}) \cdot \varepsilon_\nu\,(X,Y,Z)}{((X - X_{\mathrm{TT}})^2 + (Y - Y_{\mathrm{TT}})^2 + (Z - Z_{\mathrm{TT}})^2)^{3/2}} \\
& \cdot \exp\left\{ -m_{\mathrm{TT}} \sqrt{\frac{(Y - Y_{\mathrm{TT}})^2 + (Z - Z_{\mathrm{TT}})^2}{(Y - Y_{\mathrm{TT}})^2}} \right. \\
& \qquad \cdot \not\int_{Y_{\mathrm{TT}}}^{Y} \kappa_\nu \left(X_{\mathrm{TT}}, Y', Z_{\mathrm{TT}} + \frac{Z - Z_{\mathrm{TT}}}{Y - Y_{\mathrm{TT}}} \cdot (Y' - Y_{\mathrm{TT}}) \right) dY' \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{3.16b}$$

Für $X = X_{\mathrm{TT}}$, $Y = Y_{\mathrm{TT}}$, $Z \neq Z_{\mathrm{TT}}$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{rad}}(\vec{X}_{\mathrm{TT}}) \;=\; & -\frac{m_{\mathrm{TT}}}{c}\int_{-X_0}^{+X_0} dX\; \delta(X,X_{\mathrm{TT}}) \int_{-Y_0}^{+Y_0} dY\; \delta(Y,Y_{\mathrm{TT}}) \int_{-Z_0}^{+Z_0} dZ \int_0^{\infty} d\nu \\
& \cdot \begin{pmatrix} X - X_{\mathrm{TT}} \\ Y - Y_{\mathrm{TT}} \\ Z - Z_{\mathrm{TT}} \end{pmatrix} \cdot \frac{\kappa_\nu(X_{\mathrm{TT}},Y_{\mathrm{TT}},Z_{\mathrm{TT}}) \cdot \varepsilon_\nu\,(X,Y,Z)}{((X - X_{\mathrm{TT}})^2 + (Y - Y_{\mathrm{TT}})^2 + (Z - Z_{\mathrm{TT}})^2)^{3/2}} \\
& \cdot \exp\left\{ -m_{\mathrm{TT}} \not\int_{Z_{\mathrm{TT}}}^{Z} \kappa_\nu \left(X_{\mathrm{TT}}, Y_{\mathrm{TT}}, Z' \right)\, dZ' \right\}.
\end{aligned} \tag{3.16c}$$

Die Diskretisierung der Frequenzen ν ist natürlich nicht von der Koordinatentransformation beeinflußt. Im diskreten Gitter ergeben sich für die drei Fälle

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{X}_{\text{TT}}) \;=\; & -\frac{m_{\text{TT}}}{c} \sum_{\substack{K_X=-N_X \\ K_X\neq K_{X,\text{TT}}}}^{N_X} \Delta X \sum_{K_Y=-N_Y}^{N_Y} \Delta Y \sum_{K_Z=-N_Z}^{N_Z} \Delta Z \sum_{l=0}^{N_\nu} \delta\nu \; \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}(\vec{X}_{\text{TT}}) \\
& \cdot \begin{pmatrix} K_X\,\Delta X - X_{\text{TT}} \\ K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}} \\ K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}} \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\left(K_X\,\Delta X, K_Y\,\Delta Y, K_Z\,\Delta Z\right) \\
& \cdot \left((K_X\,\Delta X - X_{\text{TT}})^2 + (K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}})^2 + (K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}})^2\right)^{-3/2} \\
& \cdot \exp\Bigg\{ -m_{\text{TT}} \sqrt{\frac{(K_X\,\Delta X - X_{\text{TT}})^2 + (K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}})^2 + (K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}})^2}{(K_X\,\Delta X - X_{\text{TT}})^2}} \\
& \quad \cdot \sum_{K'_X=K_{X,\text{TT}}\pm 1}^{K_X} \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu} \left(K'_X\,\Delta X, Y_{\text{TT}} + \frac{K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}}}{K_X\,\Delta X - X_{\text{TT}}} \cdot (K'_X\,\Delta X - X_{\text{TT}}), \right. \\
& \qquad \left. Z_{\text{TT}} + \frac{K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}}}{K_X\,\Delta X - X_{\text{TT}}} \cdot (K'_X\,\Delta X - X_{\text{TT}}) \right) \Delta X \Bigg\}, \qquad (3.17a)
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{X}_{\text{TT}}) \;=\; & -\frac{m_{\text{TT}}}{c} \Delta X \sum_{\substack{K_Y=-N_Y \\ K_Y\neq K_{Y,\text{TT}}}}^{N_Y} \Delta Y \sum_{K_Z=-N_Z}^{N_Z} \Delta Z \sum_{l=0}^{N_\nu} \delta\nu \; \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}(\vec{X}_{\text{TT}}) \\
& \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}} \\ K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}} \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\left(X_{\text{TT}}, K_Y\,\Delta Y, K_Z\,\Delta Z\right) \\
& \cdot \left((K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}})^2 + (K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}})^2\right)^{-3/2} \\
& \cdot \exp\Bigg\{ -m_{\text{TT}} \left(\frac{(K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}})^2 + (K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}})^2}{(K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}})^2} \right)^{1/2} \\
& \quad \cdot \sum_{K'_Y=K_{Y,\text{TT}}\pm 1}^{K_Y} \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu} \left(X_{\text{TT}}, K'_Y\,\Delta Y, Z_{\text{TT}} + \frac{K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}}}{K_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}}} \cdot (K'_Y\,\Delta Y - Y_{\text{TT}}) \right) \Delta Y \Bigg\} \qquad (3.17b)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{X}_{\text{TT}}) &= -\frac{m_{\text{TT}}}{c}\Delta X\Delta Y \sum_{\substack{K_Z=-N_Z\\K_Z\neq K_{Z,\text{TT}}}}^{N_Z} \Delta Z \sum_{l=0}^{N_\nu} \delta\nu\, \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}(\vec{X}_{\text{TT}}) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}} \end{pmatrix} \cdot \frac{\varepsilon_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\,(X_{\text{TT}}, Y_{\text{TT}}, K_Z\,\Delta Z)}{|K_Z\,\Delta Z - Z_{\text{TT}}|^3} \\ &\quad \cdot \exp\left\{ -m_{\text{TT}} \sum_{K'_Z=K_{Z,\text{TT}}\pm 1}^{K_Z} \kappa_{\nu_{\min}+l\,\delta_\nu}\left(X_{\text{TT}}, Y_{\text{TT}}, K'_Z\,\Delta Z\right)\,\Delta Z \right\}. \end{aligned} \tag{3.17c}$$

Damit haben wir die notwendigen Gleichungen zur Kräfteberechnung in kartesischen Koordinaten abgeleitet. In den meisten Fällen werden wir es mit Akkretionsscheiben in frühen Stadien zu tun haben. Für diese liegen die Verteilungsfunktionen ρ, ε_ν und κ_ν für gewöhnlich in Zylinderkoordinaten vor. Wir werden daher im nächsten Abschnitt die Transformation des Zylinderkoordinaten-Gitters in ein kartesisches Gitter behandeln.

3.3.3 Umrechnung aus den Zylinderkoordinaten

Um die kartesischen Koordinaten aus den Zylinderkoordinaten zu erhalten, benötigen wir im kontinuierlichen Fall nur folgende Formeln:

$$\begin{aligned} X &= S\cos\Phi & V_X &= V_S\cos\Phi - SV_\Phi\sin\Phi \\ Y &= S\sin\Phi & V_Y &= V_S\sin\Phi + SV_\Phi\cos\Phi \\ Z &= Z & V_Z &= V_Z \end{aligned} \tag{3.18}$$

Normalerweise werden Programme zur Entstehung und Entwicklung von Akkretionsscheiben ein Koordinatensystem verwenden, für das der Koordinaten-Ursprung im physikalischen Zentrum des Systems liegt. Für die einzelnen Größen gilt dann:

$$\begin{aligned} \rho(S,\Phi,Z) &= \rho\left(S=\sqrt{X^2+Y^2}, \Phi=\arctan\frac{Y}{X}, Z\right) = \rho(X,Y,Z) \\ \varepsilon_\nu(S,\Phi,Z) &= \varepsilon_\nu(X,Y,Z) \\ \kappa_\nu(S,\Phi,Z) &= \kappa_\nu(X,Y,Z) \end{aligned}$$

Für die Bestimmung von Φ muß – je nach Vorzeichen von X und Y – der berechnete Winkel noch in den richtigen Quadranten gelegt werden:

$$\Phi = \begin{cases} \arctan\dfrac{Y}{X} & X\geq 0,\quad Y\geq 0 \\ \pi - \arctan\dfrac{Y}{-X} & X<0,\quad Y\geq 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{Y}{X} & X<0,\quad Y<0 \\ 2\pi - \arctan\dfrac{-Y}{X} & X\geq 0,\quad Y<0 \end{cases} \tag{3.19}$$

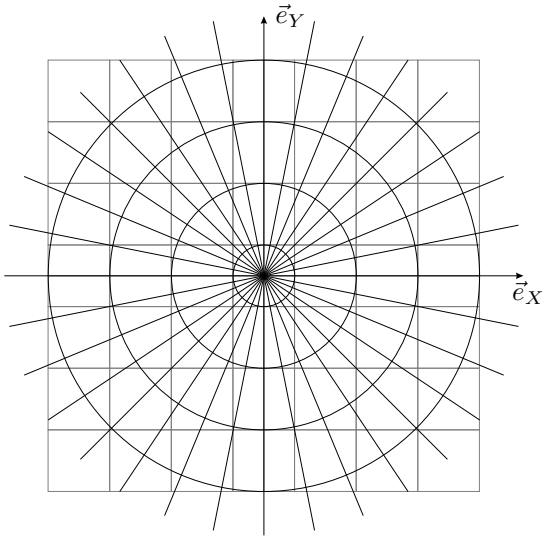


Abbildung 3.29: Skizze zur Umrechnung des Gitters von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

Im diskreten Fall mit vorgegebenem Gitter in Zylinderkoordinaten,

$$\Delta_{\text{Zyl},S} = \frac{S_{\max}}{N_{\text{Zyl},S}}\,, \qquad \Delta_{\text{Zyl},\Phi} = \frac{2\pi}{N_{\text{Zyl},\Phi}}\,, \qquad \Delta_{\text{Zyl},Z} = \frac{Z_0}{N_{\text{Zyl},Z}}\,,$$

und oben angegebener Zerlegung des kartesischen Gitters müssen die Größen ρ, ε_ν und κ_ν über die einzelnen Zellen gemittelt werden. Dafür gibt es verschiedene, beliebig komplizierte Ansätze. Wir werden hier auf zwei Verfahren eingehen, die im Rahmen dieser Arbeit programmiert wurden. Für diese Verfahren werden wir die Ergebnisse erster Tests zeigen.

3.3.3.1 Sampling durch feineres Gitter

Die erste Idee besteht darin, das kartesische Gitter zunächst sehr viel feiner zu wählen als die endgültige Auflösung betragen soll. Dann betrachten wir jeweils die Mittelpunkte der kleinen Zellen im kartesischen System und weisen der jeweiligen Zelle den Wert der korrespondierenden Zelle im System der Zylinderkoordinaten zu. Anschließend mitteln wir über die kleinen kartesischen Zellen, um ein kartesisches Gitter geringerer Auflösung zu erhalten. Zur Verdeutlichung siehe Abb. 3.30.

Zunächst ist klar, daß wir wegen der Definition der Zylinderkoordinaten keine Transformation in Z-Richtung durchführen müssen, wenn wir zur Vereinfachung $N_{\text{Zyl},Z} = N_Z$ setzen. Wir bezeichnen mit $N'_{X,Y}$ die Anzahl der Gitterpunkte im hochaufgelösten System. Dabei gilt $N'_{X,Y} = f \cdot N_{X,Y}$ mit einem konstanten Faktor f. Sinnvollerweise soll das später entstehende kartesische Gitter eine ähnliche Auflösung wie das Gitter in Zylinderkoordinaten haben, deshalb setzen wir $N_{\text{Zyl},S} = N_X = N_Y$.

Die Mittelpunkte der kleinen kartesischen Zellen berechnen sich durch

$$P'_X(k'_X,k'_Y) = k'_X \cdot \Delta'_X, \qquad P'_Y(k'_X,k'_Y) = k'_Y \cdot \Delta'_Y\,.$$

In Zylinderkoordinaten entspricht das

$$P'_S(k'_X,k'_Y) = \sqrt{P'^2_X + P'^2_Y}, \qquad P'_\Phi(k'_X,k'_Y) = \arctan\frac{P'_Y}{P'_X}\,.$$

Wir bestimmen nun die Multiplikatoren α, β durch $\alpha = P'_S/\Delta_{\text{Zyl},S}$ und $\beta = P'_\Phi/\Delta_{\text{Zyl},\Phi}$ und erhalten die zur kleinen kartesischen Zelle korrespondierende Gitterzelle in Zylinderkoordinaten durch Rundung von α und β: $k'_S = \text{Round}(\alpha)$, $k'_\Phi = \text{Round}(\beta)$.

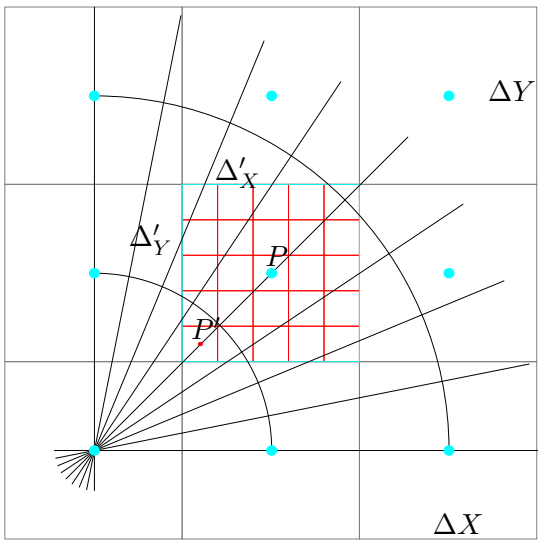


Abbildung 3.30: Skizze zur Umrechnung des Gitters durch feineres Sampling

Somit lassen sich der kartesischen Zelle die Werte der entsprechenden Gitterzelle in Kugelkoordinaten zuweisen:

$$\begin{aligned}
\rho'(k'_X,k'_Y,k_Z) &= \rho_{\text{Zyl}}(k'_S,k'_\Phi,k_Z) \\
\varepsilon'_\nu(k'_X,k'_Y,k_Z) &= \varepsilon_{\nu,\text{Zyl}}(k'_S,k'_\Phi,k_Z) \\
\kappa'_\nu(k'_X,k'_Y,k_Z) &= \kappa_{\nu,\text{Zyl}}(k'_S,k'_\Phi,k_Z)
\end{aligned}$$

Die Mittelung erfolgt nun durch Übergang zu einem kartesischen Gitter geringerer Auflösung. Definieren wir die Mittelpunkte wieder gemäß

$$P_X(k_X,k_Y) = k_X \cdot \Delta_X, \qquad P_Y(k_X,k_Y) = k_Y \cdot \Delta_Y\,,$$

so ist

$$\rho(k_X,k_Y,k_Z) = \frac{1}{(f+1)^2} \sum_{a=-f/2}^{f/2} \sum_{b=-f/2}^{f/2} \rho'(k'_X = f\,k_X - a, k'_Y = f\,k_Y - b, k_Z)\,,$$

$$\varepsilon_\nu(k_X,k_Y,k_Z) = \frac{1}{(f+1)^2} \sum_{a=-f/2}^{f/2} \sum_{b=-f/2}^{f/2} \varepsilon'_\nu(k'_X = f\,k_X - a, k'_Y = f\,k_Y - b, k_Z)\,,$$

$$\kappa_\nu(k_X,k_Y,k_Z) = \frac{1}{(f+1)^2} \sum_{a=-f/2}^{f/2} \sum_{b=-f/2}^{f/2} \kappa'_\nu(k'_X = f\,k_X - a, k'_Y = f\,k_Y - b, k_Z)\,.$$

Diese Berechnung geht von geradem f aus. Für die Randpunkte an den Kanten $k_X = \pm N_X$, $k_Y \neq \pm N_Y$ läuft die Summation nur über $a = -f/2,\ldots,0$ bzw. $a = 0,\ldots,f/2$. Für die Randpunkte an den Kanten $k_X \neq \pm N_X$, $k_Y = \pm N_Y$ läuft die Summation entsprechend nur über $b = -f/2,\ldots,0$ bzw. $b = 0,\ldots,f/2$. Die Division erfolgt dabei jeweils durch $(f+1)(f/2+1)$.

Analoge Überlegungen gelten für die Ecken: Für die linke untere Ecke ($k_X = -N_X$, $k_Y = -N_Y$) gilt beispielsweise $a = -f/2,\ldots,0$ und $b = -f/2,\ldots,0$. Die Division erfolgt dann ebenfalls nur durch $(f/2+1)^2$.

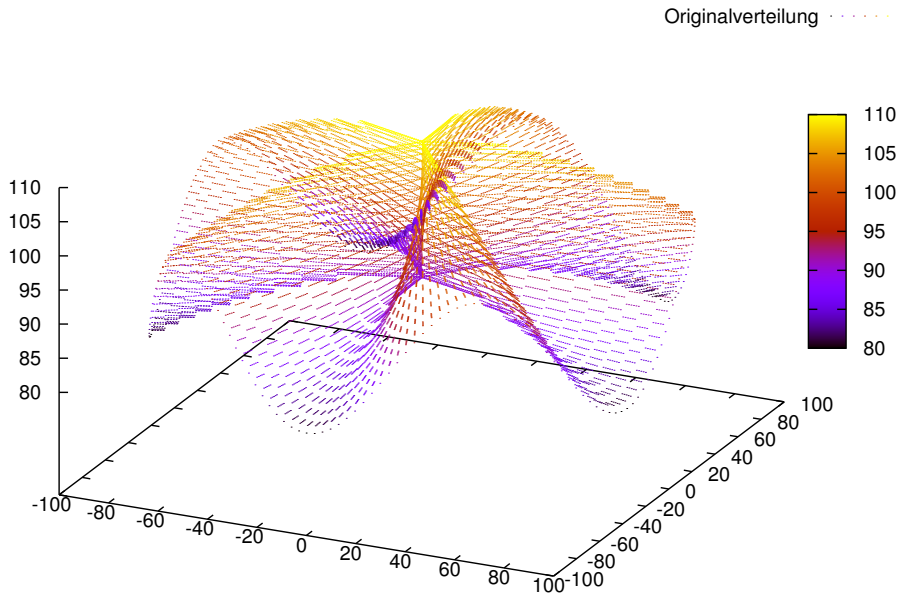


Abbildung 3.31: Vorgegebene Verteilungsfunktion in Zylinderkoordinaten

Bei dieser Transformationsmethode ist zu erwarten, daß durch die Mittelung einzelne Spitzen in den Verteilungsfunktionen abgeschwächt werden. Im Hinblick auf die extreme Massenkonzentration eines Schwarzen Loches im Zentrum einer Akkretionsscheibe muß auf diese Tatsache besonders Rücksicht genommen werden.

3.3.3.2 Sampling durch Abstandsgewichtung

Eine weitere Idee zur Berechnung des kartesischen Gitters aus dem Zylinderkoordinatengitter besteht darin, direkt die Werte der Verteilungsfunktionen ρ, ε_ν und $\kappa\nu$ der Gitterzellen zu berechnen. Dabei ist wie in Abschnitt 3.3.3.1

$$N_{\text{Zyl},S} = N_X = N_Y, \qquad N_{\text{Zyl},Z} = N_Z$$

als sinnvolle Wahl vorgesehen. Für jeden Gitterpunkt

$$P_X = k_X \cdot \Delta_X, \qquad P_Y = k_Y \cdot \Delta_Y$$

berechnen wir zunächst die am nächsten liegenden Gitterpunkte in Zylinderkoordinaten. Mit

$$S = \sqrt{(k_X \cdot \Delta_X)^2 + (k_Y \cdot \Delta_Y)^2} = \tilde{k}_S \Delta_S$$

und (3.19) zur Bestimmung von $\Phi = \tilde{k}_\Phi \Delta_\Phi$ (dabei ist $X = k_X \cdot \Delta_X$, $Y = k_Y \cdot \Delta_Y$) erhalten wir zunächst zwei (reelle) Größen $\tilde{k}_S$ und $\tilde{k}_\Phi$. Durch *Abrundung* legen wir einen der nächstgelegenen Datenpunkte in Zylinderkoordinaten,

$$P_S = \Delta_S \cdot k_S, \qquad P_\Phi = \Delta_\Phi \cdot k_\Phi,$$

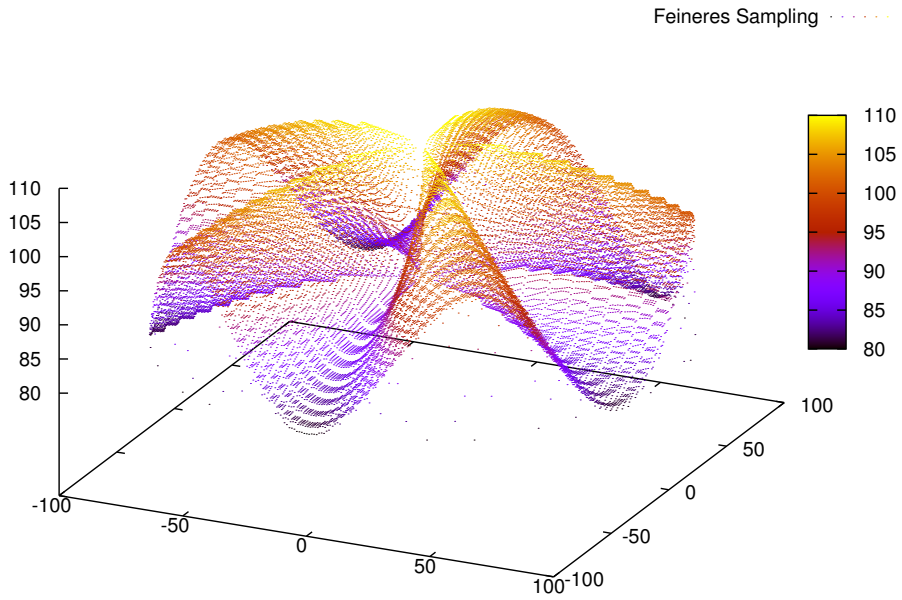


Abbildung 3.32: Durch feineres Sampling ($f = 10$) berechnete Verteilungsfunktion in kart. Koordinaten

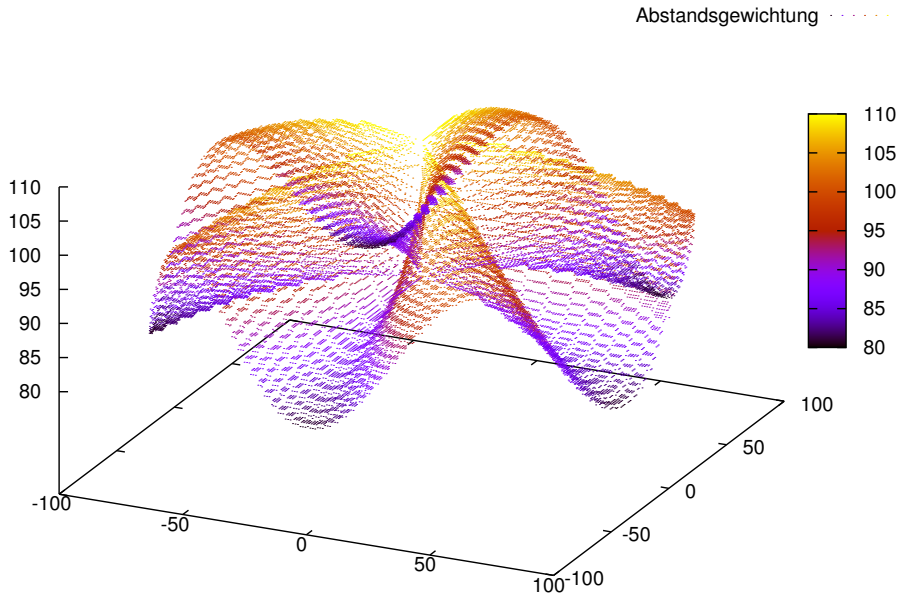


Abbildung 3.33: Mittels Abstandsgewichtung berechnete Verteilungsfunktion in kartesischen Koordinaten

fest. Nun sind vier Fälle zu unterscheiden. Dazu benötigen wir aber noch die Bestimmung des Abstands $d(k_X,k_Y,k_S,k_\Phi)$. Wie leicht nachzuvollziehen ist, ist dieser durch

$$d(k_X,k_Y,k_S,k_\Phi) = \sqrt{(k_X\Delta_X)^2 + (k_Y\Delta_Y)^2 + (k_S\Delta_S)^2 - 2\frac{(k_X\Delta_X + k_Y\Delta_Y \tan(k_\Phi\Delta_\Phi))\, k_S\Delta_S}{(1+\tan^2(k_\Phi\Delta_\Phi))^{(1/2)}}} \tag{3.20}$$

gegeben. In unserem Fall ist $\Delta_S = \Delta_X = \Delta_Y$ und (3.20) vereinfacht sich zu

$$d(k_X,k_Y,k_S,k_\Phi) = \Delta_S\sqrt{k_X^2 + k_Y^2 + k_S^2 - 2\frac{(k_X + k_Y \tan(k_\Phi\Delta_\Phi))\, k_S}{(1+\tan^2(k_\Phi\Delta_\Phi))^{(1/2)}}}\,. \tag{3.21}$$

Die vier Fälle sind nun:

1. $(\tilde{k}_S \mod 1 = 0) \wedge (\tilde{k}_\Phi \mod 1 = 0)$

   In diesem Fall haben wir genau einen Datenpunkt im Zylinderkoordinatensystem getroffen, d. h. $\tilde{k}_S = k_S$, $\tilde{k}_\Phi = k_\Phi$, und können sofort die Zuordnung

   $$\begin{aligned} \rho(k_X,k_Y,k_Z) &= \rho(k_\Xi,k_\Phi,k_Z) \\ \varepsilon_\nu(k_X,k_Y,k_Z) &= \varepsilon_\nu(k_\Xi,k_\Phi,k_Z) \\ \kappa_\nu(k_X,k_Y,k_Z) &= \kappa_\nu(k_\Xi,k_\Phi,k_Z) \end{aligned} \tag{3.22}$$

   vornehmen.

2. $(\tilde{k}_S \mod 1 = 0) \wedge (\tilde{k}_\Phi \mod 1 \neq 0)$

   Hier haben wir eine radiale Gitterlinie getroffen, jedoch keine azimutale. Wir betrachten also die sechs umliegenden Gitterpunkte

   $$\begin{aligned} P_1 &= P(k_S-1,k_\Phi) & P_2 &= P(k_S-1,k_\Phi+1) \\ P_3 &= P(k_S,k_\Phi) & P_4 &= P(k_S,k_\Phi+1) \\ P_5 &= P(k_S+1,k_\Phi) & P_6 &= P(k_S+1,k_\Phi+1) \end{aligned}$$

   mit den zugehörigen Abständen $d_1,\ldots,d_6$ und ihren Werten $\rho_1,\varepsilon_1,\kappa_1,\ldots,\rho_6,\varepsilon_6,\kappa_6$. Nun berechnen wir

   $$\rho(k_X,k_Y,k_Z) = \frac{\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{d_i}\rho_i}{\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{d_i}} \tag{3.23}$$

   als mit dem Abstand gewichteten Mittelwert. Analog verfahren wir mit ε_ν und κ_ν.

3. $(\tilde{k}_S \mod 1 \neq 0) \wedge (\tilde{k}_\Phi \mod 1 = 0)$

   Nun haben wir eine azimutale Gitterlinie getroffen, jedoch keine radiale. Wie oben gewichten wir die Verteilungsfunktionen anhand der umliegenden sechs Gitterpunkte

   $$\begin{aligned} P_1 &= P(k_S,k_\Phi-1) & P_2 &= P(k_S+1,k_\Phi-1) \\ P_3 &= P(k_S,k_\Phi) & P_4 &= P(k_S+1,k_\Phi) \\ P_5 &= P(k_S,k_\Phi+1) & P_6 &= P(k_S+1,k_\Phi+1)\,. \end{aligned}$$

4. $(\tilde{k}_S \mod 1 \neq 0) \wedge (\tilde{k}_\Phi \mod 1 \neq 0)$

   Der kartesische Gitterpunkt liegt irgendwo zwischen den Zylinderkoordinatenpunkten, was in den meisten Fällen zutreffen wird. Wir mitteln in diesem Fall nur über die entsprechenden Werte von ρ, ε_ν, κ_ν der benachbarten vier Punkte

$$P_1 = P(k_S,k_\Phi) \qquad P_2 = P(k_S,k_\Phi + 1)$$
$$P_3 = P(k_S + 1,k_\Phi) \qquad P_4 = P(k_S + 1,k_\Phi + 1)\,.$$

Dieses Verfahren hat gegenüber dem in Abschnitt 3.3.3.1 und einem durch Flächenanteile mittelnden Verfahren den Vorteil, wesentlich schneller zu sein – der Nachteil ist eine geringere Genauigkeit. Durch direkte Treffer von Gitterpunkten in Zylinderkoordiaten wird jedoch die potentiell vorhandene Singularität im Ursprung des physikalischen Systems wesentlich besser reproduziert als im zuvor vorgestellten Verfahren. Es muß sich in detaillierten Tests zeigen, ob das hier entwickelte Verfahren ausreichend genau ist oder nur eine Vorstufe zur Auswahl interessanter Konstellationen dienen kann, für welches dann ein rechenaufwendigeres Verfahren verwendet wird.

Als Test der Implementierung zeigen Abb. 3.31–3.33 eine willkürliche Originalverteilung in Zylinderkoordinaten und die mittels der beiden Methoden berechneten Verteilungen in kartesischen Koordinaten. Die Übereinstimmung in diesem Beispiel ist für beide Transformationsmethoden sehr gut. Die benötigte Rechenzeit unterscheidet sich jedoch gewaltig: Auf dem gleichen System benötigt die Transformation durch feineres Sampling mit $f = 10$ immerhin 3,99 s, während die Berechnung durch Abstandsgewichtung nur $0{,}18$ s beansprucht.

4 Zusammenfassung

Wir haben uns auf den letzten 90 Seiten intensiv mit dem Eddington-Limit bzw. der entsprechenden Größe in Akkretionsscheiben beschäftigt. Unsere Motivation dabei war, *aus den vorhandenen Modellen* die kritische Akkretionsrate zu bestimmen und diese mit dem klassischen Eddington-Limit zu vergleichen. Wie wir im ersten Teil der Arbeit festgestellt haben, liegen die so berechneten kritischen Akkretionsraten für Elektronenstreuung um zwei Größenordnungen unter dem klassischen Eddington-Limit. Unter Verwendung einer Interpolationsformel für die Opazität, welche die realen Opazitäten näherungsweise beschreibt, verringert sich das Verhältnis sogar auf sechs Größenordnungen. Dies gilt allerdings nur unter Voraussetzung geometrisch dünner Akkretionsscheiben.

Ein wesentlicher Punkt dabei ist die Tatsache, daß die *maximal mögliche* Akkretionsrate als Funktion des Radius abnimmt. Am äußeren Rand der Akkretionsscheibe sind selbst für Opazitäten nach der Interpolationsformel Akkretionsraten über dem Eddington-Limit möglich. Ein realistischeres Modell für eine Akkretionsscheibe mit hohen Akkretionsraten könnte z. B. wie folgt aussehen: Für große Radien sind hohe Akkretionsraten durchaus mit dünnen α-Scheiben verträglich. Gehen wir nun zu immer kleineren Radien, dann steigt für konstantes $\dot{M}$ aufgrund der Beziehung (2.1.17) das Verhältnis von h zu s. Das führt dazu, daß wir schlußendlich den Gültigkeitsbereich dünner α-Scheiben verlassen und zur *Slim-disc*-Theorie übergehen müssen. Dieses Modell erlaubt – sowohl für Thomson-Streuung, als auch für interpolierte Opazitäten – wesentlich höhere Akkretionsraten als das klassische Modell dünner Akkretionsscheiben bei ansonsten gleichen Rahmenbedingungen. Bemerkenswert dabei ist jedoch, daß die kritische Akkretionsrate in den inneren Regionen der Scheibe je nach Höhe der Scheibe und verwendeter Opazität im Bereich von $10^3 \dot{M}_E$ (für Thomson-Streuung) bzw. einer Eddington-Rate $\dot{M}_E$ (für interpolierte Opazitäten) liegt.

Sollte am Ende – durch Zufall – das klassische Eddington-Limit, abgesehen von kleinen Korrekturfaktoren, die ausschlaggebende Grenze für die Akkretion darstellen?

Die bisherigen Ausführen lassen dies vermuten. Jedoch dürfen wir einen wichtigen Punkt nicht vergessen: Sowohl für klassische dünne Scheiben als auch für *Slim-discs* entsprach die Eddington-Bedingung immer einem konstanten Verhältnis von Strahlungs- zu Gasdruck. Am Ende von Kapitel 2 haben wir die Vermutung aufgestellt, daß die Annahme eines ausschließlich durch Strahlung bewirkten Energietransports für dieses Resultat verantwortlich ist. Durch die Betrachtungen in Abschnitt 3.1 haben wir jedoch gesehen, daß dem nicht so ist: Trotz Hinzunahme von Advektion als weiteren Prozeß zum Transport von Energie änderte sich an der Aussage $\beta = p_{\text{rad}}/p_{\text{gas}} = \text{const.}$ nichts. Wir dürfen nicht vergessen, daß die Größen B_1 und B_2 lediglich Parameter im Rahmen des Modells waren und keine Ergebnisse mit physikalischem Hintergrund darstellen.

Wir kommen zu dem Schluß, daß eine andere, in beiden Scheibenmodellen verwendete Näherung diesen Effekt bewirkt: die $1+1$-Zonen-Näherung. Sie entkoppelt die vertikale von der radialen Struktur und isoliert damit das hydrostatische Gleichgewicht, welches die Druckverhältnisse zusammen mit der Eddington-Bedingung festlegt, von den radial ablaufenden Prozessen – und somit auch von der radialen Advektion. Damit ist klar, daß das Resultat $\beta = \text{const.}$ im Rahmen der *Slim-disc*-Theorie nicht verbessert werden kann!

Die Berechnungen in Kapitel 2 haben uns zwar gezeigt, daß die kritischen Akkretionsraten in radialer Richtung gegenüber denen in vertikaler Richtung keine Rolle spielen;, sie haben uns aber auch gezeigt,

daß für höhere Akkretionsraten (wie sie z. B. in *Slim-discs* erreicht werden können) die ablaufenden Prozesse in radialer Richtung extrem wichtig werden (z. B. hohe radiale Geschwindigkeiten) und dadurch auch Auswirkungen auf die vertikale Struktur der Akkretionsscheibe haben können. Um dem Eddington-Limit in Akkretionsscheiben noch tiefer auf den Grund zu gehen, muß das *Slim-disc*-Modell dahingehend verbessert werden, daß statt der $1+1$-Zonen-Näherung eine echte zweidimensionale Beschreibung verwendet wird. Dies bedeutet zugleich das Ende jeglicher analytischer Betrachtungen.

Wir schließen unsere Zusammenfassung mit der Betrachtung der vertikalen Massenflüsse aus Abschnitt 3.2. Wie wir gezeigt haben, treten bereits in unserem einfachen Modell bei kleinen Radien vertikale Massenausflüsse auf – interessanterweise genau in dem Bereich, in dem die kritischen Akkretionsraten in *Slim-discs* in etwa das klassische Eddington-Limit erreichen und daher für Akkretionsraten $\dot{M} > \dot{M}_E$ mit derartigen Prozessen zu rechnen ist. Diese Massenausflüsse entwickeln in dem hier vorgestellten Modell extrem hohe Geschwindigkeiten, was uns sofort an die aus den Beobachtungen bekannten Jets in den inneren Regionen von Akkretionsscheiben denken läßt. Dabei wollen wir aber darauf hinweisen, daß das verwendete Modell die vorliegenden physikalischen Verhältnisse stark vereinfacht. Das Auftreten solcher jet-artigen Massenflüsse muß in detaillierten Berechnungen, vor allem mit realistischeren Modellierungen der Scheibenoberfläche und der Atmosphäre, bestätigt werden. Wir erwarten durch eine „echte Atmosphäre“ neben der Re-Emission von Strahlung, welche das Kräftegleichgewicht verändern könnte, vor allem einen abbremsenden Effekt auf die durchfliegenden Teilchen. Entscheidend dabei ist, ob dieser Effekt die Massenausflüsse verlangsamen oder gar zum Stillstand bringen kann.

Damit steht und fällt auch die Möglichkeit, effizient Drehimpuls aus der Akkretionsscheibe davonzutragen – ein Schwachpunkt aller bisherigen Modelle von Akkretionsscheiben. Prinzipiell könnte das Geschehen wie folgt ablaufen: Durch Stöße in den inneren Regionen wird statistisch ein bestimmter Anteil der akkretierten Materie aus dem Inneren der Scheibe über die Scheibenoberfläche hinausbefördert. Diese Teilchen tragen einen hohen Drehimpuls mit sich. Wie wir gesehen haben, genügt eine geringe Anfangshöhe über der Scheibe, um die Teilchen aus dem System hinauszuschießen.

Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, wo und wie existierende Modelle verbessert werden können, um genauere Aussagen über die maximal mögliche Akkretionsrate und damit auch über das Wachstum des Zentralobjektes zu erhalten. Zudem haben wir eine mögliche Erklärung für das Auftreten von Jets in den inneren Regionen einer Akkretionsscheibe gefunden und einen potentiellen Mechanismus zum Abtransport von Drehimpuls aus der Akkretionsscheibe entwickelt.

Wie erwartet ist und bleibt die Frage nach dem Eddington-Limit ein hochgradig spannendes Thema. Die bisherigen Betrachtungen sind aufgrund der Komplexität des physikalischen Problems auch nur ein Tropfen auf den heißen Stein. Es bleibt zu hoffen, daß in den nächsten Jahren intensiv auf diesem Gebiet weitergeforscht wird, um eine der Schlüsselfragen der Astronomie, nämlich das Auftreten massereicher Schwarzer Löcher im frühen Universum, besser beantworten zu können – ich werde mein Bestes geben!

Danksagungen. An erster Stelle danke ich meinem Betreuer, Prof. Wolfgang J. Duschl für die ausgezeichnete Unterstützung im vergangenen Jahr. Ohne seine intensive Betreuung wäre diese Arbeit kaum möglich gewesen. Ebenso danke ich Prof. Rainer Wehrse für die Erstellung des Zweitgutachtens. Weiterhin danke ich allen Mitarbeitern des Instituts für Theoretische Astrophysik für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die vielen erholsamen Tischtennis- und Kaffeepausen.

Mein Dank gilt vor allem meinen Eltern, die weder Kosten noch Mühe scheuten, um mir dieses Studium zu ermöglichen. Ganz besonderer Dank gilt Daniela Hillenmeyer, die mir immer zu Seite stand, meine Arbeitswut stets tapfer ertrug und zudem noch das Korrekturlesen übernahm.

Schließlich danke ich noch jenen, die mein Interesse an der Physik – besonders an der Astronomie – bereits während meiner Schulzeit mit großem Engagement gefördert haben: Andreas Hirsch und Richard Reindl.

Literaturverzeichnis

[1] Abramowicz, M.A., Calvani, M., Nobili, L.: Thick Accretion Disks with Super-Eddington Luminosities, ApJ **242** (1980): 772–788

[2] Abramowicz, M.A., Czerny, B., Lasota, J.P., Szuzkiewicz, E.: Slim Accretion Disks, ApJ **332** (1988): 646–658

[3] Baker, N., Kippenhahn, R.: The Pulsations of Models of δ Cephei Stars, Zeitschrift für Astrophysik **54** (1962), 114–151

[4] Begelman, M.C.: Super-Eddington Fluxes from Thin Accretion Disks?, ApJ **568** (2002), 97–100

[5] Courant, R., Friedrichs, K.O., Lewy, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann. **100** (1928): 32–74

[6] Collin, S., Kawaguchi, T.: Super-Eddington Accretion Rates in Narrow Line Seyfert 1 Galaxies, A& A **426** (2004), 797–808

[7] Collins, T.J.B.: The Effects of Radial Viscous Forces on the Structure of Accretion Disk Boundary Layers, ApJ **478** (1997), 417–422

[8] Dörrer, T., Riffert, H., Staubert, R., Ruder H.: Vertical Structure and Spectrum of Accretion Disks in Active Galactic Nuclei, A& A **311** (1996), 69–78

[9] Frank, J., King, A., Raine, D.: Accretion Power in Astrophysics. Cambridge University Press (2002)

[10] Iglesias, C.A., Rogers, F.J.: Updated Opal Opacities, ApJ **464** (1996), 943–953

[11] Jaroszyński, M., Abramowicz, M.A., Paczyński, B.: Supercritical Accretion Discs around Black Holes, Acta Astronomica **30**(1) (1980), 1–34

[12] Kato, S., Fukue, J., Mineshige, S.: Black-Hole Accretion Disks. Kyoto University Press (1998)

[13] Ketsaris, N.A., Shakura N.I.: On the Calculation of the Vertical Structure of Accretion Discs, Astronomical and Astrophysical Transactions **15** (1998), 193–203

[14] Paczynski, B., Bisnovatyi-Kogan, G.: A Model of a Thin Accretion Disc Around a Black Hole, Acta Astronomica **31**(3) (1981), 283–291

[15] Ruzskowski, M., Begelman, M.C.: Eddington Limit and Radiative Transfer in Highly Inhomogeneous Atmospheres, ApJ **586** (2003), 384–388

[16] Semenov, D., Henning, Th., Helling, Ch., Ilgner, M., Sedlmayr, E.: Rosseland and Planck mean opacities for protoplanetary discs, A&A **410** (2003): 611–621

[17] Shakura, N.I., Sunjaev, R.A.: Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance, A& A **24** (1973), 337–355

[18] Shaviv, N.J.: Classical Novae as Super-Eddington Objects. In: International Conference on Classical Nova Explosions, AIP Conference Proceedings (Eds: Hernanz, M., José, J.), Vol. 637, pp. 259–265. Sitges, Spain, 2002

[19] Shaviv, N.J.: Super Eddington Atmospheres and their Winds. In: Interacting Winds from Massive Stars, ASP Conference Proceedings (Eds: Moffat, A.F.J., St-Louis, N.), Vol. 260, p. 195. San Francisco, USA, 2002

[20] Shaviv, N.J.: The Theory of Steady State Super-Eddington Winds and its Application to Novae, MNRAS **326**(1) (2001), 126–146

[21] Shu, F.H.: The Physics of Astrophysics, Vol. I, Radiation. University Science Books (1991)

[22] Shu, F.H.: The Physics of Astrophysics, Vol. II, Gas Dynamics. University Science Books (1992)

[23] Szuszkiewicz, E., Malkan, M.A., Abramowicz, M.A.: The Observational Appearance of Slim Accretion Disks, ApJ **458** (1996), 474–490

[24] Takeuchi, T., Lin, D.N.C.: Radial Flow of Dust Particles in Accretion Disks, ApJ **581**(2) (2002), 1344–1355

[25] Unsöld, A., Baschek, B.: Der Neue Kosmos, 7. Auflage. Springer (2002)

[26] Wandel, A.: The Eddington Ratio of Active Galactic Nuclei in Accretion-Disk and Dynamical Models, A& A **241** (1991), 5–14

[27] Internetquelle: Wikipedia, the free encyclopedia `http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Eddington` (Stand: 28.01.2005)

[28] Internetquelle: Bennett, C: Arthur Eddington `http://www.usd.edu/phys/courses/phys300/gallery/clark/edd.html` (Stand: 28.01.2005)

[29] Internetquelle: NRAO Image Gallery `http://www.nrao.edu/imagegallery/php/level3.php?id=347` (Stand: 30.01.2005)

Anhang

A Berechnung physikalischer Größen im α-Modell

Folgende Berechnungen erfolgen mit dem Ziel, die jeweilige physikalische Größe nur durch die Unbekannten $\dot{M}(s)$ und $h(s)$ bzw. gar nur durch den Parameter $\beta(s)$ auszudrücken, um die im Hauptteil vorgestellten Gleichungen für die kritische Akkretionsrate abzuleiten. Dabei verwenden wir die für das α-Modell gültigen Gleichungen, wie sie z. B. in [12, S. 85–86] zu finden sind, und ersetzen schrittweise alle anderen physikalischen Größen durch $\dot{M}(s)$, $h(s)$ und $\beta(s)$.

A.1 Zentraltemperatur $\mathbf{T_c}$: Im Fall reiner Thomson-Streuung und unter Verwendung von

$$\beta = \frac{p_{\text{rad}}}{p_{\text{gas}}}\,, \qquad p = (1+\beta)\cdot p_{\text{gas}} = \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)\cdot p_{\text{rad}}$$

gilt

$$\begin{aligned}
T_c^4 &= \frac{9}{4}\cdot\frac{\nu\Sigma\Omega_K^2 c}{8\cdot 4\sigma_{\text{SB}}c}\cdot 3\tau \;=\; \frac{27}{128}\cdot\frac{\nu\Sigma\Omega_K^2}{\sigma_{\text{SB}}}\cdot\frac{1}{2}\kappa\Sigma \\
&= \frac{27}{256}\frac{\kappa}{\sigma_{\text{SB}}}\cdot\Omega_K^2\cdot 2\rho h\cdot\nu\Sigma \;=\; \frac{27}{128}\frac{\kappa}{\sigma_{\text{SB}}}\cdot\Omega_K\cdot\rho c_s\cdot\nu\Sigma \\
&= \frac{27}{128}\frac{\kappa}{\sigma_{\text{SB}}}\cdot\Omega_K\cdot\rho c_s\cdot\frac{2}{3}\frac{\alpha p}{\rho\Omega_K}\cdot 2\rho h \\
&= \frac{9}{32}\frac{\kappa}{\sigma_{\text{SB}}}\cdot\rho c_s^2\cdot\frac{\alpha p}{\Omega_K} \;=\; \frac{9}{32}\frac{\kappa}{\sigma_{\text{SB}}}\cdot\frac{\alpha}{\Omega_K}\cdot p^2 \\
&= \frac{9}{32}\frac{\kappa}{\sigma_{\text{SB}}}\cdot\frac{\alpha}{\Omega_K}\cdot\frac{(1+\beta)^2}{\beta^2}\cdot\frac{16\sigma_{\text{SB}}^2 T_c^8}{9c^2}\,.
\end{aligned}$$

Also ist

$$T_c = \left(\frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}\cdot\frac{2c^2\Omega_K}{\kappa\alpha\sigma_{\text{SB}}}\right)^{1/4}\,. \tag{A.1}$$

A.2 Radialgeschwindigkeit $\mathbf{v_s}$: Unter denselben Annahmen gilt

$$\begin{aligned}
v_s &= -\frac{\dot{M}}{2\pi s\Sigma} \;=\; -\frac{3\nu}{2sf(s)} \;=\; -\frac{3}{2sf(s)}\cdot\frac{2\alpha p}{3\rho\Omega_K} \;=\; -\frac{\alpha}{sf(s)\Omega_K}\cdot\frac{p}{\rho} \\
&= -\frac{\alpha}{sf(s)\Omega_K}\cdot(1+\beta)\cdot\frac{p_{\text{gas}}}{\rho} \;=\; -\frac{\alpha}{sf(s)\Omega_K}\cdot(1+\beta)\cdot\frac{2\rho k_B T_c}{\rho m_H} \\
&= -\frac{\alpha}{sf(s)\Omega_K}\cdot(1+\beta)\cdot\frac{2k_B}{m_H}\cdot\left(\frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}\cdot\frac{2c^2\Omega_K}{\kappa\alpha\sigma_{\text{SB}}}\right)^{1/4} \\
&= -\frac{\alpha^{3/4}(1+\beta)^{1/2}\beta^{1/2}2^{5/4}k_B c^{1/2}}{m_H sf(s)\Omega_K^{3/4}\kappa^{1/4}\sigma_{\text{SB}}^{1/4}}\,.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3 Viskosität ν: Für die Viskosität gilt unter Verwendung der Scheibengleichungen [12, S. 85–86]

$$\nu = -\frac{2}{3}sf(s)v_s = \frac{2^{9/4}}{3}\cdot\frac{\alpha^{3/4}(1+\beta)^{1/2}\beta^{1/2}k_Bc^{1/2}}{m_H\Omega_K^{3/4}\kappa^{1/4}\sigma_{\text{SB}}^{1/4}}\,. \tag{A.3}$$

B Akkretionsscheiben-Gleichungssystem für Eddington-limitierte Akkretionsraten

Wir leiten Schritt für Schritt aus den Scheiben-Gleichungen und aus (2.1.22), (2.1.23) alle Größen des Scheibenmodells als Funktion der Variablen s mit den freien Parametern M und α ab.

Zunächst folgt aus (2.1.22) der Zusammenhang

$$h = (1+\beta)\cdot\frac{2ck_B}{\kappa m_H}\frac{T_c}{\sigma_{\text{SB}}T_{\text{eff}}^4} = (1+\beta)\cdot\frac{16\pi}{3}\cdot\frac{ck_B}{\kappa m_H}\cdot\frac{T_c}{\Omega_K^2\dot{M}f(s)}\,. \tag{B.1}$$

Desweiteren erhalten wir aus (2.1.23) eine Beziehung zwischen β, T_c und ρ:

$$\frac{p_{\text{rad}}}{p_{\text{gas}}} = \beta = \left(\frac{4\sigma T_c^4}{3c}\right)\cdot\left(\frac{2\rho k_BT_c}{m_H}\right)^{-1} = \frac{2\sigma_{\text{SB}}m_H}{3ck_B}\frac{T_c^3}{\rho} \tag{B.2}$$

Aus den Scheibengleichungen erhalten wir

$$\frac{p}{\rho} = c_s^2 = \Omega_K^2h^2 = (1+\beta)\cdot\frac{p_{\text{gas}}}{\rho} = (1+\beta)\cdot\frac{2k_BT_c}{m_H}\,. \tag{B.3}$$

Wir verwenden zusätzlich die folgenden drei Gleichungen aus der Akkretionsscheiben-Theorie:

$$\nu = \frac{2}{3}\alpha\frac{p}{\rho}\frac{1}{\Omega_K} = \frac{2}{3}\alpha h^2\Omega_K \tag{B.4}$$

$$\Sigma = \frac{\dot{M}f(s)}{3\pi\nu} = \frac{\dot{M}f(s)}{2\pi\alpha h^2\Omega_K} \stackrel{!}{=} 2\rho h = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{4\sigma_{\text{SB}}m_H}{3ck_B}T_c^3h\,. \tag{B.5}$$

$$\frac{9}{4}\nu\Sigma\Omega_K^2 = \frac{8acT_c^4}{3\tau} \tag{B.6}$$

Nun erinnern wir uns daran, daß das allgemeine Kräftegleichgewicht (2.1.1) weiterhin vorausgesetzt ist. Daraus folgt

$$h = \frac{3}{8\pi}\frac{\kappa}{c}\dot{M}f(s)\,. \tag{B.7}$$

Fassen wir (B.1)–(B.7) zusammen, dann erhalten wir ein Gleichungssystem aus vier Gleichungen für die Unbekannten $\dot{M}$, h, β, T_c:

$$\begin{aligned} h &= (1+\beta)\frac{16\pi}{3}\frac{k_Bc}{\kappa m_H}\frac{T_c}{\Omega_K^2\dot{M}f(s)} \\ \dot{M}f(s) &= \frac{8\pi}{3}\alpha h^3\Omega_K\frac{\sigma_{\text{SB}}m_H}{ck_B}\frac{T_c^3}{\beta} \\ T_c^4 &= \frac{9}{512\pi^2}\frac{\dot{M}^2f(s)^2\Omega_K\kappa}{\alpha h^2\sigma_{\text{SB}}} \\ h &= \frac{3}{8\pi}\frac{\kappa}{c}\dot{M}f(s) \end{aligned} \tag{B.8}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt für die einzelnen Größen:

$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{3} && = \text{ const.} \\
\dot{M} &= \frac{1}{f(s)} \cdot \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{8^{3/8}}{3^{1/2}} \cdot \frac{k_B^{1/2} c^{5/4}}{m_H^{1/2} \alpha^{1/8} \kappa^{9/8} \sigma_{\text{SB}}^{1/8} \Omega_K^{7/8}} && \propto \frac{s^{21/16}}{\alpha^{1/8} M^{7/16}} \\
h &= \frac{8^{3/8}}{3^{1/2}} \cdot \frac{k_B^{1/2} c^{1/4}}{m_H^{1/2} \alpha^{1/8} \kappa^{1/8} \sigma_{\text{SB}}^{1/8} \Omega_K^{7/8}} && \propto \frac{s^{21/16}}{\alpha^{1/8} M^{7/16}} \\
\varepsilon &= \frac{8^{3/8}}{3^{1/2}} \cdot \frac{k_B^{1/2} c^{1/4}}{m_H^{1/2} \alpha^{1/8} \kappa^{1/8} \sigma_{\text{SB}}^{1/8} \Omega_K^{7/8} s} && \propto \frac{s^{5/16}}{\alpha^{1/8} M^{7/16}} \\
\Omega_K &= \sqrt{\frac{GM}{s^3}} && \propto \frac{M^{1/2}}{s^{3/2}} \\
T_c &= \frac{1}{8^{1/4}} \cdot \frac{c^{1/2} \Omega_K^{1/4}}{\alpha^{1/4} \sigma_{\text{SB}}^{1/4} \kappa^{1/4}} && \propto \frac{M^{1/8}}{s^{3/8} \alpha^{1/4}} \\
T_{\text{eff}} &= \frac{8^{3/32}}{3^{1/8}} \cdot \frac{\Omega_K^{9/32} c^{5/16} k_B^{1/8}}{\sigma_{\text{SB}}^{9/32} \alpha^{1/32} \kappa^{9/32} m_H^{1/8}} && \propto \frac{M^{9/64}}{s^{27/64} \alpha^{1/32}} \\
c_s &= \frac{8^{3/8}}{3^{1/2}} \cdot \frac{c^{1/4} k_B^{1/2} \Omega_K^{1/8}}{\kappa^{1/8} \alpha^{1/8} \sigma_{\text{SB}}^{1/8} m_H^{1/2}} && \propto \frac{M^{1/16}}{s^{3/16} \alpha^{1/8}} \\
\nu &= \frac{8^{13/12}}{3^2} \cdot \frac{\alpha^{3/4} c^{1/2} k_B}{\kappa^{1/4} \sigma_{\text{SB}}^{1/4} m_H \Omega_K^{3/4}} && \propto \frac{s^{9/8} \alpha^{3/4}}{M^{3/8}} \\
\Sigma &= \frac{8^{7/24}}{3^{1/2}} \cdot \frac{c^{3/4} \sigma_{\text{SB}}^{1/8} m_H^{1/2}}{k_B^{1/2} \alpha^{7/8} \kappa^{7/8} \Omega_K^{1/8}} && \propto \frac{s^{3/16}}{M^{1/16} \alpha^{7/8}} \\
p &= \frac{2}{3} \frac{c}{\kappa \alpha} \Omega_K && \propto \frac{M^{1/2}}{s^{3/2}} \\
p_{\text{rad}} &= \frac{1}{6} \frac{c}{\alpha \kappa} \Omega_K && \propto \frac{M^{1/2}}{s^{3/2}} \\
p_{\text{gas}} &= \frac{1}{2} \frac{c}{\alpha \kappa} \Omega_K && \propto \frac{M^{1/2}}{s^{3/2}} \\
\rho &= \frac{1}{8^{5/12}} \cdot \frac{c^{1/2} \sigma_{\text{SB}}^{1/4} m_H \Omega_K^{3/4}}{k_B \alpha^{3/4} \kappa^{3/4}} && \propto \frac{M^{3/8}}{s^{9/8} \alpha^{3/4}} \\
\tau &= \frac{1}{8^{1/24} 3^{1/2}} \cdot \frac{\kappa^{1/8} c^{3/4} \sigma_{\text{SB}}^{1/8} m_H^{1/2}}{k_B^{1/2} \alpha^{7/8} \Omega_K^{1/8}} && \propto \frac{s^{3/16}}{M^{1/16} \alpha^{7/8}} \\
v_s &= -\frac{8^{3/4}}{3} \cdot \frac{c^{1/2} k_B \alpha^{3/4}}{f(s) \kappa^{1/4} \sigma_{\text{SB}}^{1/4} m_H \Omega_K^{3/4} s} && \propto \frac{s^{1/8} \alpha^{3/4}}{M^{3/8}}
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

Die Proportionalitäten wurden jeweils unter Vernachlässigung der Randfunktion $f(s)$ angegeben.

C Navier-Stokes-Gleichung für radiales Eddington Limit

Wir leiten den notwendigen Ausdruck für die Strahlungsdruckkraft im radialen Eddington-Limit für einen Opazitäts-Ansatz gemäß (2.1.28) für $h/s \neq$ const. her:

$$
\begin{aligned}
F_{\text{rad}} &= -\frac{m_H}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -m_H\frac{p}{\rho}\frac{\partial \ln p}{\partial s} \\
&= -m_H\frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{4\sigma_{\text{SB}}}{3c}T_c^4\right) \\
&= -m_H\frac{p}{\rho}\left(4\frac{\partial \ln T_c}{\partial s} - \frac{1}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) \\
&= -m_H\frac{p}{\rho}\left(4\frac{\partial}{\partial s}\ln\left\{\frac{\text{const.}}{r^{3/2}}\cdot\frac{\beta^{2+\kappa_\rho}}{(1+\beta)^2}\right\}^{1/(4+3\kappa_\rho+\kappa_T)} - \frac{1}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) \\
&= -m_H\frac{p}{\rho}\left(\frac{4}{4+3\kappa_\rho+\kappa_T}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln r^{-3/2} + \ln\beta^{2+\kappa_\rho} - \ln(1+\beta)^2\right\} - \frac{1}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) \\
&= -m_H\frac{p}{\rho}\left(\frac{1}{4+3\kappa_\rho+\kappa_T}\left(-\frac{6}{r} + 4\cdot\left((2+\kappa_\rho)\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s} - \frac{2}{1+\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\right) - \frac{1}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) \\
&= -m_H\frac{p}{\rho}\left(\frac{1}{4+3\kappa_\rho+\kappa_T}\left(-\frac{6}{r} + 4\cdot\frac{2+\kappa_\rho(1+\beta)}{(1+\beta)\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) - \frac{1}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) \\
&= m_H\frac{p}{\rho}\left(\frac{6}{(4+3\kappa_\rho+\kappa_T)r} - \frac{1}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\left(\frac{4(2+\kappa_\rho(1+\beta))}{4+3\kappa_\rho+\kappa_T} - 1\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\frac{m_H\nu\Omega_K}{\alpha}\cdot\frac{1}{4+3\kappa_\rho+\kappa_T}\left(\frac{6}{r} - \frac{4+(1+4\beta)\kappa_\rho-\kappa_T}{(1+\beta)\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$