Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik
vorgelegt von
Tobias Illenseer
aus Ostercappeln
2002

Zur Theorie von Scheibenwinden

Die Diplomarbeit wurde von Tobias Illenseer **ausgeführt am**
Institut für Theoretische Astrophysik
unter Betreuung von
Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

Zur Theorie von Scheibenwinden

An der Oberfläche von Akkretionsscheiben herrschen Bedingungen, die denen in der Photosphäre von heißen, leuchtstarken Sternen sehr ähnlich sind. Das Strahlungsfeld ist dort so intensiv, dass es einen Ionenwind antreiben kann. In dieser Arbeit werden die allgemeinen Prinzipien der strahlungsgetriebenen Winde entwickelt und auf den Fall der Scheibenwinde angewandt. Es wird eine eindimensionale Windgleichung aus der Vereinfachung der dreidimensionalen Bewegungsgleichungen für Ionenwinde gewonnen.

On the Theory of Disc Winds

On the surface of accretion discs, physical conditions are comparable to those in the photosphere of hot, luminous stars. The intensive radiation field is so powerful that it can drive ion winds. This examination develops the general principles of ion winds driven by radiation and applies them to the case of accretion disc winds. The simplification of the three-dimensional momentum equation for ion flows results in a one-dimensional equation describing the flow of the wind.

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung 5

II Akkretionsscheiben 7

1 Allgemeine Eigenschaften 7
1.1 Bewegungsgleichungen 7
1.2 Statische Scheiben 10
1.3 Energiebilanz 11

2 Standard-α-Scheiben 11

3 Strahlungsfeld und Oberflächentemperatur 13

III Strahlungsgetriebene Sternwinde 17

4 Massenerhaltung und Impulsgleichung 17

5 Das CAK-Modell 20
5.1 Beschleunigung durch Linienabsorption 20
5.2 Gesamtbeschleunigung 23
5.3 Die CAK-Windgleichung 24
5.4 Lösung der CAK-Windgleichung 25

IV Winde von Akkretionsscheiben 28

6 Grundgleichungen 28

7 Eindimensionales Modell 30

8 Der Beschleunigungsterm 33
8.1 Beschleunigung durch Elektronenstreuung 33
8.2 Beschleunigung durch Linienabsorption 37
8.3 Algorithmus zur Berechnung des Flächenintegrals 39

9 Die Windgleichung 42

10 Topologie der Lösungen 44

11 Lösungsmethode **47**
11.1 Kritische Punkte 48
11.2 Integration der Differentialgleichung 49
11.3 Diskretisierung der Gleichung 50

V Diskussion der Lösungen **52**

12 Vergleich mit dem SVS-Ansatz **52**

13 Abschließende Beurteilung und Ausblick **53**

Anhang **55**

A Beweis der Integrabilität von f_{e} **55**

B Numerische Resultate einer etwas anderen Gleichung **56**

Teil I
Einleitung

Die Untersuchung von Akkretionsscheiben führt irgendwann zwangsläufig zur Frage nach den korrekten Randbedingungen: Wo hört die Scheibe auf und was lässt sich über das Gebiet jenseits dieser Grenze sagen? Letztendlich besteht die Aufgabe darin, der Scheibe eine Atmosphäre aufzusetzen und eine mit den Bedingungen an der Scheibenoberfläche konsistente Lösung zu finden, die sich im Allgemeinen bis ins Unendliche erstreckt. Das in dieser Arbeit entwickelte Modell geht davon aus, dass die Atmosphären der betrachteten Akkretionsscheiben eine große Ähnlichkeit mit denen von O-Sternen aufweisen, so dass das von Castor, Abbott und Klein [CAK75] entwickelte Modell für strahlungsgetriebene Ionenwinde Verwendung finden kann.

In dem einführenden Kapitel über Akkretionsscheiben werde ich anhand der von Shakura und Sunyaev [SS73] beschriebenen α-Scheiben belegen, dass – zumindest für dieses Modell – vergleichbare Oberflächentemperaturen und -drücke zu erwarten sind. Dennoch zeigt sich auch hier schon der wohl wesentlichste Unterschied zu den Sternwinden, die zylindrische Symmetrie der Scheibe, im Gegensatz zur sphärischen Symmetrie bei Sternen. Dies hat Auswirkungen auf die physikalischen Bedingungen in der Atmosphäre in zweierlei Hinsicht. Zum einen findet man einen gänzlich anderen Verlauf bei der Gravitationskraft, die vom akkretierenden Objekt im Zentrum der Scheibe ausgeht. Entfernt man sich in vertikaler Richtung von der Äquatorialebene der Akkretionsscheibe, wird man zunächst ein Ansteigen der Gravitation bemerken und dann nach Überschreiten eines Maximums ein Abklingen. Bei Sternen hingegen sinkt die Anziehungskraft mit wachsendem Abstand von der Sternoberfläche von Anfang an. Zum anderen hängt das Strahlungsfeld, also die antreibende Kraft für einen Wind, in komplizierter Weise von der Distanz zum Zentrum der Scheibe ab und ist keineswegs mehr an der ganzen Scheibenoberfläche als konstant anzunehmen.

Ich werde die Konzepte des strahlungsgetriebenen Windes zunächst in einem eigenen Kapitel über Sternwinde darlegen. Dabei werde ich den einfachsten Fall behandeln, in dem davon ausgegangen wird, dass es sich beim Stern um eine punktförmige Strahlungsquelle handelt. Daran lässt sich das Wesentliche an der CAK-Theorie herausarbeiten, um später die Modifikationen für die Scheibenwinde vornehmen zu können, ohne zuvor schon auf kompliziertere Modelle für Sternwinde eingegangen zu sein.

Der Hauptteil der Arbeit befasst sich dann mit der Entwicklung eines eindimensionalen Windmodells für Akkretionsscheiben. Der dort beschrittene Weg führt auf eine modifizierte Castor-Abbott-Klein-Gleichung, in der sowohl zusätzliche Terme auftauchen, als auch vorhandene Terme eine andere Gestalt haben. Dazu zählt z.B. der oben schon angesprochene Gravitationsterm. Die Hoffnung besteht nun darin, die Lösungsmethode trotz der Veränderungen übertragen zu können und so Massenverlustraten und Windgeschwindigkeiten für Akkretionsscheiben zu erhalten.

Leider ist es mir nicht mehr möglich gewesen, den in dieser Arbeit vorgestellten Lösungsweg im vorgegebenen Zeitrahmen in einen fehlerfreien numerischen Programmcode umzusetzen. Dennoch wird sich in der abschließenden Diskussion der Windgleichung zeigen, dass die bislang erzielten Resultate durchaus die Hoffnung wecken, gewisse noch offene Fragen der Scheibenwinde klären zu können.

Teil II
Akkretionsscheiben

In diesem Kapitel soll kein mehr oder weniger vollständiges Bild der Physik der Akkretionsscheiben entworfen werden, vielmehr sollen die Ableitungen der Strukturgleichungen aufzeigen, woher die entscheidenden Größen kommen, die zur Beschreibung eines Scheibenwindes nötig sind. Es gibt eine Vielzahl von Arbeiten zu diesem Thema, die sich mit den unterschiedlichsten Aspekten der Scheibenphysik auseinandersetzen. So findet man die unten aufgeführten Gleichungen z.B. bei Pringle [Pri81]. Allerdings habe ich einen etwas anderen Herleitungsweg gewählt, der deutlicher hervorhebt, dass die Vernachlässigung der Oberflächenterme ganz wesentlich zur Vereinfachung beiträgt. Das ist insbesondere im Hinblick auf die Scheibenwinde von Bedeutung, denn hier lässt sich später überprüfen, ob beide Modelle konsistent zusammengefügt werden können.

1 Allgemeine Eigenschaften

Eine Akkretionsscheibe ist von außen betrachtet zunächst eine im Wesentlichen flache, kreisförmige Gasmasse, die elektromagnetische Strahlung emittiert. Die dazu benötigte Energie extrahiert die Scheibe aus der potentiellen Energie der Gasteilchen, die im Gravitationsfeld einer zentralen Masse nach innen spiralen. Viskose Reibung sorgt dafür, dass die Teilchen kontinuierlich etwas Drehimpuls verlieren und auf niedrigere Bahnen geraten, wobei die dabei gewonnene Energie das Gas aufheizt und zur Emission von elektromagnetischer Strahlung führt. Zum quantitativen Verständnis dieser Prozesse benötigt man die makroskopischen Bewegungsgleichungen und die thermodynamischen Gleichungen des Gases sowie die Strahlungstransportgleichung.

1.1 Bewegungsgleichungen

Wir betrachten also eine Gasscheibe, die um ein massives zentrales Objekt rotiert und schreiben alle Gleichungen in Zylinderkoordinaten (s, φ, z) mit dem Ursprung im Zentrum der Scheibe. Dabei wird die Äquatorialebene des Koordinatensystems $(z = 0)$ in die Rotationsebene der Akkretionsscheibe gelegt. Die Bewegung wird als vollständig rotationssymmetrisch angenommen, so dass die Umlaufgeschwindigkeit eines beliebigen Punktes in der Scheibe unabhängig vom Winkel φ ist. Gleiches gelte auch für alle anderen Größen. Wir gehen nun von der Kontinuitätsgleichung aus und schreiben diese in

Zylinderkoordinaten.

$$\nabla \cdot \big(\varrho \vec{v}\big) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\big(\varrho v_s s\big) + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial \varphi}\big(\varrho v_\varphi\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(\varrho v_z\big) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Der Term mit der φ-Ableitung verschwindet wegen der oben gemachten Annahmen. Integriert man diese Gleichung in vertikaler Richtung vom unteren zum oberen Scheibenrand und setzt die Dichte $\varrho(\pm h) = 0$, so erhält man die erste Gleichung der radialen Scheibenstruktur.

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\big(\Sigma v_s s\big) + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

2 h ist die Scheibendicke und die neu eingeführte Größe Σ bezeichnet man als die vertikal integrierte Flächendichte.

$$\Sigma = \int_{-h}^{h} \varrho \; \mathsf{d}z \tag{1.2}$$

Die zweite Strukturgleichung erhält man nicht ganz so einfach. Zunächst benötigen wir die Eulersche Gleichung für zähe Flüssigkeiten in Tensorschreibweise, wie sie z.B. bei Landau und Lifschitz [LL66, Kap. II] angegeben wird, und addieren als externe Kraft die Gravitation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\varrho v_i\big) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - \varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

mit dem Tensor der Impulsstromdichte

$$\Pi_{ik} = -\sigma_{ik} + \varrho v_i v_k$$

und dem Spannungstensor

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \eta\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\Big) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad .$$

ϕ ist das Gravitationspotential und P der Druck. η und ζ heißen Zähigkeitskoeffizienten. In Zylinderkoordinaten hat die φ-Komponente dieser Gleichung die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\big(\varrho v_\varphi\big) &= -\frac{\partial \Pi_{\varphi s}}{\partial s} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Pi_{\varphi z}}{\partial z} - \frac{2}{s}\Pi_{\varphi s} - \varrho\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \\ &= -\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}\Big(s^2 \Pi_{\varphi s}\Big) - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Pi_{\varphi z}}{\partial z} - \varrho\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \quad .\end{aligned}$$

Wegen der Zylindersymmetrie verschwinden die Terme mit den φ-Ableitungen. Wir führen wieder eine vertikale Integration durch und benutzen die Tatsache, dass $\Pi_{\varphi z}$ an der Scheibenoberfläche Null wird. Es bleibt also auf der rechten Seite der Gleichung lediglich der erste Term stehen. Außerdem wird die (s,φ)-Komponente des Spannungstensors für inkompressible[1] Flüssigkeiten eingesetzt und die kinematische Viskosität $\nu = \eta/\varrho$ eingeführt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\big(\Sigma v_\varphi\big) &= -\int\limits_{-h}^{h} \frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}\Big(s^2\big(-\sigma_{\varphi s} + \varrho v_\varphi v_s\big)\Big)\,\mathsf{d}z \\ &= -\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(s^2\Sigma\Big(-\nu\Big(\frac{1}{s}\frac{\partial v_s}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial s} - \frac{v_\varphi}{s}\Big) + v_\varphi v_s\Big)\right) \\ &= \frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\Sigma\nu s^2\Big(\frac{1}{s}\frac{\partial v_s}{\partial\varphi} + s\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{v_\varphi}{s}\Big)\Big) - s^2\Sigma v_\varphi v_s\right)\end{aligned}$$

oder etwas anders angeordnet

$$s^2\frac{\partial}{\partial t}\big(\Sigma v_\varphi\big) + \frac{\partial}{\partial s}\big(s^2\Sigma v_\varphi v_s\big) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\Sigma\nu s^2\Big(\frac{1}{s}\frac{\partial v_s}{\partial\varphi} + s\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{v_\varphi}{s}\Big)\Big)\right) \ . \qquad (1.3)$$

Unter Verwendung von

$$\frac{\partial v_s}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = 0$$

und mit Gl. (1.1) erhält man schließlich

$$\Sigma v_s s = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial s}\big(s v_\varphi\big)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\Sigma\nu s^3\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{v_\varphi}{s}\Big)\right) \ .$$

Differenzieren nach s und Ersetzen des Terms auf der linken Seite wiederum mit Hilfe von Gl. (1.1) ergibt

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\frac{\partial}{\partial s}\big(s v_\varphi\big)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\Sigma\nu s^3\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{v_\varphi}{s}\Big)\right)\right\} \ ,$$

womit wir fast am Ziel wären. Eine weitere Vereinfachung wird noch benötigt, um eine Lösung des Gleichungssystems zu ermöglichen. Dazu nehmen wir an, dass die Umlaufgeschwindigkeit v_φ näherungsweise der Keplerschen Bahngeschwindigkeit entspricht, was uns also folgende Ersetzung erlaubt:

$$v_\varphi \approx v_{\mathrm{K}} = s\Omega_{\mathrm{K}} = s\sqrt{\frac{MG}{s^3}} = \sqrt{\frac{MG}{s}} \ .$$

[1] Divergenzen der Geschwindigkeit verschwinden darin

Dies eingesetzt führt auf eine i.A. nichtlineare Diffusionsgleichung, die zweite Gleichung der radialen Scheibenstruktur.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\Sigma\nu\sqrt{s}\right)\right) \tag{1.4}$$

Einer Lösung des Gleichungssystems (1.1),(1.4) steht nun noch im Wege, dass über die kinematische Viskosität ν nichts bekannt ist. Im allgemeinsten Fall ist sie eine Funktion der lokalen Bedingungen in der Scheibe, also abhängig von Σ, s und t.

1.2 Statische Scheiben

Es gibt Fälle, bei denen sich die äußeren Bedingungen, wie z.B. die Massenzufuhr, auf einer viel längeren Zeitskala ändern als die lokale Struktur der Scheibe. Die Akkretionsscheibe befindet sich dann in einem quasi-statischen Zustand, der es einem erlaubt, in den Bewegungsgleichungen die Zeitableitungen zu vernachlässigen. Aus der Massenerhaltung (1.1) erhält man dann direkt

$$\Sigma s v_s = \mathsf{const}$$

oder

$$\dot{M}_0 = -2\pi s \Sigma v_s \ . \tag{1.5}$$

$\dot{M}_0$ bezeichnet die Akkretionsrate, also die Masse, die pro Zeiteinheit durch einen Ringquerschnitt der Scheibe fließt. Die Definition mit dem Minuszeichen bewirkt, dass $\dot{M}_0$ positiv ist, weil immer $v_s < 0$ gilt. Die Impulsgleichung (1.3) vereinfacht sich ebenfalls erheblich, wenn man die Zeitableitung unterdrückt, und lässt sich ohne weiteres integrieren. Wir nehmen wieder an, dass die Gasmassen sich nahezu auf Keplerschen Bahnen bewegen und können daher $s\Omega_{\mathrm{K}}$ für v_φ einsetzen:

$$\Sigma\Omega_{\mathrm{K}} v_s = \Sigma\nu\frac{\partial\Omega_{\mathrm{K}}}{\partial s} - \frac{C}{2\pi s^3}$$

und mit Gleichung (1.5)

$$\nu\Sigma = \left(\frac{\partial\Omega_{\mathrm{K}}}{\partial s}\right)^{-1}\left(-\frac{\dot{M}_0}{2\pi s}\Omega_{\mathrm{K}} + \frac{C}{2\pi s^3}\right) \ .$$

Die Integrationskonstante C wird in der Regel am inneren Rand der Scheibe bestimmt. Im Falle eines schwarzen Lochs im Zentrum wäre das der letzte stabile Orbit. Allerdings befindet man sich dann schon so dicht am schwarzen Loch, dass die Newtonsche Mechanik, die die ganze Zeit über verwendet wurde, nicht mehr gültig ist, sondern allgemeinrelativistische Effekte in Betracht gezogen werden müssen[2]. Zur Umgehung dieser Problematik führt man einen inneren Scheibenradius s_0 ein, an dem man die Scheibe enden lässt. An diesem Radius hat man eine innere Randbedingung für die Winkelgeschwindigkeit der Gasmassen in der Scheibe:

$$\left(\frac{\partial \Omega_{\mathrm{K}}}{\partial s}\right)_{s=s_0} = 0 \ ,$$

woraus sich dann $C = \dot{M}_0 \Omega_{\mathrm{K}} s_0^2$ und somit

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}_0}{3\pi}\left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) \tag{1.6}$$

ergibt.

1.3 Energiebilanz

Wie im einleitenden Abschnitt schon bemerkt, extrahiert die Scheibe mittels dissipativer Prozesse Energie aus der kinetischen Energie der einfallenden Gasmassen. Pro Einheitsfläche beträgt diese Energie

$$Q = \int_{-h}^{h} \nu\varrho \left(\frac{\sigma_{\varphi s}}{\nu\varrho}\right)^2 \mathsf{d}z = \nu\Sigma \left(s\frac{\partial \Omega_{\mathrm{K}}}{\partial s}\right)^2 \ ,$$

woraus sich mit Gleichung (1.6) folgendes ergibt:

$$Q = \frac{3\dot{M}_0}{4\pi}\frac{MG}{s^3}\left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) \ . \tag{1.7}$$

2 Standard-α-Scheiben

Die am Ende von Kapitel 1.1 beschriebene Problematik, dass über die Viskosität nichts bekannt ist, lösen Shakura und Sunyaev auf eine sehr einfache Weise, indem sie alle Unsicherheit in einen dimensionslosen Parameter α stecken. Sie gehen in ihren Überlegungen davon aus, dass die Viskosität als

[2]Siehe dazu Novikov und Thorne in [NT73]

Produkt einer charakteristischen Länge und einer typischen Geschwindigkeit von turbulenten Prozessen geschrieben werden kann.

$$\nu \sim \ell_{\mathrm{t}} \cdot v_{\mathrm{t}}$$

Die Längenskala wird durch die Scheibendicke h abgeschätzt, und eine charakteristische Größe für die turbulente Geschwindigkeit liefert die Schallgeschwindigkeit c_{s} im Gas. Der Ansatz sieht hier vor, dass alle turbulenten Prozesse mit Unterschallgeschwindigkeit ablaufen. Hat man das akzeptiert, kann man einen dimensionslosen Parameter $\alpha \leq 1$ einführen und obige Beziehung für die Viskosität ausnutzen.

$$\nu = \alpha h c_{\mathrm{s}} \tag{2.1}$$

Um nun zu einer vollständigen Lösung des Scheibenproblems zu gelangen, benötigt man die Gleichungen der vertikalen Struktur, die bislang immer ausgeklammert wurde. Als erstes betrachten wir die Druckbilanz. Ausgehend von der Annahme, dass es senkrecht zur Rotationsebene keinen makroskopischen Massenfluss gibt, kann man für die z-Richtung die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts ansetzen.

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{MGz}{\left(\sqrt{s^2+z^2}\right)^3} \approx -\frac{MGz}{s^3} \tag{2.2}$$

Bei der Näherung fließt ein, dass $z \ll s$ gilt, die Scheibe also überall sehr dünn ist. Ferner braucht man einen Ausdruck für die Energieerzeugung, die durch Gleichung (1.7) beschrieben wird. Es gilt daher näherungsweise

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} \approx \frac{1}{2}\frac{Q}{h} \ , \tag{2.3}$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ die Tatsache widerspiegelt, dass die Scheibe eine Ober- und Unterseite besitzt.

Die in der Scheibe erzeugte Energie muss an die Oberfläche fließen, folglich ist eine Gleichung, die den Energietransport beschreibt, erforderlich. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass der Transport vornehmlich radiativ vonstatten geht, und vernachlässigen die Konvektion.

$$q_z = -\frac{1}{\bar{\kappa}\varrho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{4\sigma}{3}T^4\right) \tag{2.4}$$

σ bezeichnet die Stefan-Boltzmann-Konstante und $\bar{\kappa}$ ist die mittlere Rosseland-Opazität und i.A. eine Funktion der Dichte und der Temperatur. Überwiegen Prozesse reiner Elektronenstreuung, ist $\bar{\kappa}$ eine Konstante.

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(T, \varrho) \tag{2.5}$$

Als letztes muss eine Zustandsgleichung für das Gas angegeben werden. Es hängt vom jeweiligen Modell ab, welche Druckkomponenten man mit berücksichtigt und welche man vernachlässigt. Denkbar wären zusätzlich zum Strahlungs- und Gasdruck auch turbulente oder magnetische Beiträge.

$$P = P_{\mathrm{rad}} + P_{\mathrm{gas}} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 + \frac{\mathscr{R} \varrho T}{\mu} \tag{2.6}$$

Die in einigen Gleichungen auftretende Schallgeschwindigkeit kann durch den Druck und die Dichte ersetzt werden.

$$c_{\mathrm{s}}^2 = \frac{P}{\varrho} \tag{2.7}$$

Insgesamt erhält man so zusammen mit den Gleichungen (1.6) und (1.7) sowie der Definition für die Flächendichte (1.2) ein System, das es erlaubt, die Größen ϱ, Σ, h, P, ν, q_z, T und $\bar{\kappa}$ als Funktionen von $\dot{M}_0$, M, s, z und dem Paramter α zu schreiben. In aller Allgemeinheit ist das allerdings explizit nicht möglich. In der Ein-Zonen-Näherung vernachlässigt man daher die z-Abhängigkeit, indem man in der Vertikalen gemittelte Größen einführt und die z-Ableitungen durch Quotienen mit der halben Scheibendicke h im Nenner ersetzt[3].

3 Strahlungsfeld und Oberflächentemperatur

Wenden wir uns also nun den für den Wind relevanten Größen der Scheibe zu. Das Strahlungfeld an der Scheibenoberfläche erhält man, indem man Gleichung (2.3) über z vom unteren zum oberen Scheibenrand integriert und $q_z(h) = -q_z(-h)$ ausnutzt.

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} \frac{\partial q_z}{\partial z}\, \mathsf{d}z &= q_z(h) - q_z(-h) = 2q_z(h) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} Q(s)\, \mathsf{d}z = \frac{3\dot{M}_0 MG}{4\pi s^3} \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) \end{aligned}$$

Mit einer neuen Bezeichnung für den Oberflächenfluss ergibt sich dann

$$\mathscr{F} = q_z(h) = \frac{3\dot{M}_0}{8\pi} \frac{MG}{s^3} \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) \quad . \tag{3.1}$$

[3] siehe dazu z.B. Frank, King und Raine [FKR02]

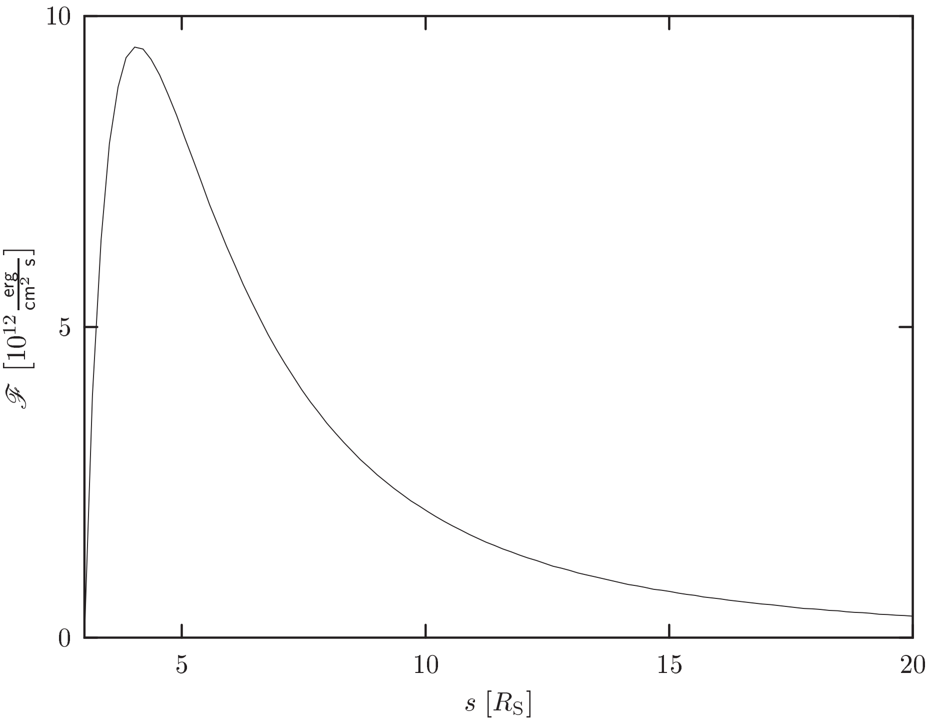

Abbildung 1: Oberflächenfluss $\mathscr{F}$ in Abhängigkeit vom Radius s

Daraus errechnet man sofort durch Integration über die gesamte Scheibenfläche (Ober- und Unterseite) die Leuchtkraft der Akkretionsscheibe.

$$L_\mathrm{D} = 2 \int\limits_0^{2\pi} \mathsf{d}\varphi \int\limits_{s_0}^{s_\mathrm{D}} \mathscr{F}(s) s \ \mathsf{d}s = \frac{3\dot{M}_0 M G}{2} \int\limits_{s_0}^{s_\mathrm{D}} \frac{1}{s^2} \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}}\right) \mathsf{d}s$$

Gilt für den äußeren Scheibenradius $s_\mathrm{D} \gg s_0$, so können Terme der Ordnung s_0/s_D vernachlässigt werden, und das Ergebnis lautet

$$L_\mathrm{D} \simeq \frac{\dot{M}_0 M G}{2 s_0} \quad . \tag{3.2}$$

Um ein Gefühl für die Größenordnungen zu bekommen, sind in Tabelle 1 für zwei unterschiedliche Typen von Akkretionsscheiben mit zentralen Schwarzen Löchern die charakteristischen Größen aufgelistet. Es handelt sich dabei um ein Superschweres Schwarzes Loch, wie es vermutlich in Zentren von Galaxien vorkommt, und eines von der Art, die bei CVs (Cataclysmic Variable) auftreten. Die beiden Größen in den ersten Spalten betreffen das zentrale

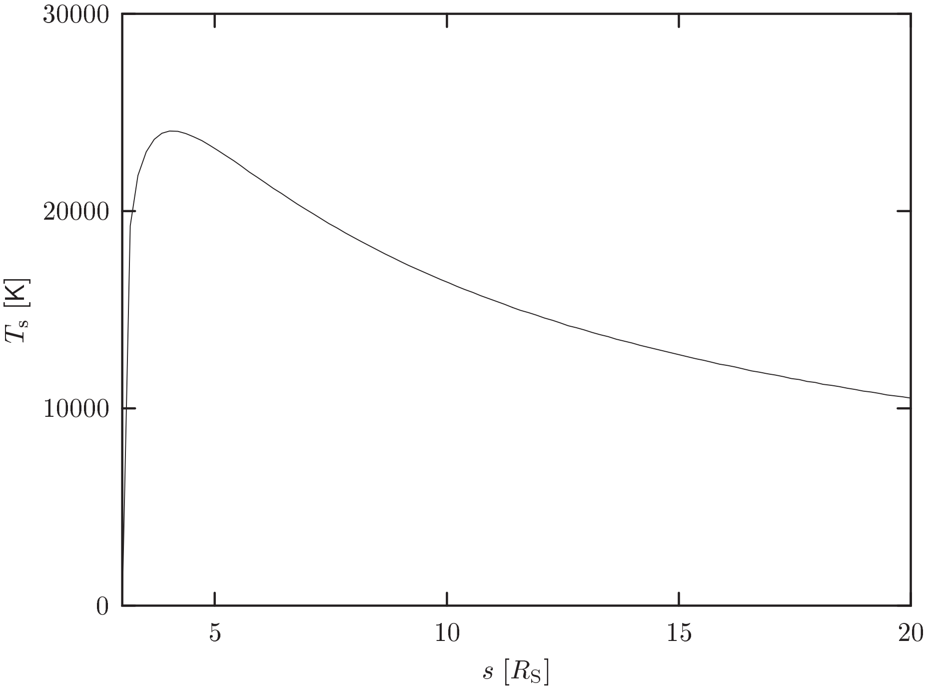

Abbildung 2: Oberflächentemperatur T_s in Abhängigkeit vom Radius s

Objekt, also dessen Masse und Schwarzschildradius. In Abbildung 1 ist das Profil des Strahlungsflusses an der Oberfläche in Abhängigkeit vom Schwarzschildradius aufgetragen. Die verwendeten Zahlenwerte entsprechen denen aus der ersten Spalte von Tabelle 1. Andere Werte ergeben kein qualitativ neues Bild, sondern lediglich eine Skalierung.

Um einen approximativen Ausdruck für die Oberflächentemperatur zu erhalten, gehen wir davon aus, dass die Scheibe in z-Richtung optisch dick ist. Das erlaubt es uns, jedes Oberflächenelement wie einen schwarzen Körper zu behandeln, und wir können das Stefan-Boltzmann-Gesetz anwenden.

$$\mathscr{F} = \sigma T_{\mathrm{s}}^4$$

M [$\mathsf{M}_\odot$]	R_{S} [cm]	$s_0[R_{\mathrm{S}}]$	$\dot{M}_0$ [$\mathsf{M}_\odot$/yr]	L_{D} [erg/s]	$T_{\mathrm{s,max}}$ [K]
3×10^7	$8,9 \times 10^{12}$	3	10^{-4}	5×10^{41}	$2,4 \times 10^4$
3×10^0	$8,9 \times 10^5$	3	10^{-9}	5×10^{36}	$4,2 \times 10^6$

Tabelle 1: Charakteristische Größen für zwei Typen von Akkretionsscheiben

Einsetzen von (3.1) für den Fluss und Auflösen nach T_s liefert

$$T_\mathrm{s} = \left(\frac{3\dot{M}_0}{8\pi\sigma} \frac{MG}{s^3} \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{s}} \right) \right)^{1/4} . \tag{3.3}$$

Das Temperaturprofil (Abb. 2) hat einen ähnlichen Verlauf wie der Oberflächenfluss. Es wurden wiederum die Parameter aus der ersten Zeile von Tabelle 1 verwendet. Die maximale Temperatur liegt etwa bei

$$T_\mathrm{s,max} \approx \left(\frac{L_\mathrm{D}}{12\pi s_0^2 \sigma} \right)^{1/4} ,$$

woraus sich, abhängig von den gewählten Scheibenparametern, Maximaltemperaturen zwischen 10^4 K und 10^6 K ergeben (siehe Tabelle 1).

Teil III
Strahlungsgetriebene Sternwinde

Das am Ende des vorangegangenen Abschnitts berechnete Temperaturprofil an der Oberfläche von Akkretionsscheiben um Schwarze Löcher zeigt, dass die dort erreichten Temperaturen von etwa 10^4 Kelvin in der gleichen Größenordung liegen wie die Photosphärentemperaturen von heißen, leuchtstarken Sternen. Damit geht ein äußerst starkes Strahlungsfeld einher, das in der Lage ist, einen Teil seines Impulses auf die Gasmassen in der Scheiben- bzw. Sternatmosphäre zu übertragen. Dies geschieht im Wesentlichen durch zwei Mechanismen: Zum einen die elastische Streuung von Elektronen an Ionen und zum anderen die Linienabsorption. Hat ein Ion ein Photon absorbiert, kommt es zwar nach einer gewissen Zeit zur Reemission, wodurch wieder Impuls davongetragen wird. Jedoch bleibt ein Nettoeffekt, der die Ionen vom Stern wegtreibt, da die einfallende Strahlung eine Vorzugsrichtung in radialer Richtung vorweist, während die Reemission im Ruhesystem des Ions isotrop erfolgt.

Dennoch käme in den meisten Fällen wohl kein Wind zustande, gäbe es den Dopplereffekt nicht. Ohne ihn würde ein überwiegender Teil der Strahlung in den dichten unteren Atmosphärenschichten absorbiert und der Wind käme zum Erliegen, bevor er richtig angeblasen wurde. Der Dopplereffekt aber bewirkt, dass im bewegten Gas die Ionen eine rotverschobene Strahlung "sehen" und auf diese Weise – abhängig von ihrer Geschwindigkeit, die mit dem Abstand zur Sternoberfläche wächst – unterschiedliche Resonanzlinien zum Tragen kommen. Dieser Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsprofil und Impulsübertrag erschwert allerdings auch die mathematische Beschreibung des Windes.

4 Massenerhaltung und Impulsgleichung

Alle in dieser Arbeit behandelten Windmodelle vernachlässigen zeitabhängige Phänomene, die in den Winden durchaus von erheblicher Bedeutung sein können und unter Umständen zu Instabilitäten führen. Die im Folgenden abgeleiteten Gleichungen zur Beschreibung eines statischen Windes mit zeitlich konstantem Massenverlust finden sich z.B. im Buch von Lamers und Cassinelli [LC99].

Einhergehend mit einem statischen Fluss ist ein zeitunabhängiger Massentransfer, der es erlaubt, in der Kontinuitätsgleichung die Zeitableitungen zu vernachlässigen.

$$\nabla \cdot \left(\varrho \vec{v}\right) = 0$$

Da es sich bei Sternen um kugelsymmetrische Objekte handelt, schreibt man die Divergenz in sphärischen Polarkoordinaten (r, θ, φ) und lässt die Winkelableitungen weg.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}r}\left(r^2 \varrho v\right) = 0$$

Daraus ergibt sich unmittelbar eine Erhaltungsgröße

$$r^2 \varrho v = \mathsf{const}$$

und man kann die durch eine Kugelschale mit Radius r fließende Masse als die konstante Massenverlustrate $\dot{m}$ des Sterns definieren.

$$\dot{m} = 4\pi r^2 \varrho v \tag{4.1}$$

Die Massenverlustrate ist in dem unten beschriebenen CAK-Modell ein Eigenwert der Theorie, das heißt, sie ist durch die äußeren Sternparameter wie Masse, Leuchtkraft und Referenzradius fest vorgegeben. Das macht dieses Modell so attraktiv, denn im Allgemeinen ist diese Rate nur schwer zu ermitteln.

Wenden wir uns nun der Impulserhaltung zu. Ausgangspunkt hierfür ist wieder die Eulersche Gleichung, jedoch vernachlässigen wir dissipative Prozesse, müssen aber statt dessen zusätzliche Beschleunigungsterme für den Antrieb des Windes einführen. Diese werden zunächst einmal ganz allgemein unter dem Begriff radiative Beschleunigung g_{rad} zusammengefasst und später genauer spezifiziert. Außerdem bewirkt das Gravitationspotential ϕ des Sterns eine Abbremsung des Windes. Da der Fluss statisch behandelt wird, spielen auch hier die Zeitableitungen keine Rolle. Für die Divergenz des Impulstensors gilt dann:

$$\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = -\varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \varrho g_{\mathrm{rad},i}$$

mit dem Gravitationspotential ϕ. Setzt man den Impulstensor

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \varrho v_i v_k$$

ein und nutzt die aus der Kontinuitätsgleichung ableitbare Beziehung

$$v_i v_k \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} = \varrho v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad ,$$

so ergibt sich:

$$\varrho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = -\varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \varrho g_{\mathrm{rad},i} \quad ,$$

woraus im kugelsymmetrischen Fall

$$v \frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} = -\frac{\mathsf{d}\phi}{\mathsf{d}r} - \frac{1}{\varrho}\frac{\mathsf{d}P}{\mathsf{d}r} + g_{\mathrm{rad}} \tag{4.2}$$

wird. Mit dem Gravitationspotential eines Sterns der Masse M

$$\phi = -\frac{MG}{r}$$

bekommt man für den ersten Term auf der linken Seite

$$-\frac{\mathsf{d}\phi}{\mathsf{d}r} = -\frac{MG}{r^2} \quad .$$

Im zweite Term kann man den Druck mit Hilfe von Gleichung (2.7) durch die Schallgeschwindigkeit und die Dichte ersetzen.

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\mathsf{d}P}{\mathsf{d}r} = -\frac{\mathsf{d}c_{\mathrm{s}}^2}{\mathsf{d}r} - \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{\varrho}\frac{\mathsf{d}\varrho}{\mathsf{d}r} \tag{4.3}$$

Gleichung (4.1) gestattet es nun auch noch, den Druck durch die Geschwindigkeit auszudrücken.

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\mathsf{d}P}{\mathsf{d}r} = -\frac{\mathsf{d}c_{\mathrm{s}}^2}{\mathsf{d}r} + \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{v}\frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} + \frac{2c_{\mathrm{s}}^2}{r}$$

Dieses alles in Gleichung (4.2) eingesetzt, beschert einem endlich die vorläufige Windgleichung.

$$\left(1 - \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{v^2}\right) v \frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} = -\frac{MG}{r^2} + \frac{2c_{\mathrm{s}}^2}{r} - \frac{\mathsf{d}c_{\mathrm{s}}^2}{\mathsf{d}r} + g_{\mathrm{rad}} \tag{4.4}$$

Vorläufig ist diese Gleichung deswegen, weil zunächst noch nichts über den Antriebsmechanismus des Windes bekannt ist. Die Beschleunigung g_{rad} ist noch eine unbekannte Größe, und wie in der Einleitung zu diesem Kapitel schon angeklungen ist, hängt sie vom Gradienten der Geschwindigkeitskomponente entlang des Strahlungsweges ab. Das macht diese zunächst recht simpel erscheinende Differentialgleichung für die Windgeschwindigkeit doch sehr kompliziert, denn dieser Zusammenhang ist nicht linear.

5 Das CAK-Modell

Die Beschleunigung von Teilchen in einem bewegten Medium ist ein sehr komplexer Vorgang. Das hat mehrere Gründe. Selbst wenn man nur eine Teilchensorte betrachtet, können für die Linienabsorption hunderte von Resonanzlinien mit verschiedenen Oszillatorstärken und Frequenzen eine Rolle spielen. Das bedeutet, die Ionen wechselwirken mit einer Vielzahl von Photonen und zudem noch an den unterschiedlichsten Stellen im Gasfluss, denn je nach Geschwindigkeit können nur bestimmte Frequenzen angeregt werden. Hinzu kommt, dass einmal in unteren Schichten absorbierte Photonen nicht mehr zur Beschleunigung beitragen können. Ein weiterer Faktor ist die ausgedehnte Gestalt des Sterns. Sie führt dazu, dass die Strahlung an einem Wechselwirkungspunkt im Wind von unterschiedlich weit entfernten Stellen in der Photosphäre des Sterns kommen kann. Im Allgemeinen hat man es daher mit einem komplizierten Strahlungstransportproblem zu tun.

Um überhaupt einen Ansatzpunkt zu finden, der etwas Licht ins Dunkel bringt, klammern wir zunächst etliche dieser Fragen aus und beschränken uns auf ein möglichst einfaches Modell. Dazu schauen wir uns die Absorption von Photonen und die dadurch bewirkte Beschleunigung der Ionen in einem bewegten Medium in der Sobolev-Approximation [Sob60] an.

5.1 Beschleunigung durch Linienabsorption

In der Sobolev-Approximation wird davon ausgegangen, dass die Zone im bewegten Medium, in der die Absorption des Photons durch das Ion stattfindet, extrem schmal ist und daher das Linienprofil durch eine Delta-Funktion beschrieben werden kann. Die Beschleunigung durch ein Ensemble von Linien errechnet sich dann durch Summation über jede Linie mit dem für die jeweilige Linie charakteristischen Absorptionskoeffizienten κ_l.

$$\vec{g}_{\mathrm{rad,L}} = \frac{1}{c} \sum_l \oint \kappa_l \int_0^\infty I(\hat{n},\nu)\ \mathsf{d}\nu\ \hat{n}\ \mathsf{d}\Omega$$

Das Frequenzintegral über die Strahlungsintensität $I(\hat{n},\nu)$ kann in ein Wegintegral entlang des Sichtvektors $\hat{n}$ umgewandelt werden. Die Änderung der Frequenz enlang des Weges s ist nach Shu [Shu91, S. 86], wobei ν_0 die Resonanzfrequenz im Ruhesystem des Ions bezeichnet,

$$\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}s} = \frac{\nu_0}{c}\ \hat{n}\cdot\nabla(\hat{n}\cdot\vec{v}) \ .$$

also ergibt die Variablentransformation

$$\begin{aligned}
\vec{g}_{\mathrm{rad,L}} &= \frac{1}{c}\sum_l \oint \kappa_l \int\limits_0^\infty I(\hat{n},s)\left|\frac{\mathsf{d}\nu}{\mathsf{d}s}\right| \mathsf{d}s\ \hat{n}\ \mathsf{d}\Omega \\
&= \frac{1}{c}\sum_l \oint \kappa_l \int\limits_0^\infty I(\hat{n},s)\frac{\nu_0}{c}\ \left|\hat{n}\cdot\nabla\big(\hat{n}\cdot\vec{v}\big)\right| \mathsf{d}s\ \hat{n}\ \mathsf{d}\Omega \ .
\end{aligned}$$

Führt man nun die optischen Liniendicke $\tau_l(\hat{n})$ entlang der Richtung $\hat{n}$ nach Sobolev ein

$$\tau_l(\hat{n}) = \frac{\varrho\kappa_l c/\nu_0}{|\hat{n}\cdot\nabla(\hat{n}\cdot\vec{v})|} = \tau_l'(\hat{n},\infty)\ , \tag{5.1}$$

wobei

$$\tau_l'(\hat{n},s) = \int\limits_0^s \kappa_l\varrho\ \mathsf{d}s\ ,$$

erhält man für die Linienbeschleunigung

$$\vec{g}_{\mathrm{rad,L}} = \frac{1}{c}\sum_l \oint \kappa_l \int\limits_0^\infty I(\hat{n},s)\frac{\kappa_l\varrho}{\tau_l}\ \mathsf{d}s\ \hat{n}\ \mathsf{d}\Omega \ .$$

τ_l ist unabhängig von s und kann vor das innere Integral gezogen werden, und das Linienintegral wandelt man in ein Integral über die optische Dicke um. Außerdem können wir die Intensität des Strahlungsfeldes am Ort der Absorption durch die abgeschwächte photosphärische Intensität ausdrücken.

$$\begin{aligned}
\vec{g}_{\mathrm{rad,L}} &= \frac{1}{c}\sum_l \oint \kappa_l \frac{1}{\tau_l}\int\limits_0^{\tau_l} I(\hat{n},0)\ e^{-\tau_l'}\ \mathsf{d}\tau_l'\ \hat{n}\ \mathsf{d}\Omega \\
&= \frac{1}{c}\sum_l \oint \kappa_l I(\hat{n},\nu_{\mathrm{p}})\frac{1-e^{-\tau_l}}{\tau_l}\ \hat{n}\ \mathsf{d}\Omega \qquad (5.2) \\
&\approx \frac{1}{c}\sum_l \oint \kappa_l I(\hat{n},\nu_{\mathrm{p}}) \min\left(\Delta\nu, \frac{1}{\tau_l}\right)\ \hat{n}\ \mathsf{d}\Omega
\end{aligned}$$

ν_{p} ist die photosphärische Frequenz, also die bei $s = 0$ emittierte. Die zuletzt gemachte Näherung findet sich bei Castor [Cas74]; $\Delta\nu$ bezeichnet die

Dopplerverbreiterung der Absorptionslinien durch die thermische Bewegung der Ionen.

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \nu_0\left(1 + \frac{v_{\mathrm{th}}}{c}\right) - \nu_0 = \nu_0 v_{\mathrm{th}}/c \tag{5.3}$$

Dieser Ausdruck für die Beschleunigung durch Linienabsorption müsste nun in die Windgleichung eingesetzt und bei der numerischen Lösung dieser Gleichung bei jedem Rechenschritt ausgewertet werden. Die Vielzahl der beteiligten Linien macht diese Berechnung jedoch höchst aufwendig.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, Integration und Summation zu vertauschen und sich das Verhalten der Summe in Abhängigkeit von τ_l anzuschauen. Castor, Abbott und Klein [CAK75] haben diese Summation für hunderte von Linien und bei unterschiedlichen Photosphärentemperaturen durchgeführt. Die Ergebnisse gestatten es, eine verhältnismäßig einfache Parametrisierung einzuführen, um diesen Zusammenhang zu beschreiben.

$$\sum_l \frac{I(\hat{n},\nu_{\mathrm{p}})}{I(\hat{n})}\frac{\kappa_l}{\sigma_{\mathrm{e}}} \min\left(\Delta\nu, \frac{1}{\tau_l}\right) \approx k\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_{\mathrm{e}}\ \Delta\nu\ \tau_l}\right)^{\alpha} \quad ,$$

mit temperaturabhängigen Parametern k und α. σ_{e} ist der Thomson-Wirkungsquerschnitt für Kontinuums-Elektronenstreuung. Übernimmt man diese Parametrisierung im Integral für die Linienbeschleunigung, erhält man eine sehr viel leichter auszuwertende Funktion, da die Summation über die Linien entfällt.

$$\vec{g}_{\mathrm{rad,L}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{c}\oint I(\hat{n}) k \left(\frac{\kappa_l}{\sigma_{\mathrm{e}}\ \Delta\nu\ \tau_l}\right)^{\alpha} \hat{n}\ \mathrm{d}\Omega \tag{5.4}$$

Die bisherige Herleitung hat noch keinen Gebrauch von der sphärischen Symmetrie des Windes bei Sternen gemacht. Das hat einen guten Grund, denn so lässt sich die obige Gleichung ebenfalls auf Scheibenwinde anwenden und wir können sie später wieder verwenden.

Die Spezialisierung auf Kugelsymmetrie bietet noch einmal eine große Vereinfachung, die es sogar erlaubt, das Raumwinkelintegral direkt auszuwerten, wenn man davon ausgeht, dass die Strahlungsquelle punktförmig ist, eine Näherung, die im größeren Abstand vom Stern nicht schlecht ist, in der Nähe allerdings versagt. Für die optische Dicke (5.1) ergibt sich im Fall einer Punktquelle und mit Gleichung (5.3) der Ausdruck

$$\tau_l = \varrho\kappa_l \frac{v_{\mathrm{th}}}{\Delta\nu}\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|^{-1} \tag{5.5}$$

und wenn $\hat{n} = \hat{e}_r$ angenommen werden kann

$$\vec{g}_{\mathrm{rad,L}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}\ \mathscr{F}}{c} k \left(\frac{1}{\varrho \sigma_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{th}}} \left| \frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} \right| \right)^{\alpha} \hat{e}_r \quad . \tag{5.6}$$

$\mathscr{F}$ ist hier der totale Strahlungsfluss.

5.2 Gesamtbeschleunigung

Neben der Linienabsorption spielt bei der Beschleunigung durch Strahlung auch noch die elastische Streuung an Elektronen eine Rolle. Dieser Beitrag sieht folgendermaßen aus:

$$\vec{g}_{\mathrm{rad,e}} = \frac{1}{c} \oint \sigma_{\mathrm{e}} I(\hat{n}) \hat{n} \ \mathsf{d}\Omega \quad , \tag{5.7}$$

was für eine Punktquelle wiederum einfach auszuwerten ist:

$$\vec{g}_{\mathrm{rad,e}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}\ \mathscr{F}}{c} \hat{e}_r \quad . \tag{5.8}$$

Wir können nun den Beschleunigungsterm in Gleichung (4.4) explizit hinschreiben.

$$g_{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}\ \mathscr{F}}{c} \left(1 + k \left(\frac{1}{\varrho \sigma_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{th}}} \left| \frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} \right| \right)^{\alpha} \right) \tag{5.9}$$

Mit Hilfe der Massenverlustrate (4.1) und der Definition

$$C(\dot{m}) = \frac{4\pi c}{\sigma_{\mathrm{e}} L} k \left(\frac{4\pi}{\sigma_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{th}} \dot{m}} \right)^{\alpha} \tag{5.10}$$

($L = 4\pi r^2 \mathscr{F}$ ist die Leuchtkraft des Sterns) kann man den zweiten Summanden etwas umschreiben

$$g_{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}} L}{4\pi r^2 c} \left(1 + \frac{4\pi c\ C(\dot{m})}{\sigma_{\mathrm{e}} L} \left(r^2 v \left| \frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} \right| \right)^{\alpha} \right) \quad . \tag{5.11}$$

Findet man eine Methode, die die Funktion $C(\dot{m})$ festlegt, so kann man bei vorgegebener Parametrisierung durch α und k direkt die Massenverlustrate des Sterns bestimmen, denn alle anderen Größen sind entweder Konstanten oder aus den makroskopischen Eigenschaften des Sterns berechenbar.

5.3 Die CAK-Windgleichung

Im nächsten Schritt werden wir die Windgleichung des CAK-Modells aufstellen, wofür es fast genügt, alle bislang hergeleiteten Gleichungen zusammenzubringen. Allerdings bietet es sich noch an, einiges zusammenzufassen und umzuschreiben, damit der wesentliche Charakter der Gleichung stärker heraussticht. Wir fangen also mit der zunächst als vorläufig deklarierten Windgleichung (4.4) an und setzen die radiative Beschleunigung (5.11) ein.

$$\left(1-\frac{c_\mathrm{s}^2}{v^2}\right)v\frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} = -\frac{MG}{r^2}+\frac{2c_\mathrm{s}^2}{r}-\frac{\mathsf{d}c_\mathrm{s}^2}{\mathsf{d}r}+\frac{\sigma_\mathrm{e}L}{4\pi r^2 c}\left(1+\frac{4\pi c\, C(\dot{m})}{\sigma_\mathrm{e}L}\left(r^2 v\left|\frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r}\right|\right)^\alpha\right)$$

Nun stellen wir die Summanden ein wenig um und multiplizieren die ganze Gleichung mit r^2.

$$\left(1-\frac{c_\mathrm{s}^2}{v^2}\right)r^2 v\frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r}-C(\dot{m})\left(r^2 v\left|\frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r}\right|\right)^\alpha = -MG+2c_\mathrm{s}^2 r-r^2\frac{\mathsf{d}c_\mathrm{s}^2}{\mathsf{d}r}+\frac{\sigma_\mathrm{e}L}{4\pi c}$$

Auf der linken Seite befinden sich jetzt alle Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsterme, während auf der rechten Seite nur noch eine Funktion der radialen Variablen r steht. Wir transformieren die Radialkoordinate und führen auch eine neue Geschwindigkeitsfunktion w ein.

$$u = -\frac{1}{r}$$
$$w = \frac{1}{2}v^2$$

Damit ist

$$r^2 v\frac{\mathsf{d}v}{\mathsf{d}r} = r^2\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}r} = \frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u} = w'$$

und die Windgleichung schreibt sich wie folgt

$$\left(1-\frac{c_\mathrm{s}^2}{2w}\right)w' - C(\dot{m})(w')^\alpha - h(u) = 0 \ , \tag{5.12}$$

wobei die Funktion $h(u)$ definiert ist durch

$$h(u) = -2\frac{c_\mathrm{s}^2}{u}-\frac{\mathsf{d}c_\mathrm{s}^2}{\mathsf{d}u}-MG+\frac{\sigma_\mathrm{e}L}{4\pi c} \ . \tag{5.13}$$

Diese Windgleichung ist eine implizite Differentialgleichung der Funktion $w(u)$, die allerdings in eine explizite Gleichung für w' umgeschrieben werden kann. So kann man sie mittels eines Standardverfahrens zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen prinzipiell lösen, allerdings ist dazu eine genaue Kenntnis des Wertes von $C(\dot{m})$ respektive $\dot{m}$ vonnöten. Ein weiteres Problem ist, dass die Topologie der Lösungen eine recht komplizierte Gestalt annimmt und in gewissen "verbotenen" Gebieten keine Lösung existiert, weshalb ein numerisches Verfahren an den Grenzen dieser Gebiete versagt und die Integration abbricht. Tatsächlich ist es sogar so, dass keine einfache Lösung dieser Gleichung über ganz u existiert, sondern man statt dessen darauf angewiesen ist, zwei verschiedene Lösungen stetig zusammenfügen zu können.

5.4 Lösung der CAK-Windgleichung

Betrachtet man die in der Windgleichung auftretenden Variablen und Funktionen u, w und w' als voneinander unabhängige Größen, so kann man die Lösung dieser Gleichung als ein Nullstellenproblem ansehen.

$$F(u,w,w') = \left(1 - \frac{c_\mathrm{s}^2}{2w}\right)w' - C(\dot{m})(w')^\alpha - h(u) = 0$$

Wir wollen uns nun die Abhängigkeit von w' genauer ansehen und u sowie w als beliebig vorgegeben erachten. Die Gleichung $F(u,w,w') = 0$ hat dann je nach dem keine, eine oder zwei Lösungen für w'. Die Bereiche, in denen keine Lösung existiert, sind die "verbotenen" Gebiete, in denen auch keine Lösung der Differentialgleichung möglich ist. Hat die Gleichung genau eine Lösung, ist alles in Ordnung. Allerdings wird man feststellen, dass man, ändert sich nur eine der Variablen u oder w, zwangsläufig in ein Gebiet ohne Lösung gerät. Zur Veranschaulichung der Problematik wird in Abbildung 3 eine schematische Übersicht der Lösungstopologie gegeben.

Der Trick besteht nun darin, in dem Bereich, in dem zwei Lösungen existieren, diese stetig zu verknüpfen. Denn beide Lösungsäste führen in die beiden getrennten Gebiete mit nur einer Lösung und ermöglichen es ganz u zu überdecken[4]. Wie in Abbildung 3 zu sehen ist, befindet sich der Punkt, an dem beide Lösungen verknüpft werden, an der Grenze zu einer "verbotenen" Zone. Auf dieser Grenze liegen die singulären Punkte der Windgleichung; das sind die Punkte, für die die Singularitätsbedingung gilt, die sog. kritischen Punkte.

$$\left(\frac{\partial F(u,w,w')}{\partial w'}\right)_\mathrm{c} = 0 \tag{5.14}$$

[4]für eine ausführlichere Diskussion sei auf Kap. 10 verwiesen

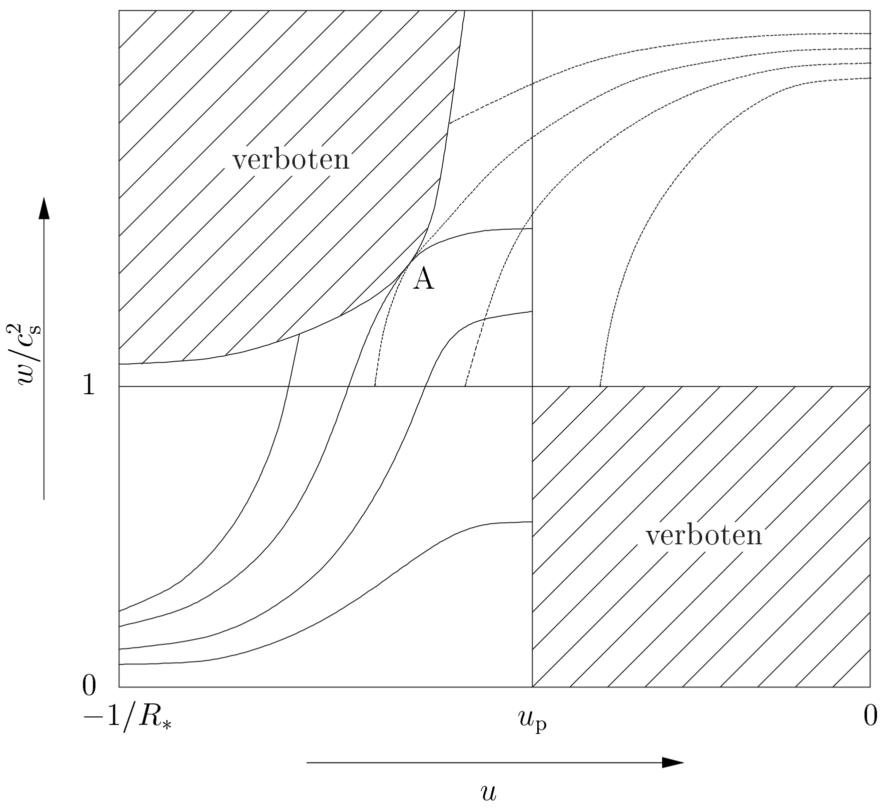

Abbildung 3: Lösungstopologie der CAK-Gleichung

Die Stetigkeitsforderung liefert einem eine zweite Bedingung[5], die Regularitätsbedingung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\mathrm{c} + \left(w'\frac{\partial F}{\partial w}\right)_\mathrm{c} = 0 \tag{5.15}$$

Zusammen mit der Windgleichung, die am kritischen Punkt auszuwerten ist, findet sich ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen, jedoch mit vier Unbekannten. Neben den Variablen u_c, w_c und w'_c am kritischen Punkt gehört auch die Funktion $C(\dot{m})$ dazu.

Das Lösungsverfahren sieht nun folgendermaßen aus. Zunächst wählt man ein mehr oder weniger beliebiges u_c, löst damit das Gleichungssystem, was einem w_c, w'_c sowie $C(\dot{m})$ beschert. Damit kann man vom kritischen Punkt ausgehend die Windgleichung in beide Richtungen – hinab zur Sternoberfläche und ins Unendliche – numerisch integrieren. Über die diversen Variablentransformationen, die anfangs gemacht wurden, kann so ein vollständi-

[5]siehe Lamers und Cassinelli [LC99, Kap. 8]

ges Geschwindigkeitsprofil $v(r)$ des Windes erstellt werden und mit Hilfe der Massenerhaltung (4.1) läßt sich – da $\dot{m}$ aus $C(\dot{m})$ berechnet werden kann – die Dichte $\varrho(r)$ bestimmen.

Damit ist man allerdings noch nicht am Ziel, denn der am Anfang des Verfahrens willkürlich festgelegte Wert für den kritischen Punkt lässt auch andere Ergebnisse zu. Allerdings ist eines zu beachten. Die Beschleunigung durch Linienabsorption kann nur dann effizient funktionieren, wenn der Wind einen bestimmten Werte für die optische Dicke unterschreitet, andernfalls haben wir es mit isotroper Strahlung durch Rückstreuung zu tun und der Windantrieb versagt. Man rechnet also aus dem Dichteprofil die optische Dicke für Kontinuumsstreuung aus und vergleicht ihn mit der oberen Schranke $\tau_{\mathrm{e,max}} = 2/3$. Liegt man daneben, ist ein neues u_{c} zu wählen und das Verfahren zu iterieren.

Teil IV
Winde von Akkretionsscheiben

Nachdem in den siebziger Jahren die im vorangegangen Abschnitt dargelegten Techniken zur adäquaten Beschreibung von strahlungsgetriebenen Sternwinden entwickelt worden waren, lag es nahe, diese auf Akkretionsscheiben zu übertragen. Schließlich waren auch bei deren Modellierung im gleichen Zeitraum entscheidende Fortschritte erzielt worden. Eine der ersten Arbeiten zum Thema Scheibenwinde ist die von Meier [Mei79] aus dem Jahre 1979. Allerdings wird in dieser die Beschleunigung durch Linienabsorption noch gar nicht berücksichtigt. Dennoch ist diese Arbeit von Bedeutung, denn hier wird zum ersten Mal eine Technik beschrieben, die es ermöglicht, die volle dreidimensionale Struktur eines Scheibenwindes auf ein eindimensionales Problem zu reduzieren.

Den gleichen Weg wählen dann auch Shlosman, Vitello und Shaviv [SVS85] bzw. Vitello und Shlosman [VS88]. Beide Arbeiten tragen auch dem Beitrag durch die Linienabsorption Rechnung. In den numerischen Kalkulationen gehen sie allerdings nicht auf die parametrisierte Form von Castor, Abbott und Klein [CAK75] ein, sondern ermitteln die Beschleunigung direkt aus der Auswertung des Integrals in Gleichung (5.2), wobei sie 15 Resonanzlinien berücksichtigen.

Eine aktuellere Veröffentlichung, die insbesondere im Hinblick auf das weiter unten in dieser Arbeit Dargestellte von Belang ist, gibt es von Pereyra, Kallman und Blondin [PKB97]. In ihr wird sowohl ein mehrdimensionales numerisches als auch ein eindimensionales analytisches Modell vorgestellt. Bei diesem fließen jedoch sehr starke Vereinfachungen ein, die dazu führen, dass die Gleichungen nur in großem Abstand von der Scheibe einigermaßen Gültigkeit besitzen, also gerade dort, wo die zylindrische Symmetrie und damit die besondere Geometrie der Scheibe nicht mehr zum Tragen kommt. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt daher auch eher auf den mehrdimensionalen Berechnungen. Dieser Trend setzt sich dann bei Proga, Stone und Drew [PSD98] bzw. Proga, Stone und Kallman [PSK00] fort, die schon sehr ausgefeilte Modelle unter Einbeziehung der Zeitabhängigkeit entwickeln.

6 Grundgleichungen

Wie bei den Gleichungen für Sternwinde betrachtet man zunächst nur die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls, also die Kontinuitätsgleichung und die Eulersche Gleichung zuzüglich externer Beschleunigungsterme. Da der Wind als statisch angenommen wird, fallen die Zeitableitungen wieder heraus.

$$\nabla \cdot \left(\varrho \; \vec{v} \right) = 0 \tag{6.1}$$

$$\left(\vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla P - \nabla \phi + \vec{g}_{\mathrm{rad}} \tag{6.2}$$

Streng genommen lassen sich diese Gleichungen nicht weiter reduzieren, denn selbst die Zylindersymmetrie erlaubt es einem nicht, gewisse Komponenten darin zu vernachlässigen. Der Scheibenwind ist echt dreidimensional. Dass sowohl s- als auch z-Abhängigkeiten eine Rolle spielen müssen, kann man sich sehr schnell anhand des Gravitationspotentials klar machen, denn in Zylinderkoordinaten (s, φ, z) schreibt es sich folgendermaßen

$$\phi(s, z) = -\frac{MG}{\sqrt{s^2 + z^2}} \quad . \tag{6.3}$$

Naiv könnte man zwar denken, dass die Geschwindigkeit des Windes ledig-

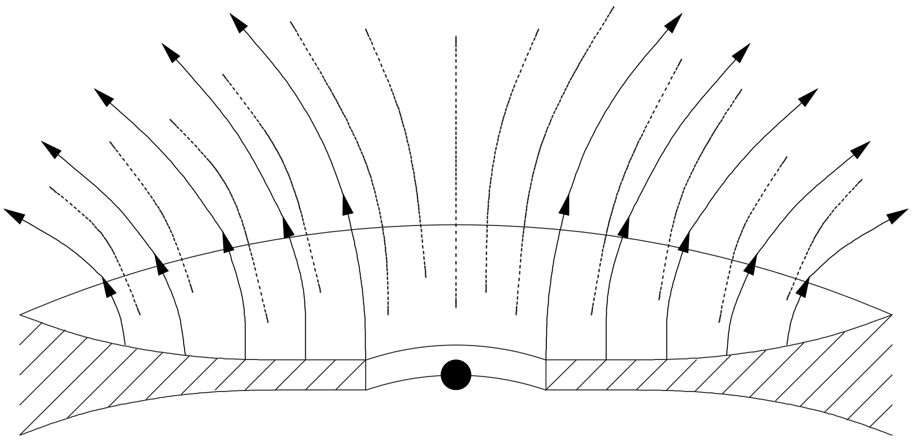

Abbildung 4: Stromlinien des Scheibenwindes (schematisch)

lich von der Höhe über der Scheibe, also von z, abhängt, weil der Wind aus der Scheibenebene heraus angetrieben wird und die anderen Komponenten sich aufheben. In der Scheibe selbst gibt es nur eine verhältnismäßig langsame Driftgeschwindigkeit zum Zentrum hin, bewirkt durch die Gravitation und die dissipativen Prozesse[6]. In der Nähe der Oberfläche sind die Bedingungen noch ähnlich, da auch die radiale Komponente der Beschleunigung durch Strahlung gering sein wird, denn die relevanten Beiträge von Gebieten an der

[6]siehe Kap. 1.2 und Kap. 5 in [FKR02]

Scheibenoberfläche wirken entgegengesetzt und unterscheiden sich in Scheibennähe in ihrem Betrag nur geringfügig. Entfernt sich aber ein Gasteilchen von der Scheibe, sieht es im Allgemeinen eine asymmetrische Strahlungsquelle, so dass es eine in radialer Richtung nach außen wirkende Kraft spürt. Gleichzeitig steigt zwar zunächst auch die Gravitationskraft an, die das Gas zum Zentrum hin beschleunigt, jedoch fällt sie nach Erreichen eines Maximums wieder ab. Neben diesen Effekten spielen auch noch Zentrifugalkräfte eine Rolle, denn die Teilchen nehmen aus der Scheibenrotation eine nicht zu vernachlässigende tangentiale Geschwindigkeitskomponente mit. Diese ist wiederum auch dafür verantwortlich, dass man die dritte Dimension des Flusses neben v_s und v_z eigentlich berücksichtigen muss. Tatsächlich spiralt der Wind aus der Scheibe empor und dünnt langsam aus (siehe Abb.4).

Neben der Massen- und Impulserhaltung spielt auch die Erhaltung der Energie eine Rolle. Allerdings lassen sich die folgenden Rechnungen auch ohne eine Energiegleichung durchführen. Nur wird am Ende eine zunächst nicht näher spezifizierte Größe für die Schallgeschwindigkeit in den Gleichungen stehen bleiben. Im Allgemeinen ist diese als eine Funktion des Ortes anzusehen und hängt von den lokalen thermodynamischen Bedingungen des Ionengases ab. Im einfachsten Fall geht man von einer isothermen Zustandsgleichung aus.

$$T = \mathsf{const}$$

Dann erhält man das Quadrat der isothermen Schallgeschwindigkeit mit Hilfe der idealen Gasgleichung

$$c_{\mathrm{s}}^2 = \frac{P}{\varrho} = \frac{\mathscr{R}T}{\mu} = \mathsf{const} \quad .$$

$\mathscr{R}$ ist die allgemeine Gaskonstante und mit μ wird das mittlere molekulare Gewicht bezeichnet. Es ist jedoch sinnvoll sich nicht auf diesen Spezialfall einer Zustandsgleichung zu beschränken, sondern die Herleitung der Windgleichung ganz allgemein durchzuführen. So erhält man sich nämlich die Möglichkeit, bei der Lösung der Windgleichung verschiedene thermodynamische Szenarien zu testen. Denkbar wäre dann z.B. auch eine komplizierte Energiegleichung, die radiative, konvektive und auch dissipative Prozesse berücksichtigt.

7 Eindimensionales Modell

Nach einem Ansatz, der auf Meier [Mei79] zurückgeht, vernachlässigt man zunächst einmal die φ-Abhängigkeit und geht davon aus, dass die Winkelgeschwindigkeit auch weit oberhalb der Scheibe unabhängig von z ist. Das

Auseinanderlaufen der Stromlinien "simuliert" man durch die Einführung eines künstlichen Geometriefaktors $A(s,z)$, der dafür sorgen soll, dass die Gleichungen von der zylindrischen Symmetrie in der Nähe der Scheibe in die Kugelsymmetrie für große Abstände stetig überführt werden.

Als erstes schreibt man die Erhaltungsgleichungen in Zylinderkoordinaten hin, dann werden alle Terme mit φ-Ableitungen vernachlässigt. Bei den verbleibenden Termen ersetzt man alle z-Ableitungen, die auf Divergenzen zurückzuführen sind, gemäß der Regel

$$\frac{\partial U}{\partial z} \to \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}\big(A \cdot U\big)$$

und *alle* s-Ableitungen durch

$$\frac{\partial U}{\partial s} \to \pm\frac{U}{Al} \ .$$

Hierbei sind A der geometrische Korrekturfaktor, U die jeweilige Vektorkomponente und l eine charakteristische Länge. Beim Vorzeichen in der letzten Regel muss man sich etwas von der Intuition leiten lassen.

Für die Kontinuitätsgleichung (6.1) erhält man dann

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\big(\varrho v_s s\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(\varrho v_z\big) \sim \frac{\varrho v_s}{lA} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial z}\big(\varrho v_z A\big) = 0$$

und mit der als unabhängig von z anzusehenden Konstanten $\mathscr{C} = -v_s/l$

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(\varrho v_z A\big) = \mathscr{C}\varrho \ . \tag{7.1}$$

Mit der Impulsgleichung wird ebenso verfahren, allerdings ist darauf zu achten, dass die Ableitung der Geschwindigkeit in diesem Fall keine Divergenz darstellt und daher nicht korrigiert werden muss. Für die z-Komponente dieser Vektorgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Big[\big(\vec{v}\cdot\nabla\big)\vec{v}\Big]_z &= v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_s\frac{\partial v_z}{\partial s} \\ &\sim v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} - \mathscr{C}\frac{v_z}{A} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} + g_{\mathrm{rad},z} \ .\end{aligned}$$

Der Druckterm lässt sich gemäß Gleichung (4.3) umschreiben und mit Hilfe von Gleichung (7.1) durch die Geschwindigkeit bzw. deren Ableitung ausdrücken.

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{c_\mathrm{s}^2}{v_z^2}v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{c_\mathrm{s}^2}{A}\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{c_\mathrm{s}^2\mathscr{C}}{Av_z} - \frac{\partial c_\mathrm{s}^2}{\partial z}$$

Zusammen mit dem Gradienten für das Gravitationspotential (6.3) erhält man dann

$$\left(1-\frac{c_\mathrm{s}^2}{v_z^2}\right)v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}-\left(1-\frac{c_\mathrm{s}^2}{v_z^2}\right)\frac{\mathscr{C}v_z}{A}=-\frac{MGz}{s^3A^{3/2}}+\frac{c_\mathrm{s}^2}{A}\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial c_\mathrm{s}^2}{\partial z}+g_{\mathrm{rad},z}\quad .$$

Wir führen eine neue dimensionslose Variable ein:

$$u(z,s):=\arctan\left(\frac{z}{s}\right)-\frac{\pi}{2} \tag{7.2}$$

mit

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1/s}{1+\left(\frac{z}{s}\right)^2}=\frac{1}{As}\quad . \tag{7.3}$$

Ferner soll die Geschwindigkeit v_z ersetzt werden durch

$$w:=\frac{1}{2\Gamma_\mathrm{e}s_0}v_z^2 \tag{7.4}$$

mit der Konstanten

$$\Gamma_\mathrm{e}=\frac{3L_\mathrm{D}}{4\pi s_0^2}\frac{\sigma_\mathrm{e}}{c}\quad . \tag{7.5}$$

Ebenso verfährt man mit der Schallgeschwindigkeit.

$$a:=\frac{1}{2\Gamma_\mathrm{e}s_0}c_\mathrm{s}^2 \tag{7.6}$$

L_D und s_0 sind die Leuchtkraft und der innere Radius der Akkretionsscheibe, σ_e bezeichnet den Thomson-Wirkungsquerschnitt für Elektronenstreuung. Nimmt man die entsprechenden Modifikationen vor und multipliziert die ganze Gleichung mit $As/\Gamma_\mathrm{e}s_0$, so erhält man

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{a}{w}\right)\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u}-\left(1-\frac{a}{w}\right)\mathscr{C}\sqrt{\frac{2s_0}{\Gamma_\mathrm{e}}}\frac{s}{s_0}\sqrt{w}&\\ =-\frac{MG}{\Gamma_\mathrm{e}s_0^2}\frac{\tan\left(u+\pi/2\right)}{\sqrt{A}}\frac{s_0}{s}+4a\tan\left(u+\pi/2\right)-2\frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}u}+\frac{As}{\Gamma_\mathrm{e}s_0}\,g_{\mathrm{rad},z}\quad .&\end{aligned}$$

A ist nach wie vor der geometrische Korrekturfaktor, den wir allerdings bislang noch nicht weiter spezifiziert haben. Dieser Faktor ist nicht eindeutig, man sollte lediglich darauf achten, dass er in Scheibennähe +1 wird und weit weg von der Scheibe mit z^2 geht.

$$A(z,s) = 1 + \frac{z^2}{s^2} \tag{7.7}$$

bzw. in der neuen Variablen u

$$A(u) = 1 + \tan^2\big(u + \pi/2\big) = \frac{1}{\cos^2(u+\pi/2)} \quad . \tag{7.8}$$

Um die Gleichung noch ein wenig kompakter schreiben zu können, führt man noch die dimensionslose Variable $\lambda = s_0/s$ ein und setzt den obigen Ausdruck für $A(u)$ ein. So erhält man zunächst wieder eine vorläufige Windgleichung, da die Strahlungsbeschleunigung noch genauer untersucht werden muss.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{a}{w}\right)\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u} - \left(1-\frac{a}{w}\right)\mathscr{C}\sqrt{\frac{2s_0}{\Gamma_\mathrm{e}}\frac{1}{\lambda}\sqrt{w}}\\ = -\frac{MG}{\Gamma_\mathrm{e}s_0^2}\lambda\sin(u+\pi/2) + 4a\tan(u+\pi/2)\\ -2\frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}u} + \frac{1}{\Gamma_\mathrm{e}\lambda\cos^2(u+\pi/2)}\, g_{\mathrm{rad},z}\end{aligned} \tag{7.9}$$

8 Der Beschleunigungsterm

Wie schon bei den Sternwinden ist die alles entscheidende Größe in der Windgleichung die Beschleunigung durch Strahlung. Die Methode zur Beschaffung dieses Terms unterscheidet sich eigentlich nicht von der bei Sternen, jedoch darf bei Akkretionsscheiben die geometrische Struktur der Strahlungsquelle nicht auf einen Punkt reduziert werden. In weiter Entfernung ist diese Näherung sicherlich wieder richtig, allerdings bekommt man in der Nähe der Scheibenoberfläche ganz erhebliche Probleme, denn anders als bei Sternen ist der Strahlungsfluss an der Oberfläche keine Konstante, sondern eine Funktion des Ortes, wie wir schon in Kapitel 3 gesehen haben.

8.1 Beschleunigung durch Elektronenstreuung

Wir gehen aus von Gleichung (5.7) und nehmen an, dass die Beschleunigung überwiegend in z-Richtung erfolgt.

$$g_{\mathrm{e},z} = \hat{e}_z \cdot \vec{g}_{\mathrm{rad,e}} = \frac{1}{c}\oint \sigma_\mathrm{e} I(\hat{n})\hat{e}_z\cdot\hat{n}\ \mathsf{d}\Omega = \frac{\sigma_\mathrm{e}}{c}\oint I(\hat{n})\cos\vartheta\ \mathsf{d}\Omega$$

Die Integration muss am Punkt der Wechselwirkung W in Kugelkoordinaten (R, ϑ, ϕ) über den unteren Halbraum erfolgen (siehe Abb. 5). ϑ ist der Winkel zwischen der Vertikalen und der Richtung, aus der der Strahlungsbeitrag vom Ort D an der Scheibenoberfläche kommt.

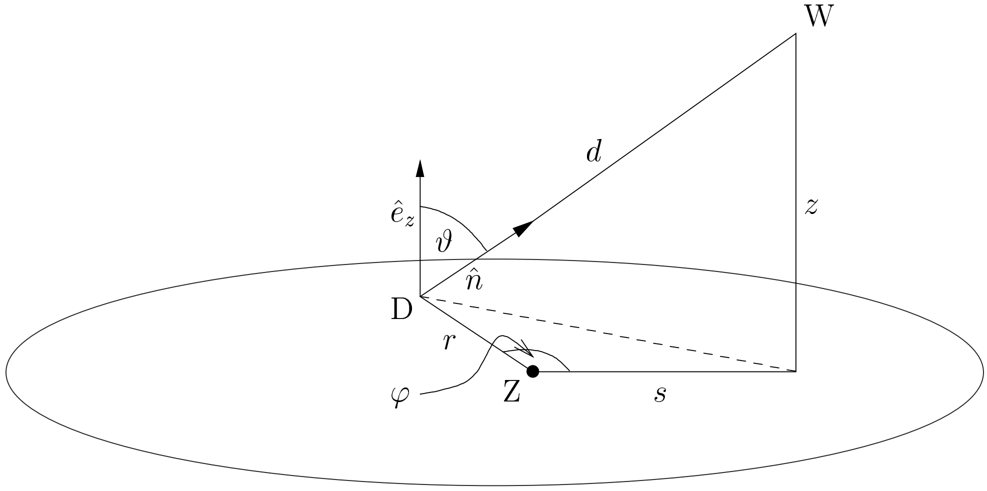

Abbildung 5: Beschleunigungsbeitrag von einem Flächenelement

An dieser Stelle ist es vielleicht angebracht, ein Wort über die verwendeten Koordinatensysteme zu verlieren. Wir haben zunächst die Kugelkoordinaten um W, darin schreibt sich das Raumwinkelelement $\mathsf{d}\Omega$ folgendermaßen:

$$\mathsf{d}\Omega = \sin\vartheta \ \mathsf{d}\vartheta \ \mathsf{d}\phi = \ \mathsf{d}(-\cos\vartheta) \ \mathsf{d}\phi = \ \mathsf{d}\mu \ \mathsf{d}\phi$$

mit

$$\mu = -\cos\vartheta \ .$$

Es bietet sich natürlich an, da die Scheibe die einzige Strahlungsquelle ist, die Integration nicht über den Raumwinkel, sondern über die Scheibenoberfläche durchzuführen. Dazu benötigt man die ebenen Polarkoordinaten in der Scheibe (r, φ). Die beiden Koordinatenpaare lassen sich durch

$$\mu = -\frac{z}{d} \qquad \text{und} \qquad \phi = \arcsin\left(\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{d^2 - z^2}}\right)$$

mit dem Abstand zwischen den Punkten D und W

$$d(r, \varphi) = \sqrt{(r^2 + s^2 + z^2 - 2rs\cos\varphi}$$

ineinander überführen. Dabei ist zu beachten, dass die Variablen s und z den Punkt in Zylinderkoordinaten bezeichnen, an dem die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Gasteilchen stattfindet. Sie haben nichts mit den Integrationsvariablen zu tun. Der Punkt W wird während der ganzen Integration festgehalten.

Für den Übergang zwischen beiden Koordinatensystemen benötigt man die Funktionaldeterminante $\mathscr{J}$.

$$\mathscr{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mu}{\partial r} & \dfrac{\partial \mu}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial r} & \dfrac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \frac{zr}{d^3}$$

So können wir für das Raumwinkelelement auch

$$\mathsf{d}\Omega = \frac{zr}{d^3}\ \mathsf{d}r\ \mathsf{d}\varphi$$

schreiben und erhalten für das Integral

$$g_{\mathrm{e},z} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{c} \int\limits_{s_0}^{s_\mathrm{D}} \int\limits_{0}^{2\pi} I(r) \frac{z}{d} \frac{zr}{d^3}\ \mathsf{d}r\ \mathsf{d}\varphi \ .$$

Man sieht sofort den Vorteil, den diese Transformation mit sich bringt, denn wir können jetzt die Intensität nur als Funktion von r auffassen. Im Fall $z \neq 0$ kann die φ-Integration direkt ausgeführt werden, denn nur d hängt von φ ab. Das Winkelintegral ist dann vom Typ[7]

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\left(a + b\cos\varphi\right)^{n+1}}\ \mathsf{d}\varphi = \frac{2\pi}{\left(a^2 - b^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n\!\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$$

mit den Legendrepolynomen $P_n(x)$. Für a und b muss die Relation $a > |b|$ erfüllt sein, was in in unserem Fall $z \neq 0$ entspricht. Setzen wir also den entsprechenden Ausdruck für d ein, so erhalten wir das obige Integral für $n = 1$ und können den analytischen Ausdruck hinschreiben.

$$g_{\mathrm{e},z} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{c} \int\limits_{s_0}^{s_\mathrm{D}} I(r) 2\pi r \frac{z^2(r^2 + s^2 + z^2)}{\left[\left(r^2 + s^2 + z^2\right)^2 - 4r^2 s^2\right]^{3/2}}\ \mathsf{d}r$$

[7]nachzuschlagen in [GR80] Gl. 3.661/4.

Die Intensität können wir aus Gleichung (3.1) ablesen:

$$I(r) = \frac{\mathscr{F}}{\pi} = \frac{3\dot{M}_0}{8\pi^2}\frac{MG}{r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{r}}\right) \quad ,$$

woraus mit Gl. (3.2) und Gl. (7.5) schließlich

$$I(r) = \frac{\Gamma_\mathrm{e} c}{2\pi\sigma_\mathrm{e}}\left(\frac{s_0}{r}\right)^3\left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{r}}\right) \tag{8.1}$$

wird. Also lautet das Ergebnis

$$g_{\mathrm{e},z} = \Gamma_\mathrm{e}\int\limits_{s_0}^{s_\mathrm{D}} \frac{s_0^3}{r^2}\left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{r}}\right)\frac{z^2(r^2+s^2+z^2)}{\left[\left(r^2+s^2+z^2\right)^2 - 4r^2s^2\right]^{3/2}}\,\mathsf{d}r$$

oder, indem man die oben schon definierten Variablen λ und $A(u)$ verwendet und noch eine Variablentransformation $x = s_0/r$ durchführt,

$$g_{\mathrm{e},z} = \Gamma_\mathrm{e}\lambda^2(A-1)\int\limits_{s_0/s_\mathrm{D}}^{1} \frac{(1-\sqrt{x})(Ax^2+\lambda^2)x^4}{\left[\left(Ax^2+\lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2x^2\right]^{3/2}}\,\mathsf{d}x \quad .$$

Dieses Integral lässt sich nicht mehr analytisch auswerten und muss daher numerisch berechnet werden. Das ist kein größeres Problem, denn man kann auf Standardverfahren wie z.B. die Rombergintegration zurückgreifen. Allerdings ist darauf zu achten, dass für $A \to 1$ also $z \to 0$ der Integrand an der Stelle λ singulär wird.

Betrachten wir daher den Fall $z = 0$ gesondert. Das Winkelintegral kann nicht wie oben ausgeführt werden, da $a = |b|$ gilt. Man kann jedoch zeigen[8], dass

$$\lim_{z\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{z^2 r}{d^4}\,\mathsf{d}\varphi = \lim_{z\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{rz^2}{(r^2+s^2+z^2-2rs\cos\varphi)^2}\,\mathsf{d}\varphi = \pi\delta^+(r-s)$$

gilt. Führt man diesen Grenzübergang durch und ersetzt das φ-Integral durch die Delta-Distribution, so erhält man genau das, was zu erwarten ist.

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{e},z}(z=0) &= \frac{\sigma_\mathrm{e}}{c}\int\limits_{s_0}^{s_\mathrm{D}} I(r)\pi\delta^+(r-s)\,\mathsf{d}r = \frac{\sigma_\mathrm{e}}{c}\pi I(s) \\ &= \frac{\sigma_\mathrm{e}\mathscr{F}(s)}{c} = \Gamma_\mathrm{e}\frac{1}{2}\lambda^3\left(1-\sqrt{\lambda}\right) \end{aligned}$$

[8]siehe Anhang A

Die Beschleunigung an der Scheibenoberfläche im Punkt (s, φ) wird nur durch den Fluss an eben genau diesem Punkt bewirkt. Zusammenfassen kann man die Beschleunigung durch Elektronenstreuung also folgendermaßen:

$$g_{\mathrm{rad,e}} = \Gamma_{\mathrm{e}} \lambda^2 f_{\mathrm{e}}(z, \lambda) \tag{8.2}$$

wobei die Funktion $f_{\mathrm{e}}(z, s)$ definiert ist durch

$$f_{\mathrm{e}}(z, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda\big(1 - \sqrt{\lambda}\big) & \text{für } z = 0 \\ (A-1) \int\limits_{s_0/s_{\mathrm{D}}}^{1} \frac{(1-\sqrt{x})(Ax^2+\lambda^2)x^4}{\Big[\big(Ax^2+\lambda^2\big)^2 - 4\lambda^2 x^2\Big]^{3/2}} \,\mathrm{d}x & \text{für } z > 0 \end{cases} \tag{8.3}$$

Es ist zu beachten, dass in der Windgleichung statt z die Variable u verwendet wird. Dementsprechend sind alle Funktionen von z in solche von u umzuwandeln. Es gilt zum Beispiel:

$$A(z, s) = 1 + \frac{z^2}{s^2} = 1 + \tan^2(u + \pi/2) = A(u) \ .$$

8.2 Beschleunigung durch Linienabsorption

Der Anteil an der Beschleunigung, der durch die Linienabsorption zustande kommt, wird mit Hilfe der parametrisierten Form aus der CAK-Theorie ausgedrückt. Es ist daher das Integral aus Gleichung (5.4) auszuwerten. Die darin vorkommende optische Dicke in der Sobolev-Approximation $\tau_l(\hat{n})$ muss auf den Fall der Scheibenwinde übertragen werden.

$$\tau_l(\hat{n}) = \frac{\varrho \kappa_l c/\nu_0}{|\hat{n} \cdot \nabla(\hat{n} \cdot \vec{v})|}$$

Wir gehen davon aus, dass die beschleunigende Kraft überwiegend in Richtung von z wirkt und die anderen Beiträge zu vernachlässigen sind.

$$|\hat{n} \cdot \nabla(\hat{n} \cdot \vec{v})| \approx \left| \hat{n} \cdot \hat{e}_z \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} \right|$$

Das Skalarprodukt der beiden Einheitsvektoren kann über den Kosinus des eingeschlossenen Winkels berechnet werden, der in unserem Fall immer größer als Null ist, da $|\vartheta| < \pi/2$. Man mache sich das anhand von Abbildung 5 klar. Also können wir für die optische Dicke

$$\tau_l(\vartheta) = \frac{\varrho \kappa_l c/\nu_0}{\cos\vartheta} \left| \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} \right|^{-1}$$

schreiben bzw. nach der Variablentransformation $z \to u$

$$\tau_l(\vartheta) = \frac{\varrho v_z A s \kappa_l c/\nu_0}{\cos\vartheta} \left| v_z \frac{\mathsf{d}v_z}{\mathsf{d}u} \right|^{-1} .$$

Probleme bereitet einem jetzt noch das Produkt aus Dichte, Geschwindigkeit und Geometriefaktor. Im CAK-Modell lassen sich diese Größen durch die Konstante Massenverlustrate ausdrücken, hier allerdings kann man strenggenommen nicht so vorgehen, da wegen Gleichung (7.1) dieses Produkt leider von z abhängt. Man kann sich allerdings mit der Erklärung herauswinden, dass in Scheibennähe $\varrho v_z A$ die lokale Massenverlustrate pro Oberflächenelement wiedergibt und daher im statischen Wind als konstant anzusehen ist. Das Argument lautet nun: Da die Beschleunigung in der Nähe der Scheibe am effektivsten funktioniert, können wir an dieser Stelle in der Scheibennäherung rechnen und die lokale Massenverlustrate

$$\dot{m}(s) = \varrho v_z A$$

als nahezu unabhängig von z ansehen. Fassen wir nun alles zusammen und setzen die optische Dicke in Gleichung (5.4) ein, wobei wir die Beziehung (5.3) ausnutzen, so bekommen wir die z-Komponente der Linienbeschleunigung.

$$g_{\text{rad,L}} = \frac{\sigma_\text{e}}{c} \oint I(\hat{n}) k \left(\frac{\Gamma_\text{e} s_0}{s \sigma_\text{e} v_\text{th} \dot{m}} \cos\vartheta \left| \frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u} \right| \right)^\alpha \hat{n} \cdot \hat{e}_z \, \mathsf{d}\Omega$$

Einsetzen der Intensität (8.1) und Herausziehen der winkelunabhängigen Größen aus dem Integral liefert:

$$g_{\text{rad,L}} = \Gamma_\text{e} k \left(\frac{\Gamma_\text{e} s_0}{s \sigma_\text{e} v_\text{th} \dot{m}} \left| \frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u} \right| \right)^\alpha \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{s_0}{r}\right)^3 \left(1 - \sqrt{\frac{s_0}{r}}\right) (\cos\vartheta)^{\alpha+1} \, \mathsf{d}\Omega \ .$$

Dabei ist r als Funktion von ϑ und ϕ aufzufassen, denn wir haben an dieser Stelle keine Transformation der Variablen in ebene Polarkoordinaten vorgenommen. Dies hat auch wenig Sinn, denn selbst dann ist es nicht möglich, auch nur eine Integration des Flächenintegrals auszuführen. Wir definieren statt dessen

$$\begin{aligned} x(u, \lambda, \vartheta, \phi) &= \frac{s_0}{r} = \frac{\lambda s}{r} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 2\tan\vartheta\cos\phi\tan(u + \pi/2) + \tan^2\vartheta\tan^2(u + \pi/2)}} \end{aligned}$$

und schreiben die Beschleunigung noch etwas kompakter:

$$g_{\mathrm{rad,L}} = \Gamma_{\mathrm{e}} \mathscr{D} \left| \frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u} \right|^{\alpha} f_{\mathrm{L}}(u, \lambda) \tag{8.4}$$

mit

$$\mathscr{D} = k \left(\frac{\Gamma_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{th}} \dot{m}} \right)^{\alpha}$$

und dem Restintegral

$$f_{\mathrm{L}}(u, \lambda) = \lambda^{\alpha} \frac{1}{2\pi} \oint x^3 \big(1 - \sqrt{x}\big) \big(\cos \vartheta\big)^{\alpha+1} \, \mathsf{d}\Omega \ . \tag{8.5}$$

Wie dieses Integral numerisch auszuwerten ist, werde ich im nächsten Abschnitt darlegen.

8.3 Algorithmus zur Berechnung des Flächenintegrals

Die numerische Berechnung von mehrdimensionalen Integralen gestaltet sich etwas schwieriger als die von eindimensionalen. Es gibt zwar auch eine Reihe von Standardverfahren für derartige Probleme, aber ob sie zum Ziel führen, ist oftmals fraglich. Man kann z.B. versuchen, das Integral aus dem letzten Abschnitt mit einem einfachen Monte-Carlo-Integrator zu lösen und wird feststellen, dass man ziemlich schlechte Ergebnisse bekommt. Zum Test eines Verfahrens setzt man den Paramter α einfach auf 0. Dann erhält man ein Integral, dessen Winkelintegration wie im Abschnitt 8.1 beschrieben ausgeführt werden kann. Das numerische Ergebnis des verbleibenden eindimensionalen Integrals kann als ziemlich exakter Referenzwert angesehen werden.
Die Idee hinter dem im folgenden geschilderten Algorithmus ist recht einfach zu verstehen. Wie in Abbildung 6 unschwer zu erkennen ist, ist der Punkt der Scheibe, der dem Auswertungspunkt W am nächsten liegt, die senkrechte Projektion von W. Von dort wird in den allermeisten Fällen der größte Beschleunigungsbeitrag zu erwarten sein, weil der Strahlungsfluss quadratisch mit dem Abstand abnimmt. Also wird der Fehler im Integral durch diesen Anteil dominiert. Diesen Fehler kann man aber durch die Wahl eines geeignet kleinen Raumwinkelelements $\Delta\Omega$ minimieren. Summiert man nun über alle Raumrichtungen, sollten die Fehler geringer sein als der zuerst gemachte. Wir approximieren also das Integral (8.5) durch eine Summation

$$f_{\mathrm{L}}(u, \lambda) \approx \lambda^{\alpha} \frac{1}{2\pi} \sum_{\vartheta_i, \phi_j} x^3(\vartheta_i, \phi_j) \Big(1 - \sqrt{x(\vartheta_i, \phi_j)}\Big) \big(\cos \vartheta_i\big)^{\alpha+1} \Delta\Omega$$

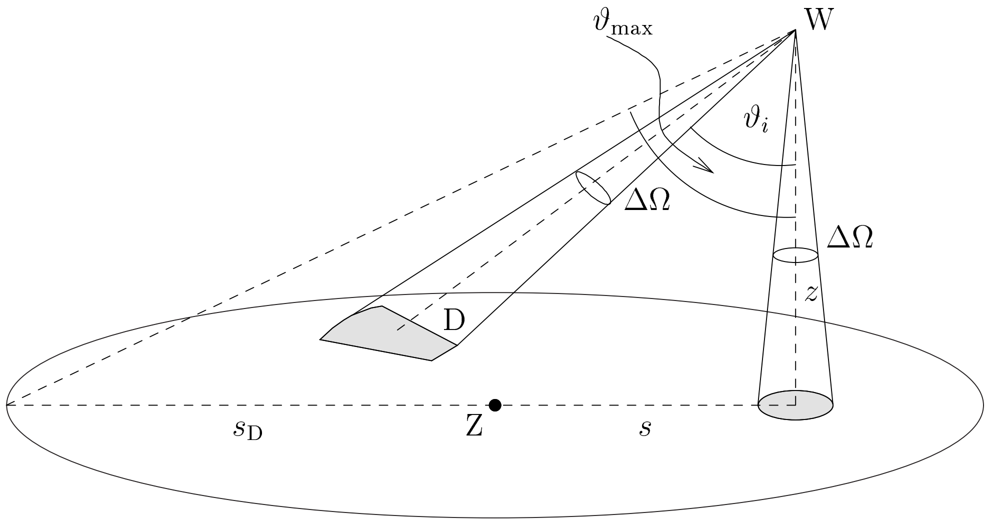

Abbildung 6: Integration über konstanten Raumwinkel

mit festem Raumwinkelelement $\Delta\Omega$. Der Beitrag 0. Ordnung ist schnell hingeschrieben, denn es gilt $z = 0$, also $x = \lambda$ und $\cos(\vartheta_0 = 0) = 1$ und daher

$$S_0 = \lambda^\alpha \frac{1}{2\pi} \lambda^3 \big(1 - \sqrt{\lambda}\big) \Delta\Omega \ .$$

Für die 1. Ordnung erhöhen wir ϑ um $\Delta\vartheta = \sqrt{\Delta\Omega/\pi}$, also ist $\vartheta_1 = \sqrt{\Delta\Omega/\pi}$. Dann summieren wir bei festgehaltenem ϑ_1 über ϕ_j und zwar in Schritten von $\Delta\phi_j = \sqrt{\Delta\Omega}/\sin\vartheta_i$. Das gewährleistet die Konstanz von $\Delta\Omega$. Bei allen folgenden Schritten geht man ebenso vor, jedoch ist als Inkrement für ϑ lediglich $\sqrt{\Delta\Omega}$ zu wählen. Das hängt damit zusammen, dass man in der 0. Ordnung keine ϕ-Summation durchführt.

Zu klären ist noch die Abbruchbedingung. Im Falle von ϑ ist sie durch

$$\theta_{\max} = \arctan\left(\frac{s_{\mathrm{D}} + s}{z}\right)$$

(siehe Abb. 6) gegeben. Bei der φ-Summation testet man einfach, ob man außerhalb der Scheibe gelandet ist.

$$x < x_{\min} = \frac{s_0}{s_{\mathrm{D}}}$$

Ein Problem des Algorithmus ist, dass kleine Werte von $\Delta\Omega$ benötigt werden, um eine angemessene Genauigkeit zu erzielen. Das wiederum erfordert eine große Zahl von Rechenschritten in der Summation und damit eine hohe

Laufzeit. Zur Verbesserung der Methode kann man die Symmetrie des Problems ausnutzen und statt von 0 bis 2π nur bis $\phi_{\max} = \pi$ integrieren und das Ergebnis mit 2 multiplizieren. Ferner sollte man versuchen, die Zahl der Funktionsauswertungen zu minimieren, das gilt insbesondere bei der ziemlich rechenintensiven Bestimmung von $x(\vartheta_i, \phi_j)$.

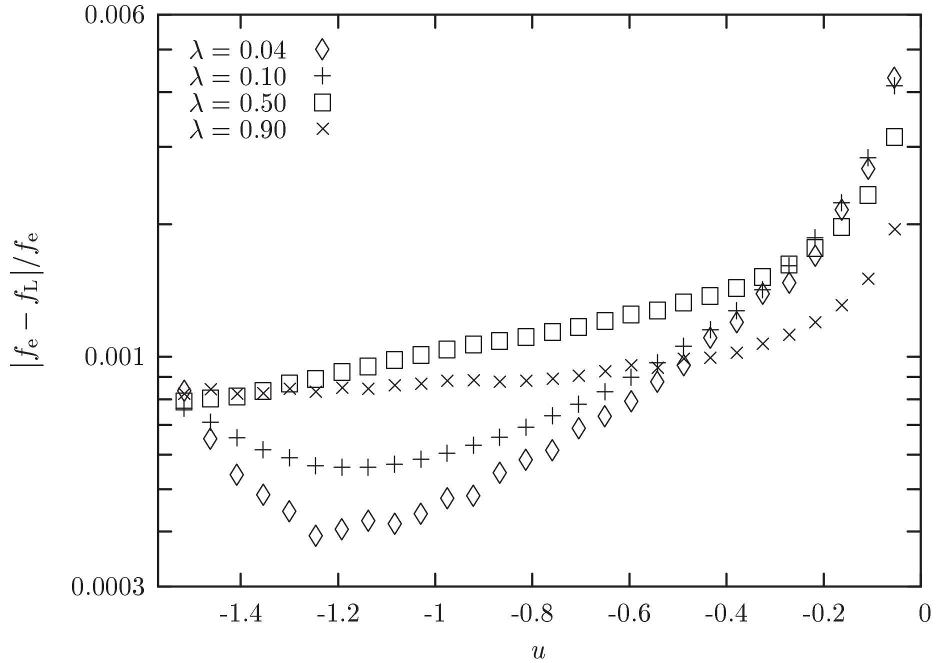

Abbildung 7: Relativer Fehler von $f_L(u, \lambda)$

Die Genauigkeit lässt sich noch etwas verbessern, indem man den Integranden in der Mitte des Raumwinkelelements, also bei $\vartheta_i + \Delta\vartheta_i/2$ bzw. $\phi_j + \Delta\phi_j/2$ auswertet. Außerdem ist es ratsam das Raumwinkelelement, das ja bei einer Integration mit festem u konstant gehalten wird, für größere u kleiner zu wählen. Das leuchtet unmittelbar ein, wenn man sich vorstellt, dass man schon so weit von der Scheibe entfernt ist ($u \approx 0$), dass beim ersten Rechenschritt die gesamte Scheibe im Raumwinkel liegt. Das dann erzielte Ergebnis ist eher eine Glückssache.

Trotz des relativ simplen Verfahrens gelangt man zu recht brauchbaren Ergebnissen. In Abbildung 7 ist für verschiedene Werte des Parameters λ der relative Fehler der Berechnung mittels Doppelsummen aufgetragen. Dieser wurde mit dem oben schon geschilderten Testverfahren ermittelt. Wie man leicht sieht, nimmt die Güte der Berechnungen bei großen Abständen von der Scheibe, also für $u \to 0$, stark ab. Das soll uns aber nicht weiter beunruhigen, denn wie zuvor schon einmal erwähnt, ist die Effektivität der Linienbeschleunigung in der Nähe der Scheibe am größten und nimmt dann rapide ab. Das hat zur Folge, dass die Beschleunigung des Windes für $u \to 0$ schnell gegen 0 geht und daher der Term, in dem das obige Integral in der Windgleichung von Bedeutung ist, verschwindet.

9 Die Windgleichung

Tragen wir also die bisherigen Resultate zusammen. In der vorläufigen Windgleichung (7.9) war der Beschleunigungsterm noch nicht weiter spezifiziert worden. Das ist in den beiden vorangegangenen Kapiteln geschehen. Die Gesamtbeschleunigung durch Strahlung setzt sich – wie bei den Sternwinden – additiv aus denen durch Elektronenstreuung Gl. (8.2) und Linienabsorption Gl. (8.4) zusammen.

$$g_{\mathrm{rad},z} = \Gamma_{\mathrm{e}}\lambda^2 f_{\mathrm{e}}(z,\lambda) + \Gamma_{\mathrm{e}}\mathscr{D}\left|\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u}\right|^{\alpha} f_{\mathrm{L}}(u,\lambda)$$

Dieses in Gleichung (7.9) eingesetzt, liefert die komplette Windgleichung.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{a}{w}\right)\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u} - \left(1-\frac{a}{w}\right)\mathscr{C}\sqrt{\frac{2s_0}{\Gamma_{\mathrm{e}}}\frac{1}{\lambda}}\sqrt{w} \\ = -\frac{MG}{\Gamma_{\mathrm{e}}s_0^2}\lambda\sin(u+\pi/2) + 4a\tan(u+\pi/2) \\ - 2\frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}u} + \frac{\lambda}{\cos^2(u+\pi/2)}f_{\mathrm{e}}(u,\lambda) \\ + \mathscr{D}\left|\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u}\right|^{\alpha}\frac{1}{\lambda\cos^2(u+\pi/2)}f_{\mathrm{L}}(u,\lambda)\end{aligned}$$

Wir führen noch einige neue Bezeichnungen ein, um die Gleichung noch etwas kompakter schreiben zu können.

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2s_0}{\Gamma_{\mathrm{e}}}\frac{1}{\lambda}} \tag{9.1}$$

$$D(u,\lambda) = \frac{1}{\lambda\cos^2(u+\pi/2)}f_{\mathrm{L}}(u,\lambda) \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned}H(u,\lambda) = -\frac{MG}{\Gamma_{\mathrm{e}}s_0^2}\lambda\sin(u+\pi/2) + 4a\tan(u+\pi/2) \\ - 2\frac{\mathsf{d}a}{\mathsf{d}u} + \frac{\lambda}{\cos^2(u+\pi/2)}f_{\mathrm{e}}(u,\lambda)\end{aligned} \tag{9.3}$$

Damit sieht die Windgleichung dann folgendermaßen aus.

$$\left(1-\frac{a}{w}\right)\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u}-\mathscr{C}C(\lambda)\left(1-\frac{a}{w}\right)\sqrt{w}-\mathscr{D}D(u,\lambda)\left|\frac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}u}\right|^{\alpha}-H(u,\lambda)=0 \quad (9.4)$$

Ich nächsten Abschnitt werde ich näher auf die Struktur dieser Gleichung eingehen und einen möglichen Weg zur Lösung angeben. An dieser Stelle möchte ich statt dessen noch ein paar Worte zu den Konstanten $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ verlieren. Leider handelt es sich bei letzterer nicht wirklich um eine Konstante. Die Hoffnung ist nur, dass ihre z-Abhängigkeit nicht wesentlich zu Buche schlägt.

Um sich die Zusammenhänge klar zu machen, geht man noch einmal zurück zur Massenerhaltung in Gleichung (7.1) und integriert diese.

$$\int\limits_{-z}^{z}\frac{\partial}{\partial z'}\big(\varrho v_z A\big)\ \mathsf{d}z' = \mathscr{C}\int\limits_{-z}^{z}\varrho\ \mathsf{d}z' =: \mathscr{C}\Sigma(s,z)$$

Die rechte Seite definiert die neue Größe Σ, die nicht mit der Flächendichte aus der Scheibendynamik zu verwechseln ist. Die Scheibe wird als infinitesimal dünn angenommen, so dass der Dichtebeitrag aus der Scheibenebene nicht berücksichtigt werden muss; es geht hier nur um die in der Atmosphäre versammelten Gasmassen. Mit den Symmetriebedingungen

$$\begin{aligned}\varrho(-z) &= \varrho(z)\\ A(-z) &= A(z)\\ v_z(-z) &= -v_z(z)\end{aligned}$$

kann die linke Seite der Gleichung direkt integriert und die gesamte Gleichung durch 2 dividiert werden.

$$\varrho(s,z)v_z(s,z)A(s,z)=\frac{1}{2}\mathscr{C}\Sigma(s,z) \quad (9.5)$$

Im Limes $z\to\infty$ ergibt sich dann

$$\lim_{z\to\infty}\varrho v_z A=\lim_{z\to\infty}\varrho v_z z^2/s^2=\frac{\dot{M}}{4\pi s^2}\ ,$$

also ein Zusammenhang mit der *totalen* Massenverlustrate der Scheibe. Man sieht an dieser Stelle, dass $\mathscr{C}$ konstant und somit ein echter Eigenwert des Windproblems ist.

Wie sieht es nun mit $\mathscr{D}$ aus? Gleichung (9.5) macht deutlich, dass das Produkt $\varrho v_z A$ von z abhängt, was daher auch für $\mathscr{D}$ gelten muss.

$$\mathscr{D} = k\left(\frac{\Gamma_{\rm e}}{\sigma_{\rm e} v_{\rm th}\varrho v_z A}\right)^{\alpha} = k\left(\frac{2\Gamma_{\rm e}}{\sigma_{\rm e} v_{\rm th}\mathscr{C}\Sigma(s,z)}\right)^{\alpha} = \mathscr{D}(z)$$

Wie weiter oben schon angemerkt, ist dieser Faktor nur in Scheibennähe ($A \sim 1$), wichtig und dort gibt das Produkt aus Dichte und Windgeschwindigkeit die konstante *lokale* Massenverlustrate wieder, aus dem sich der *totale* Massenverlust durch Integration ergibt.

$$\dot{M} = 2\int_0^{2\pi}\int_{s_0}^{s_{\rm D}} \varrho(0) v_z(0) s \;\mathsf{d}\varphi\;\mathsf{d}s$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann wenigstens die Konsistenz einer Lösung überprüft werden, indem man Dichte und Geschwindigkeit an der Scheibenoberfläche einsetzt, integriert und mit der globalen Massenverlustrate vergleicht. Außerdem sollte das Produkt aus Dichte und Geschwindigkeit in Scheibennähe nur schwach von z abhängen.

10 Topologie der Lösungen

Wir wollen die Topologie der Lösungen wieder anhand der w'-Abhängigkeit der Windgleichung diskutieren. Wirft man einen Blick auf die Windgleichung, wird man sofort feststellen, dass sich diesbezüglich gegenüber der CAK-Gleichung nichts verändert hat.

$$F(u,w,w') = \left(1-\frac{a}{w}\right)w' - \mathscr{C}C\left(1-\frac{a}{w}\right)\sqrt{w} - \mathscr{D}D(u)|w'|^{\alpha} - H(u) = 0$$

Der einzige gänzlich neue Term ist der zweite Summand, der nur eine zusätzliche w-Abhängigkeit mit sich bringt. Wenn man also u und w beliebig vorgibt und $F(u,w,w')$ rein als Funktion von w' auffasst, ist es wieder möglich verschiedene Gebiete ausfindig zu machen, in denen keine, eine oder zwei Lösungen existieren. In Abbildung 8 ist eine Funktion vom Typ

$$f(x) = px + q|x|^{\alpha} + r \qquad \text{für } x \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$$

für unterschiedliche Parameter ($p, q < 0$) aufgetragen. Man kann sechs Fälle unterscheiden

(a) eine Lösung $p > 0$, $r < 0$

(b) zwei Lösungen $p > 0$, $r > 0$

(c) eine Lösung $p > 0$, $r > 0$

(d) keine Lösung $p > 0$, $r > 0$

(e) keine Lösung $p < 0$, $r < 0$

(f) eine Lösung $p < 0$, $r > 0$

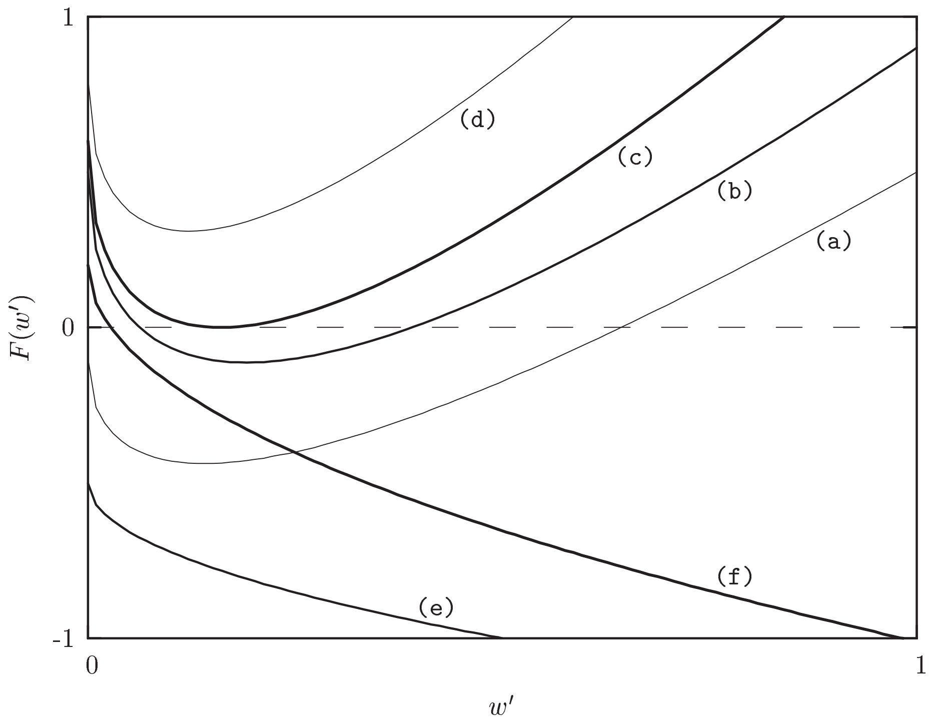

Abbildung 8: $F(u, w, w')$ als Funktion von w'

Dass der Parameter q immer kleiner als Null zu wählen ist, stimmt mit den Größen in der Windgleichung überein, denn es gilt für alle u und λ

$$\mathscr{D}D(u, \lambda) > 0$$

Das Vorzeichen von p gibt an, ob wir uns im Über- oder Unterschallbereich befinden, denn p entspricht in der Windgleichung dem Term

$$\left(1 - \frac{a}{w}\right) = \left(1 - \frac{c_\mathrm{s}^2}{v_z^2}\right)$$

Ist dieser größer als Null, bedeutet das

$$c_{\mathrm{s}}^2 < v_z^2$$

und die Gasmassen strömen mit Überschallgeschwindigkeit. Das andere Vorzeichen markiert dementsprechend den Unterschallbereich. Es ist davon auszugehen, dass das Ionengas an der Scheibenoberfläche zunächst mit Unterschallgeschwindigkeit startet, dann den Schallpunkt durchstößt und einer konstanten Endgeschwindigkeit zustrebt, die größer als die Schallgeschwindigkeit ist.

Werfen wir also einen genaueren Blick auf die Kurvenschar und versuchen etwas über die Entwicklung der Lösungen herauszufinden[9]. Zunächst haben wir sowohl für Unterschallströmungen als auch für Überschallströmungen Gebiete, in denen keine Lösungen existieren: `(e)` und `(d)`. Die einzige verbleibende Unterschalllösung ist dann `(f)`. Mit ihr startet man also an der Scheibenoberfläche. Dann sind zwei Entwicklungen möglich. Die erste wäre ein Verbleiben im Unterschallbereich, das hätte zur Folge, dass man zwangsläufig in den Bereich `(e)` mit keiner Lösung gerät, denn für $u \to 0$ also $z \to \infty$ strebt der dem Parameter r entsprechende Term in der Windgleichung

$$-\mathscr{C}C\left(1 - \frac{a}{w}\right)\sqrt{w} - H(u) \mathrel{\widehat{=}} r$$

gegen $-\infty$. Die Lösung scheitert also am sogenannten Parker-Punkt u_p, an dem $r = 0$ wird. Die zweite Möglichkeit wäre ein Durchstoßen der Schallgeschwindigkeit, bevor der Parker-Punkt erreicht wird. Das bedeutet ein Vorzeichenwechsel bei p mit positivem r und damit gelangt man in das Gebiet mit zwei Lösungen. Aber auch hier läuft man irgendwann auf den Parker-Punkt zu, wo die Lösung, die der kleineren der beiden Nullstellen der Kurve `(b)` entspricht, zusammenbricht.

Die einzige Möglichkeit, auch im Fall $u \to 0$ eine Lösung zu bekommen, besteht darin, dass man gewissermaßen von der einen zur anderen Nullstelle überspringt. Dies muss allerdings stetig vonstatten gehen und das kann tatsächlich passieren, wenn nämlich beide Nullstellen zu einer verschmelzen, wie es bei der kritischen Lösung `(c)` der Fall ist. Wie man leicht sehen kann, findet das Verschmelzen am Minimum der Kurve statt, und daraus leitet sich auch die sog. Singularitätsbedingung ab (siehe Kapitel 5.4), die ein Verschwinden der Ableitung von $F(u, w, w')$ nach w' am kritischen Punkt fordert. Hat man den Übergang zur größeren der beiden Nullstellen geschafft,

[9] siehe dazu auch Abb. 3 in Kap. 5.4

darf getrost $r \to -\infty$ streben, denn die Kurve (a) besitzt immer eine Nullstelle, da wegen $p > 0$ $f(x) \to +\infty$ für $x \to \infty$.

Betrachten wir noch einmal genauer den Fall (b), aus dem sich eine Bedingung für die Existenz des Gebietes mit zwei Lösungen ableiten lässt. Wie man anhand der Kurve leicht sehen kann, muss das Minimum der Funktion $f(x)$ unterhalb der Abszisse liegen und $f(0) > 0$ gelten. Wir fordern daher

1. $p > 0$,
2. $r > 0$ und
3. $f(x_{\min}) < 0$.

Daraus ergibt sich dann folgende Relation:

$$f\left(x_{\min}\right) = p\left(-\frac{p}{\alpha q}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + q\left(-\frac{p}{\alpha q}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + r < 0$$

und somit

$$\left(-\frac{\alpha q}{p}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(-\frac{r}{\alpha q}\right) .$$

Man beachte, dass überall $q < 0$ gilt. Gibt es kein Parameterpaar (u, w), das diese Ungleichung erfüllt, existiert das Gebiet mit den zwei Lösungen nicht und es ist prinzipiell nicht möglich, einen Übergang aus dem Unterschallbereich nahe der Scheibe in den Überschallbereich im Unendlichen zu schaffen.

11 Lösungsmethode

Wie wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen haben, entspricht die Topologie der Lösungen der Scheibenwindgleichung (9.4) derjenigen der Sternwindgleichung (5.12) von Castor, Abbott und Klein. Daher ist es naheliegend, die gleichen Methoden bei der Lösung dieser gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichung anzuwenden. Im Unterschied zu den Sternwinden handelt man sich aber einen zusätzlichen Eigenwert ein. Diese Problematik ist darauf zurückzuführen, dass bei der Scheibe im Gegensatz zum Stern der lokale Massendurchsatz durch ein Flächenelement parallel zur Scheibenoberfläche nicht konstant ist. Das hat zur Folge, dass man bei den Scheibenwinden zwischen *lokalem* und *totalem* Massenverlust unterscheiden muss. Diese sind natürlich nicht unabhängig voneinander. Schließlich muss die Summe der lokalen Massenverlustraten identisch mit dem totalen Massenverlust sein. Jedoch gehen beide Größen an unterschiedlichen Stellen in die Windgleichung ein und können nicht schon von vornherein durch die jeweils andere Größe ersetzt werden. Eine Berechnung des totalen Massenverlusts setzt nämlich die Kenntnis aller lokalen Massenverlustraten für jeden Punkt $(s, \varphi, z = 0)$ an der Scheibenoberfläche voraus, welche wiederum nur durch die Lösung der Windgleichung selbst ermittelt werden können.

11.1 Kritische Punkte

Die Kunst wird also darin bestehen, beide Eigenwerte $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ so zu kalibrieren, dass eine in sich konsistente Lösung der Windgleichung möglich wird. Dazu legt man zunächst den Parameter $\mathscr{C}$ fest und wählt, der Methode von Castor, Abbott und Klein folgend, einen kritischen Punkt. Mit Hilfe des Gleichungssystems aus der Singularitätsbedingung[10]

$$\frac{\partial F}{\partial w'} = \left(1 - \frac{a}{w}\right) - \alpha \mathscr{D} D(u) |w'|^{\alpha-1} \mathrm{sign}(w') = 0 \ , \tag{11.1}$$

der Regularitätsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} + w' \frac{\partial F}{\partial w} = &- a' \frac{w'}{w} + \mathscr{C} C \frac{a'}{\sqrt{w}} - \mathscr{D} D' |w'|^{\alpha} - H' + a \left(\frac{w'}{w}\right)^2 \\ &- \frac{a}{2} \mathscr{C} C \frac{w'}{w^{3/2}} - \frac{1}{2} \mathscr{C} C \frac{w'}{\sqrt{w}} = 0 \end{aligned} \tag{11.2}$$

und der Windgleichung (9.4), jeweils auszuwerten am kritischen Punkt, lässt sich der zweite Eigenwert $\mathscr{D}$ berechnen. Dazu multipliziert man Gleichung (11.1) mit w'/α und erhält

$$\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{a}{w}\right) w' = \mathscr{D} D |w'|^{\alpha} \ . \tag{11.3}$$

Die Regularitätsbedingung führt zusammen mit (11.3) auf eine in w'/w quadratische Gleichung, wobei die Koeffizienten von $\sqrt{w}$ abhängen.

$$a \left(\frac{w'}{w}\right)^2 + \left[-a' + \left(\frac{\mathscr{C} C}{2\sqrt{w}} - \frac{D'}{\alpha D}\right)(w - a)\right] \left(\frac{w'}{w}\right) + a' \frac{\mathscr{C} C}{\sqrt{w}} - H' = 0 \tag{11.4}$$

[10] der Index c wird bei den folgenden Gleichungen weggelassen

Aus der Windgleichung bekommt man – wiederum indem man die Beziehung (11.3) ausnutzt – einen Ausdruck für w'/w.

$$\frac{w'}{w} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\mathscr{C}C}{\sqrt{w}} - \frac{H}{w-a}\right) \tag{11.5}$$

Dies kann man nun in Gleichung (11.4) einsetzen.

$$\begin{aligned} a\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\mathscr{C}C}{\sqrt{w}} - \frac{H}{w-a}\right)\right]^2 + \left[-a' + \left(\frac{\mathscr{C}C}{2\sqrt{w}} - \frac{D'}{\alpha D}\right)(w-a)\right] \\ \cdot\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\mathscr{C}C}{\sqrt{w}} - \frac{H}{w-a}\right)\right] + a'\frac{\mathscr{C}C}{\sqrt{w}} - H' = 0 \end{aligned} \tag{11.6}$$

Auf diese Weise erhält man eine Bestimmungsgleichung für w, die allerdings numerisch ausgewertet werden muss. Unter Umständen finden sich mehrere Lösungen, wobei wir uns jedoch auf diejenigen beschränken dürfen, die reell und positiv sind, denn es gilt $w \propto v_z^2$. Dennoch ist es durchaus möglich, dass der kritische Punkt nicht eindeutig festgelegt ist.

Durch sukzessives Einsetzen in die Gleichungen (11.5) und (11.3) verschafft man sich dann den Eigenwert $\mathscr{D}$, der es einem nun erlaubt, die Windgleichung numerisch zu lösen. Dazu geht man ganz analog zum Verfahren von Castor, Abbott und Klein vor und integriert vom kritischen Punkt ausgehend in beide Richtungen ($-\pi/2 \leftarrow u_c \rightarrow 0$). Auf die dann erhaltene vollständige Lösung wendet man die Opazitätsbedingung an (siehe Kap. 5.4) und stellt gegebenenfalls den kritischen Punkt neu ein. Dieses iterative Verfahren wendet man allerdings nicht wie bei Sternen lediglich einmal an, sondern führt es für viele Scheibenradien s durch. Hat man das geschafft, muss die globale Massenverlustrate in Scheibennähe berechnet und das Ergebnis mit der Konstanten $\mathscr{C}$ verglichen werden, die dann gegebenenfalls anzupassen ist. In diesem Fall beginnt die ganze Prozedur von neuem.

11.2 Integration der Differentialgleichung

Bei der Windgleichung handelt es sich um eine implizite Gleichung. Die Verwendung eines Standardverfahrens – wie z.B. des Runge-Kutta-Verfahrens – erfordert es jedoch, dass die Differentialgleichung explizit, also in der Form

$$\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} = f(x,y)$$

gegeben ist. In manchen Fällen ist es möglich, eine implizite Gleichung in eine explizite umzuwandeln. Ließe sich etwa die Windgleichung

$$F(u,w,w') = 0$$

in die Form

$$w = f(u, w')$$

bringen, so könnte man nach u differenzieren

$$w' = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w'}\frac{\partial w'}{\partial u}$$

und gelangte mit Hilfe der Substitution

$$p = w'$$

zu einer expliziten Gleichung für p.

$$p' = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

Es ist tatsächlich möglich – wenn auch sehr mühsam – diesen Weg zu gehen. Dazu bringt man die Wingleichung auf die Form

$$-\mathscr{C}C\sqrt{w}^3 + \big(w' - \mathscr{D}D|w'|^\alpha - H\big)\sqrt{w}^2 + \mathscr{C}Ca\sqrt{w} - aw' = 0 \ .$$

Das ist eine Gleichung dritten Grades in $\sqrt{w}$, für die eine analytische Lösung existiert. Es gibt sogar mindestens eine, maximal aber drei reelle Lösungen. Falls Mehrfachlösungen auftreten, muss geprüft werden, welche in Frage kommt.

11.3 Diskretisierung der Gleichung

Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Windgleichung ist die Umwandlung in eine Differenzengleichung. Dazu schreibt man die Ableitung als einen Differenzenquotienten.

$$w' \sim \frac{w_k - w_{k-1}}{u_k - u_{k-1}}$$

und drückt u und w durch Mittelwerte aus

$$u = \frac{1}{2}\big(u_k + u_{k-1}\big)$$
$$w = \frac{1}{2}\big(w_k + w_{k-1}\big)$$

Das ist nur eine von vielen Methoden, eine Differenzengleichung aufzustellen. Eine Lösung nach diesem Verfahren läuft auf ein Nullstellenproblem hinaus. Man muss bei Kenntnis von u_{k-1}, u_k und w_{k-1} eine Gleichung der Form

$$F(u_{k-1}, u_k, w_{k-1}, w_k) = 0$$

für die Unbekannte w_k lösen.

Teil V
Diskussion der Lösungen

In diesem Teil stehe ich vor der schwierigen Aufgabe, Lösungen diskutieren zu müssen, die ich streng genommen noch nicht kenne. Daher wird vieles von dem, was ich ansprechen werde, eher spekulativen Charakter haben. Dennoch lässt sich anhand der Resultate von Shlosman, Vitello und Shaviv [SVS85] bzw. Vitello und Shlosman [VS88] diskutieren, was für Auswirkungen die Unterschiede zwischen deren Windgleichung und der in dieser Arbeit hergeleiteten Variante derselben haben können. Insbesondere das Verhalten im großen Abstand von der Akkretionsscheibe bereitete jenen größere Probleme. Diese können unter Umständen durch die Einführung eines zusätzlichen Terms, der der asymptotischen Struktur des Windes weit weg von der Scheibenoberfläche Rechnung trägt, gelöst werden.

12 Vergleich mit dem SVS-Ansatz

Shlosman, Vitello und Shaviv [SVS85] haben einen ähnlichen Lösungsweg beschritten, wie er in dieser Arbeit geschildert wurde. Auch sie führen einen Geometriefaktor ein und sind daher in der Lage das System von drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für die z-Komponente der Windgeschwindigkeit zu reduzieren. Allerdings unterscheiden sich beide Ansätze für die Windgleichung, was die Vernachlässigung bzw. Berücksichtigung bestimmter Effekte anbelangt. Vergleicht man beide Windgleichungen miteinander, wird man drei wesentliche Unterschiede finden:

1. $\mathscr{C} = 0$ bei SVS; damit verschwindet der zweite Term in der Windgleichung und außerdem die rechte Seite der Kontinuitätsgleichung;
2. in die Beschleunigungsterme der SVS-Gleichung geht die geometrische Gestalt der Scheibe auch nur durch einen Geometriefaktor ein;
3. SVS berücksichtigen die Ionisationsstruktur.

Schauen wir uns die einzelnen Punkte an. Was bewirkt die Vernachlässigung von $\mathscr{C}$ und damit des zweiten Terms? Wir haben weiter oben schon gesehen, dass dieser Eigenwert der Windgleichung weit weg von der Scheibe mit der globalen Massenverlustrate verknüpft ist. Es wäre also denkbar, dass der damit verbundene Term in der Windgleichung etwas mit dem globalen

Verhalten des Windes zu tun hat. Möglicherweise führt eine Vernachlässigung zu den von Vitello und Shlosman in [VS88] geschilderten Problemen jenseits des kritischen Punktes im Überschallbereich. Dort brechen nämlich deren numerische Verfahren ab, weil die Windgeschwindigkeit immer weiter anwächst, bis sie keine positive Lösung für w' mehr finden können. Die einzige Lösung, die dieses Verhalten nicht aufweist, wurde mit Hilfe eines extremen Geometriefaktors gefunden, der schon in unmittelbarer Scheibennähe in die sphärische Symmetrie überführt und daher die Windgleichung de facto zu einer CAK-Gleichung werden lässt. Eine mögliche Ursache für dieses Problem könnte der sehr steile Anstieg der Funktion $H(u)$ für $u \to 0$ sein. In ihrem Fall gibt es, da $w' \to 0$ für $u \to 0$ keinen Term, der das kompensieren kann. Im Anhang B findet sich die Analyse der Lösungen einer Gleichung, die eine gewisse strukturelle Ähnlichkeit mit der Windgleichung (9.4) aufweist. Dort zeigt sich, dass ein zusätzlicher Term im Stande ist, die Windbeschleunigung für $u \to 0$ auf einen kleinen positiven Wert zu drücken. Dies bedeutet dann, was man sich leicht durch die Variablentransformation nach $z = z(u)$ klar macht, dass $w'(z)$ im Unendlichen verschwindet und $w(z)$ gegen eine konstante Geschwindigkeit w_∞ strebt.

Der Effekt durch die geometrischen Korrekturen in den Beschleunigungstermen ist schwer abzuschätzen. Man kann jedoch sagen, dass die Funktionen $f_{\mathrm{e}}(u, \lambda)$ und $f_{\mathrm{L}}(u, \lambda)$ (siehe Gln. (8.3) und (8.5)), in denen die geometrische Information steckt, kein besonders auffälliges Verhalten zeigen. Sie wachsen mit zunehmender Entfernung von der Scheibenoberfläche an, allerdings ziemlich moderat (maximal eine Größenordnung).

Zum dritten Punkt kann ich wenig sagen, da ich ihn in meinem Modell vollkommen unberücksichtigt gelassen habe. Aber da von Sternatmosphären bekannt ist, dass die Ionisationsstruktur einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf den Wind hat, wäre es sicherlich verwunderlich, gälte dies nicht auch für Scheibenwinde. Die Frage ist nur, ob im Fall der Akkretionsscheiben andere Effekte eine viel größere Bedeutung haben und es daher ziemlich sinnlos ist, sich den Kopf über die Ionisationsstruktur zu zerbrechen, bevor man die anderen Fragen geklärt hat.

13 Abschließende Beurteilung und Ausblick

Wenn auch eine angemessene Bewertung des eindimensionalen Windmodells in diesem Stadium aufgrund fehlender Lösungen noch nicht möglich ist, so kann man zumindest sehen, dass es mit erheblichem Aufwand verbunden sein wird, sich diese zu beschaffen. Es ist auch überhaupt noch nicht gesagt, dass das vorgestellte Verfahren in angemessener Rechenzeit zum Ziel führt.

Schließlich ist in mehrfacher Hinsicht zu iterieren. Zunächst muss die Windgleichung für jeden Punkt der Scheibe gelöst werden und dann muss überprüft werden, ob der zu Beginn festgelegte Parameter $\mathscr{C}$ richtig gewählt wurde. Unter Umständen durchläuft man die gesamte Lösungsprozedur mehrfach, bis sich schließlich konsistente Lösungen mit den richtigen Eigenwerten $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ finden.

Allein die Integration der Windgleichung für einen Scheibenpunkt dauert auf neueren Computern schon einige Stunden, was im Wesentlichen darauf zurückzuführen ist, dass die Berechnung des zweidimensionalen Flächenintegrals sehr rechenintensiv ist. Eine Verbesserung des Integrationsalgorithmus könnte hier Abhilfe schaffen. Vielleicht ist es auch möglich, diese Funktion durch ein Polynom zu approximieren und dadurch wertvolle Rechenzeit zu sparen. Vermutlich wird man ziemlich gute Resultate erzielen, wenn man f_{L} durch f_{e}, multipliziert mit einem Korrekturterm, ausdrückt.

Eine sehr wichtige noch offene Frage wird die nach dem asymptotischen Verhalten des Windes sein. Diese kann letztendlich nur dadurch geklärt werden, dass Lösungen für die Windgleichung gefunden werden. Dann wird sich zeigen, ob der zusätzliche Term in der Windgleichung tatsächlich dazu führt, dass die Windgeschwindigkeit im Unendlichen gegen einen konstanten Wert läuft. Daran wird sich dieses Modell messen lassen müssen, wenn es eine entscheidende Verbesserung der Theorie von Shlosman, Vitello und Shaviv sein soll.

In diesem Zusammenhang wäre eine Erforschung der Gründe für das abweichende Verhalten nicht nur im Hinblick auf andere Modellrechnungen für Scheibenwinde von Interesse. Wie die Berechnungen von Vitello und Shlosman [VS88] gezeigt haben, ist die Abweichung der Scheibengeometrie von der sphärischen Symmetrie maßgeblich dafür verantwortlich. Das wirft natürlich die Frage auf, wie sich die Lösungen beim Übergang von sphärisch symmetrischer zu zylindrischer Geometrie verhalten. Vielleicht ergeben sich daraus neue Erkenntnisse die Sternwinde betreffend. Denn man sollte nicht vergessen, dass die Kugelsymmetrie auch für Sterne eine idealisierte Vorstellung ist.

Anhang

A Beweis der Integrabilität von f_e

Die zu beweisende Behauptung lautet

$$\lim_{z\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{rz^2}{(r^2+s^2+z^2-2rs\cos\varphi)^2}\ \mathsf{d}\varphi=\pi\delta^+(r-s)$$

Zum Beweis definieren wir die Dirac-Folge. Für $x\geq 0$ und $n\in\mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned}\delta_n^+(x) &:= \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{s}\frac{x/n^2}{\left(1+x^2+\frac{1}{n^2}-2x\cos\varphi\right)^2}\ \mathsf{d}\varphi\\ &= \frac{2\pi x\left(1+x^2+\frac{1}{n^2}\right)}{sn^2\left[\left(1+x^2+\frac{1}{n^2}\right)-4x^2\right]^{3/2}}\end{aligned}$$

Es ist nun folgendes zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n^+(x)=\begin{cases}\infty & \text{für } x=1\\ 0 & \text{für } x\geq 0 \text{ und } x\neq 1\end{cases}\tag{A.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^b\delta_n^+(x)f(x)\ \mathsf{d}x=\frac{\pi}{s}f(1)\tag{A.2}$$

Sind beide Behauptungen erfüllt, gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\delta_n^+(x) &= \frac{\pi}{s}\delta^+(x-1)=\frac{\pi}{s}\delta^+\left(\frac{r}{s}-1\right)\\ &= \frac{\pi}{s}\delta^+\left(\frac{1}{s}(r-s)\right)=\frac{\pi}{s}\frac{1}{|1/s|}\delta^+(r-s)\\ &= \pi\delta^+(r-s)\end{aligned}$$

und daher

$$\pi\delta^+(r-s)=\lim_{z\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{rz^2}{(r^2+s^2+z^2-2rs\cos\varphi)^2}\ \mathsf{d}\varphi$$

wegen der Definition von $\delta_n^+(x)$ als Dirac-Folge. Beweisen wir also die Aussagen (A.1) und (A.2). Dazu betrachte man das Folgenglied δ_n^+ für die Fälle $x = 1$ und $x \neq 1$.

$$\delta_n^+(x) = \frac{2\pi}{s} \begin{cases} \dfrac{2n + \frac{1}{n}}{\left(4 + \frac{1}{n^2}\right)^{3/2}} & \text{für } x = 1 \\ x \dfrac{\frac{1+x^2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{\left[\left(1 - x^2\right)^2 + \frac{2+2x^2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right]^{3/2}} & \text{für } x \neq 1 \end{cases}$$

In beiden Fällen konvergiert der Nenner im Limes $n \to \infty$. Für den Zähler gilt allerdings, dass er im Fall $n = 1$ divergiert, während er im Fall $n \neq 1$ verschwindet. Damit ist die erste der beiden obigen Aussagen bewiesen.
Nun zur zweiten Behauptung.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b \delta_n^+(x) f(x) \; \mathsf{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{s} \int_0^b \frac{x}{n^2} \frac{1 + x^2 + \frac{1}{n^2}}{\left[\left(1 + x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - 4x^2\right]^{3/2}} f(x) \; \mathsf{d}x$$

mit der Substitution $y = n(x - 1)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{s} \int_{-n}^{bn} \frac{\left(1 + \frac{y}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 + \frac{y}{n}\right)^3}{\left[4\left(1 + \frac{y}{n}\right)\left(1 + y^2\right) + \left(\frac{1+y^2}{n}\right)^2\right]^{3/2}} f\left(1 + \frac{y}{n}\right) \; \mathsf{d}y \\
&= \frac{2\pi}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\left[4(1 + y^2)\right]^{3/2}} f(1) \; \mathsf{d}y \\
&= \frac{\pi}{s} f(1) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathsf{d}y}{(1 + y^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{s} f(1) \frac{1}{2} \lim_{\theta\to\infty} \int_{\operatorname{arcsinh}(-\theta)}^{\operatorname{arcsinh}(\theta)} \frac{\mathsf{d}\theta'}{\cosh^2 \theta'} \\
&= \frac{\pi}{s} f(1) \frac{1}{2} \lim_{\theta\to\infty} \frac{2\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} \\
&= \frac{\pi}{s} f(1) \qquad \square
\end{aligned}$$

B Numerische Resultate einer etwas anderen Gleichung

Leider hat sich erst bei der Zusammenfassung meiner Ergebnisse herausgestellt, dass sich in den Gleichungen, die ich zunächst aufgestellt hatte, schon im Ansatz ein gravierender Fehler verborgen hatte. Um so erstaunlicher war dann, dass sich die Differentialgleichungen, die als Ausgangspunkt der numerischen Berechnungen dienten, nur in einem kleinen – wenn auch vielleicht wichtigen Detail – unterschieden. Die Gleichung, für die ich numerische Resultate vorzuweisen habe, hat folgende Gestalt:

$$F(u, w, w') = \left(1 - \frac{a}{w}\right)w' + B(u)\left(1 - \frac{a}{w}\right)w - \mathscr{D}D(u)|w'|^{\alpha} - H(u) = 0 \ .$$

Die Funktionen $D(u)$ und $H(u)$ sind genauso definiert wie in Kapitel 9, die einzigen Unterschiede finden sich im zweiten Term. Dort fehlt zum einen der konstante Ausdruck $\mathscr{C}C$ und zum anderen ist er linear in w. Das mit der Konstante ist kein größeres Problem, denn $\mathscr{C}$ muss bei der Lösung sowieso zunächst willkürlich festgelegt werden[11] und ist aufgrund der Definition negativ, also stimmt auch das Vorzeichen an dieser Stelle der obigen Gleichung. Was für Auswirkungen hingegen die Ersetzung von w durch $\sqrt{w}$ hat, ist sehr schwer abzuschätzen. Auf jeden Fall gestaltet sich die Lösungssuche sehr viel schwieriger, denn eine explizite Form der obigen Differentialgleichung kann viel leichter gefunden werden als bei der Windgleichung (9.4). Des weiteren taucht eine neue, von u abhängende Funktion auf; sie ist wie folgt definiert:

$$B(u) = 4 \tan\left(u + \pi/2\right) \ .$$

Sie wird dazu führen, dass der zweite Term in Scheibennähe verschwindet und im Unendlichen ($u \to 0$) über alle Maßen anwächst, sofern $w > a$ gilt.

Ich will hier nicht genauer auf den Lösungsweg eingehen, sondern nur die Resultate diskutieren. Zunächst einmal gibt es zwei gänzlich unterschiedliche Lösungszweige. Bringt man obige Gleichung in die Form einer expliziten Differentialgleichung für w', so wird man an einer Stelle eine Wurzel zu ziehen haben. Damit handelt man sich ein Vorzeichen ein, das nicht so ohne weiteres auf Plus oder Minus festgelegt werden kann, denn es ist in beiden Fällen möglich, die Differentialgleichung numerisch zu lösen. Man erhält Resultate, wie sie in Abbildung 9 exemplarisch aufgetragen sind. Die Lösungen sind sich bis auf ihr Vorzeichen sehr ähnlich. Man bekomme hier nicht den falschen Eindruck, dass eine Lösung ohne kritische Punkte und stetige Verknüpfung zweier Lösungsäste möglich ist. Es ist lediglich so, dass der Parker-Punkt sehr dicht an $u = 0$ liegt, und es hat daher den Anschein, als ob die Lösungen sich bis $u = 0$ erstrecken.

Interessant finde ich, dass die positive Lösung im Prinzip eine Gestalt hat, wie man es für einen Scheibenwind erwarten würde. Der Wind startet an der

[11] siehe Kap. 11

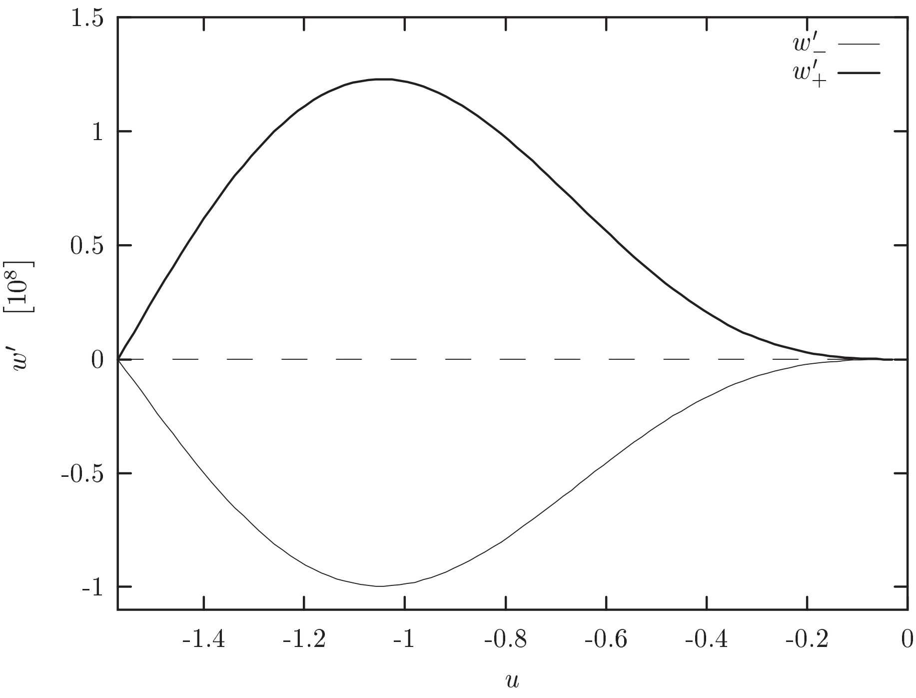

Abbildung 9: Lösungen der Differentialgleichung

Scheibenoberfläche zunächst mit geringer Beschleunigung, diese steigt dann rasch an, um dann für $u \to 0$ wieder abzuklingen und gegen einen endlichen Werte zu laufen. Führt man die Rücktransformation nach z durch, so ergibt sich, dass $w' \to 0$ für $z \to \infty$ wie im Fall der Sternwinde.

Einen kleinen Schönheitsfehler hat die für w' positive Lösung, sie führt zu negativen Resultaten für w und das bedeutet $v_z \propto \sqrt{w}$ wird komplex und damit unphysikalisch. Leider gehören die kritischen Lösungen, also die durch den kritischen Punkt verlaufenden, alle zu dieser Lösungsklasse. Mit anderen Worten: Alle Lösungen, die von der Scheibenoberfläche bis ins Unendliche stetig verknüpft werden können, liefern ein komplexes v_z.

Bleibt die Frage, ob man anhand dieser Resultate etwas über die Ergebnisse der tatsächlichen Windgleichung sagen kann. Das ist meiner Meinung nach nicht möglich, allerdings kann man sich überlegen, ob man sich ähnliche Probleme einhandelt, wie etwa mehrere Lösungsäste oder komplexe Windgeschwindigkeiten, also negatives w auch am kritischen Punkt. Zumindest letzeres dürfte meiner Ansicht nach nicht passieren, da die Gleichung aus der w_c bestimmt wird (11.6) ein Polynom in $\sqrt{w_\mathrm{c}}$ ist, so dass man zwar negative Resultate für $\sqrt{w_\mathrm{c}}$ erwarten kann, nicht aber für w_c selbst. Ferner wird es auf jeden Fall Lösungen geben, denn das Polynom ist ungerade.

Literatur

[CAK75] Castor, J. I., D. C. Abbott und R. I. Klein: *Radiation-driven winds in Of stars.* The Astrophysical Journal, **195**:157–174, Januar 1975.

[Cas74] Castor, J. L.: *On the force associated with absorption of spectral line radiation.* Monthly Notices of the RAS, **169**:279–306, November 1974.

[FKR02] Frank, J., A. King und D. Raine: *Accretion power in astrophysics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, Februar 2002.

[GR80] Gradshteyn, I. S. und I. M. Ryzhik: *Table of integrals, series and products.* New York: Academic Press, 1980.

[LC99] Lamers, H. J. G. L. M. und J. P. Cassinelli: *Introduction to stellar winds.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

[LL66] Landau, L. D. und E. M. Lifschitz: *Hydrodynamik.* Lehrbuch der theoretischen Physik. Berlin: Akademie-Verlag, 1966.

[Mei79] Meier, D. L.: *The structure and appearance of winds from supercritical accretion disks. I - Numerical models.* The Astrophysical Journal, **233**:664–684, Oktober 1979.

[NT73] Novikov, I. D. und K. S. Thorne: *Black Holes - Les Astres Occlus*, Kapitel Astrophysics of Black Holes. New York: Gordon & Breach, 1973.

[PKB97] Pereyra, N. A., T. R. Kallman und J. M. Blondin: *Hydrodynamical Models of Line-driven Accretion Disk Winds.* The Astrophysical Journal, **477**:368–378, März 1997.

[Pri81] Pringle, J. E.: *Accretion discs in astrophysics.* Annual Review of Astronomy & Astrophysics, **19**:137–162, 1981.

[PSD98] Proga, D., J. M. Stone und J. E. Drew: *Radiation-driven winds from luminous accretion discs.* Monthly Notices of the RAS, **295**:595–617, April 1998.

[PSK00] Proga, D., J. M. Stone und T. R. Kallman: *Dynamics of Line-driven Disk Winds in Active Galactic Nuclei.* The Astrophysical Journal, **543**:686–696, November 2000.

[Shu91] Shu, F.: *Physics of Astrophysics: Volume I Radiation.* New York: University Science Books, 1991.

[Sob60] Sobolev, V. V.: *Moving envelopes of stars.* Cambridge: Harvard University Press, 1960.

[SS73] Shakura, N. I. und R. A. Sunyaev: *Black holes in binary systems. Observational appearance.* Astronomy & Astrophysics, **24**:337–355, 1973.

[SVS85] Shlosman, I., P. A. Vitello und G. Shaviv: *Active galactic nuclei - Internal dynamics and formation of emission clouds.* The Astrophysical Journal, **294**:96–105, Juli 1985.

[VS88] Vitello, P. A. J. und I. Shlosman: *Line-driven winds from accretion disks. I - Effects of the ionization structure.* The Astrophysical Journal, **327**:680–692, April 1988.