INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Zeno Jauch
aus Radolfzell
Tag der mündlichen Prüfung: 10.2.1999

Synchrotronstrahlung vom Galaktischen Zentrum

Gutachter: Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl
Prof. Dr. John G. Kirk

Zusammenfassung:

Synchrotronstrahlung vom Galaktischen Zentrum:

Das Radiospektrum von Sgr A* wird als optisch dünne Synchrotronstrahlung quasi-monoenergetischer relativistischer Elektronen interpretiert. Die Beschleunigung der Elektronen an Stoßwellen und turbulenten Alfvén-Wellen zusammen mit Strahlungsverlusten und einer Verweildauer der Elektronen, die lang ist gegenüber der Beschleunigungszeitskala kann zum Aufbau einer quasi-monoenergetischen Elektronenverteilung führen. Die Modellierung von Elektronenbeschleunigung und Photonenproduktion erfordert die Lösung von gekoppelten kinetischen Gleichungen, was mit Hilfe einer Linienmethode numerisch durchgeführt wird.

Die Anwendung auf die zentrale Radioquelle der Milchstraße Sgr A* liefert gute Übereinstimmung mit den Meßwerten im Radiobereich und Verträglichkeit mit den oberen Grenzen vom Infrarot- bis in den γ-Bereich. Da Sgr A* eine variable Quelle ist, werden auch mögliche Ursachen für Variabilität aufgezeigt und anhand theoretischer Radiolichtkurven diskutiert.

Abstract:

Synchrotron radiation from the Galactic Center:

The radio spectrum of Sgr A* is interpreted as being optically thin synchrotron radiation from quasi-monoenergetic relativistic electrons. The combination of acceleration at shock waves, scattering off turbulent Alfvén waves, radiation losses and a confinement time of the electrons inside the source that is long compared to the acceleration time scale can result in a pile up of electrons at a certain energy. Modelling these processes requires the solution of coupled kinetic equations, which is done numerically using the Method of Lines.

The application to the Galactic Center radio source Sgr A* gives good agreement with the radio data and the results are compatible with the upper limits from the infrared to the γ-ray spectral regions.

Since Sgr A* is known to be a variable source, possible origins of variability are examined and the corresponding theoretical radio light curves are presented.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung, Motivation

Die Freisetzung großer Energiemengen in aktiven galaktischen Kernen (AGN) wird durch die Akkretion von Materie in ein massereiches Schwarzes Loch erklärt. Hierbei wird die potentielle Energie des akkretierten Materials umgewandelt in thermische, kinetische und/oder magnetische Energie und entweicht letztendlich in Form elektromagnetischer Strahlung und hochenergetischer Teilchen aus der Quelle.
Das Zentrum der Michstraße kann höchstens als schwach aktiver galaktischer Kern bezeichnet werden. Dennoch ist seine Bedeutung für das Verständnis der physikalischen Vorgänge in AGNs nicht zu unterschätzen. Ein Grund hierfür ist sicherlich die Entfernung des Sonnensystems vom Galaktischen Zentrum, die *nur* 8.5 kpc beträgt. Die nächst gelegenen vergleichbaren Galaxien befinden sich in Entfernungen von Mpc. Ein weiterer Grund ist der, daß es im Sinne eines Indizienbeweises als sicher angesehen werden kann, daß sich im Zentrum der Milchstraße ein Schwarzes Loch der Masse $M \approx 2.6 \cdot 10^6 M_\odot$ befindet. Diese Masse haben Eckart & Genzel (1997) aus den Eigenbewegungen von Sternen in der unmittelbaren Umgebung des galaktischen Zentrums abgeleitet. Nur ein Schwarzes Loch kann so kompakt und über die Lebensdauer der Galaxie auch stabil sein.
Wenn man nun noch bedenkt, daß in den inneren wenigen hundert Parsec der Milchstraße große Gasmengen konzentriert sind, so hat man alle Bestandteile, die für einen AGN wesentlich sind. Trotz seiner geringen Aktivität kann man das galaktische Zentrum also als Laboratorium für AGNs betrachten (Mezger et al. 1996).
Die Frage, die sich dann sofort aufdrängt, ist die nach dem Zusammenhang zwischen dem zentralen Schwarzen Loch und der kompakten Radioquelle Sgr A*, die zwar seit langem bekannt ist (Balik & Brown 1974), deren Position und Eigenbewegung jedoch erst in jüngster Zeit so genau ermittelt wurden, daß man sie mit dem dynamischen Zentrum unserer Galaxie identifizieren

kann.
Das Spektrum von Sgr A* ist im Bereich von 1 GHz bis 1000 GHz inzwischen sehr gut bekannt, aber der Radiobereich ist nach wie vor der einzige Spektralbereich, in dem verläßliche Meßwerte zur Verfügung stehen. Im Infraroten existieren Obergrenzen, im Optischen und im Ultravioletten verhindert die interstellare Extinktion ($A_v \approx 31^m$), daß Sgr A* beobachtet werden kann. Im Röntgen- und γ-Strahlenbereich existieren Messungen, doch können die beobachteten Quellen nicht eindeutig mit Sgr A* indentifiziert werden, da das Auflösungsvermögen der zur Zeit im Einsatz befindlichen satellitengestützten Detektoren nicht ausreichend ist.
Das Radiospektrum von Sgr A* ist, zusammen mit den oberen Grenzen im Infraroten, in Abb. 1.1 gezeigt. Es ist ein invertiertes Spektrum $S_\nu \propto \nu^\alpha$, mit $\alpha > 0$. Da das Spektrum jedoch variabel auf Zeitskalen von Tagen bis hin zu Jahren ist (Brown & Lo 1982), findet man bei individuellen Spektren die von unterschiedlichen Meßkampagnen stammen, zum Teil deutliche Unterschiede bei den Werten des Spektralindex α. Bildet man die zeitlichen Mittelwerte, aller, bei den einzelnen Frequenzen gemessenen Flüsse, so zeigt sich, daß der Spektralindex α im Bereich 1 GHz $< \nu <$ 1000 GHz ungefähr 0.3 beträgt (Duschl & Lesch 1994). Darüber hinaus suggerieren die oberen Grenzen bei $\nu \approx 0.4$ GHz und im Infraroten einen turn-over des Spektrums bei $\nu \approx 1$ GHz bzw. einen cut-off bei $\nu \approx 1000$ GHz. Diese spektralen Charakteristika findet man einerseits bei ausgedehnten Standardakkretionsscheiben und andererseits beim Synchrotronstrahlungspektrum relativistischer Elektronen.
Das Standardmodell (siehe z.B. Frank et al. 1992) beschreibt die Scheiben als geometrisch dünne, optisch dicke, mit Kepler-Geschwindigkeit um ein kompaktes Zentralobjekt rotierende Akkretionsströmungen, bei denen der Drehimpuls des Materials durch viskose Reibung nach außen transportiert wird. Berechnet man nun aus den charakteristischen Größen des Radiospektrums von Sgr A* die Parameter einer solchen Scheibe, so erhält man Zahlenwerte, die offensichtlich nicht das galaktische Zentrum beschreiben.
Dies führt dann zu dem mehr phänomenologischen Zugang, der davon ausgeht, daß die beobachtete Radiostrahlung von einer Verteilung von Elektronen stammt, deren Verteilung in der Energie so eng ist (quasimonoenergetische Verteilungsfunktion), daß sich das charakteristische Spektrum eines einzelnen Elektrons auch im Spektrum der gesamten Verteilung wiederfindet. Beckert et al. (1996) und Beckert & Duschl (1997) haben mit ad hoc angenommenen quasi-monoenergetischen Verteilungsfunktionen gute Fits an die Daten erhalten und auch eine Größe der Quelle vorhergesagt, die inzwischen durch VLBI-Beobachtungen bestätigt worden ist. Die Größe der Quelle Sgr A* variiert vom dm- bis in den cm-Bereich mit dem Quadrat der Wellenlänge λ ($\theta \propto \lambda^2$, siehe auch Abb. B.1). Dies ist ein Zeichen

dafür, daß die Radiophotonen im turbulenten interstellaren Medium gestreut werden. Dort, wo die Meßwerte vom λ^2-Verhalten abweichen, kann man eine Quellgröße von $\theta \approx 0.1$ mas ableiten, was einem Radius von $R \approx 10^{13}$ cm entspricht und im Rahmen der Meßfehler mit der theoretischen Vorhersage von Beckert et al. (1996) übereinstimmt.
In der vorliegenden Arbeit wird dieser phänomenologischen Zugang zur Deutung des Radiospektrums konsequent weiterentwickelt, in dem die Beschleunigung der Elektronen und die Strahlungsprozesse konsistent modelliert werden. Dies erlaubt einerseits Vorhersagen über die Emission im Röntgen- und γ-Strahlenbereich und andererseits können auch zeitabhängige Prozesse untersucht werden.
Zu dieser theoretischen Untermauerung hinzu kommt noch der Befund, daß es weitere Kerne normaler bzw. schwach aktiver Galaxien gibt, deren Radiospektrum optisch dünne Synchrotronstrahlung einer quasi-monoenergetischen Elektronenverteilung zu sein scheint. Die beiden Kandidaten, die in normalen Galaxien zu Hause sind, sind die kompakten Zentralquellen in M81 (NGC 3031, $D \approx 3$ Mpc) und M104 (NGC 4594, Sombrero-Galaxie, $D \approx 20$ Mpc). Sie sind zusammen mit Sgr A* in Abb 1.1 dargestellt. Die dritte Quelle ist der Kern der Seyfert 2 Galaxie NGC 1068 (Wittkowski et al. 1998, $D \approx 15$ Mpc).
Die Darstellung der Meßwerte, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, ist von Duschl & Lesch (1994), bzw. Beckert et al. (1997) übernommen; d.h. Kreise, die durch eine Linie verbunden sind bezeichnen Bereiche, in denen die Meßwerte bei den einzelnen Frequenzen liegen; Sterne bezeichnen einzelne Meßpunkte und nach unten gerichtete Pfeile kennzeichnen obere Grenzen. Die Referenzen zu den Meßwerten finden sich z.B. in Mezger et al. (1996). Neuere Messungen bei 43 GHz von Bower & Baker (1998) und zwischen 1.4 GHz und 235 GHz von Falcke et al. (1998) sind auch berücksichtigt.
Die Meßwerte für die Zentralquelle in M81 stammen aus Reuter & Lesch (1996) und Bietenholz et al. (1998), die für den Kern von M104 aus de Bruyn (1979), Shaffer & Marscher (1979), Graham et al. (1981), Ekers et al. (1983), Bajaja et al. (1984), Hummel et al. (1984) und Bajaja et al. (1988).
Die weitere Gliederung der Arbeit ist die folgende: Im zweiten Kapitel wird die Modellierung von Elektronenbeschleunigung und Photonenproduktion erläutert, die detaillierte Vorstellung der einzelnen physikalischen Prozeße mit den möglichen bzw. notwendigen Näherungen erfolgt in Kapitel Nummer drei. Im vierten Kapitel, das rein technischer Natur ist, werden die kinetischen Gleichungen für die numerische Behandlung aufbereitet, d.h. es werden die erforderlichen Normierungen und Transformationen durchgeführt. In Kapitel fünf werden einfache Spezialfälle diskutiert und im sechsten Kapitel werden die kinetischen Gleichungen dann numerisch gelöst und die zeitabhängigen

Modelle auf Sgr A* angewendet. Im siebten und letzten Kapitel werden die Ergebnisse zusammengefaßt und diskutiert.

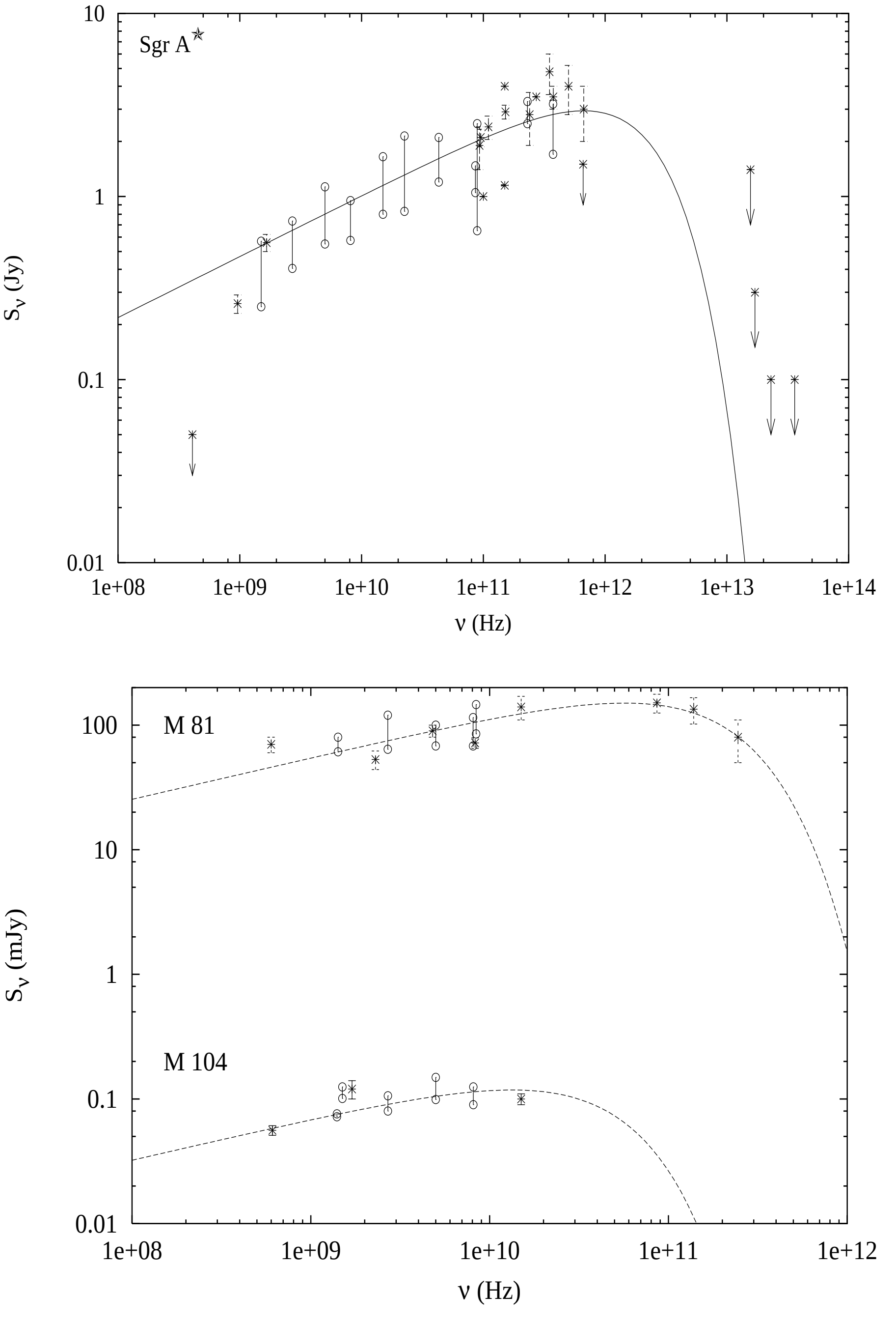

Abbildung 1.1: Die zentralen Radioquellen der Milchstraße (oberer Plot), der Sombrero-Galaxie M104 und M81 (unterer Plot). Zusammen mit den Meßwerten sind Flußdichten $S_\nu \propto \nu^{1/3} e^{-\nu/\nu_c}$ geplottet, um die Interpretation der Meßwerte als optisch dünne Synchrotronstrahlung monoenergetischer Elektronen zu veranschaulichen.

Kapitel 2

Das Modell

In der vorliegenden Arbeit wird ein homogenes, isotropes Modell für die Beschleunigung der Elektronen und die abgestrahlten Photonen verwendet, in dem die Entwicklung der jeweiligen Population durch eine räumlich gemittelte kinetische Gleichung beschrieben wird. Die Teilchendichten für die Elektronen und die Photonen hängen dann nur von der Zeit und den entsprechenden Energievariablen ab. Dieser Vorgehensweise entspricht die Annahme, daß alle physikalischen Prozesse an jeder Stelle in der Quelle stattfinden.
Die Quelle sei sphärisch symmetrisch und enthalte außer den relativistischen Elektronen und den Photonen ein turbulentes magnetisiertes Plasma, indem die Elektronen, die als Testteilchen betrachtet werden, Energie durch diffusive Beschleunigung an vielen Stoßwellen gewinnen können. Der räumliche Transport, der für die Beschleunigung an den Stoßwellen notwendig ist, wird durch Pitchwinkelstreuung an den turbulenten MHD-Wellen (z.B. Alfvén-Wellen) gewährleistet und es wird angenommen, daß die Verteilung der Elektronen isotrop ist (Diffusionsnäherung). Durch die Streuung an den MHD-Wellen diffundieren die Elektronen aber auch entlang der Impulsachse. Die zeitliche Entwicklung der nicht-thermischen Elektronenverteilung wird dann durch die folgende kinetische Gleichung für die Verteilungsfunktion $f(p,t)$ beschrieben (Schlickeiser 1984):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(p,t)}{\partial t} &= \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{p^4}{t_{\mathrm{diff}}}\frac{\partial f(p,t)}{\partial p}\right\} - \\ &\quad \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{p^3}{t_{\mathrm{acc}}}f(p,t)\right\} - \frac{f(p,t)}{t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{esc}}} + Q_{\mathrm{e}} - L_{\mathrm{e}} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

In dieser Gleichung beschreibt der erste Summand auf der rechten Seite die Diffusion der Elektronen im Impulsraum, verursacht durch die Streuung an Alfvén-Wellen, der zweite die systematische Beschleunigung durch Stoßwellen, der dritte den Verlust von Teilchen, die die Beschleunigungsregion

verlassen und Q_{e} und L_{e} beschreiben weitere Gewinn- und Verlustprozesse. Zwei Prozesse müssen hier auf jeden Fall genannt werden: Der eine ist der Injektionsterm $Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{inj}}$, der beschreibt, bei welcher Energie wieviele Elektronen in den Beschleunigungsprozeß eingespeist werden und der andere Term beschreibt die in einem Magnetfeld unvermeidlichen Synchrotronstrahlungsverluste $L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{syn}}$.
Die Verteilungsfunktion $f(p,t)$ ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, an einer bestimmten Stelle im Phasenraum ein Elektron vorzufinden. Im folgenden ist es günstiger, statt der Verteilungsfunktion $f(p,t)$ die Teilchendichte $n_{\mathrm{e}}(p,t) = 4\pi p^2 f(p,t)$ zu verwenden und zum Lorentzfaktor γ als unabhängiger Variable[1] überzugehen, da vor allem das Verhalten relativistischer Elektronen ($\gamma \gg 1$) von Interesse sein wird. Die kinetische Gleichung für die Elektronendichte $n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)$ lautet dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\left\{\frac{\gamma^2}{t_{\mathrm{diff}}} n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)\right\} - \frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{\left(\frac{4}{t_{\mathrm{diff}}} + \frac{1}{t_{\mathrm{acc}}}\right)\gamma n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)\right\} - \\ &\quad \frac{n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)}{t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{esc}}} + Q_{\mathrm{e}} - L_{\mathrm{e}} \quad . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Der nicht-relativistische Teil des Beschleunigungsprozesses und damit auch das Problem der Injektion können durch den folgenden Kunstgriff physikalisch sinnvoll umgangen werden (Mastichiadis & Kirk 1995): Man nimmt an, daß die Elektronen bei einem Impuls p_{inj} injiziert werden. Bei kleinen Impulsen ist auf jeden Fall die Beschleunigung an Stoßwellen der schnellste Prozeß, so daß die kinetische Gleichung für die Elektronen mit $Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{inj}} = Q_0\delta(p - p_{\mathrm{inj}})$ und unter Vernachlässigung von Impulsdiffusion und Strahlungsverlusten die folgende analytische Lösung besitzt:

$$n_{\mathrm{e}}(p,t) = \frac{t_{\mathrm{acc}}Q_0}{p_{\mathrm{inj}}}\left(\frac{p}{p_{\mathrm{inj}}}\right)^{-1-\frac{t_{\mathrm{acc}}}{t_{\mathrm{esc}}}} \left\{H(p-p_{\mathrm{inj}}) - H(p - p_{\mathrm{inj}}e^{\frac{t}{t_{\mathrm{esc}}}})\right\} \quad , \tag{2.3}$$

wobei $H(x)$ die Heaviside-Funktion mit $H(x) = 0$ für $x < 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$ ist.
Sei nun γ_0 der kleinste Lorentzfaktor, der in der Gleichung der relativistischen Elektronen betrachtet werden soll, dann läßt sich die Randbedingung bei γ_0 mit der Hilfe der obigen analytischen Lösung schreiben als:

$$n_{\mathrm{e}}(\gamma_0,t) = t_{\mathrm{acc}}Q_0\left(\frac{p_{\mathrm{inj}}}{m_{\mathrm{e}}c}\right)^{\frac{t_{\mathrm{acc}}}{t_{\mathrm{esc}}}} \gamma_0^{-1-\frac{t_{\mathrm{acc}}}{t_{\mathrm{esc}}}} \quad . \tag{2.4}$$

[1] $\gamma = \sqrt{\left(\frac{p}{m_{\mathrm{e}}c}\right)^2 + 1} \approx \frac{p}{m_{\mathrm{e}}c}$

Die Photonen, die von den relativistischen Elektronen abgestrahlt werden und mit diesen Elektronen und/oder den thermischen Elektronen und Protonen des Hintergrundplasmas wechselwirken, werden durch die spektrale Photonendichte[2] (Photonen pro Frequenzintervall und Volumenelement) beschrieben. Die zeitliche Entwicklung dieser Verteilung wird durch die folgende kinetische Gleichung modelliert, die von der gleichen Struktur ist wie die obige Gleichung für die Elektronen:

$$\frac{\partial n_\gamma(\nu,t)}{\partial t} = -\frac{n_\gamma(\nu,t)}{t_{\rm cross}} + Q_\gamma - L_\gamma \quad , \tag{2.5}$$

hierbei ist $t_{\rm cross} = R/c$ die Lichtlaufzeit der Photonen durch eine sphärische Quelle mit Radius R. Der Verlustzeitansatz ist die einfachste Möglichkeit den Strahlungstransport längs der radialen Koordinate r zu modellieren:

$$c\left(\frac{\partial n_\gamma(\nu,t)}{\partial r}\right)_R \approx \frac{n_\gamma(\nu,t)}{t_{\rm cross}} \quad . \tag{2.6}$$

Da im folgenden auch noch von der Besetzungszahl N_γ und der spezifischen Intensität I_ν zu sprechen sein wird, sei an dieser Stelle noch erwähnt, wie diese mit der Photonendichte n_γ zusammenhängen:

$$n_\gamma = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} N_\gamma = \frac{4\pi}{hc\nu} I_\nu \quad . \tag{2.7}$$

Vervollständigt wird das System der kinetischen Gleichnungen nun noch durch eine Bilanzgleichung für das Hintergrundplasma, beschrieben durch die Dichte der thermischen Elektronen $N_{\rm e,cool}$, für die immer eine Maxwellverteilung angenommen wird, so daß nur die Anzahldichte, nicht aber deren energetische Verteilung berechnet werden muß (Mastichiadis & Kirk 1995). Wenn man annimmt, daß Elektronen ab einer bestimmten Energie aus dem thermischen Hintergrundplasma heraus beschleunigt werden, so gibt es einen Lorentzfaktor $\gamma_{\rm min}$ unterhalb dessen die Elektronen zur thermischen Population gezählt werden müssen. Da durch Kühlprozesse auch relativistische Elektronen unter diese Grenze kühlen können, wird die Dichte $N_{\rm e,cool}(t)$ der thermischen Elektronen in der folgenden Weise bilanziert:

$$\frac{\partial N_{\rm e,cool}(t)}{\partial t} = Q_{\rm e,cool} - L_{\rm e,cool} \quad . \tag{2.8}$$

[2]Der Index $_\gamma$ bezeichnet Größen, die sich auf die Photonen beziehen und sollte nicht verwechselt werden mit der unabhängigen Variable γ (Lorentzfaktor).

Kapitel 3

Die physikalischen Prozesse im einzelnen

Im folgenden werden die, für eine konsistente Behandlung notwendigen physikalischen Prozesse vorgestellt und die in den kinetischen Gleichungen auftretenden Quell- und Verlustterme angegeben.

3.1 Synchrotronstrahlung

In vielen Radioquellen ist der Grad der Polarisation der Synchrotronstrahlung klein; dies wird Indiz dafür gewertet, daß das Magnetfeld nicht homogen ist, sondern alle möglichen Richtungen innerhalb der Quelle annimmt. Ist das der Fall , so ist eine Mittelung über alle Magnetfeldrichtungen gerechtfertigt, wenn die folgende Ungleichung erfüllt:

$$r_{\mathrm{g}} \ll l \ll R \quad , \tag{3.1}$$

r_{g} ist hierbei der Gyrationsradius eines relativistischen Elektrons (siehe z.B. Lang 1974), R ist der Radius der Quelle und l ist die charakteristische Längenskala, auf der das Magnetfeld seine Richtung ändert. Die Synchrotronemissivität eines Elektrons in einem thermischen Plasma mit stochastischen Magnetfeldrichtungen wurde von Crusius & Schlickeiser (1986, 1988) hergeleitet:

$$P_{\mathrm{r}}(\nu,\gamma) = \frac{2\pi^2 e^2}{\sqrt{3}c}\frac{\nu}{\gamma^2}\left(1+\left(\frac{\gamma\nu_{\mathrm{p}}}{\nu}\right)^2\right) CS\left(\frac{2\nu}{3\nu_0\gamma^2}\left(1+\left(\frac{\gamma\nu_{\mathrm{p}}}{\nu}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) \quad . \tag{3.2}$$

Die Einheit von $P_{\mathrm{r}}(\nu,\gamma)$ ist erg s^{-1} Hz^{-1}. In der obigen Formel ist ν_{p} die Plasmafrequenz und ν_0 die nicht-relativistische Gyrationsfrequenz (Lang 1974).

$CS(x)$ ist die Crusius-Schlickeiser-Funktion, die man bei der Mittelung über alle Magnetfeldrichtungen erhält. Sie wird im Anhang B zusammen mit den Näherungen für großes und kleines Argument vorgestellt. Die Formel für den Vakuumfall erhält man, indem man den Grenzwert $N_{\mathrm{e,cool}} \to 0$ bildet:

$$P_{\mathrm{r}}(\nu, \gamma) = \frac{2\pi^2 e^2}{\sqrt{3}c} \frac{\nu}{\gamma^2} CS\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right) \quad ; \tag{3.3}$$

hier wurde die charakteristische Frequenz ν_{c} des Synchrotronspektrums verwendet. Sie ist gegeben durch:

$$\nu_{\mathrm{c}} = \frac{3}{2}\nu_0\gamma^2 \approx 3\nu_{\mathrm{max}} \quad . \tag{3.4}$$

Synchrotronstrahlung ist ein Verlustprozeß für die relativistischen Elektronen und kann durch den folgenden Verlustterm beschrieben werden:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{syn}} &= \frac{1}{m_{\mathrm{e}}c^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(n_{\mathrm{e}}(\gamma, t)\int_0^\infty P_{\mathrm{r}}(\nu, \gamma) d\nu\right) && (3.5) \\ &\approx \frac{\sigma_{\mathrm{T}}B^2}{6\pi m_{\mathrm{e}}c}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma^2 n_{\mathrm{e}}(\gamma, t)\right) \quad . && (3.6) \end{aligned}$$

Die von den relativistischen Elektronen emittierten Synchrotronphotonen müssen in der kinetischen Gleichung der Photonen durch den folgenden Quellterm berücksichtigt werden:

$$Q_\gamma^{\mathrm{syn}} = \frac{1}{h\nu}\int_{\gamma_{\mathrm{min}}}^\infty P_{\mathrm{r}}(\nu, \gamma) n_{\mathrm{e}}(\gamma) d\gamma \quad . \tag{3.7}$$

Elektronen, die über die untere Grenze γ_{min} hinweg kühlen, werden in die Bilanz der kalten Elektronen aufgenommen:

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{syn}} &= \int_{\gamma_{\mathrm{min}}}^\infty L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{syn}} d\gamma && (3.8) \\ &\approx \frac{\sigma_{\mathrm{T}}B^2}{6\pi m_{\mathrm{e}}c}\gamma_{\mathrm{min}}^2 n_{\mathrm{e}}(\gamma_{\mathrm{min}}, t) \quad . && (3.9) \end{aligned}$$

3.2 Synchrotronselbstabsorption

Der Umkehrprozeß der oben beschriebenen Synchrotronemission ist die Synchrotronselbstabsorption. Die Absorption von Photonen bedeutet für die Elektronen einen Energiegewinn, er kann durch einen Differentialoperator zweiter Ordnung beschrieben werden und lautet für den Fall isotroper

Strahlung (McCray 1969, Ghisellini et al. 1988, Crusius-Wätzel 1991):

$$Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ssa}} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{\beta\gamma^2\frac{\partial f(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right\} \quad . \tag{3.10}$$

Hierbei ist der Diffusionskoeffizient β gegeben durch:

$$\beta = \frac{1}{2(m_{\mathrm{e}}c)^2}\int_0^\infty \frac{I_\nu}{\nu^2}P_{\mathrm{r}}(\nu,\gamma)d\nu \quad . \tag{3.11}$$

Die für diesen Prozeß relevante Zeitskala ist die Synchrotronverlustzeitskala $t = 6\pi m_{\mathrm{e}}c/\sigma_{\mathrm{T}}B^2\gamma$. Die stärkste Wechselwirkung mit dem Photonenfeld erfahren die niederenergetischen Elektronen mit Lorentzfaktor γ, für die gilt:

$$\begin{aligned} \nu_{\max} &\approx 0.3\nu_{\mathrm{c}} < \nu_{\mathrm{to}} && (3.12) \\ \rightsquigarrow \gamma &< \sqrt{\frac{2\nu_{\mathrm{to}}}{\nu_0}} \quad . && (3.13) \end{aligned}$$

Hier ist $\nu_{\max}$ die Frequenz, bei der das Maximum der Emissivität dieser Elektronen liegt und ν_{to} ist die Frequenz (siehe auch Kap. 5.1) bei der der Übergang von optisch dünner zu optisch dicker Synchrotronstrahlung stattfindet. Im Radiospektrum von Sgr A* liegt der Turn-Over bei $\nu_{\mathrm{to}} \approx 1\mathrm{GHz}$, mit einem Magnetfeld von 5G erhält man $\gamma < 12$. Solange also die diffuse Schockbeschleunigung der dominierende Prozess (kürzeste Zeitskala) ist, kann man diesen Effekt vernachlässigen.

In der kinetischen Gleichung für die Photonen muß die Synchrotronselbstabsorption als Verlustterm berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} L_\gamma^{\mathrm{ssa}} &= c\alpha^{\mathrm{ssa}}(\nu)n_\gamma(\nu,t) && (3.14) \\ &= \frac{c^3 n_\gamma(\nu,t)}{8\pi m_{\mathrm{e}}c^2\nu^2}\int_{\gamma_{\min}}^\infty \frac{n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma^2 P_{\mathrm{r}}(\nu,\gamma)\right)d\gamma \quad , && (3.15) \end{aligned}$$

hier ist $\alpha^{\mathrm{ssa}}(\nu)$ der Absorptionskoeffizient, wie er z.B. in Rybicki & Lightman (1979) zu finden ist.

Die im Integranten auftretende Ableitung der Emissivitätsfunktion ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma^2 P_{\mathrm{r}}(\nu,\gamma)\right) = \frac{4\pi^2 e^2}{\sqrt{3}c}\frac{\nu}{\gamma^3}f^{-2}\left(CS(y_0) + \frac{1}{2}\left(1-2f^2\right)y_0\left(\frac{\partial CS}{\partial y}\right)_{y_0}\right) \quad , \tag{3.16}$$

mit den Abkürzungen:

$$f = \frac{\nu}{\gamma \nu_{\rm p}} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\nu}{\nu_{\rm c}} \left(1 + f^{-2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad . \tag{3.17}$$

Auch hier kann man durch Grenzwertbildung die Formel für den Vakuumfall ableiten:

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma^2 P_{\rm r}(\nu, \gamma)\right) = -\frac{4\pi^2 e^2}{\sqrt{3}c} \frac{\nu}{\gamma^3} \frac{\nu}{\nu_{\rm c}} \left(\frac{\partial CS}{\partial y}\right)_{\frac{\nu}{\nu_{\rm c}}} \quad . \tag{3.18}$$

3.3 Inverse Compton-Streuung

Inverse Compton-Streuung beschreibt die Streuung von Photonen an relativistischen Elektronen. In diesem Prozeß gewinnen die Photonen Energie und die Elektronen kühlen. Wenn ν und ν' die Frequenz des ungestreuten bzw. des gestreuten Photons und γ den Lorentzfaktor des Elektrons bezeichnen, dann läßt sich der Energiegewinn eines Photons wie folgt abschätzen:

$$\nu' \propto \gamma^2 \nu \quad . \tag{3.19}$$

Im Spezialfall einer Quelle, in der die relativistischen Elektronen die von ihnen erzeugten Synchrotronphotonen (charakteristische Frequenz $\nu_{\rm c} \propto \gamma^2 \nu_0$) streuen, kann man die Frequenz der gestreuten Photonen wie folgt abschätzen:

$$\nu' \propto \gamma^4 \nu_0 \quad . \tag{3.20}$$

Diese Abschätzungen gelten nur, solange die folgende Ungleichung erfüllt ist: ${}^4\!/\!{}_3 \gamma h\nu \ll m_{\rm e} c^2$. Dieser Bereich wird als Thomson-Regime bezeichnet. Ist die Energie der gestreuten Photonen nicht mehr klein gegen die Energie der Elektronen, dann finden die Streuereignisse im Klein-Nishina-Regime statt. Mastichiadis & Kirk (1995) und Svensson (1987) folgend wird der Wirkungsquerschnitt $\sigma(h\nu, h\nu', \gamma)$ für die beiden Bereiche durch die folgenden Ausdrücke angenähert:

$$\sigma(h\nu, h\nu', \gamma) = \begin{cases} \sigma_{\rm T} \delta(h\nu - \frac{4}{3}\gamma^2 h\nu') H(1 - \frac{4}{3}\gamma h\nu') & , \frac{4}{3}\gamma h\nu \ll m_{\rm e} c^2 \\ \frac{\sigma_{\rm T} m_{\rm e} c^2}{\gamma h\nu} & , \frac{4}{3}\gamma h\nu \gg m_{\rm e} c^2 \end{cases} \tag{3.21}$$

$H(x)$ ist wieder die Heaviside-Funktion. Im Thomson-Regime erhält man damit einen Verlustterm für die relativistischen Elektronen, der von der gleichen Struktur ist wie im Fall der Synchrotronstrahlung:

$$L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ics,T}} = \frac{4}{3}\frac{\sigma_{\mathrm{T}} h}{m_{\mathrm{e}} c}\left\{\int_0^{\nu_{\mathrm{T}}} \nu' n_\gamma(\nu',t) d\nu'\right\} \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma^2 n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)\right) \quad . \tag{3.22}$$

Die Frequenz ν_{T} ist gegeben durch:

$$\nu_{\mathrm{T}} = \frac{3 m_{\mathrm{e}} c^2}{4 h\gamma} = 9.3 \cdot 10^{19} \frac{1}{\gamma}\mathrm{Hz} \quad . \tag{3.23}$$

Den durch die Kühlung von relativistischen Elektronen bedingten Quellterm in der Gleichung der kalten Elektronen erhält man wieder durch Integration des Verlusterms $L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ics,T}}$ über alle Energien:

$$Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{ics,T}} = \frac{4}{3}\frac{\sigma_{\mathrm{T}} h}{m_{\mathrm{e}} c}\left\{\int_0^{\nu_{\mathrm{T}}} \nu' n_\gamma(\nu',t) d\nu'\right\} \gamma_{\mathrm{min}}^2 n_{\mathrm{e}}(\gamma_{\mathrm{min}},t) \quad . \tag{3.24}$$

Der Ausgangspunkt für die Berechnung des Photonenquellterms Q_γ^{ics} ist der folgende Ausdruck (siehe z.B. Zheleznyakov 1996):

$$Q_\gamma^{\mathrm{ics}} = hc\int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(h\nu, h\nu', \gamma) n_{\mathrm{e}}(\gamma,t) n_\gamma(h\nu',t) d(h\nu') d\gamma \quad . \tag{3.25}$$

Mit folgender Eigenschaft der δ-Funktion

$$\delta(f(\gamma)) = \frac{1}{\left|\frac{df(\gamma)}{d\gamma}\right|}\delta(\gamma-\gamma_0) \quad , \mathrm{mit} f(\gamma_0) = 0 \quad , \tag{3.26}$$

kann man eine Integration eliminieren und erhält:

$$Q_\gamma^{\mathrm{ics,T}} = \frac{\sqrt{3}}{4} hc\sigma_{\mathrm{T}} \int_0^A n_{\mathrm{e}}\left(\sqrt{3h\nu/4h\nu'}, t\right) (h\nu h\nu')^{-\frac{1}{2}} n_\gamma(h\nu',t) d(h\nu') \quad , \tag{3.27}$$

wobei die obere Integrationsgrenze gegeben ist durch:

$$A = \min\left(\frac{3 m_{\mathrm{e}} c^2}{4 h\nu}, \frac{3 h\nu}{4 m_{\mathrm{e}} c^2}\right) \quad . \tag{3.28}$$

Für $4/3 h\nu \gg m_{\mathrm{e}} c^2$ erfolgt die Wechselwirkung zwischen den Photonen und den Elektronen im Klein-Nishina-Regime. Die oben angegebene Näherung bedeutet, daß ein Elektron in einem solchen Stoß seine gesamte Energie verliert und deshalb nach dem Stoß zur Population der kalten Elektronen gezählt werden muß. Der Verlustterm für die relativistischen Elektronen lautet wie folgt:

$$L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ics,KN}} = \frac{\sigma_{\mathrm{T}} m_{\mathrm{e}} c^3}{h}\frac{n_{\mathrm{e}}(\gamma,t)}{\gamma}\int_{\nu_{\mathrm{T}}}^\infty \frac{n_\gamma(\nu',t)}{\nu'} d\nu' \quad . \tag{3.29}$$

Den Quellterm in der Gleichung der kalten Elektronen erhält man wieder durch Integration von $L_{\rm e}^{\rm ics,KN}$ über alle Energien.
Da ein Photon nach ein solchem Stoß die gesamte Energie des Elektrons davonträgt, lautet der Quellterm in der Gleichung der Photonen einfach:

$$Q_\gamma^{\rm ics,KN} = L_{\rm e}^{\rm ics,KN}\left(\frac{h\nu}{m_{\rm e}c^2}, t\right) \quad . \tag{3.30}$$

3.4 Bremsstrahlung

Es wird die nicht-thermische Bremsstrahlung der relativistischen Elektronen an ruhenden Targets der Dichte $N_{\rm targ}$ betrachtet. Die thermische Bremsstrahlung des Hintergrundplasmas spielt keine Rolle, da angenommen wird, daß das Hintergrundplasma kühl ist. Zur Beschreibung der nicht-thermischen Bremsstrahlung wird die in Blumenthal & Gould (1970) angegebene Formel für den Wirkungsquerschnitt verwendet:

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = 4Z^2\alpha r_0^2 \frac{1}{\nu E_{\rm i}^2}\left\{E_{\rm i}^2 + E_{\rm f}^2 - \frac{2}{3}E_{\rm i}E_{\rm f}\right\}\left\{\ln\left(\frac{2E_{\rm i}E_{\rm f}}{m_{\rm e}c^2h\nu}\right) - \frac{1}{2}\right\} \quad , \tag{3.31}$$

Für die Energien der relativistischen Elektronen vor und nach einem Stoß ($E_{\rm i}$ und $E_{\rm f}$) und die Energie des emittierten Photons ($h\nu$) gilt folgende Relation: $E_{\rm i} - E_{\rm f} = h\nu$. Desweiteren sind Z die Ladungszahl der Targets, α die Feinstrukturkonstante und r_0 der klassische Elektronenradius. Weiter wird angenommen, daß es sich um ein vollionisiertes Plasma aus Protonen und Elektronen ($Z = 1$) handelt, daß keine Abschirmung stattfindet und daß beide Spezies gleiche Beitäge liefern.
Die Anzahl der Photonen, die ein relativistisches Elektron beim Durchgang durch das Plasma pro Zeiteinheit ins Frequenzintervall $[\nu, \nu + d\nu]$ abstrahlt, ist gegeben durch:

$$\frac{dN_\gamma}{dtd\nu} = 2cN_{\rm targ}\frac{d\sigma}{d\nu} \quad . \tag{3.32}$$

Die Dichte der Photonen und damit der gesuchte Quellterm $Q_\gamma^{\rm brems}$ lautet:

$$Q_\gamma^{\rm brems} = \int_{E_{\rm min}}^{\infty}\left(\frac{dN_\gamma}{dtd\nu}\right) n_{\rm e}(E_{\rm i})dE_{\rm i} \quad . \tag{3.33}$$

Die untere Integrationsgrenze $E_{\rm min}$ ist gegeben durch die Einschränkung, daß das emittierte Photon höchstens die kinetische Energie des Elektrons besitzen kann: $h\nu \leq (\gamma - 1)m_{\rm e}c^2$.

Einsetzen des Wirkungsquerschnittes und neu zusammenfassen liefert:

$$Q_{\gamma}^{\mathrm{brems}} = \frac{8Z^2 \alpha r_0^2 c N_{\mathrm{targ}}}{\nu} \int_{\gamma_{\min}}^{\infty} f(\gamma, \nu)\, n_{\mathrm{e}}(\gamma) d\gamma \quad , \tag{3.34}$$

wobei die Funktion $f(\gamma, x)$ mit $x = h\nu / m_{\mathrm{e}} c^2$ die spektrale Verteilung der Bremsstrahlungsphotonen widerspiegelt:

$$f(\gamma, x) = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{4}{3} \gamma (\gamma - x) + x^2 \right\} \left\{ \ln \left(\frac{2\gamma (\gamma - x)}{x} \right) - \frac{1}{2} \right\} \quad . \tag{3.35}$$

Betrachet man nur ein endliches Frequenzintervall, so muß die untere Integrationsgrenze im Bremsstrahlungsquellterm ersetzt werden durch:

$$\gamma_{\mathrm{low}} = \max(\gamma_{\min}, x + 1) \quad . \tag{3.36}$$

Abbildung 3.1 zeigt die Funktion $f(\gamma, x)$ für vier verschiedene Lorentzfaktoren und zwar $\gamma = 10, 350, 100, 1000$.
Der Energieverlustverlust eines relativistischen Elektrons ist gegeben durch (Blumenthal & Gould 1970):

$$\frac{dE}{dt} = -h \int \left(\frac{dN_{\gamma}}{dt d\nu} \right) \nu d\nu \quad . \tag{3.37}$$

Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke und Umformen liefert:

$$\dot{\gamma}_{\mathrm{brems}} = -8 \alpha r_0^2 c N_{\mathrm{targ}} Z(Z+1) \gamma \log(2\gamma - \frac{1}{3}) \quad . \tag{3.38}$$

Der Verlustterm in der Gleichung der relativistischen Elektronen ist gegeben durch:

$$L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{brems}} = -\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\dot{\gamma}_{\mathrm{brems}} n_{\mathrm{e}}(\gamma, t) \right) \quad . \tag{3.39}$$

Die Kühlung der relativistischen Elektronen durch Bremsstrahlung hat auch in diesem Fall die Injektion von kalten Elektronen zur Folge:

$$Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{brems}} = \dot{\gamma}_{\mathrm{brems}}(\gamma_{\min}) n_{\mathrm{e}}(\gamma_{\min}, t) \quad . \tag{3.40}$$

3.5 Elektronenbeschleunigung

Grundlage für die Beschreibung der Elektronenbeschleunigung, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet wird ist die resonante Wechselwirkung

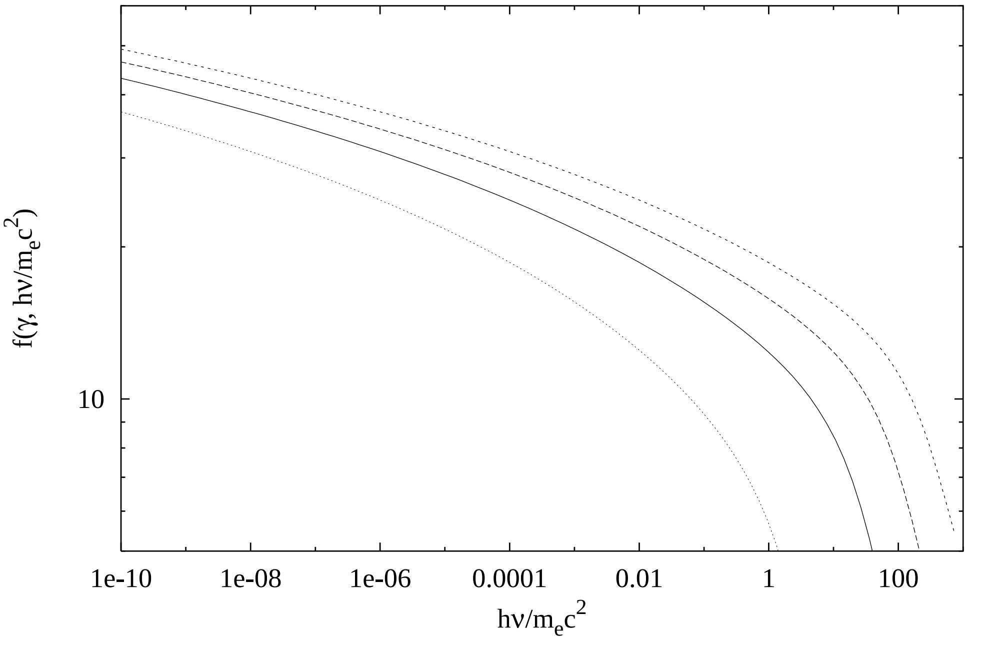

Abbildung 3.1: Die Funktion $f(\gamma, x)$, die die spektrale Verteilung der Bremsstrahlungsphotonen wiederspiegelt, für vier verschiedene Lorentzfaktoren: gepunktet: $\gamma = 10$, durchgezogen: $\gamma = 100$, lang gestrichelt: $\gamma = 350$, kurz gestrichelt: $\gamma = 1000$.

zwischen Elektronen und turbulenten Alfvén-Wellen, d.h. Wechselwirkung zwischen Teilchen und Welle findet statt, wenn die Wellenlänge λ von der Größenordnung des Gyrationsradiuses $r_{\rm g}$ ist:

$$\lambda \approx r_{\rm g} \quad . \tag{3.41}$$

Die energetischen Elektronen wechselwirken also mit den langwelligen Störungen des Magnetfeldes. Im Rahmen der quasi-linearen Theorie der schwachen Plasmaturbulenz läßt sich eine Diffusionsgleichung herleiten (Lerche 1968, Schlickeiser 1989 a, b), die die Entwicklung der nicht-thermischen Elektronenkomponente beschreibt. Die Streuung der Elektronen an den Alfvén-Wellen, die stark vereinfacht als Streuung an harten, schweren Kugeln beschrieben werden kann, verursacht Richtungsänderungen (Pitchwinkelstreuung) und Energieänderungen. Wenn die Pitchwinkelstreuung jedoch schnell ist gegenüber den Energieänderungen, dann wird die Verteilungsfunktion $f(\mu, p, t)$ immer *fast* isotrop sein:

$$f(\mu, p, t) \approx f^0(p, t) + f^1(\mu, p, t) \quad . \tag{3.42}$$

In der sogenannten Diffusionsnäherung betrachtet man dann nur noch den isotropen Anteil der Verteilungsfunktion. Die kinetische Gleichung für den isotropen Anteil $f(p, t)$ (da nur isotrope Verteilungen betrachtet werden wird der Kennzeichnung ^{0} ab hier wieder weggelassen) lautet:

$$\frac{\partial f(p,t)}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p^2 D_{\rm pp} \frac{\partial f(p,t)}{\partial p} \right\} \quad . \tag{3.43}$$

Der Diffusionskoeffizient $D_{\rm pp}$ ist eine Funktion der Stärken des geordneten und des fluktuierenden Magnetfeldes B bzw. δB, des Spektrums der Fluktuationen (üblicherweise ein Potenzspektrum mit Exponent q) und der Dichte des Hintergrundplasmas $N_{\rm e,cool}$. Für den Spezialfall $\delta B/B = 1$ und $q = 2$ erhält man den folgenden Diffusionskoeffizienten

$$D_{\rm pp} \approx \frac{v_{\rm A}^2}{9\kappa} p^2 \quad , \tag{3.44}$$

die Diffusionszeitskala $t_{\rm diff}$ lautet also:

$$t_{\rm diff} = \frac{9\kappa}{v_{\rm A}^2} \quad , \tag{3.45}$$

hier sind $v_{\rm A}$ die Alfvéngeschwindigkeit und κ der Transportkoeffizient, der den durch die Pitchwinkelstreuung verursachten Transport von Teilchen entlang des geordneten Magnetfeldes beschreibt.

Der räumliche Transport von Teilchen durch Pitchwinkelstreuung ist auch Ursache dafür, daß ein Plasmateilchen mehrfach über eine Stoßwelle hinweg gestreut werden kann. Da die Streuung ein stochastischer Prozeß ist, werden die Winkel, unter denen ein Elektron von upstream (Plasmageschwindigkeit u_1, Transportkoeffizient κ_1) nach downstream (Plasmageschwindigkeit u_2, Transportkoeffizient κ_2) und zurück gestreut wird nie gleich sein und ein solcher Zyklus resultiert in einem Energiegewinn für das Elektron. Durchläuft ein Elektron mehrere solche Zyklen bevor es nach downstream entkommt, so ändert sich sein Impuls im Lauf der Zeit gemäß (Kirk et al. 1994):

$$\dot{p} = \frac{u_1 - u_2}{3} \left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2} \right)^{-1} p \quad , \tag{3.46}$$

damit läßt sich die Beschleunigungszeitskala $t_{\rm acc}$ schreiben als:

$$t_{\rm acc} = \frac{3}{u_1 - u_2} \left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2} \right) \quad . \tag{3.47}$$

Dieser Ausdruck gilt für die Beschleunigung von relativistischen Elektronen ($v \approx c$) an nicht-relativistischen Stoßfronten ($(u_1 - u_2)/c \ll 1$). Die Berücksichtigung der Beschleunigung an vielen Stoßfronten geschieht in der einfachst möglichen Form, nämlich durch einen Füllfaktor $\mathcal{V}$, der ein Maß für die Anzahl der Stoßfronten ist:

$$t_{\rm acc} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{3}{u_1 - u_2} \left(\frac{\kappa_1}{u_1} + \frac{\kappa_2}{u_2} \right) \quad . \tag{3.48}$$

Betrachtet man nun die kinetische Gleichung für die relativistischen Elektronen (Gl. 2.2) im stationären Zustand, so kann man die spektrale Form des pile-up näherungsweise durch den folgenden Ausdruck beschreiben (Lesch & Schlickeiser 1987):

$$n_{\rm e}(\gamma) \propto \gamma^a e^{-\frac{\gamma}{\gamma_{\rm M}}} \quad . \tag{3.49}$$

Dieser Näherung gilt für Lorentzfaktoren $\gamma > \gamma_{\rm M}/a$. Der Exponent a und der cut-off-Lorentzfaktor $\gamma_{\rm M}$ sind gegeben durch:

$$a = 2 + \frac{\tau_{\rm diff}}{\tau_{\rm acc}} \quad , \quad \gamma_{\rm M} = \frac{3}{4} \frac{1}{l_{\rm B} \tau_{\rm diff}} \quad . \tag{3.50}$$

Eine weitere wichtige Größe, die sich aus dieser Näherung ableiten läßt und die später für das Fitten der zeitabhängigen Rechnungen an Meßwerte benötigt wird, ist der Lorentzfaktor $\gamma_{\rm max}$, bei dem die Verteilung ihr Maximum annimmt, d.h. die Lage des pile-up:

$$\gamma_{\rm max} = a \gamma_{\rm M} \quad . \tag{3.51}$$

Kapitel 4

Normierungen, Transformationen

In diesem Kapitel, das mehr technischer Natur ist, werden zuerst Normierungen eingeführt, um dimensionslose Größen zu erhalten. Im zweiten Teil werden dann logarithmische Größen eingeführt, was für die numerische Behandlung des Problems notwendig ist, da sich sowohl die Energieintervalle, als auch die Wertebereiche der Teilchendichten über mehrere Dekaden erstrecken werden.

4.1 Normierung der Gleichungen

Die dimensionsbehafteten Größen in den drei kinetischen Gleichungen sind Energien, Zeiten, Volumina bzw. ihre Kombinationen. Durch den Übergang vom Impuls p zum Lorentzfaktor γ als unabhängiger Variable in der Gleichung der relativistischen Elektronen ist eine Normierung bereits eingeführt und es bietet sich an, auch die Energie der Photonen auf die Ruheenergie der Elektronen $m_\mathrm{e}c^2$ zu normieren. Die dimensionslose Frequenz x ist dann gegeben durch:

$$x = \frac{h\nu}{m_\mathrm{e}c^2}\,, \quad \text{mit} \quad \frac{m_\mathrm{e}c^2}{h} = 1.2 \cdot 10^{20}\ \mathrm{Hz} \quad . \tag{4.1}$$

Als charakteristische Zeitskala wird die Lichtlaufzeit durch eine sphärische Quelle t_cross gewählt:

$$\tau = \frac{t}{t_\mathrm{cross}}\,, \quad \text{mit} \quad t_\mathrm{cross} = \frac{R}{c} = 333\left(\frac{R}{10^{13}\mathrm{cm}}\right)\ \mathrm{sec} \quad . \tag{4.2}$$

Für die Normierung des Volumens wird die Größe $\sigma_{\rm T} R$ verwendet:

$$V' = \frac{V}{\sigma_{\rm T} R}\,, \quad \text{mit} \quad \sigma_{\rm T} R = 6.65 \cdot 10^{-12} \left(\frac{R}{10^{13}\text{cm}}\right)\ \text{cm}^3 \quad . \tag{4.3}$$

Für die normierten Verteilungen werden keine neuen Symbole eingeführt. Wenn nicht explizit erwähnt, sind ab jetzt normierte Größen gemeint. Die Terme, die sich auf Synchrotronemission und Selbstabsorption beziehen, können noch vereinfacht werden, wenn man statt der abgestrahlten Leistung eines Elektrons zur normierten Rate $\eta(x,\gamma)$, mit der Photonen ins Intervall $[x, x+dx]$ abgestrahlt werden übergeht:

$$\eta(x,\gamma) = \frac{R m_{\rm e} c}{h} \frac{P_{\rm r}(\nu,\gamma)}{h\nu} \quad . \tag{4.4}$$

Die im Verlustterm $L_\gamma^{\rm ssa}$ auftretende Ableitung von $\eta(x,\gamma)$ kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\kappa(x,\gamma) = \frac{c^3}{8\pi\sigma_{\rm T} R} \left(\frac{h}{m_{\rm e} c^2}\right)^3 \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\gamma^2 \eta(x,\gamma)\right) \quad . \tag{4.5}$$

4.1.1 Die Gleichung für die relativistischen Elektronen

In dimensionsloser Form lautet die kinetische Gleichung für die relativistischen Elektronen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\rm e}(\gamma,\tau)}{\partial\tau} &= \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} \left\{ \frac{\gamma^2}{\tau_{\rm diff}} n_{\rm e}(\gamma,\tau) \right\} - \frac{\partial}{\partial\gamma} \left\{ \left(\frac{4}{\tau_{\rm diff}} + \frac{1}{\tau_{\rm acc}} \right) \gamma n_{\rm e}(\gamma,\tau) \right\} - \\ & \quad \frac{n_{\rm e}(\gamma,\tau)}{\tau_{\rm e}^{\rm esc}} + Q_{\rm e}^{\rm inj} - L_{\rm e}^{\rm syn} - L_{\rm e}^{\rm ics} - L_{\rm e}^{\rm brems} \quad , \end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei die Verlustterme gegeben sind durch:

$$L_{\rm e}^{\rm syn} = -\frac{4}{3} l_{\rm B} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\gamma^2 n_{\rm e}(\gamma,\tau)\right) \tag{4.7}$$

$$L_{\rm e}^{\rm ics} = -\begin{cases} \frac{4}{3} l_\gamma(\tau) \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\gamma^2 n_e(\gamma,\tau)\right) & , x < x_{\rm T} \\ \frac{n_{\rm e}(\gamma,\tau)}{\gamma} \int_{x_{\rm T}}^\infty \frac{n_\gamma(x',\tau)}{x'} dx' & , x > x_{\rm T} \end{cases} \tag{4.8}$$

$$L_{\rm e}^{\rm brems} = -\frac{8\alpha r_0^2}{\sigma_{\rm T}} Z(Z+1) N_{\rm targ} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\gamma \ln\left(2\gamma - 1/3\right) n_{\rm e}(\gamma,\tau)\right) \quad . \tag{4.9}$$

Hier wurden die magnetische Kompaktheit und die Kompaktheit der Photonen eingeführt, sie sind definiert als (siehe z.B. Mastichiadis & Kirk

1995):

$$
\begin{aligned}
l_\mathrm{B} &= \frac{\sigma_\mathrm{T} R}{m_\mathrm{e} c^2} \frac{B^2}{8\pi} &\quad (4.10)\\
l_\gamma(\tau) &= \int_0^\infty x n_\gamma(x,\tau) dx \quad . &\quad (4.11)
\end{aligned}
$$

Damit läßt sich die normierte Synchrotronverlustzeit eines relativistischen Elektrons schreiben als:

$$\tau_\mathrm{e}^\mathrm{syn} = \frac{3}{4 l_\mathrm{B} \gamma} \quad , \tag{4.12}$$

ein analoger Ausdruck gilt natürlich auch für die Verlustzeit eines relativistischen Elektrons, das Energie durch inverse Compton-Streuung (im Thomson-Regime) verliert.
Für die Injektion von Elektronen in den Beschleunigungsprozeß wird vorerst die folgende Quellfunktion $Q_\mathrm{e}^\mathrm{inj}(\gamma)$ verwendet:

$$Q_\mathrm{e}^\mathrm{inj} = Q_0 e^{-\frac{\gamma-\gamma_0}{\Delta}} \quad . \tag{4.13}$$

Der Parameter Δ dient lediglich dazu, die Breite der Injektionsfunktion variieren zu können, was eine Annäherung an eine δ-förmige Injektionsfunktion ermöglicht.
Die Randbedingung bei γ_0 ist, wie bereits erwähnt, gegeben durch die analytische Lösung im verlustfreien Fall. Zum Start der Rechnungen wird das Energiegitter der Elektronen mit einem Potenzgesetz mit Index s gefüllt:

$$
\begin{aligned}
n_\mathrm{e}(\gamma,0) &= \tau_\mathrm{acc} Q_0 \left(\frac{p_\mathrm{inj}}{m_\mathrm{e} c}\right)^{\frac{\tau_\mathrm{acc}}{\tau_\mathrm{esc}}} \gamma_0^{-1-\frac{\tau_\mathrm{acc}}{\tau_\mathrm{esc}}} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{-s} &\quad (4.14)\\
n_\mathrm{e}(\gamma_0,\tau) &= \tau_\mathrm{acc} Q_0 \left(\frac{p_\mathrm{inj}}{m_\mathrm{e} c}\right)^{\frac{\tau_\mathrm{acc}}{\tau_\mathrm{esc}}} \gamma_0^{-1-\frac{\tau_\mathrm{acc}}{\tau_\mathrm{esc}}} &\quad (4.15)\\
n_\mathrm{e}(\gamma_\mathrm{max},\tau) &= 0 \quad . &\quad (4.16)
\end{aligned}
$$

4.1.2 Die Gleichung für die Photonen

Die normierte Gleichung für die Photonen lautet:

$$\frac{\partial n_\gamma(x,\tau)}{\partial \tau} = -n_\gamma(x,\tau) + Q_\gamma^\mathrm{syn} + Q_\gamma^\mathrm{ics} + Q_\gamma^\mathrm{brems} - L_\gamma^\mathrm{ssa} \quad . \tag{4.17}$$

Auch hier lassen sich die Quell- und Verlustterme durch die eingeführten Näherungen zum Teil etwas kompakter notieren. Sie lauten im einzelnen:

$$Q_\gamma^{\mathrm{syn}} = \int_{\gamma_{\min}}^{\infty} \eta(x,\gamma) n_{\mathrm{e}}(\gamma,\tau) d\gamma \tag{4.18}$$

$$Q_\gamma^{\mathrm{ics}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^A (xx')^{-\frac{1}{2}} n_{\mathrm{e}}(\sqrt{3x/4x'},\tau) n_\gamma(x',\tau) dx' & , x < x_{\mathrm{T}} \\ \frac{n_{\mathrm{e}}(x,\tau)}{x} \int_{3/4x}^{\infty} \frac{n_\gamma(x',\tau)}{x'} dx' & , x > x_{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{4.19}$$

$$Q_\gamma^{\mathrm{brems}} = \frac{8\alpha Z^2 r_0^2}{\sigma_{\mathrm{T}}} \frac{N_{\mathrm{targ}}}{x} \int_{\gamma_{\mathrm{low}}}^{\infty} n_{\mathrm{e}}(\gamma,\tau) f(\gamma,x) d\gamma \tag{4.20}$$

$$L_\gamma^{\mathrm{ssa}} = \frac{n_\gamma(x,\tau)}{x} \int_{\gamma_{\min}}^{\infty} n_{\mathrm{e}}(\gamma,\tau) \kappa(x,\gamma) d\gamma \quad . \tag{4.21}$$

Als Startwerte bei $\tau = 0$ wird das Synchrotronspektrum der Anfangsverteilung der Elektronen $n_{\mathrm{e}}(\gamma, 0)$ verwendet und das Photonenspektrum soll für sehr große Frequenzen gegen null gehen. Die Startwerte für die Photonengleichung lauten also:

$$n_\gamma(\nu, 0) = Q_\gamma^{\mathrm{syn}}(n_{\mathrm{e}}(\gamma, 0)) \tag{4.22}$$

$$n_\gamma(\nu_{\max}, \tau) = 0 \quad . \tag{4.23}$$

4.1.3 Die Gleichung für die kalten Elektronen

Schließlich folgt nun noch die Bilanzgleichung für die Dichte des Hintergrundplasmas in dimensionsloser Form:

$$\frac{\partial N_{\mathrm{e,cool}}(\tau)}{\partial \tau} = Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{syn}} + Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{ics}} + Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{brems}} - L_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{inj}} \quad . \tag{4.24}$$

Die Quell- und Verlustterme lauten:

$$Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{syn}} = \frac{4}{3} l_{\mathrm{B}} \gamma_{\min}^2 n_{\mathrm{e}}(\gamma_{\min}, \tau) \tag{4.25}$$

$$Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{ics}} = \frac{4}{3} l_\gamma^{\mathrm{T}}(\tau) \gamma_{\min}^2 n_{\mathrm{e}}(\gamma_{\min}, \tau) \tag{4.26}$$

$$Q_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{brems}} = \frac{8\alpha r_0^2}{\sigma_{\mathrm{T}}} Z(Z+1) N_{\mathrm{targ}} \gamma_{\min} \ln(2\gamma_{\min} - 1/3)\, n_{\mathrm{e}}(\gamma_{\min}, \tau) \tag{4.27}$$

$$L_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{inj}} = \int Q_{\mathrm{inj}}(\gamma, \gamma_{\min}) d\gamma \approx Q_0 \quad . \tag{4.28}$$

Die Näherung für $L_{\mathrm{e,cool}}^{\mathrm{inj}}$ ist gerechtfertigt, da eine nahezu monoenergetische Injektionsfunktion (siehe Gl. 4.13) verwendet wird.

Startwert für die Dichte der kalten Elektronen ist ein vorgegebener Wert:

$$N_{\mathrm{e,cool}}(0) = N^0_{\mathrm{e,cool}} \quad . \tag{4.29}$$

4.2 Variablentransformationen

Da sich sowohl das Energieintervall für die relativistischen Elektronen, als auch das Frequenzintervall der zu erwartenden Photonenspektren über mehrere Zehnerpotenzen erstreckt, wird in beiden kinetischen Gleichungen ein logarithmisches Gitter verwendet:

$$y = \log\gamma = \frac{\ln\gamma}{\ln 10} \tag{4.30}$$

$$z = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad . \tag{4.31}$$

Die Transformationsvorschriften für die erste und die zweite Ableitung lauten wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} = \frac{e^{-Ly}}{L}\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} = \frac{e^{-2Ly}}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{e^{-2Ly}}{L}\frac{\partial}{\partial y} \quad , \tag{4.33}$$

mit $L = \ln 10$.

4.2.1 Die Gleichung für die relativistischen Elektronen

Die transformierte Gleichung für die relativistischen Elektronen lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{\mathrm{e}}(y,\tau)}{\partial\tau} &= \frac{A}{L^2}\frac{\partial^2 n_{\mathrm{e}}(y,\tau)}{\partial y^2} + g(y)\frac{\partial n_{\mathrm{e}}(y,\tau)}{\partial y} + \\ &\quad + h(y)n_{\mathrm{e}}(y,\tau) + Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{inj}} \quad ,\end{aligned} \tag{4.34}$$

in den Funktionen $h(y)$ und $g(y)$ sind die folgenden Ausdrücke zusammengefaßt:

$$
\begin{aligned}
h(y) &= 2A - B - D + 2Ce^{Ly} + \\
&\quad E\left(\ln\left(2e^{Ly} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}e^{-Ly}\right)^{-1}\right) \qquad (4.35)\\
g(y) &= \frac{1}{L}\left(3A - B + Ce^{Ly} + E\ln\left(2e^{Ly} - \frac{1}{3}\right)\right) \quad . \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

A, B, C, D und E sind wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\tau_{\mathrm{diff}}} \qquad (4.37)\\
B &= \frac{4}{\tau_{\mathrm{diff}}} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{acc}}} \qquad (4.38)\\
C &= \frac{4}{3}l_{\mathrm{B}} + \frac{4}{3}\int_{z_{\mathrm{min}}}^{z_{\mathrm{T}}} e^{2Lz'} n_\gamma(z', \tau) dz' \qquad (4.39)\\
D &= \frac{1}{\tau_{\mathrm{e}}^{\mathrm{esc}}} + e^{-Ly}\int_{z_{\mathrm{T}}}^{z_{\mathrm{max}}} n_\gamma(z', \tau) dz' \qquad (4.40)\\
E &= \frac{8\alpha r_0^2}{\sigma_{\mathrm{T}}} Z(Z+1) N_{\mathrm{targ}} \quad . \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

Geht man nun noch von der Verteilungsfunktion $n_{\mathrm{e}}(y, \tau)$ zum Logarithmus der Verteilung $\mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y, \tau) = \log n_{\mathrm{e}}(y, \tau)$ über, so lautet die kinetische Gleichnung für die relativistischen Elektronen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y,t)}{\partial \tau} &= \frac{A}{L^2}\frac{\partial^2 \mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y,\tau)}{\partial y^2} + \frac{A}{L}\left(\frac{\partial \mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y,\tau)}{\partial y}\right)^2 + \\
&\quad g(y)\frac{\partial \mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y,\tau)}{\partial y} + \frac{h(y)}{L} + \frac{e^{-L\mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y,\tau)}}{L} Q_{\mathrm{inj}} \quad . \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten A, B und E überstehen diese Transformation unverändert, C und D lauten wie folgt:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{4}{3}l_{\mathrm{B}} + \frac{4}{3}\int_{z_{\mathrm{min}}}^{z_{\mathrm{T}}} e^{L(2z' + \mathcal{N}_\gamma(z',\tau))} dz' \qquad (4.43)\\
D &= \frac{1}{\tau_{\mathrm{e}}^{\mathrm{esc}}} + e^{-Ly}\int_{z_{\mathrm{T}}}^{z_{\mathrm{max}}} e^{L\mathcal{N}_\gamma(z',\tau)} dz' \quad . \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

4.2.2 Die Gleichung für die Photonen

Mit allen in Kapitel 3 vorgestellten Quell- und Verlusttermen lautet die kinetische Gleichung für die Photonen nach der Transformation von x nach $z = \log x$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_\gamma(z,\tau)}{\partial \tau} &= -n_\gamma(z,\tau) + \\
&\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta(z,y) n_{\mathrm{e}}(y,\tau) L e^{Ly} dy - \\
&e^{-Lz} n_\gamma(z,\tau) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \kappa(y,z) n_{\mathrm{e}}(y,\tau) L e^{Ly} dy + \\
&\frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{z_{\mathrm{A}}} \sqrt{e^{-L(z+z')}} n_{\mathrm{e}}(y_0,\tau) n_\gamma(z',\tau) L e^{Lz'} dz' - \\
&e^{-Lz} n_{\mathrm{e}}(z,\tau) \int_{z_0}^{z_{\max}} n_\gamma(z',\tau) L dz' \\
&F \int_{y_{\mathrm{low}}}^{y_{\max}} f(y,z) n_{\mathrm{e}}(y,\tau) L e^{Ly} dy \quad ,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

F, y_0 und z_0 sind wie folgt gegeben:

$$F = \frac{8\alpha r_0^2}{\sigma_{\mathrm{T}}} Z^2 N_{\mathrm{targ}} \tag{4.46}$$

$$y_0 = \log\left(\sqrt{\frac{3}{4} e^{L(z-z')}}\right) \tag{4.47}$$

$$z_0 = \frac{3}{4} e^{-Lz} \quad . \tag{4.48}$$

Transformiert man nun noch von $n_\gamma(z,\tau)$ nach $\mathcal{N}_\gamma(z,\tau) = \log n_\gamma(z,\tau)$, so erhält man die Gleichung, die dann auch in den numerischen Rechnungen verwendet wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{N}_\gamma(z,\tau)}{\partial \tau} &= -\frac{1}{L} + \\
&e^{-L\mathcal{N}_\gamma(z,\tau)} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta(z,y) e^{L(\mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y,\tau)+y)} dy - \\
&e^{-Lz} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \kappa(z,y) e^{L(\mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y,\tau)+y)} dy + \\
&\frac{\sqrt{3}}{4} e^{-L\mathcal{N}_\gamma(z,\tau)} \sqrt{e^{-Lz}} \int_0^{z_{\mathrm{A}}} e^{L\mathcal{N}_{\mathrm{e}}(y_0,\tau)} \sqrt{e^{-Lz'}} e^{L(\mathcal{N}_\gamma(z',\tau)+z')} dz' +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& e^{L(\mathcal{N}_\mathrm{e}(z,\tau)-\mathcal{N}_\gamma(z,\tau)-z)} \int_{z_0}^{z_\mathrm{max}} e^{L\mathcal{N}_\gamma(z',\tau)} dz' + \\
& F e^{-L\mathcal{N}_\gamma(z,\tau)} \int_{y_\mathrm{low}}^{y_\mathrm{max}} f(y,z) e^{L\mathcal{N}_\mathrm{e}(y,\tau)} dy \quad . \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

4.2.3 Die Gleichung für die kalten Elektronen

Zu guter Letzt und ohne ausschweifende Kommentare noch die Gleichung für die Elektronen des Hintergrundplasmas:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_\mathrm{e,cool}(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{4}{3} l_\mathrm{B} e^{2Ly_\mathrm{min}} n_\mathrm{e}(y_\mathrm{min},\tau) + \\
& \frac{4}{3} l_\gamma^\mathrm{T}(\tau) e^{2Ly_\mathrm{min}} n_\mathrm{e}(y_\mathrm{min},\tau) + \\
& E \ln\left(2e^{Ly_\mathrm{min}} - \frac{1}{3}\right) e^{Ly_\mathrm{min}} n_\mathrm{e}(y_\mathrm{min},\tau) - Q_0 \quad . \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Nun werden noch die Verteilungen n_e und n_γ, nicht jedoch $N_\mathrm{e,cool}$, transformiert und man erhält:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_\mathrm{e,cool}(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{4}{3} l_\mathrm{B} e^{L(2y_\mathrm{min}+\mathcal{N}_e(y_\mathrm{min},\tau))} + \\
& \frac{4}{3} l_\gamma^\mathrm{T}(\tau) e^{2L(y_\mathrm{min}+\mathcal{N}_e(y_\mathrm{min},\tau))} + \\
& E \ln\left(2e^{Ly_\mathrm{min}} - \frac{1}{3}\right) e^{L(y_\mathrm{min}+\mathcal{N}_e(y_\mathrm{min},\tau))} - Q_0 \quad . \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Kapitel 5

Stationäre Modelle, Spezialfälle

In diesem Kapitel wird ein einfacher Spezialfall der kinetischen Gleichung der Photonen betrachtet, nämlich ein stationärer Zustand mit einer vorgegebenen Elektronenverteilung. Es werden nur die Terme für Synchrotronstrahlung, Synchrotronselbstabsorption und Entweichen der Photonen aus der Quelle berücksichtigt:

$$-n_\gamma(x) + Q_\gamma^{\rm syn} - L_\gamma^{\rm ssa} = 0 \tag{5.1}$$

Im Hinblick auf die pile-up Verteilungen werden in diesem Kapitel vorerst nur streng monoenergetische Elektronen-Verteilungen betrachtet:

$$n_{\rm e}(\gamma) = N_{\rm e}^0 \delta(\gamma - \gamma_0) \quad . \tag{5.2}$$

Diese Verteilung hat den Vorteil, daß die Integrale über die Elektronenenegie in den Emissions- und Absorptionskoeffizienten sofort ausgeführt werden können. Darüber hinaus werden die so berechneten Spektren mit den im folgenden zu berechnenden Lösungen der kinetischen Gleichungen verglichen, da $n_{\rm e}(\gamma) \propto \delta(\gamma - \gamma_0)$ als Näherung einer pile-up Verteilung angesehen werden kann. Allerdings muß hier angemerkt werden, daß für Synchrotronselbstabsorption mindestens zwei Energieniveaus in der Elektronenverteilung zur Verfügung stehen müssen, so daß eine δ-Funktion den Absorptionsprozeß nur näherungsweise beschreiben kann.

Dieses optisch dünne Synchrotronmodell mit einer monoenergetischen Elektronenverteilung ist das einfachst mögliche, mit dem das Radiospektrum von Sgr A* erklärt werden kann. Man verwendet die beobachteten Werte für die turn-over Frequenz, die cut-off Frequenz und die Synchrotronleuchtkraft. Um Fits an die Daten zu finden, variiert man die Modellparameter Magnetfeld B, Lorentzfaktor der relativistischen Elektronen γ_0, Dichte der relativistischen Elektronen $N_{\rm e}^0$ und den Radius der Quelle R. Die Dichte der relativistischen Elektronen $N_{\rm e}^0$ wird unter der Annahme der Äquipartition von magnetischer Energiedichte und der Energiedichte der relativistischen Elektronen berechnet:

$$\int_0^\infty \gamma m_e c^2 n_e(\gamma) d\gamma = \gamma_0 m_e c^2 N_e^0 = \varepsilon \frac{B^2}{8\pi} \quad , \tag{5.3}$$

so daß drei Beobachtungsgrößen den drei Modellparametern gegenüber stehen. Der Parameter ε dient zur Beschreibung der Abweichung von Gleichverteilung.

5.1 Der Vakuum-Fall

Für die streng monoenergetische Elektronenverteilung (Gl. 5.2) lautet die Lösung der kinetischen Gleichung:

$$n_\gamma(x) = \frac{N_e^0 \eta(x, \gamma_0)}{1 + \frac{N_e^0}{x} \kappa(x, \gamma_0)} \quad . \tag{5.4}$$

Die optische Tiefe bezüglich Synchrotronselbstabsorption τ_x ist gegeben durch:

$$\tau_x = \frac{N_e^0}{x} \kappa(x, \gamma_0) \quad , \tag{5.5}$$

damit läßt sich das Photonenspektrum im optisch dicken, bzw. dünnen Fall wie folgt schreiben:

$$n_\gamma(x) \approx \begin{cases} N_e^0 \eta(x, \gamma_0) & \text{für } \tau_x \ll 1 \\ \frac{x\eta(x,\gamma_0)}{\kappa(x,\gamma_0)} & \text{für } \tau_x \gg 1 \end{cases} \quad . \tag{5.6}$$

In Abb. 5.1 sind drei theoretische Spektren zusammen mit den Meßwerten von Sgr A* geplottet. Kurve Nummer zwei ergibt den besten Fit an die Daten. Die Parameter stehen in nachfolgender Tabelle:

Modell	B in G	γ_0	R in cm	N_e^0 in cm^{-3}
1	5	250	$2.5 \cdot 10^{13}$	$4.9 \cdot 10^3$
2	4.3	350	$3.5 \cdot 10^{13}$	$2.6 \cdot 10^3$
3	5	450	$3.5 \cdot 10^{13}$	$2.7 \cdot 10^3$

Die in Abb. 5.1 gezeigten Spektren setzen sich aus zwei Bereichen zusammen:
Einem optisch dünnen Teil oberhalb von $\nu \approx 1$ GHz und einem optisch dicken Teil bei Frequenzen darunter. Diese beiden Bereiche entsprechen

den beiden oben angegeben asymptotischen Näherungen für $\tau_x \ll 1$ bzw. $\tau_x \gg 1$. Die charakteristischen Frequenzabhängigkeiten lassen sich mit Hilfe der im Anhang angegebenen Näherungen für die Funktion $CS(x)$ und ihre Ableitung $dCS(x)/dx$ berechnen. Zu beachten ist, daß für den Fluß $S_\nu \propto \nu n_\gamma(\nu)$ gilt:

$$S_\nu \propto \begin{cases} \nu^2 & \text{für } \tau_x \gg 1 \\ \\ \nu^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\nu}{\nu_c}} & \text{für } \tau_x \ll 1 \quad . \end{cases} \tag{5.7}$$

Eine Abschätzung für die Frequenz, bei der das Spektrum optisch dick/dünn wird erhält man aus der Bedingung $\tau_{x_{\rm to}} = 1$. Die Abschätzung für die turn-over Frequenz $\nu_{\rm to}$ lautet:

$$\nu_{\rm to} \approx 1.3 \cdot 10^4 B^{\frac{8}{5}} \gamma_0^{-\frac{8}{5}} R^{\frac{3}{5}} \quad . \tag{5.8}$$

Anmerkung zum optisch dicken Teil eines Synchrotronspektrums:
Die Frequenzabhängigkeit $S_\nu \propto \nu^{2.5}$ erhält man nur, wenn man Potenzspektrum der Form $n_{\rm e}(\gamma) \propto \gamma^{-s}$ verwendet und die Integration über die Elektronenenergie über das gesamte Energieintervall ausdehnt.

5.2 Plasma-Fall

Als zusätzlicher Parameter tritt in diesem Fall die Dichte des thermischen Hintergrundplasmas auf. Angenommen wird, daß die relativistischen Elektronen, das Magnetfeld und die Synchrotronstrahlung in dieses Plasma eingebettet sind. Dies ist für die folgenden Betrachtungen wesentlich und gilt nicht, wenn das thermische Plasma zwischen dem Beobachter und der Quelle lokalisiert ist.
Die Dichte des thermischen Hintergrundplasmas $N_{\rm e,cool}$ geht über den Brechungsindex $n(\nu)$ (Lang 1974) in die Emissions- und Absorptionsterme ein, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in einem Plasma nicht die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist, sondern $c' = cn(\nu)$. Das niederfrequente Ende des Radiospektrums kann in diesem Fall durch einen weiteren turn-over-Effekt, den sogenannten Razin-Effekt, beeinflußt werden. Er verursacht einen turn-over, der nicht durch Absorption, sondern durch die Unterdrückung der Synchrotronemission zustande kommt. Der spektrale Verlauf von $xn_\gamma(x)$ unterhalb des turn-overs ist, falls nur Synchrotronemission berücksichtigt wird, gegeben durch (Crusius & Schlickeiser 1988):

$$xn_\gamma(x) \propto x \exp\left(-\left(\frac{x_{\rm v}}{x}\right)^2\right) \quad \text{für} \quad x \ll \gamma_0 x_{\rm p} \quad . \tag{5.9}$$

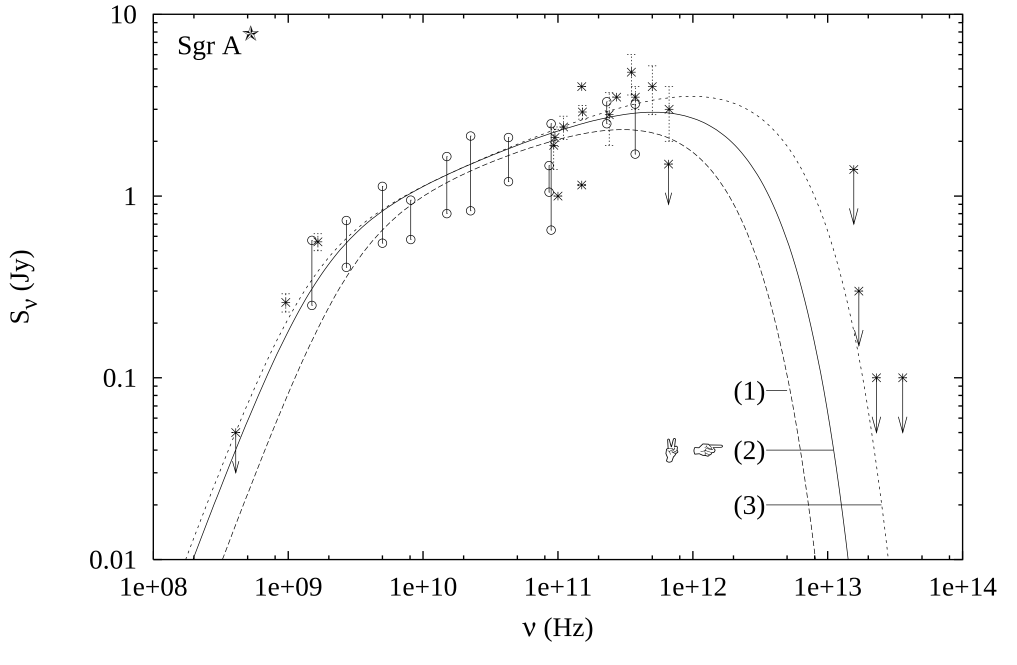

Abbildung 5.1: Homogenes, isotropes Vakuummodell für Sgr A* mit Synchrotronselbstabsorption unterhalb von $\nu \approx 1$ GHz. Die durchgezogene Linie zeigt den besten Fit an die Radiodaten. Die Parameter lauten: Magnetfeld $B = 4.3$ G, Lorentzfaktor $\gamma_0 = 350$, Radius $R = 3.5 \cdot 10^{13}$ cm, Dichte der Elektronen $N_{\rm e}^0 = 2.6 \cdot 10^3$ cm^{-3}. Die Parameter für die Kurven (1) und (3) finden sich in Tabelle 1.

Hier ist x_p die normierte Plasmafrequenz und die Frequenz x_v (Crusius & Schlickeiser 1988, Gl. 25) gibt an, oberhalb welcher Frequenz das Synchrotronspektrum den gleichen Verlauf zeigt wie im Vakuum:

- $x > x_\mathrm{v}$, d.h. spektraler Verlauf wie im Vakuum
- $x < x_\mathrm{v}$, d.h. Unterdrückung der Synchrotronemissivität durch das thermische Plasma.

In Abb. 5.2a sind reine Synchrotronemissionsspektren gezeigt, die sich nur durch unterschiedliche thermischen Dichten unterscheiden. Es wurden die Daten von Modell 2 des vorigen Abschnittes verwendet und für $N_\mathrm{e,cool}$ wurden die folgenden Werte verwendet: $N_\mathrm{e,cool} = 5 \cdot 10^6 \mathrm{cm}^{-3}$ (kurz gestrichelte Linie), $N_\mathrm{e,cool} = 8 \cdot 10^6 \mathrm{cm}^{-3}$ (lang gestrichelte Linie), $N_\mathrm{e,cool} = 1 \cdot 10^7 \mathrm{cm}^{-3}$ (durchgezogene Linie) und $N_\mathrm{e,cool} = 2 \cdot 10^7 \mathrm{cm}^{-3}$ (gepunktete Linie).
In Abb. 5.2b ist die optische Tiefe τ_x bezüglich Synchrotronselbstabsorption als Funktion der Frequenz, für die oben genannten Dichten $N_\mathrm{e,cool}$ gezeigt. Dort wo τ_x negativ wird, was im Vakuum nicht möglich ist, kann ein sogenannter Synchrotronmaser auftreten (Cawthorne 1985, Crusius-Wätzel 1991). Solange der Transport der Strahlung in der Quelle nur durch den Verlustzeitansatz beschrieben wird, kann der Verstärkungsfaktor für die Strahlung nicht berechnet werden. Benützt man den korrekten Strahlungstransportterm, so erhält man folgende Lösung der stationären kinetischen Gleichung der Photonen:

$$n_\gamma(x) = \frac{x\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-N_\mathrm{e}^0 \kappa s/x}\right) \quad , \tag{5.10}$$

hier ist $s = {}^\mathrm{r}\!/_\mathrm{R}$, die auf den Radius der Quelle normierte radiale Koordinate. Die Verstärkung der Strahlung bei der Frequenz x_M, bei der die optische Tiefe τ_x ihr negatives Maximum hat, kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$n_\gamma(x_\mathrm{M}) \approx \frac{x_\mathrm{M}\eta(x_\mathrm{M})}{|\kappa(x_\mathrm{M})|} e^{|\tau_{x_\mathrm{M}}|} \quad . \tag{5.11}$$

Bleibt festzuhalten: Die Behandlung von Maseraktivität erfordert die Lösung der kinetischen Gleichung mit korrektem Strahlungstransportterm und die Rückkopplung der Synchrotronselbstabsorption in die Gleichung der relativistischen Elektronen.
Ersteres geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus; letzteres könnte mit den im nächsten Kapitel vorzustellenden numerischen Methoden behandelt werden; ohne Strahlungstransport allerdings nur unter der Einschränkung $\tau_{x_\mathrm{M}} > -1$, da sonst die Verteilung der Photonen singulär wird.

Die in Abb 5.2b gezeigten optischen Tiefen τ_x zeigen jedoch auch, daß für die Quelle Sgr A* die Verstärkung von Synchrotronstrahlung durch negative Selbstabsorption keine Rolle spielt, da der Effekt klein ist.

Sgr A*

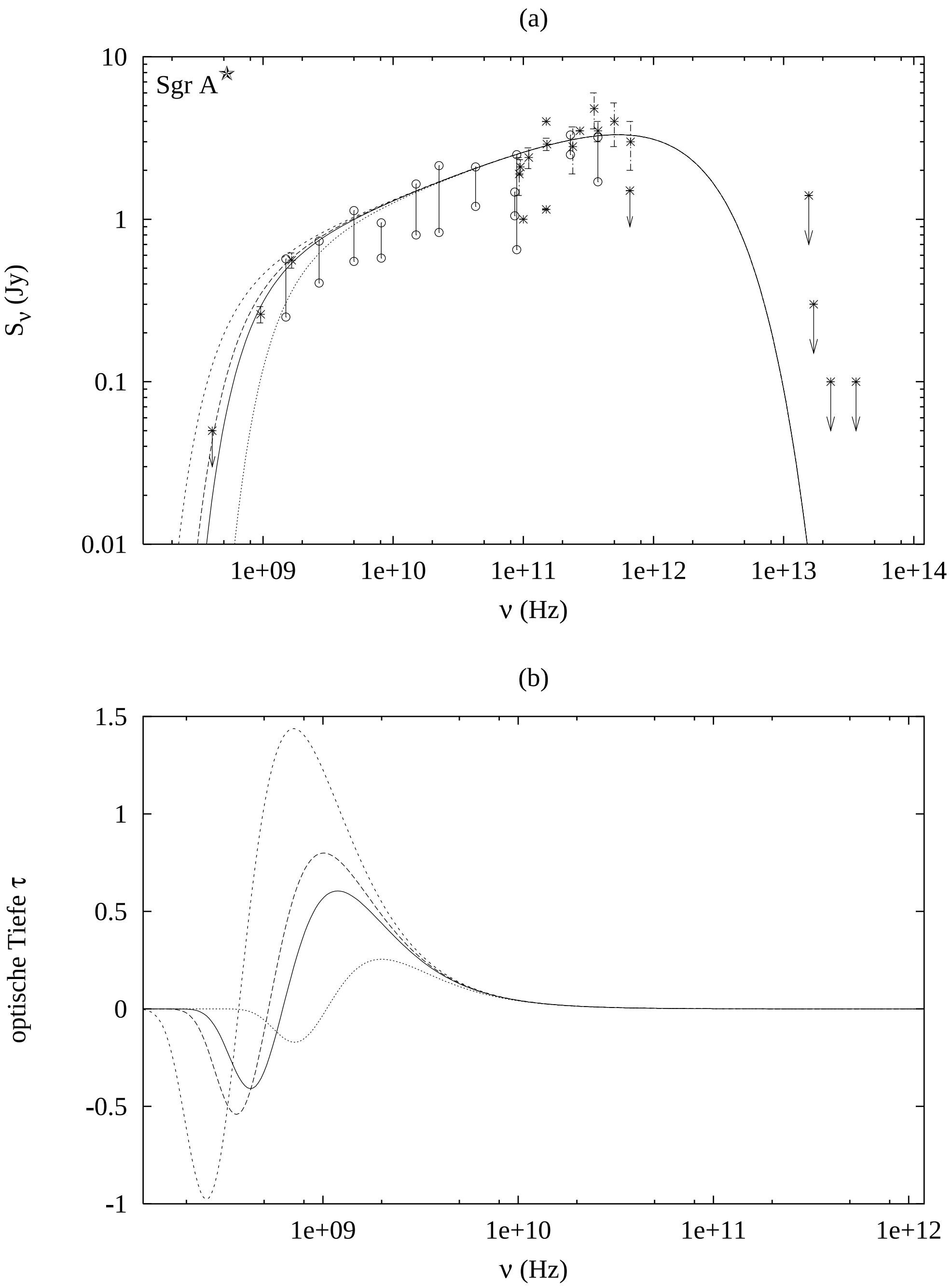

Abbildung 5.2: (a): Homogenes Plasma-Modell für Sgr A* mit Razin-Effekt unterhalb von $\nu \approx 1$ GHz. Variation der thermischen Dichte: kurz gestrichelte Linie: $N_{\rm e,cool} = 5 \cdot 10^6 \mathrm{cm}^{-3}$, lang gestrichelte Linie: $N_{\rm e,cool} = 8 \cdot 10^6 \mathrm{cm}^{-3}$, durchgezogene Linie: $N_{\rm e,cool} = 1 \cdot 10^7 \mathrm{cm}^{-3}$, gepunktete Linie: $N_{\rm e,cool} = 2 \cdot 10^7 \mathrm{cm}^{-3}$. (b): Optische Tiefe τ_x bezüglich Synchrotronselbstabsorption.

Kapitel 6

Zeitabhängige Modelle

In diesem Kapitel wird zunächst die numerische Methode vorgestellt, die verwendet wird, um die gekoppelten, nicht-linearen kinetischen Gleichungen für die relativistischen Elektronen, die Photonen und die kalten Elektronen zu lösen. Im Anschluß daran werden die Resultate einiger Testrechnungen gezeigt, die nowendig sind, um die Implementierung der verschiedenen physikalischen Prozesse zu testen. Im dritten und letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die zeitabhängigen Modelle auf die zentrale Radioquelle der Milchstraße Sgr A* angewendet.

6.1 Numerik

Zur Lösung des Systems der drei gekoppelten kinetischen Gleichungen wird die Linienmethode (Großmann & Roos 1994, Schiesser 1991) verwendet, d.h. die Gleichungen werden in den logarithmierten Energievariablen diskretisiert und das resultierende System (steifer) gewöhnlicher Differentialgleichungen wird in der Zeit integriert.
Die in der Elektronengleichung auftretenden Ableitungen werden mit Hilfe der im folgenden vorgestellten Formeln diskretisiert (Schiesser 1991).
Die erste Ableitung wird an den inneren Punkte x_i, mit $i = 3, ..., N-2$ approximiert durch:

$$\frac{dy_i}{dx} \approx \frac{1}{4!\Delta x}(2y_{i-2} - 16y_{i-1} + 16y_{i+1} - 2y_{i+2}) \quad , \tag{6.1}$$

während an den vier Randpunkten x_i, mit $i = 1, 2, N-1, N$ die folgenden Ausdrücke verwendet werden müssen:

$$\frac{dy_1}{dx} \approx \frac{1}{4!\Delta x}(-50y_1 + 96y_2 - 72y_3 + 32y_4 - 6y_5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2}{dx} &\approx \frac{1}{4!\Delta x}(-6y_1 - 20y_2 + 36y_3 - 12y_4 + 2y_5) \\
\frac{dy_{N-1}}{dx} &\approx \frac{1}{4!\Delta x}(-2y_{N-4} + 12y_{N-3} - 36y_{N-2} + 20y_{N-1} + 6y_N) \\
\frac{dy_N}{dx} &\approx \frac{1}{4!\Delta x}(6y_{N-4} - 32y_{N-3} + 72y_{N-2} - 96y_{N-1} + 50y_N) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei

$$y_i = y(x_i) \quad \text{und} \quad \frac{dy_i}{dx} = \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)_{x_i} \quad . \tag{6.2}$$

Für die zweite Ableitung existieren analoge Ausdrücke. Zuerst wieder die Formel für die inneren Punkte:

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} \approx \frac{1}{4!(\Delta x)^2}(-2y_{i-2} + 32y_{i-1} - 60y_i + 32y_{i+1} - 2y_{i+1}) \quad , \tag{6.3}$$

und dann die vier Ausdrücke für die Ränder:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y_1}{dx^2} &\approx \frac{1}{4!(\Delta x)^2}(90y_1 - 308y_2 + 428y_3 - 312y_4 + 122y_5 - 20y_6) \\
\frac{d^2y_2}{dx^2} &\approx \frac{1}{4!(\Delta x)^2}(20y_1 - 30y_2 - 8y_3 + 28y_4 - 12y_5 + 2y_6) \\
\frac{d^2y_{N-1}}{dx^2} &\approx \frac{1}{4!(\Delta x)^2}(20y_N - 30y_{N-1} - 8y_{N-2} + 28y_{N-3} - 12y_{N-4} + 2y_{N-5}) \\
\frac{d^2y_N}{dx^2} &\approx \frac{1}{4!(\Delta x)^2}(90y_N - 308y_{N-1} + 428y_{N-2} - 312y_{N-3} + 122y_{N-4} - 20y_{N-5}) \quad .
\end{aligned}$$

Man erhält also ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t)) \quad , \tag{6.4}$$

$y(t)$ und $f(y(t))$ sind hier natürlich Vektoren. Diese System wird mit Hilfe des Programmes `EULSIM` (Deuflhard 1983, 1985) integriert. Wie der Name schon andeutet, ist es ein Integrator, der auf einer semi-impliziten Euler-Methode basiert. Eine implizite Euler-Methode wertet bei der Zeitdiskretisierung die rechte Seite des Differentialgleichungssystems nicht bei y_n, sondern bei y_{n+1} aus, dadurch entsteht das folgende System nicht-linearer Gleichungen

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}) \quad , \tag{6.5}$$

das durch eine Taylorentwicklung linearisiert wird (daher semi-implizit):

$$y_{n+1} = y_n + h(I - hJ(y_n))^{-1} f(y_n) \quad . \tag{6.6}$$

I ist die Einheitsmatrix und $J(y_n)$ die Jacobi-Matrix von $f(y)$.
Darüber hinaus wird in `EULSIM` noch eine Extrapolation des semi-impliziten Euler-Schrittes durchgeführt. Das heißt, eine angestrebte Schrittweite H wird dadurch erreicht, daß das Intervall $[t, t+H]$ mehrfach mit immer kleinerer Schrittweite $h_j = H/n_j$ ($n_j = 2j$, $j = 1, 2, ...$) durchlaufen wird, um dann von einer bestimmten Unterteilung aus den gesuchten Wert $y(t+H)$ durch Extrapolation von h gegen null zu bestimmen.
Die in den kinetischen Gleichungen auftretenden Integrale werden durch die summierte Trapezregel approximiert (siehe z.B. Plybon 1992):

$$\int_{x_1}^{x_N} y(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}(y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{N-1} + y_N) \quad . \tag{6.7}$$

6.2 Tests

Um den Code zu testen, werden in den beiden nächsten Abschnitten Testrechnungen durchgeführt und deren Ergebnisse mit analytischen Lösungen verglichen.

6.2.1 Synchrotronstrahlung und Selbstabsorption

In diesem Abschnitt werden Synchrotronstrahlung und Sychrotronselbstabsorption einer vorgegebenen Elektronenverteilung berechnet. Es wird ein Potenzspektrum konstant injiziert:

$$Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{inj}}(\gamma) = \begin{cases} Q_0\gamma^{-s} & , \gamma_{\mathrm{min}} < \gamma < \gamma_{\mathrm{max}} \\ & \\ 0 & \mathrm{sonst} \quad . \end{cases} \tag{6.8}$$

Der einzige zusätzliche Wechselwirkungsterm für die Elektronen sei die Synchrotronkühlung. In der kinetischen Gleichung der Photonen werden Synchrotronstrahlung, Selbstabsorption und das Entweichen von Photonen aus der Quelle berücksichtigt:

$$\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial \tau} = Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{inj}} - L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{syn}} \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial n_\gamma}{\partial \tau} = Q_\gamma^{\mathrm{syn}} - L_\gamma^{\mathrm{ssa}} - n_\gamma \quad . \tag{6.10}$$

Die Elektronenverteilung kann analytisch berechnet werden (Kardashev 1962) und hat drei charakteristische Bereiche:

- $\gamma > \gamma_{\rm max}$: $n_{\rm e} = 0 \quad ,$
- $\gamma < \gamma_{\rm break}$: $n_{\rm e} \propto \gamma^{-s}$, wobei der Lorentzfaktor $\gamma_{\rm break}$ gegeben ist durch: $\gamma_{\rm break} = \gamma_{\rm max}/(1 + 4 l_{\rm B} \tau \gamma_{\rm max}/3) \quad ,$
- oberhalb von $\gamma_{\rm break}$ hatten die Elektronen Zeit zu kühlen und das Spektrum wird steiler: $n_{\rm e} \propto \gamma^{-(s+1)} \quad .$

Die analytischen Vorhersagen für das Photonenspektrum ergeben natürlich auch Potenzspektren und zwar: $n_\gamma \propto x^{1.5}$ im selbstabsorbierten Teil des Spektrums; $n_\gamma \propto x^{-\alpha}$, mit $\alpha = (s+1)/2$ in dem Teil des Spektrums, der der injizierten Elektronenverteilung entspricht; $n_\gamma \propto x^{-\alpha}$, mit $\alpha = (p+1)/2$, dort wo die Elektronen kühlen konnten ($p = s+1$) und einen exponentiellen cut-off jenseits von

$$x_{\rm max} = \frac{3}{2} \frac{B}{B_{\rm krit}} \gamma_{\rm max}^2 \quad , \quad \text{mit} \quad B_{\rm krit} = \frac{m_{\rm e}^2 c^3}{e\hbar} \quad . \tag{6.11}$$

In Abb 6.1 ist der zeitliche Entwicklung der beiden Verteilungen gezeigt. Das dargestellte Zeitintervall erstreckt sich von $\tau = 3 \cdot 10^{-8}$ bis $\tau = 20$. Gerechnet wurde mit den folgenden Parametern:

Radius der Quelle	$R = 10^{15}$ cm
Magnetfeld	$B = 100$ G
Injektionsrate	$Q_0 = 10^{-5}$
Spektralindex	$s = 2$
kleinster Lorentzfaktor	$\gamma_{\rm min} = 3$
größter Lorentzfaktor	$\gamma_{\rm max} = 3 \cdot 10^5 \quad .$

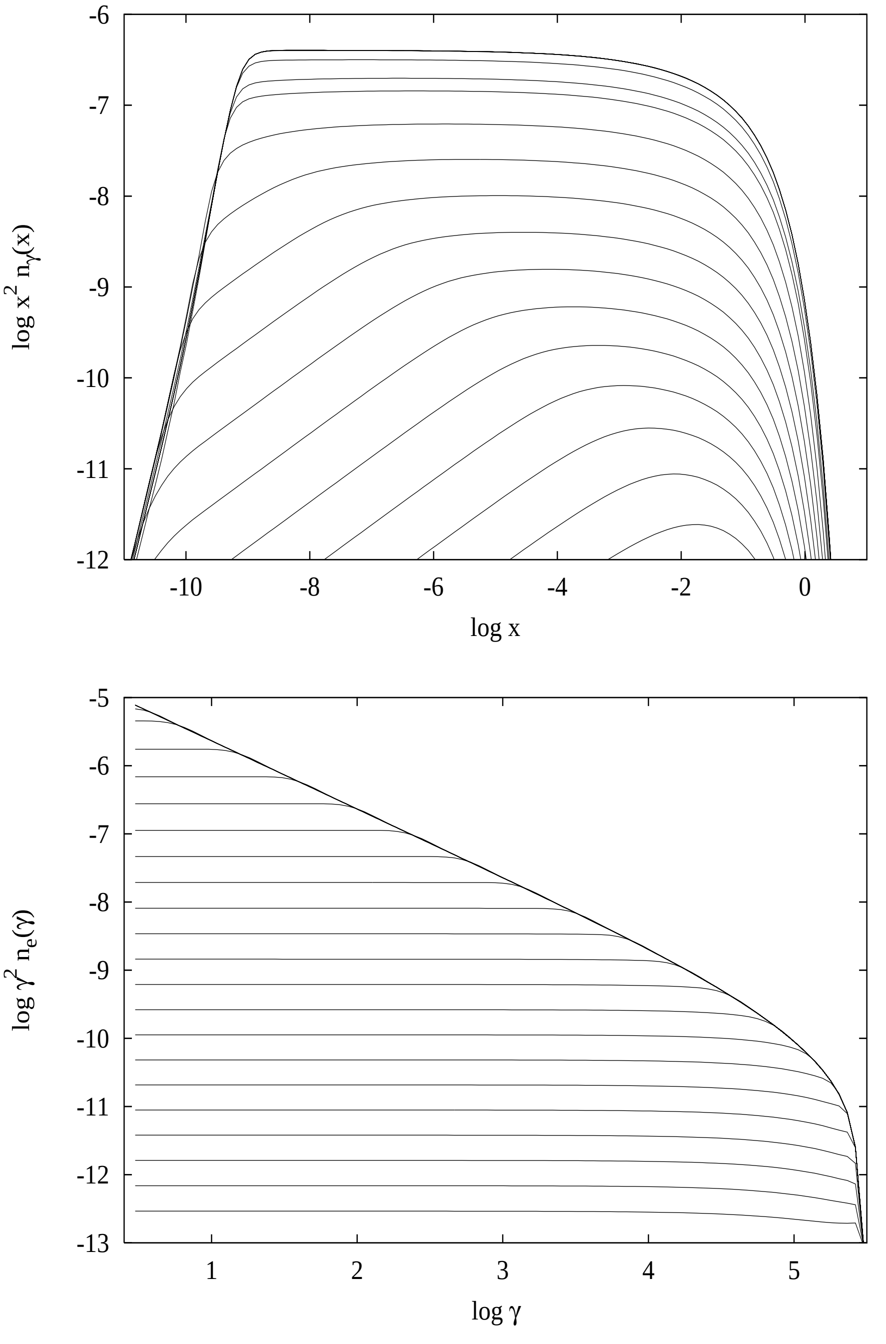

Abbildung 6.1: Die zeitliche Entwicklung der Photonenverteilung (oben) und der Elektronenverteilung (unten) für das Synchrotrontestproblem. Das dargestellte Zeitintervall erstreckt sich von $\tau = 3 \cdot 10^{-8}$ bis $\tau = 20$.

6.2.2 Inverse Compton-Streuung

Um die Implementierung der inversen Compton-Streuung zu testen, wird nochmals ein Problem gelöst, für das analytische Lösungen für die spektralen Verläufe existieren. Betrachtet wird die Streuung von konstant injizierten Elektronen an einem externen Photonenfeld. Für die Quellfunktion der Elektronen wird, wie im vorigen Abschnitt, ein Potenzgesetz mit Index $s = 2$ angenommen.

Die Photonen werden mit einer Schwarzkörperverteilung der Temperatur $\Theta = kT/m_{\mathrm{e}}c^2$ und der Kompaktheit l_{bb} injiziert:

$$n_{\mathrm{bb}}(x) = \frac{45 l_{\mathrm{bb}}}{\pi^4 \Theta^4} \frac{x^2}{e^{\frac{x}{\Theta}} - 1} \quad . \tag{6.12}$$

Numerisch gelöst werden die kinetischen Gleichungen für die relativistischen Elektronen und die Photonen, mit den für inverse Compton-Streuung relevanten Termen:

$$\frac{\partial n_{\mathrm{e}}}{\partial \tau} = Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{inj}} - L_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ics}} \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial n_{\gamma}}{\partial \tau} = n_{\mathrm{bb}} + Q_{\gamma}^{\mathrm{ics}} - n_{\gamma} \quad . \tag{6.14}$$

Für die freien Parameter wurden die folgenden Zahlenwerte verwendet:

Kompaktheit des Photonenfeldes	$l_{\mathrm{bb}} = \frac{1}{3}$
Temperatur des Photonenfeldes	$\Theta = 10^{-5}$
Injektionsrate	$Q_0 = 10^{-5}$
Spektralindex	$s = 2$
kleinster Lorentzfaktor	$\gamma_{\min} = 3.2$

In Abbildung 5.2 sind fünf stationäre Photonen- und Elektronenspektren zu sehen, die mit fünf verschiedenen Werten für $\gamma_{\max}$ berechnet wurden. Die Spektren (1) und (2) wurden mit $\gamma_{\max} = 3 \cdot 10^3$ bzw. $3 \cdot 10^4$ berechnet. Die Streuung findet in diesen beiden Fällen im Thomson-Regime statt. Für höhere Elektronenenergien findet die Streuung auch im Klein-Nishina-Regime statt. Der Übergang zwischen den beiden Bereichen ist deutlich sichtbar, da hier abrupt zwischen den beiden Näherungen für die Quell- und Verlustterme gewechselt wird. Die Spektren (3),(4) und (5) entsprechen Rechnungen mit $\gamma_{\max} = 3 \cdot 10^5$, $3 \cdot 10^6$ und $3 \cdot 10^7$.

Für die spektralen Verläufe erwartet man aufgrund analytischer Berechnungen (Jones 1968, Blumenthal & Gould 1970, Zdziarski 1989):

$n_{\mathrm{e}}(\gamma) \propto \gamma^{-p}$ und $n_\gamma(x) \propto x^{-\alpha}$, mit

$$p = \begin{cases} s+1 & \text{, Thomson-Regime} \\ s-1 & \text{, Klein-Nishina-Regime} \end{cases} \tag{6.15}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{2} & \text{, Thomson-Regime} \\ \alpha+1 & \text{, Klein-Nishina-Regime} \end{cases} \quad . \tag{6.16}$$

für $s = 2$ erhält man also $n_e \propto \gamma^{-3}$ im Thomson-Regime und $n_{\mathrm{e}} \propto \gamma^{-1}$ im Klein-Nishina-Regime. Das Photonenspektrum hat in beiden Regimen den Spektralindex 2, was nur für den Spezialfall $s = 2$ gilt.

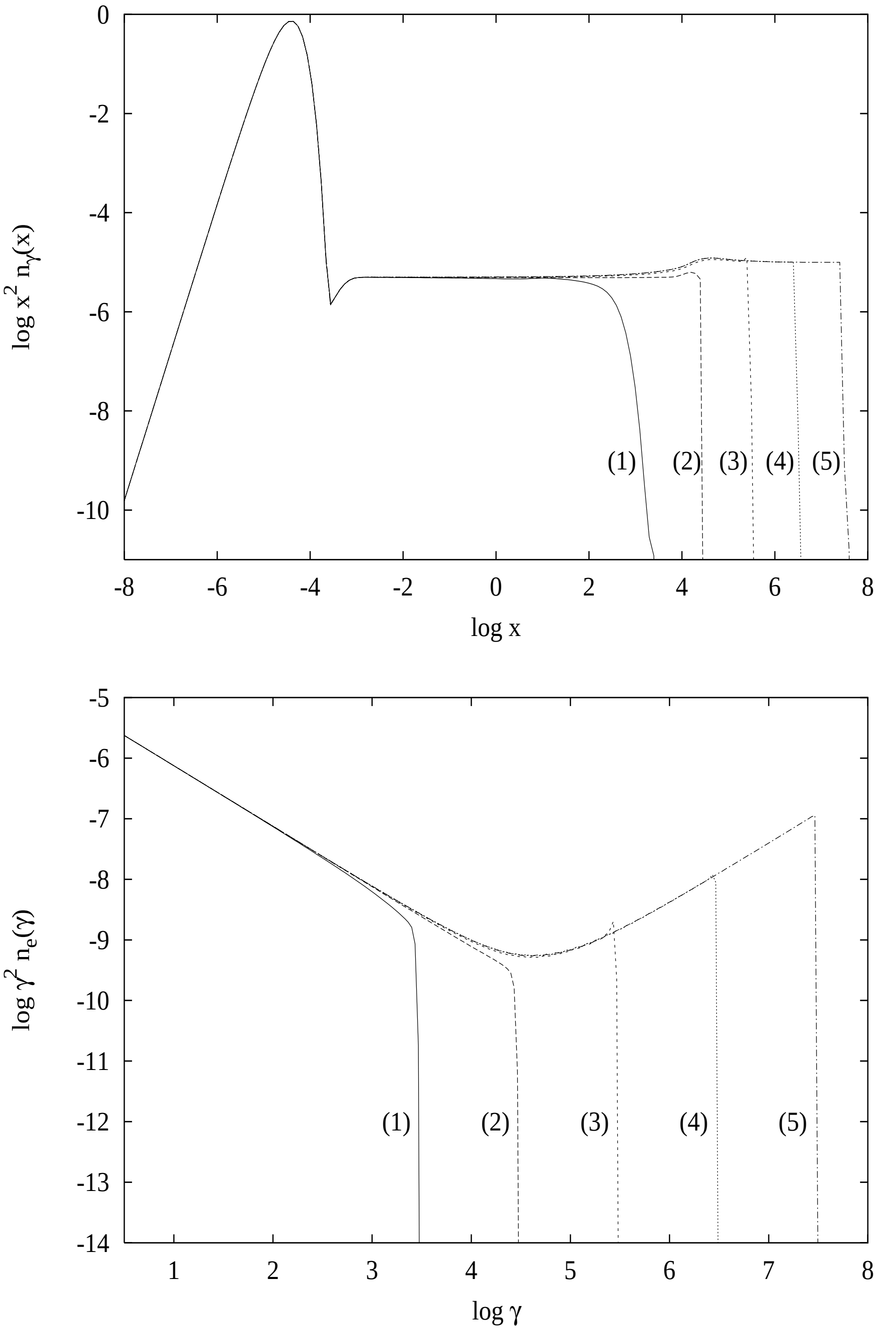

Abbildung 6.2: Stationäre Photonen- (oben) und Elektronenspektren (unten) für das ICS-Testproblem. Die Kurven (1) bis (5) entsprechen injizierten Elektronenspektren mit $\gamma_{\max} = 3 \cdot 10^{3,\ldots,7}$.

6.3 Anwendungen

6.3.1 Stationäre Spektren

Als erste und zugleich eine der wichtigsten Anwendungen wird im folgenden ein stationäres Spektrum berechnet und an die Daten von Sgr A* gefittet. Die Beschleunigungszeitskala $\tau_{\rm acc}$ und das Magnetfeld B sind durch die cut-off Frequenz $\nu_{\rm c}$ im gemessenen Spektrum festgelegt. Für die Entstehung eines pile-up ist darüber hinaus die folgende Ordnung der Zeitskalen notwendig:

$$\tau_{\rm acc} < \tau_{\rm diff} \ll \tau_{\rm e}^{\rm esc} \quad . \tag{6.17}$$

Die Äquipartition zwischen den Energiedichten der relativistischen Elektronen und des Magnetfeldes wird in den numerischen Rechnungen nicht erzwungen. Die Injektionsrate Q_0 ist ein freier Parameter.
Um den in Abb. 6.3 gezeigten Fit an die Messwerte von Sgr A* zu erhalten, wurde mit den folgenden Parametern gerechnet:

Radius der Quelle	$R = 3 \cdot 10^{13}$ cm
Magnetfeldstärke	$B = 4.5$ G
normierte Injektionsrate	$Q_0 = 5.75 \cdot 10^{-14}$
Beschleunigungszeitskala	$\tau_{\rm acc} = 1.31 \cdot 10^2$
Diffusionszeitskala	$\tau_{\rm diff}/\tau_{\rm acc} = 12$
Entweichzeit der Elektronen	$\tau_{\rm e}^{\rm esc} = 10^6$.

Die Lichtlaufzeit durch die Quelle ist in diesem Fall gegeben durch:

$$t_{\rm cross} = 10^3 \, {\rm sec} \approx 17 \, {\rm min} \quad . \tag{6.18}$$

In Abb. 6.3 ist außer der numerischen Lösung (durchgezogene Linie) auch noch ein analytisches Spektrum gezeigt (gestrichelte Linie), das mit der in Kapitel 5.1 vorgestellten analytischen Lösung berechnet wurde.
Die Übereinstimmung zwischen den beiden Spektren ist sehr gut, was zwei Schlüsse zuläßt: Zum einen ist die Kombination von Beschleunigungs- und Verlustprozessen zusammen mit der oben angegebenen Ungleichung für die Zeitskalen in der Lage, eine quasi-monoenergetische Elektronenverteilung aufzubauen und damit auch die beobachteten spektralen Charakteristika im Radio und mm-Bereich korrekt zu modellieren, und zum anderen ist die δ-Funktion eine brauchbare Näherung für eine pile-up Verteilung.

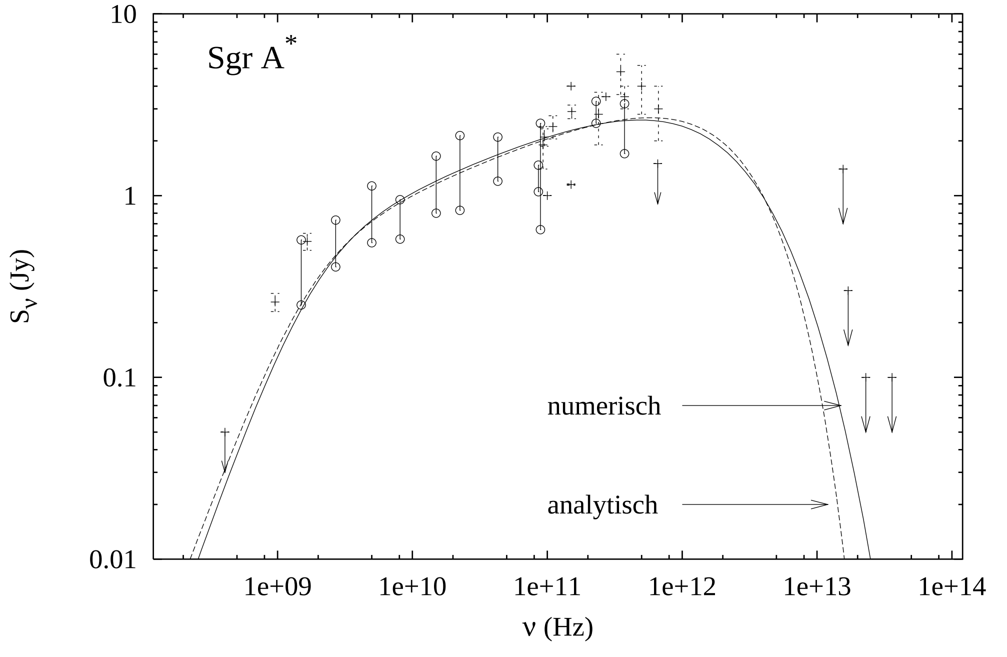

Abbildung 6.3: Stationäre Spektren: Numerisch berechnetes Spektrum der pile-up Verteilung im Vergleich mit einer analytischen Lösung der kinetischen Gleichung der Photonen, wobei eine δ-Funktion mit $\gamma_0 = \overline{\gamma}$ für die Verteilung der relativistischen Elektronen verwendet wurde.

Abb. 6.4 zeigt die zeitliche Entwicklung des Elektronen- und des Photonenspektrums von $\tau = 0$ bis $\tau = 5 \cdot 10^6$. Die Integration wurde gestartet mit einem Potenzgesetz für die Elektronen mit $s = 4$. Das Photonenspektrum bei $\tau = 0$ entspricht der spektralen Verteilung der von diesen Elektronen emittierten Synchrotronphotonen: $xn_\gamma(x, 0) \propto x^{-\alpha}$, wobei

$$\alpha = \frac{s-1}{2} = \frac{3}{2} \quad . \tag{6.19}$$

Bei $\tau = 5\tau_{\mathrm{e}}^{\mathrm{esc}}$ ist der stationäre Zustand erreicht. Bei $\gamma_{\max} \approx 341$ hat sich ein pile-up ausgebildet und der mittlere Lorentzfaktor dieser pile-up Verteilung liegt bei $\overline{\gamma} \approx 365$. Die Lage des pile-up stimmt also gut mit dem mittleren Lorentzfaktor überein, d.h. das Elektronenspektrum wird vom pile-up dominiert ($\gamma_{\max} \approx \overline{\gamma}$). Die Dichte der relativistischen Elektronen beträgt im stationären Zustand $3.5 \cdot 10^3$ cm^{-3}. Die Energiedichten der Photonen, der relativistischen Elektronen und des Magnetfeldes, notiert als Kompaktheiten lauten:

$$l_\gamma = 2.7 \cdot 10^{-7} \quad , \quad l_\mathrm{e} = 2.6 \cdot 10^{-5} \quad , \quad l_\mathrm{B} = 2.0 \cdot 10^{-5} \quad . \tag{6.20}$$

Für den Äquipartitionsparameter erhält man also $\varepsilon = l_\mathrm{e}/l_\mathrm{B} = 1.3$ und damit ist Gleichverteilung *fast* realisiert. Abb. 6.5 zeigt zwei Diagnostik-Plots: Zum einen ist die Photonenverteilung bei vier verschiedenen Energien ($\log x_1 = -11.1$, $\log x_2 = -10.1$, $\log x_3 = -9.1$ und $\log x_4 = -8.1$) als Funktion der Zeit gezeigt (Abb. 6.5a). Dies zeigt, daß der stationäre Zustand nach einer Integrationszeit von $\tau = 5\tau_\mathrm{e}^\mathrm{esc}$ auch tatsächlich erreicht ist. Abb. 6.5b zeigt die zeitliche Entwicklung des Spektralindex von $xn_\gamma(x,t)$ bei $\log x' = -9.5$:

$$\left(\frac{d\log(xn_\gamma(x))}{d\log(x)}\right)_{x'} \approx 0.3 \quad . \tag{6.21}$$

Damit ist gezeigt, daß quasi-monoenergetische Verteilungsfunktionen, die durch eine Kombination von Beschleunigungsprozessen, Strahlungsverlusten und einer hinreichend langen Einschlußzeit der Elektronen in der Quelle erzeugt werden können, ein Photonenspektrum abstrahlen, das das Radio-Radiospektrum von Sgr A* erklären kann.
Vom Galaktischen Zentrum sind allerdings auch Meßwerte im Röntgen- und γ-Strahlenbereich vorhanden, so daß nun natürlich auch die Frage nach den Vorhersagen des Modells in diesen Frequenzbereichen gestellt werden muß.
Vorab jedoch eine Bemerkung zu den Meßwerten: Alle Beobachtungen von Röntgen- und γ-Photonen aus der Richtung des Galaktischen Zentrums leiden unter mangelhafter räumlicher Auflösung, so daß die beobachteten Flüsse nicht zweifelsfrei der Zentralquelle Sgr A* zugeordnet werden können. Die in Abb 6.6 gezeigten Röntgendaten stammen von ROSAT (Predehl & Trümper 1994), ASCA (Koyama et al. 1996), ART-P (Pavlinsky et al. 1994) und SIGMA (Goldwurm et al. 1994); die γ-Daten von EGRET (Merck et al. 1996).
Die Erweiterung des oben besprochenen Synchrotronmodells ist das sogenannte Synchrotron-Self-Compton-Modell (SSC-Modell), bei dem die hochenergetischen Elektronen die Synchrotronphotonen nicht nur emittieren, sondern sie auch zu höheren Energien streuen. Damit das SSC-Modell einen stationären Zustand erreichen kann und das Synchrotronspektrum aufrechterhalten werden kann, müssen die Strahlungsverluste der relativistischen Elektronen durch inverse Compton-Streuung (im Thomson-Regime) kleiner sein, als die durch Synchrotronemission:

$$\dot\gamma_\mathrm{syn} = -\frac{4}{3} l_\mathrm{B}\gamma^2 < \dot\gamma_\mathrm{ics,T} = -\frac{4}{3} l_\gamma \gamma^2 \quad . \tag{6.22}$$

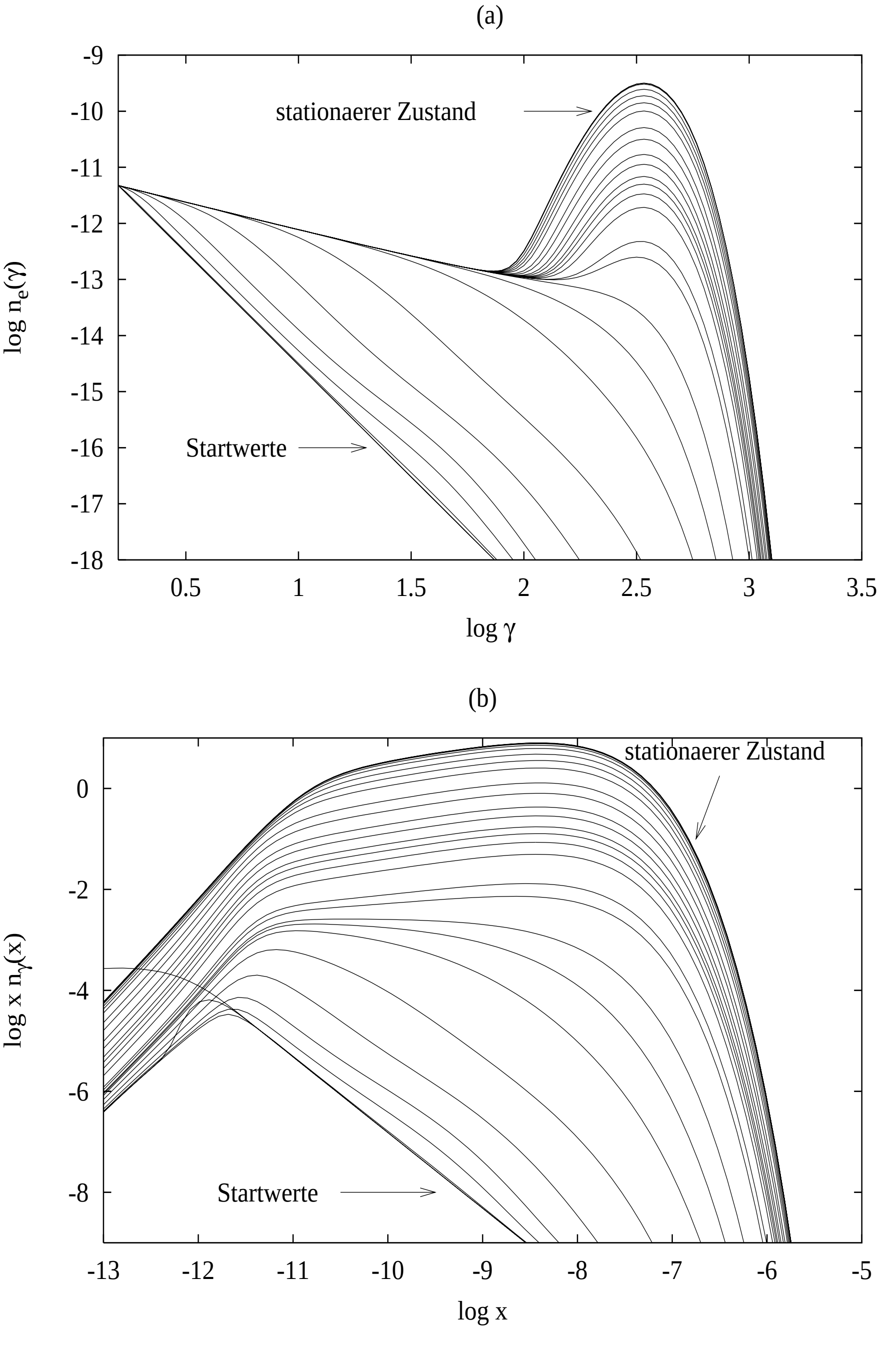

Abbildung 6.4: Zeitliche Entwicklung des Photonen- (Abb6.4a) und des Elektronenspektrums (Abb6.4b) von $\tau = 0$ (Startwerte) bis $\tau = 5{\cdot}10^6$ (stationärer Zustand).

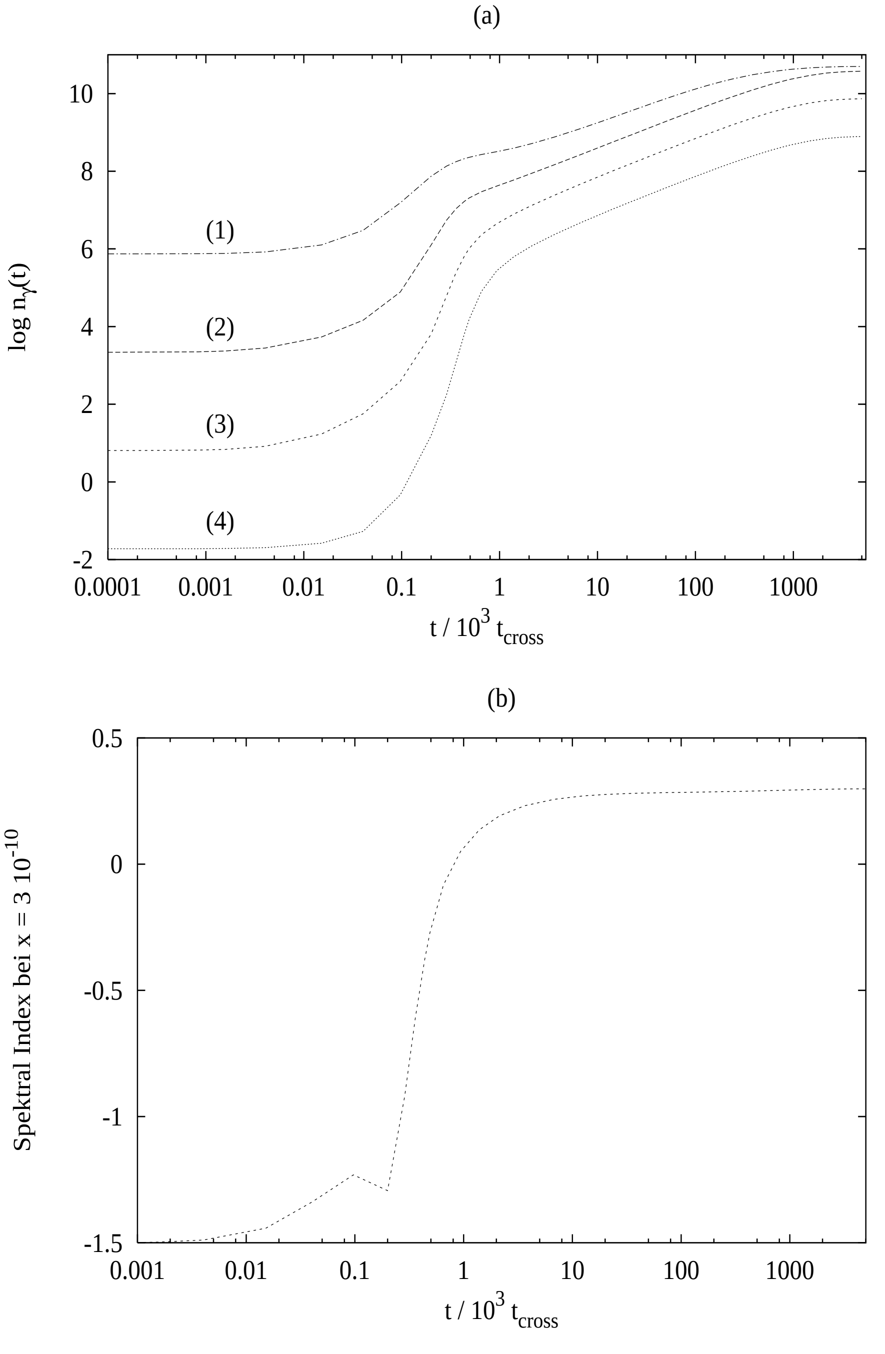

Abbildung 6.5: (a): Photonenspektrum bei ausgewählten Energien als Funktion der Zeit. Die ausgewählten Punkte sind: $\log x_1 = -11.1$, $\log x_2 = -10.1$ und $\log x_3 = -9.1$, $\log x_4 = -8.1$. (b): Zeitliche Entwicklung des Spektralindex von $xn_\gamma(x,t)$ bei $\log x = -9.5$.

Diese Aussage reduziert sich auf einen Vergleich der Energiedichten des Magnetfeldes und der Synchrotronphotonen, die ja die Targets für die inverse Compton-Streuung sind:

$$\frac{l_\gamma}{l_\mathrm{B}} < 1 \quad . \tag{6.23}$$

Ein Blick auf die Ergebnisse des obigen Synchrotron-Modells zeigt, daß $l_\gamma = 2.7 \cdot 10^{-7}$ und $l_\mathrm{B} = 2 \cdot 10^{-5}$ ist und die Ungleichung somit erfüllt ist.
Abb 6.6 zeigt stationäre SSC-Spektren. Die Eingabedaten Radius R, Magnetfeld B, Zeitskalen τ_diff, τ_acc, $\tau_\mathrm{e}^\mathrm{esc}$ und die Injektionsrate Q_0 sind dieselben wie bei der obigen Synchrotronrechnung. Die durchgezogene Linie in Abb 6.6 entspricht einem SSC-Spektrum ohne Bremsstrahlung. Die vier durchbrochenen Linien entsprechen SSC-Spektren mit nicht-thermischer Bremsstrahlung für die folgenden Dichten des Hintergrundplasmas: langgestrichelte Linie: $N_\mathrm{e,cool} = 5 \cdot 10^5 \mathrm{cm}^{-3}$; kurz gestrichelte Linie: $N_\mathrm{e,cool} = 1 \cdot 10^6 \mathrm{cm}^{-3}$; gepunktete Linie: $N_\mathrm{e,cool} = 5 \cdot 10^6 \mathrm{cm}^{-3}$; strichpunktierte Linie: $N_\mathrm{e,cool} = 1 \cdot 10^7 \mathrm{cm}^{-3}$.
Als erstes bleibt festzuhalten, daß man im Radiobereich dasselbe Spektrum erhält wie bei der reinen Synchrotronrechnung. Dies bedeutet, daß nicht nur die Strahlungsverluste durch inverse Compton-Streuung klein sind gegen die Synchrotronstrahlungsverluste, sondern daß auch die Bremsstrahlungsverluste die Lage des pile-up im Elektronenspektrum nicht beeinflußen, also gilt: $\dot\gamma_\mathrm{brems} < \dot\gamma_\mathrm{syn}$.
Neben dem Maximum der Synchrotronstrahlung bei $\nu \approx 10^{12}$ Hz zeigen die Spektren in Abb 6.6 noch zwei weitere Maxima, die den einfach (erster Compton-Buckel bei ν') und zweifach (zweiter Compton-Buckel bei ν'') gestreuten Photonen entsprechen:

$$\nu' \approx \gamma_\mathrm{max}^2 10^{12}\,\mathrm{Hz} \quad \text{und} \quad \nu'' \approx \gamma_\mathrm{max}^4 10^{12}\,\mathrm{Hz} \quad . \tag{6.24}$$

Eingedenk der Tatsache, daß die Röntgen- und γ-Daten mit zu geringer räumlicher Auflösung gewonnen wurden, sollte man sie im Bezug auf Sgr A* nur als obere Grenzen betrachten. Unter diesem Gesichtspunkt liefert das SSC-Modell einen guten Fit an die Radiodaten und ist darüber hinaus mit den oberen Grenzen vom Infrarot bis in den γ-Bereich verträglich.

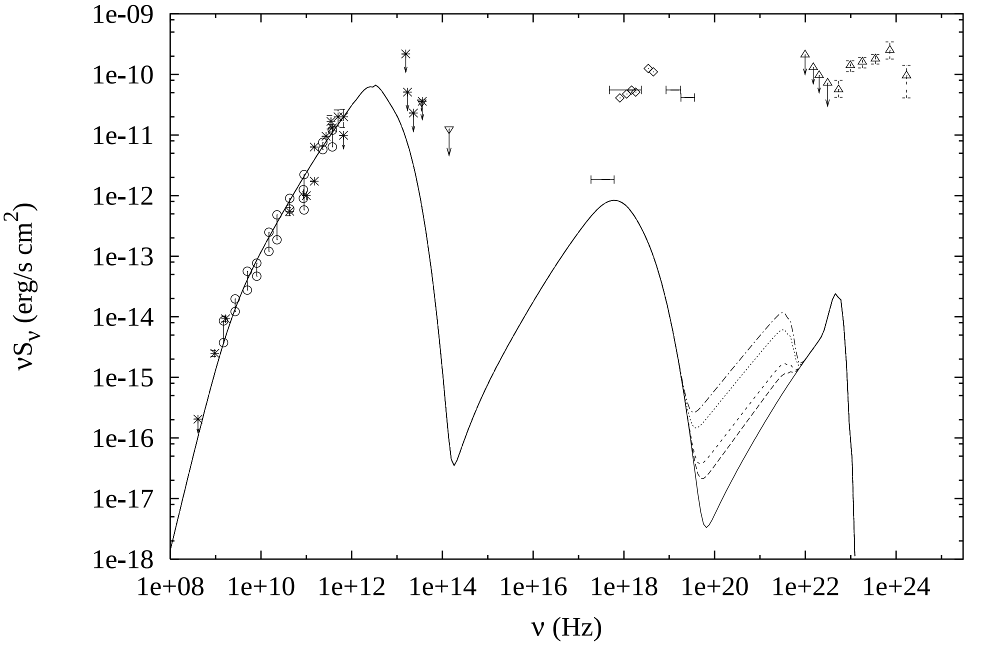

Abbildung 6.6: Synchrotron-Self-Compton-Spektrum von Sgr A* mit nichtthermischer Bremsstrahlung für verschiedene Dichten des Hintergrundplasmas. Die durchgezogene Linie entspricht einem SSC-Spektrum ohne Bremsstrahlung. Die anderen Spektren wurden mit den folgenden Dichten des Hintergrundplasmas berechnet: langgestrichelte Linie: $N_{\rm e,cool} = 5 \cdot 10^5 \rm cm^{-3}$; kurz gestrichelte Linie: $N_{\rm e,cool} = 1 \cdot 10^6 \rm cm^{-3}$; gepunktete Linie: $N_{\rm e,cool} = 5 \cdot 10^6 \rm cm^{-3}$; strichpunktierte Linie: $N_{\rm e,cool} = 1 \cdot 10^7 \rm cm^{-3}$. Die in den bisherigen Plots nicht gezeigten Infrarot-Daten stammen von Menten et al. 1997 und Stolovy et al. 1996; die Röntgen-Daten, wie bereits im Text erwähnt von ROSAT, ASCA, SIGMA und ART-P und die γ-Daten von EGRET.

6.3.2 Variabilität

Sgr A* ist eine variable Quelle, bei der die zeitlichen Variationen des Flußes sowohl intrinsische Ursachen haben können, als auch durch Störungen außerhalb der Quelle hervorgerufen werden. Ein Mechanismus, der für die letztere Möglichkeit in Frage kommt ist die Streuung der Radiophotonen im turbulenten interstellaren Medium (Refractiv InterStellar Scintillation, Rickett et al. 1984). Ein Charakteristikum dieses Streuprozesses ist die bereits erwähnte Verbreiterung der Quelle gemäß $\Theta \propto \lambda^2$. Auch die für diesen Prozeß charakteristische Zeitskala skaliert mit λ^2 und ist in der Größenordnung von wenigen Jahren (Zhao et al. 1989).

Als Hinweise auf intrinsische Variabilität können die von Zhao et al. (1992) gemessenen Lichtkurven gewertet werden, da die dort als Radio-Ausbrüche bezeichneten Variationen des Flußes gleichzeitig bei verschiedenen Frequenzen ($\nu = 1.5, 5, 8.4, 15, 22.5$ GHz) beobachtet wurden. Ein weiterer Ausbruch bei 100 GHz ist in jüngster Zeit beobachtet worden (Tsuboi et al. 1998). Die nach wie vor umfassendste Variabilitätsstudie stammt von Brown & Lo (1982) und schließt Messungen aus den Jahren 1976, 1977 und 1978 ein. Die Autoren finden Variabilität auf Zeitskalen von Jahren bis hin zu Tagen.
In dieser Arbeit soll nicht der Versuch unternommen werden, Lichtkurven zu modellieren. Es sollen vielmehr die möglichen Ursachen von Variabilität, die charakteristisch für das Modell sind, vorgestellt werden. Die einfachste Möglichkeit, Variabilität zu untersuchen, ist einen Modellparameter zu verändern und die zeitliche Entwicklung bis sich ein neues Gleichgewicht zwischen den verschiedenen Prozessen eingestellt hat, zu verfolgen. Exemplarisch werden zwei Parameter herausgegriffen und die durch Variation dieser Parameter verursachte Variabilität untersucht.
Änderungen der Beschleunigungszeitskala $t_{\rm acc}$ werden benutzt, um kurzzeitige Variabilität zu erzeugen; eine Änderung der Injektionsrate dagegen kann benutzt werden, um eine langsame Variation zu veranschaulichen. In den Abbildungen 6.7, 6.8, 6.9 sind die Ergebnisse der Rechnungen zusammengestellt.
Abb. 6.7 zeigt eine Rechnung, bei der die Beschleunigungszeitskala $t_{\rm acc}$ um einen Faktor 4 verringert wurde, was zu einer effektiveren Beschleunigung der Elektronen führt. Das verwendete Zeitprofil ist eine Kastenfunktion:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 250\, t_{\rm cross} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{6.25}$$

Der zeitliche Verlauf von $t_{\rm acc}$ hat dann die folgende Form:

$$t_{\rm acc}(t) = t^0_{\rm acc}\,(1 + 3f(t)) \quad . \tag{6.26}$$

Startwerte für diese und die nachfolgenden Rechnungen sind die stationären Spektren des Synchrotronmodells aus dem vorigen Abschnitt (Kap. 6.3.1, Abb 6.4).
Der pile-up der Elektronenverteilung verschiebt sich zu höheren Energien und wird enger, da die Breite der Verteilung um $\gamma_{\rm max}$ vom Quotienten $t_{\rm acc}/t_{\rm diff}$ abhängt (siehe Kap. 3.5). Dies ist in Abb 6.7a zu sehen. Die mit $t = 0$ gekennzeichnete Kurve entspricht dem stationären Zustand, mit dem die Rechnung gestartet wird und die Kurve bei $t = 250 t_{\rm cross}$, ist das Spektrum, bevor $t_{\rm acc}$ wieder auf den alten Wert zurückgesetzt wird. Im Photonenspektrum (Abb. 6.7b) verschiebt sich die cut-off Frequenz $\nu_{\rm c} = {}^3\!/\!_2\nu_0\gamma^2_{\rm max}$ und der $\nu^{0.3}$-Teil des Spektrums dehnt sich entsprechend aus.

Allerdings erhält man im $\nu^{0.3}$-Teil des Spektrums keinen Radioausbruch, sondern ein Absinken der Flußdichte S_ν (Abb 6.7c), die dort gegeben ist durch:

$$S_\nu(t) \propto \left(\frac{\nu}{\gamma^2_{\max}(t)}\right)^{\frac{1}{3}} \quad . \tag{6.27}$$

Die beiden Lichtkurven (Abb 6.7c) bei $\log x = -10.1$ und $\log x = -9.1$ (dies entspricht Frequenzen von $\nu = 9.5$ GHz und $\nu = 95$ GHz) zeigen den eben erwähnten Abfall der Flußdichte, der durch das Verschieben des pile-up zum neuen Gleichgewicht zustande kommt und nach Ausschalten der Änderung von t_{acc} die Entwicklung zurück zum Ausgangszustand, die durch Synchrotronstrahlungsverluste getrieben wird. Die Zeitskalen, auf denen Abfall $t_\downarrow$ und Anstieg $t_\uparrow$ in Abb 6.7c stattfinden sind von der Größenordnung:

$$t_\downarrow \approx 3\,\text{d} \quad \text{und} \quad t_\uparrow \approx 9\,\text{d} \quad . \tag{6.28}$$

Die Ergebnisse einer Variation, die durch weniger effektive Elektronenbeschleunigung ausgelöst wird, ist in Abb 6.8 gezeigt. Der zeitliche Verlauf von t_{acc} ist in diesem Fall gegeben durch:

$$t_{\text{acc}}(t) = t^0_{\text{acc}}\left(1 - \frac{3}{4}f(t)\right) \quad \text{mit} \tag{6.29}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \le t \le 2\cdot 10^3 t_{\text{cross}} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \tag{6.30}$$

gegeben. Da die Beschleunigung weniger effektiv ist, verschiebt sich der pile-up zu kleineren Lorentzfaktoren (Abb 6.8b), was ein Anstieg des Flusses gemäß Gleichung (6.25) zur Folge hat. Allerdings sinkt auch die charakteristische Frequenz der Synchrotronstrahlung ν_{c} so weit ab, daß der selbstabsorbierte Teil des Spektrums direkt in den exponentiellen Abfall bei hohen Frequenzen übergeht (Abb 6.8a). Wird t_{acc} wieder auf den alten Wert zurückgesetzt, so sinkt der Fluß wieder ab und es bildet sich wieder der charakteristische $\nu^{0.3}$-Verlauf im Synchrotronspektrum aus. In diesem Fall ist der Anstieg des Flusses in Abb 6.8c mit der Synchrotronverlustzeitskala der Elektronen bei $\gamma_{\max}$ korreliert und der Abfall mit der Beschleunigungszeitskala t_{acc}:

$$t_\uparrow \approx 12\,\text{d} \quad \text{und} \quad t_\downarrow \approx 6\,\text{d} \quad . \tag{6.31}$$

Der zweite Parameter, der zur Erzeugung von Variabilität verändert werden soll, ist die Injektionsrate Q_0, die im stationären Zustand ($t = 0$)

abrupt um den Faktor 5 vergrößert wird. Die dadurch zusätzlich in den Beschleunigungsprozeß injizierten Elektronen werden auf der Zeitskala t_{acc} beschleunigt. In der Höhe des pile-up machen sie sich jedoch erst sehr viel später bemerkbar, da die Zeitskala für den Aufbau des pile-up, dessen Höhe ja durch das Gleichgewicht injizierter und aus der Quelle entweichender Elektronen bestimmt ist, die Einschlußzeit $t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{esc}}$ ist. Die Anstiegszeit der Lichtkurven in Abb 6.9c zum neuen stationären Zustand ist also:

$$t_{\uparrow} = 5 \cdot 10^{6} t_{\mathrm{cross}} \approx 160\,\mathrm{yr} \quad . \tag{6.32}$$

In Abb 6.9 sind wieder mit der gleichen Systematik wie in den Abb. 6.7, 6.8 die Spektren, Lichtkurven und Energiedichten dargestellt.
Auch hier sei zum Schluß noch auf mögliche Variabilität in einem SSC-Modell hingewiesen: Jede Variation im Beschleunigungsprozeß der Elektronen erzeugt auch zeitlich veränderliche Emission von Röntgen- und γ-Photonen. In Abb 6.10 ist ein SSC-Spektrum gezeigt, das sich durch abrupte Änderung der Beschleunigungszeitskala ($t_{\mathrm{acc}} \to t_{\mathrm{acc}}/2$) von einem stationären Zustand ($t = 0$) in ein neues Gleichgewicht ($t = 10^{3} t_{\mathrm{cross}}$) entwickelt. Durch die effektivere Elektronenbeschleunigung verschiebt sich der pile-up in der Elektronenverteilung zu höheren Energien. Die charakteristische Frequenz des Synchrotronspektrums ν_{c} wächst mit $\gamma_{\mathrm{max}}^{2}$ an, was die Energiedichte der Targetphotonen für den Invers-Compton-Prozeß erhöht und wegen $\nu' \propto \gamma_{\mathrm{max}}^{2} \nu_{\mathrm{c}}$ verschiebt sich auch der Compton-Buckel zu höheren Frequenzen. Wegen der starken Abhängigkeit vom Lorentzfaktor der streuenden Elektronen erhält man also im Röntgen- und γ-Spektrum bereits durch eine Halbierung von t_{acc} beträchtliche Variationen in der Flußdichte. Die Zeit, nach der sich der neue stationäre Zustand in Abb 6.10 eingestellt hat, ist von der Größenordnung: $t_{\uparrow} \approx 3\,\mathrm{d}$.

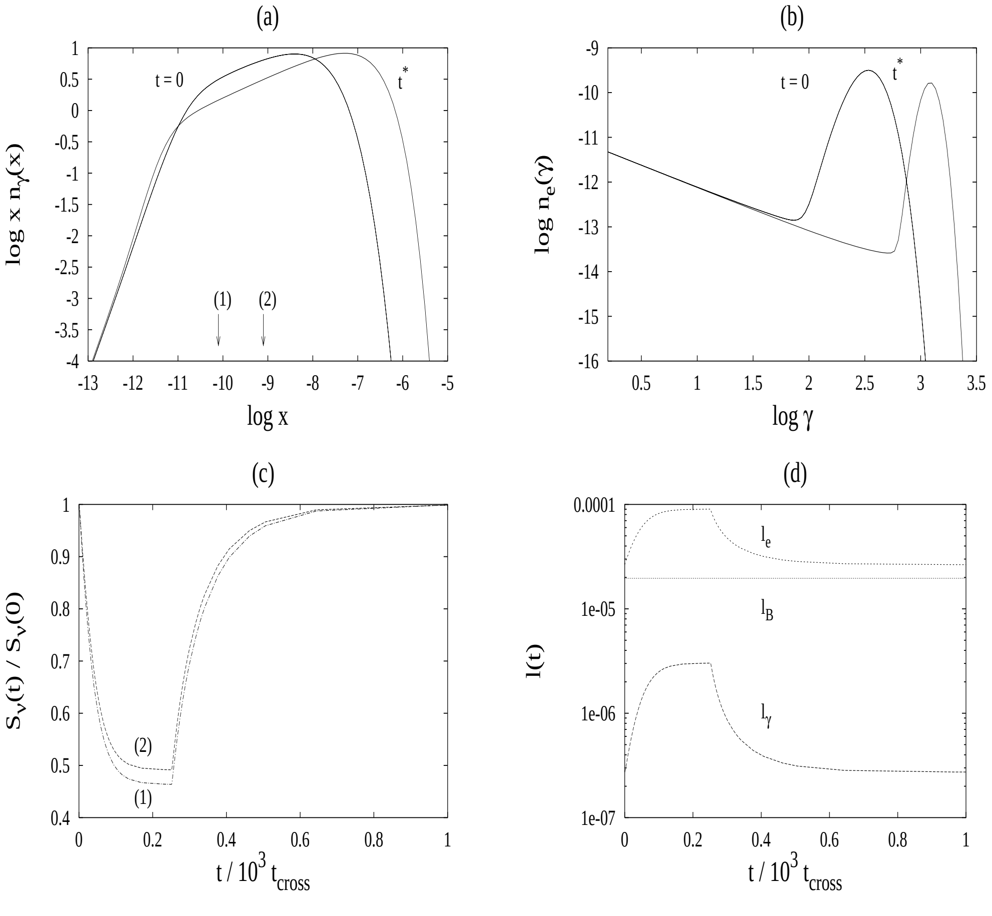

Abbildung 6.7: Variation der Beschleunigungszeitskala $t_{\rm acc}$, mit der im Text erwähnten Kastenfunktion (Gl. 6.24, 6.25). In Abb. 6.7a und 6.7b sind die mit $t = 0$ bezeichneten Spektren die Startwerte und die mit t^* bezeichneten entsprechen den Spektren zum Zeitpunkt $t^* = 250 t_{\rm cross}$. 6.7c zeigt die Lichtkurven bei $\log x = -10.1$ und -9.1. In 6.7d sind die Kompaktheiten der Elektronen, des Magnetfeldes und der Photonen als Funktionen der Zeit geplottet.

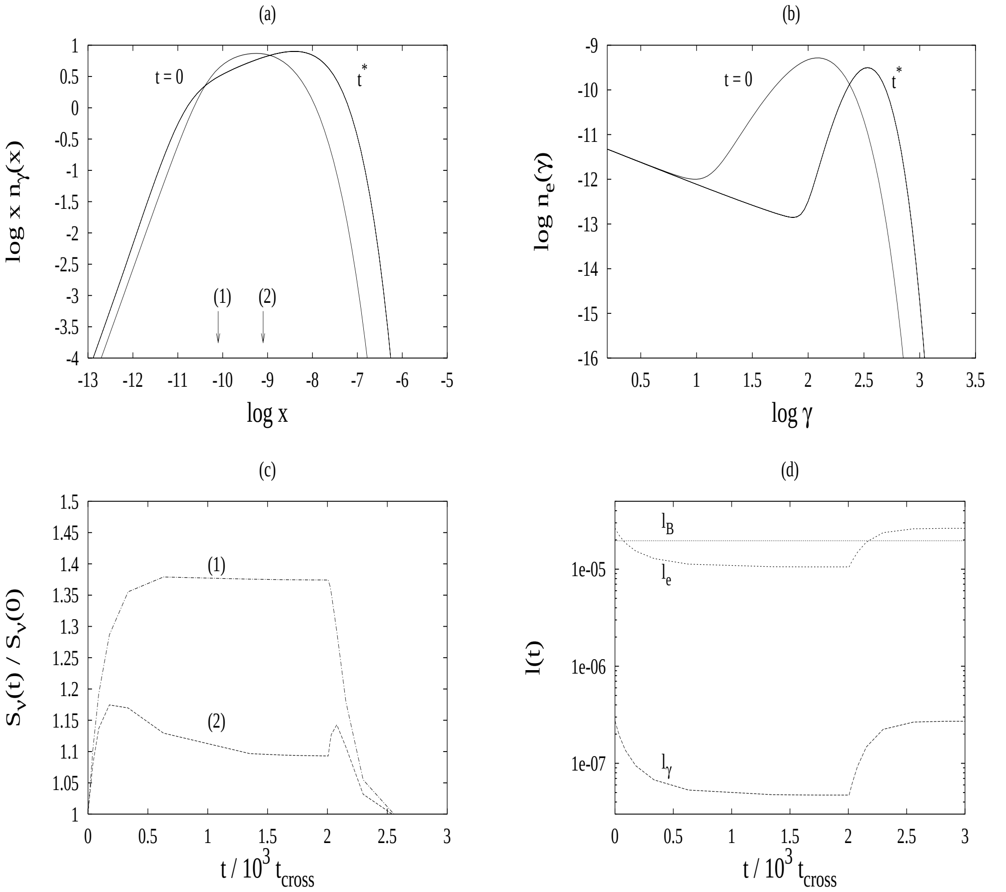

Abbildung 6.8: Variation der Beschleunigungszeitskala t_{acc} mit der im Text angegeben Kastenfunktion (Gl. 6.28, 6.29). Abb. 6.8a, b zeigen wieder die Photonen- bzw. Elektronenspektren zum Beginn der Rechnung ($t = 0$) und bei $t^* = 2 \cdot 10^3 t_{\mathrm{cross}}$, Abb. 6.8c zeigt wieder die Lichtkurven bei $\log x = -10.1$ und -9.1 und in Abb 6.8d sind die Kompaktheiten als Funktion der Zeit zu sehen.

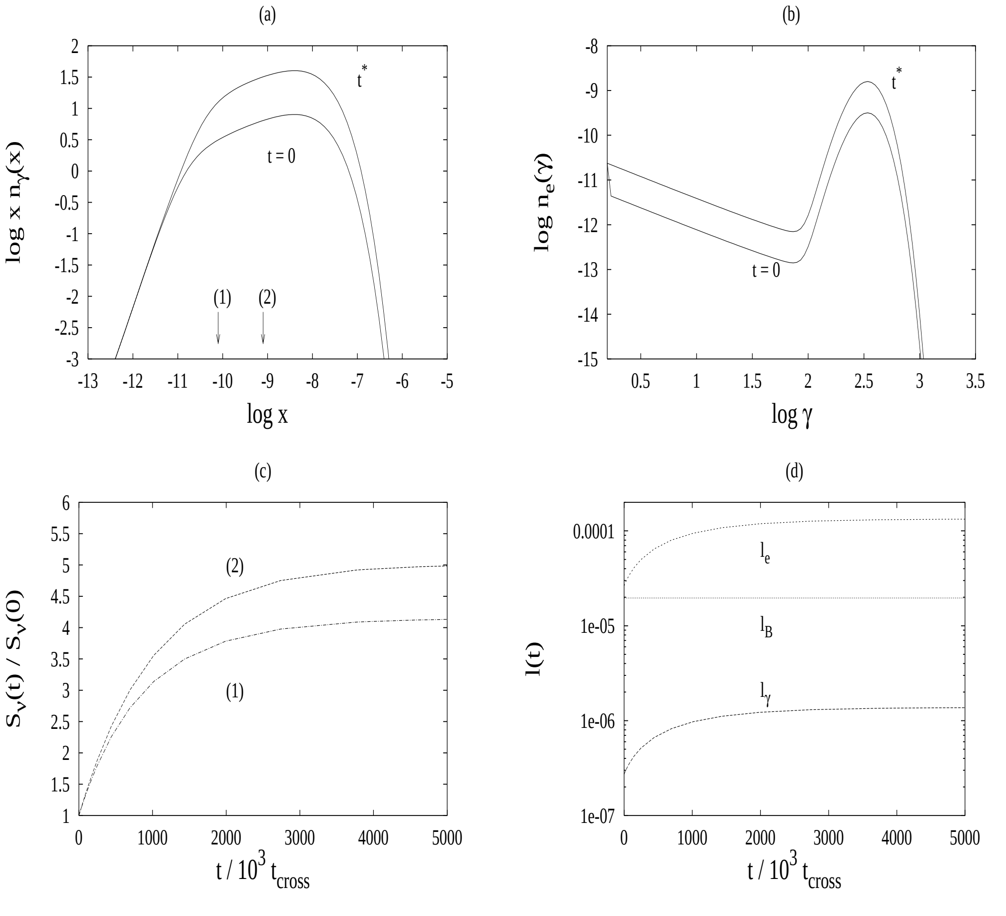

Abbildung 6.9: Variation der Injektionsrate Q_0: Im Unterschied zu den Abb. 6.7 und 6.8 ist in diesem Fall die Injektionsrate Q_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ abrupt um den Faktor 5 vergrößert worden und der Anstieg zum neuen stationären Zustand berechnet worden. Die Notationen sind analog zu denen in den Abb. 6.7, 6.8 und $t^* = 5 \cdot 10^6 t_{\rm cross}$

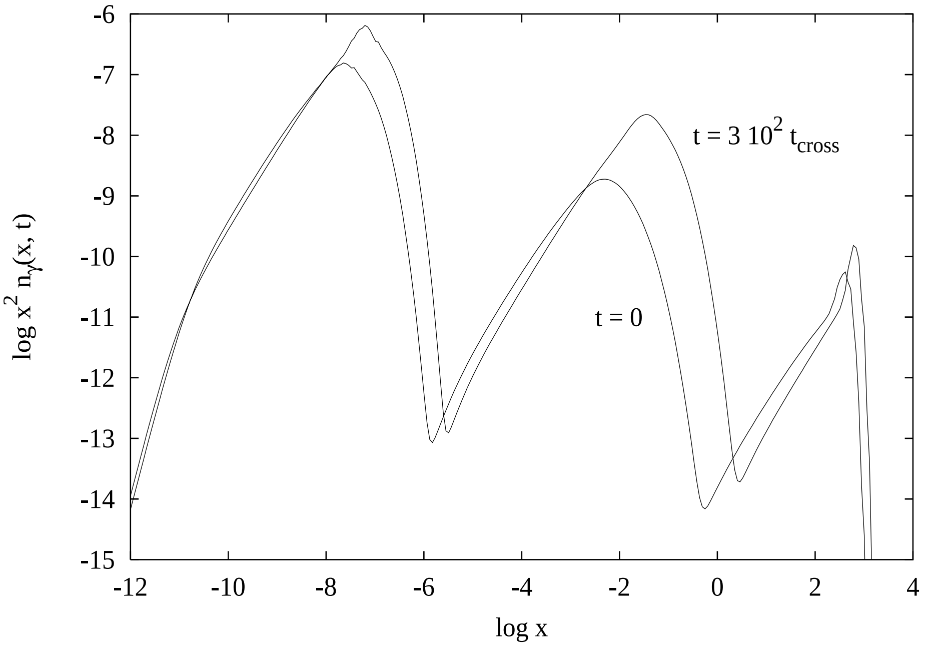

Abbildung 6.10: Zeitliche Variation im SSC-Spektrum durch abrupte Änderung der Beschleunigungszeitskala: $t_{\rm acc} \rightarrow t_{\rm acc}/2$. Die Abbildung zeigt das Ausgangsspektrum bei $t = 0$ und das neue Gleichgewicht, das sich bei $t = 3 \cdot 10^2 t_{\rm cross}$ eingestellt hat. Es wurden wieder die Eingabedaten aus Abschitt 6.3.1 verwendet: $R = 3 \cdot 10^{13}$ cm, $B = 4.5$ G, $Q_0 = 5.75 \cdot 10^{-14}$, $t_{\rm acc} = 1.31 \cdot 10^2 t_{\rm cross}$, $t_{\rm diff}/t_{\rm acc} = 12$, $t_{\rm e}^{\rm esc} = 10^6 t_{\rm cross}$.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Diskussion

Ziel dieser Arbeit war die konsequente Weiterentwicklung des von Duschl & Lesch (1994) und Beckert et al. (1997) vorgeschlagenen Modells, das das Radiospektrum von Sgr A* als optisch dünne Synchrotronstrahlung quasi-monoenergetischer Elektronen interpretiert. Die Modellierung von Prozessen, die eine quasi-monoenergetische Verteilung relativistischer Elektronen ($E \approx 150$ MeV) aufbauen können, ist gelungen durch die Erweiterung eines Modells das von Schlickeiser (1984) vorgeschlagen wurde, um Ausbrüche von Objekten wie AO 0235+164 und QSO 1413+135 zu beschreiben. Die Kombination von diffusiver Beschleunigung an vielen Stoßwellen, stochastischer Beschleunigung durch turbulente Alfvén-Wellen, Strahlungsverlusten und einer Verweildauer der Elektronen in der Quelle, die lang ist gegenüber der Beschleunigungszeitskala ermöglicht den Aufbau einer quasi-monoenergetischen Elektronenverteilung.
Die konsistente Behandlung des Problems erfordert dann die Lösung je einer kinetischen Gleichung für die relativistischen Elektronen, die Photonen und die thermischen (kalten) Elektronen des Hintergrundplasmas.
Das erste wichtige Ergebniss dieser Modellierung ist die Tatsache, daß es möglich ist quasi-monoenergetische Elektronenverteilungen (pile-up Verteilungen) aufzubauen und mit den von diesen Elektronen abgestrahlten Photonen das Radiospektrum von Sgr A* zu erklären. Die Parameter Radius R, Magnetfeld B und Lorentzfaktor $\gamma_{\max}$ sind dabei in Übereinstimmung mit den Werten, die von Beckert et al. (1997) angegeben wurden. Darüber hinaus liefert die Hinzunahme weiterer nicht-thermischer Strahlungsprozesse (inverse Compton-Streuung und Bremsstrahlung) ein Spektrum für Sgr A*, das vom Radio- bis in den γ-Bereich in Übereinstimmung mit den Meßwerten ist (Abb 6.6). Dazu ist allerdings zu sagen, daß die Meßwerte im Röntgen-

und γ-Bereich von Instrumenten (ROSAT und EGRET) stammen, deren räumliches Auflösungsvermögen nicht ausreichend ist, um Sgr A* zweifelsfrei zu identifizieren. Aus diesem Grund werden diese Werte in Bezug auf Sgr A* nur als obere Grenzen betrachtet.

Im Hinblick auf die Variabilität von Sgr A* wurde versucht, durch die Variation zweier Modellparameter, nämlich der Beschleunigungszeitskala t_{acc} und der Injektionsrate Q_0, mögliche Ursachen für zeitliche Veränderungen im Spektrum aufzuzeigen. Die Parameter t_{acc} und Q_0 wurden ausgewählt, da ihre Veränderung Variabilität auf Zeitskalen erzeugt, die die beiden Extreme repräsentieren, die von Brown & Lo (1982) durch Analyse von Radiobeobachtungen aus einem Zeitraum von mehreren Jahren bestimmt wurden. Das eine Extrem ist Variabilität auf Zeitskalen von wenigen Tagen, was im Modell durch die Variation von t_{acc} erreicht werden kann; und das andere Extrem ist eine Variabilitätszeitskala von mehreren Jahren, was durch eine abrupte Änderung der Rate der injizierten Elektronen Q_0 simuliert werden kann.

Hier ist das phänomenologische Modell wie es in dieser Arbeit verwendet wird allerdings an einer Grenze angelangt, da sowohl die Auswahl der zu variierenden Parameter als auch deren zeitliche Verläufe einer gewissen Willkür unterliegen. An dieser Stelle wäre es wünschenswert, die Elektronenbeschleunigung und damit auch das Spektrum an eine detaillierte Dynamik der Quelle koppeln zu können.

Im wesentlichen werden derzeit drei Modelle diskutiert, die sich mit der Modellierung der Akkretion auf das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße befassen: Das Akkretionsscheiben-Jet-Modell von Falcke et al. (1993), sphärisch symmetrische Akkretionsströmungen wie sie von Melia (1994) und Mastichiadis & Ozernoy (1994) vorgeschlagen wurden und die sogenannten advektionsdominierten Akkretionsströmungen (ADAFs), die von Narayan et al. (1998) und Beckert (1998) auf das Galaktische Zentrum angewendet wurden. Mit ADAF-Modellen kann das Radiospektrum nicht korrekt reproduziert werden, jedoch hat Beckert (1998) gezeigt, daß die thermische Synchrotronemission einer solchen Strömung den sogenannten mm-Buckel im Radiospektrum von Sgr A* erklären kann. Nimmt man nun an, daß die Elektronenbeschleunigung wie sie in dieser Arbeit diskutiert wurde in der Korona über einer solchen Akkretionsströmung stattfindet, dann kommt man zu einem sogenannten Kern-Hüllen-Modell, das in seiner einfachsten Form schon von Beckert & Duschl (1997) diskutiert wurde.

Literaturverzeichnis

[1] Bajaja E., van der Burg G., Faber S.M., Gallagher J.S., Knapp G.R., Shane W.W.: 1984, A&A 141, 309

[2] Bajaja E., Dettmar R.-J., Hummel E., Wielebinski R.: 1988, A&A 202, 35

[3] Balik B., Brown R.L.: 1974, ApJ 194, 265

[4] Beckert T.: 1998, Dissertationsschrift, Universität Heidelberg

[5] Beckert T., Duschl W.J., Mezger P.G., Zylka R.: 1996, A&A 307, 450

[6] Beckert T., Duschl W.J.: 1997, A&A 328, 95

[7] Bietenholz M.F., Bartel N., Rupen, M.P.: 1998, Radio Emission from Galactic and Extragalactic Compact Sources, ASP Conference Series, Volume 144, IAU Colloquium 164, eds. J.A. Zensus, G.B. Taylor, J.M. Wrobel, p. 201.

[8] Blumenthal G.R., Gould R.J.: 1970, Rev. Mod. Phys. 42, 237

[9] Bower G.C., Backer D.C: 1998, The Central Parsecs, Galactic Center Workshop, to be published in the ASP Conference Series

[10] Brown R.L., Lo K.Y.: 1982, ApJ 253, 108

[11] de Bruyn A.G.: 1979, Structure and Properties of Nearby Galaxies, IAU Symp. 77, eds. Berkhuijsen E.M. & Wielebinski R., Reidel, Dodrecht, p. 205

[12] Cawthorne T.V.: 1985, MNRAS 216, 795

[13] Crusius-Wätzel A.: 1991, ApJ 368, 390

[14] Crusius A., Schlickeiser R.: 1986, A&A 164, L16

[15] Crusius A., Schlickeiser R.: 1988, A&A 196, 327

[16] Deuflhard P.: 1983, Num. Math. 41, 399

[17] Deuflhard P.: 1984, Siam Rev. 27, 505

[18] Duschl W.J., Lesch H.: 1994 A&A 286, 431

[19] Eckart A., Genzel R.: 1997, MNRAS 284, 576

[20] Ekers R.D., Fanti R., Miley G.K.: 1983, A&A 120, 297

[21] Falcke H., Mannheim K., Biermann P.L.: 1993, A&A 278, L1

[22] Falcke H., Goss W.M., Matsuo H., Zhao J.-H., Zylka R.: 1998, ApJ 499, 731

[23] Frank J., King A., Raine D.: 1992, Accretion Power in Astrophysics, Cambridge University Press, Cambridge

[24] Ghisellini G., Guilbert P.W., Svensson R.: 1988, ApJ 334, L5

[25] Ginzburg V.L., Syrovatskii S.I.: 1965, ARA&A 3, 297

[26] Goldwurm A. et al.: 1994, Nature 371, 589

[27] Graham D.A., Weiler K.W., Wielebinski R.: 1981, A&A 97, 388

[28] Großmann C., Roos H.-G.: 1994, Numerik partieller Differentialgleichungen, Teubner, Stuttgart

[29] Hummel E., van der Hulst J.M., Dickey J.M.: 1984, A&A 134, 207

[30] Jones F.C.: 1968, Phys. Rev. 167, 1159

[31] Kardashev N.S.: 1962, SvA 6, 317

[32] Kellermann K.I., Pauliny-Toth I.I.K.,: 1981, ARA&A 19, 373

[33] Kirk J.G., Melrose D.B., Priest E.R.: 1994, Plasma Astrophysics, Springer, Berlin

[34] Koyama et al.: 1996, PASJ 48, 249

[35] Lang K.R.: 1974, Astrophysical Formulae, Springer, Berlin

[36] Lerche I.: 1968, Phys. Fluids 11, 1720

[37] Lesch H., Schlickeiser R.: 1987, A&A 179, 93

[38] Mastichiadis A., Kirk J.G.: 1992, in Stenger, V.J. et al. (eds), High Energy Neutrino Astrophysics, World Scientific, S. 63

[39] Mastichiadis A., Kirk J.G.: 1995 A&A 295, 613

[40] Mastichiadis A., Kirk J.G.: 1997 A&A 320, 19

[41] Mastichiadis A., Ozernoy L.M.: 1994, ApJ 426, 599

[42] McCray R.: 1969, ApJ, 165, 329

[43] Melia F.: 1994, ApJ 426, 577

[44] Melrose D.B., McPhedran R.C.: 1991, Electromagnetic Processes in Dispersive Media, Cambridge University Press, Cambridge

[45] Menten K.M., Reid M.J., Eckart A., Genzel R.: 1997, ApJ, 475, L111

[46] Merck M. et al.: 1996, A&AS 120, 465

[47] Mezger P.G., Duschl W.J., Zylka R.: 1996, A&AR 7, 289

[48] Narayan R., Mahadevan R., Grindlay J.E., Popham R.G., Gammie C.: 1998, ApJ 492, 554

[49] Pavlinsky M.N., Grebenev S.A., Sunyaev R.A.: 1994, ApJ 425, 110

[50] Plybon B.F.: 1992, Applied Numerical Analysis, PWS-KENT Publishing Company, Boston

[51] Predehl P., Trümper J.: 1994, A&A 290, L29

[52] Razin V.A.: 1960, Radiophysica 3, 584, 921

[53] Reuter H.-P., Lesch H.: 1996, A&A 310, L5

[54] Rickett B.J., Coles W.A., Bourgois G.: 1984, A&A 134, 390

[55] Rybicki G.B., Lightman A.P.: 1979, Radiative Processes in Astrophysics, Wiley & Sons, New York

[56] Schiesser W.E.: 1991, The Numerical Method of Lines, Academic Press Inc., San Diego

[57] Schlickeiser R.: 1984, A&A 136, 227

[58] Schlickeiser R.: 1989a, ApJ 336, 243

[59] Schlickeiser R.: 1989b, ApJ 336, 264

[60] Shaffer D.B., Marscher A.P.: 1979, ApJ 233, L105

[61] Stolovy S.R., Hayword T.L., Herter T.: 1996, ApJ 470, L45

[62] Sunyaev R.A.: 1971, SvA 15, 190

[63] Svensson R.: 1987, MNRAS 227, 403

[64] Tsuboi M., Miyazaki A., Tsutsumi T.: 1998, The Central Parsecs, Galactic Center Workshop, to be published in the ASP Conference Series

[65] Wittkowski M., Balega Y., Beckert T., Duschl W.J., Hofmann K.-H., Weigelt G.: 1998, A&A 329, L45

[66] Zdziarski A.A.: 1989, ApJ 342, 1108

[67] Zhao J.-H., Ekers R. D., Goss W. M., Lo K.Y., Narayan R.: 1989, IAU Symp. 136, 535

[68] Zhao J.-H., Goss W. M., Lo K.-Y. & Ekers R. D.: 1992, ASP Conference Series 31, 295

[69] Zheleznyakov V.V.: 1996, Radiation in Astrophysical Plasmas, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht

Anhang A

Die gemessene Größe von Sgr A*

Die beobachtete Größe θ von Sgr A* zeigt eine quadratische Abhängigkeit von der Wellenlänge λ:

$$\theta \propto \lambda^2 \quad . \tag{A.1}$$

Dies läßt darauf schließen , daß die Quelle durch Streuung der Radiophotonen im turbulenten interstellaren Medium (refractiv interstellar scintillation) verbreitert wird. Die Messwerte bei kleinen Wellenlängen zeigen jedoch Abweichungen vom λ^2-Verhalten, so daß man vermuten kann, daß die Quelle hier gerade aufgelöst ist.
In Abbildung B.1 sind die Messwerte (Duschl, priv. Comm.) zusammen mit einer λ^2-Kurve geplottet. Unter der Annahme, daß die Quelle gerade aufgelöst ist, kann man eine Größe von $\theta \approx 0.1$ mas aus den Messwerten ableiten. Bei einem Abstand von $D = 8.5$ kpc zum galaktischen Zentrum entspricht 1 mas einer Größe von $R \approx 10^{14}$ cm ($R \approx D \tan\theta$). Damit erhält man als Abschätzung für die Größe der Quelle:

$$R \approx 10^{13}\,\mathrm{cm} \quad . \tag{A.2}$$

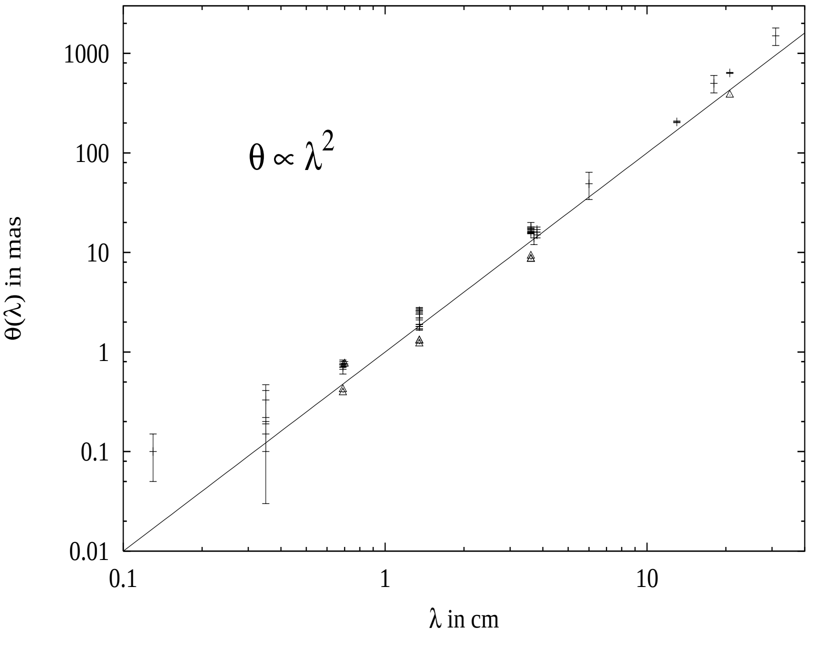

Abbildung A.1: Gemessene Winkelausdehnung von Sgr A* als Funktion der Wellenlänge λ. Die Elliptizität der Quelle wurde nicht berücksichtigt. Für die Ausdehnung entlang der großen und der kleinen Halbachse, $\theta_{\max}$ bzw. $\theta_{\min}$ gilt: $0.5 < \theta_{\max}/\theta_{\min} < 1.5$.

Anhang B

Die Funktion $CS(x)$

Die Funktion $CS(x)$ beschreibt die spektrale Verteilung der abgestrahlten Leistung eines relativistischen Elektrons, gemittelt über alle möglichen Orientierungen des Magnetfeldes zur Sichtlinie eines Beobachters. Man erhält sie aus der klassischen Emissivitätsfunktion, wie sie z.B. in Ginzburg & Syrovatskii (1965) zu finden ist durch die folgenden Mittelungen (Crusius & Schlickeiser 1986):

$$\begin{aligned} CS(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \int_{x/\sin\theta}^\infty K_{\frac{5}{3}}(y)dy \sin\theta d\theta \\ &= W_{0,\frac{4}{3}}(x)W_{0,\frac{1}{3}}(x) - W_{\frac{1}{2},\frac{5}{6}}(x)W_{-\frac{1}{2},\frac{5}{6}}(x) \quad . \end{aligned}$$

Die asymptotischen Entwicklungen für großes und kleines Argument lauten:

$$CS(x) \approx \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2}}{5}\Gamma^2(\frac{1}{3})x^{-\frac{2}{3}} \quad , & \text{für } x \ll 1 \\ \\ x^{-1}e^{-x} \quad , & \text{für } x \gg 1 \quad . \end{cases}$$

Vergleicht man nun die abgstrahlte Leistung eines Elektrons im stochastischen Magnetfeld

$$P_{\rm r}(x) \propto xCS(x) \quad ,$$

mit der im homogenen Magnetfeld

$$P_{\rm h}(x) \propto x\int_{x/\sin\theta}^\infty K_{\frac{5}{3}}(y)dy \sin\theta d\theta \quad ,$$

so erhält man für $x \ll 1$ in beiden Fällen $P_{\rm r,h}(x) \propto x^{1/3}$. Am hochfrequenten Ende des Spektrums dagegen erhält man:

$$P_{\rm r}(x) \propto e^{-x} \quad \text{und} \quad P_{\rm h}(x) \propto \sqrt{x}e^{-x} \quad .$$

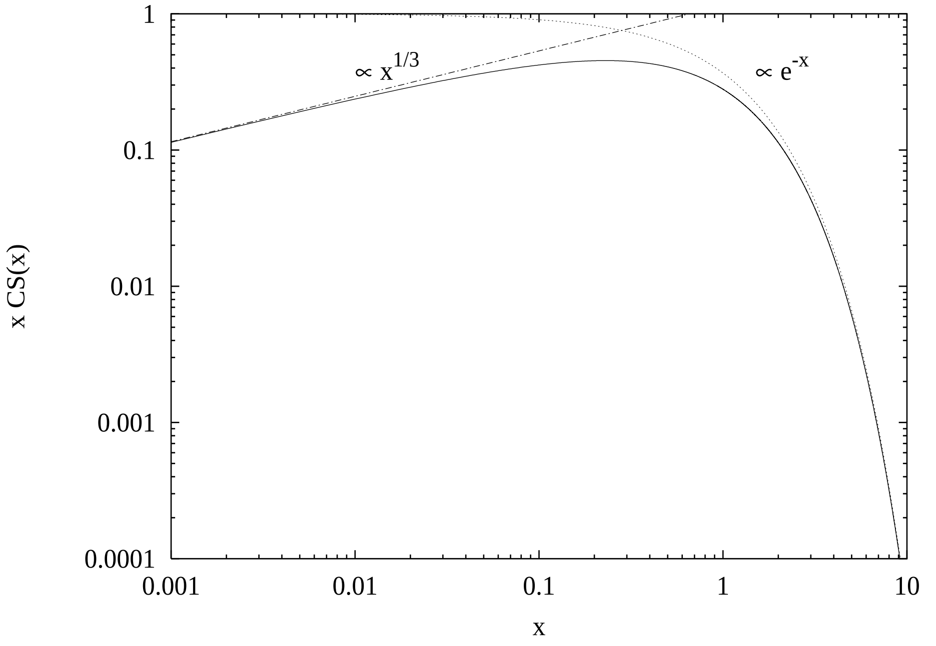

Abbildung B.1: Die spektrale Verteilung der abgestrahlten Leistung eines relativistischen Elektrons nach der Mittelung über alle Magnetfeldrichtungen, zusammen mit den Näherungen für großes und kleines Argument.

Die Whittaker-Funktionen $W_{\kappa,\mu}(x)$ werden mit Hilfe der Relation

$$W_{\kappa,\mu}(x) = e^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+\mu} U\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, x\right)$$

berechnet, wobei die Auswertung der konfluent hypergeometrischen Funktion $U(a, b, x)$ von der public domain Routine `dchu(a, b, x)`, die unter `http://math.nist.gov/cgi-bin/gams-serve/class/C11.html` erhältlich ist, durchgeführt wird. Abb D.1 zeigt die Funktion $xCS(x)$, die direkt proportional zur abgestrahlten Leistung eines relativistischen Elektrons ist zusammen mit den Näherungen für $x \gg 1$ und $x \ll 1$.