Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Christof M. Keller
aus Villingen

1998

Hydrodynamik des Einfalls klumpiger Materie in protostellare Akkretionsscheiben im Hinblick auf H_2O-Maseremission

Die Diplomarbeit wurde von Christof M. Keller ausgeführt am
Institut für Theoretische Astrophysik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

Zusammenfassung

Aktuelle Beobachtungen zeigen zunehmend charakteristische Strukturen in der Verteilung von H_2O-Maserquellen in Entstehungsgebieten massearmer Sterne auf, die einen Ursprung in protostellaren Akkretionsscheiben vermuten lassen. Dies könnte den Weg zu völlig neuen Möglichkeiten bereiten, Geschwindigkeitsfelder, Dichten und Temperaturen, in diesen tief eingebetteten Systemen der Protosterne und ihren Akkretionsscheiben, zu bestimmen. Als Auslöser der beobachteten 22 GHz-H_2O-Maseremission wurden Akkretionsschocks beim Einfall klumpiger Materie in die Scheibe vorgeschlagen (Fiebig 1997a). Um das Szenario des Einfalls von Materieklumpen in Akkretionsscheiben näher zu untersuchen, wurden zweidimensionale SPH-Simulationen durchgeführt. Für das durchgeführte Modell wurde eine isotherm geschichtete Scheibe angenommen, die einen 2 $M_\odot$ schweren, zentralen Protostern umkreist. Der Einfall von Materieklumpen mit Radien von 0.1 bis 0.5 AU und Dichten von $n_{\mathrm{H}_2}^{clump} \sim 10^8 \dots 10^9$ cm^{-3} wurde simuliert. Einfallsgeschwindigkeiten liegen in der Größenordnung von ~ 10 km/s, was in etwa der Geschwindigkeit entlang der Freifalltrajektorien in der untersuchten Umgebung entspricht. Die durch die Klumpen erzeugten Stoßfronten wurden in ihrer Struktur analysiert, und eine Parameterstudie wurde im Hinblick auf Maseremission begünstigende Bedingungen durchgeführt.

Abstract

ACCRETION DISK-IMPINGING-CLUMPS AND $\mathbf{H_2}$O MASER ACTIVITY:

Recent observations have increasingly revealed characteristic structures in the distributions of H_2O masers in low-mass star-forming regions, that indicate protostellar accretion disks as being the maser's likely origin. This may open up hitherto unique ways to determine velocity fields, densities and temperatures of deeply imbedded star/disk systems. Accretion shocks produced by disk-impinging-clumps had been proposed as hydrodynamic trigger mechanism for 22GHz H_2O maser excitation (Fiebig 1997). To investigate the consequences of clumpy mass infall in detail, two-dimensional SPH simulations were carried out. An isothermal stratification was assumed for a model disk surrounding a 2 $M_\odot$ protostar and the infall of clumps of sizes 0.1 to 1 AU with densities of $\mathrm{n}_{\mathrm{H}_2}^{\mathrm{clump}} \sim 10^8 \dots 10^9$ cm^{-3} has been simulated. Also a variety of infall angles and velocities of order 10 km/s have been tested. Those velocities agree with estimates from zero-energy infall trajectories. The shock-structure produced by clumpy infall has been analysed in detail and different boundary conditions have been investigated in regard to their ability to foster observable H_2O maser activity.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Es wird allgemein anerkannt, daß interstellare Molekülwolken die Geburtsorte der Sterne sind. Die sogenannten Riesenmolekülwolken sind gigantische Gebilde mit Ausmaßen von einigen zehn Parsecs (pc) und von mehr als 10^6 Sonnenmassen ($M_\odot$). Die Struktur dieser Wolken ist aber nicht homogen, sondern läßt sich fortwährend in immer kleinere Unterstrukturen aufteilen. Diese selbstähnliche Unterteilung läßt sich bis hinunter zu Größenordnungen von nur einigen hundert Astronomischen Einheiten (AU) ($\sim 10^{-3}$ pc) beobachten und scheint sich noch unter die Skalen, die heutige Beobachtungsmöglichkeiten auflösen können, fortzusetzen (z.B. Kramer et al. 1998).

Massearme Sterne ($M_* \lesssim 3\ M_\odot$) entstehen vermutlich in dichten Wolkenkernen mit Durchmessern von $\sim 10^{-1}$ pc, Temperaturen um die 10 Kelvin und Massen von nur wenigen $M_\odot$. Kollabieren die Wolkenkerne aufgrund ihrer Gravitation, können sich junge Protosterne in ihrem Zentrum bilden. T Tauri-Sterne, IRAS-(Infrarot-) Punktquellen, bipolare Ausflüsse und stellare Jets, die typisch sind für Sternentstehungsgebiete, werden im Zusammenhang mit diesen Wolkenkernen häufig beobachtet (z.B. Shu et al. 1987).

Wolkenkerne weisen geringe Rotationsgeschwindigkeiten auf. Kommt es zum Kollaps und kann viskose Reibung dabei vernachlässigt werden, nimmt jedes Fluidelement seinen Drehimpuls mit in seinem Fall Richtung Zentrum. Die Drehimpulserhaltung wird die kollabierende Materie davon abhalten, direkt auf das Zentrum zu stürzen. Stattdessen bildet sich eine tief im Wolkenkern eingebettete, rotierende Scheibe mit einem Radius von einigen 10 AU, auf die ein Großteil der Materie fällt und von dort aus langsam auf den zentralen Protostern driftet. Man nennt diese Scheiben protostellare *Akkretionsscheiben.* Während der Akkretion verliert die Scheibenmaterie Energie, wodurch eine charakteristische Strahlung emittiert wird, die modelliert und in späteren Phasen der Sternentstehung beobachtet werden kann. Theorien zu Akkretionsscheiben können damit überprüft werden (z.B. Kenyon 1995).

Beobachtungen bestätigen zunehmend, daß Sternentstehung, Akkretionsscheiben und sogenannte Jets untrennbar miteinander verflochtene Phänomene sind. Jets nennt man stark gebündelte Winde, die mit hohen Geschwindigkeiten bis zu ~ 300 km/s vom jungen Stern ausgehen und die umgebende Materie zu molekularen Ausflüssen antreiben (z.B. Masson 1995). Man vermutet, daß in Schockbereichen, die solche Jets erzeugen, Maseremission entstehen kann, die häufig in Sternentstehungsgebieten beobachtet wird.

Detaillierte Untersuchungen der Positions-Geschwindigkeits-Verteilungen einiger Assoziationen von Maserquellen in Sternentstehungsgebieten lassen jedoch zunehmend eine Verbindung von Maseremission mit protostellaren Akkretionsscheiben vermuten (z.B. Fiebig et al. 1996, Torrelles et al., 1998, Norris et al. 1998, Philipps et al. 1998). Der Ansatz einer Theorie zur Entstehung von 22 GHz-H_2O-Masern ist durch den Einfall klumpiger Materie in die Akkretionsscheibe gegeben (Fiebig 1997a). Ob und unter welchen Umständen die Vorraussetzungen zur 22 GHz-H_2O-Maseremission im Akkretionsschock eines inhomogenen Kollapsflusses gegeben ist, soll mit der vorliegenden Studie der Hydrodynamik eines solchen Szenarios erörtert werden.

Diese Studie gliedert sich folgendermaßen: Kapitel 2 gibt einen kurzen Überblick über die Geschichte der Maserbeobachtung und diskutiert anschließend die notwendigen, thermodynamischen Voraussetzungen zur 22 GHz-H_2O-Maseremission. Kapitel 3 rekapituliert die in dieser Arbeit verwendeten analytischen Grundgleichungen aus der Theorie der Hydrodynamik und in Kapitel 4 wird eine numerische Methode, *Smoothed Particles Hydrodynamics*, zur Berechnung hydrodynamischer Probleme erläutert, mit der die Simulationsergebnisse dieser Arbeit erzielt wurden. Der dazu benutzte FORTRAN77-Code wird in Kapitel 5 anhand einer vergleichsweise einfachen Problemstellung, dem sogenannten *Schock von Noh*, und im Vergleich mit ihrer analytischen Lösung geprüft und optimiert. Die Grundlagen der verwendeten Modelle zur Simulation des Einfalls klumpiger Materie in Akkretionsscheiben werden im Kapitel 6 dargestellt. Die Simulation selbst wird in Kapitel 7 erläutert und die erzielten Ergebnisse in Kapitel 8 diskutiert. Ein exemplarischer Auszug des benutzten Codes befindet sich in Anhang A und eine Auflistung der in dieser Arbeit verwendeten Naturkonstanten in Anhang B.

2 Kosmische H_20-Maseremission

2.1 Überblick

Grundlage der Physik des Masers ist die stimulierte Emission, die zuerst von Einstein (1917) zur Herleitung des Planckschen Gesetzes postuliert wurde. Teilchen, die in der Mehrzahl einen angeregten Zustand (2) besetzen, der energetisch über einem zweiten Zustand (1) liegen soll (die sogenannte *Besetzungsinversion*), können in einem Strahlungsfeld durch stimulierte Emission lawinenartig ihre Energie abgeben und die Strahlungsintensität in der Frequenz der Energiedifferenz der beiden Niveaus exponentiell verstärken. Dieser Verstärkungseffekt kann im Prinzip so lange andauern, wie die Besetzungsinversion aufrecht erhalten bleibt.

Rotationsniveaus verschiedener Moleküle können dicht genug liegen, um eine Anregung von Maseremission zu erlauben. Wenige Jahre nachdem die ersten Maser im Labor erzeugt werden konnten, wurden von Weaver et al. (1965) ungewöhnliche, interstellare Emissionslinien beobachtet, die kurze Zeit später von Weinreb et al. (1965) als anomal angeregtes OH und dann als OH-Maseremission (z.B. Litvak et al. 1966) identifiziert wurden.

Der große Vorzug der Beobachtung von Masern ist ihre enorme Intensität, die es ermöglicht, kleine Gebiete angeregten, molekularen Gases, insbesondere im Umfeld junger Sterne, zu beobachten. Dabei unterliegen die Mikro- bzw. Radiowellen, die die tief in Molekülwolken eingebetteten Maserquellen emittieren, einer nur schwachen Extinktion. Die Geschwindigkeiten einzelner Maserquellen können somit sehr genau bestimmt werden, und man erhält Auskunft über die Geschwindigkeitsfelder eines Masergebiets.

Interstellares Wasser ist zuerst von Cheung et al. (1969) entdeckt worden. Die dabei detektierte 22 GHz-Linie ($\lambda = 1.35$ cm) wurde von Knowles et al. (1969) als Maseremission identifiziert. Die 22 GHz-Linie wird ausschließlich als Maseremission beobachtet (z.B. Elitzur 1992). Schon lange vor der Entdeckung kosmischer H_2O-Maserquellen wurde die Möglichkeit, sie im interstellaren Medium beobachten zu können, vorhergesehen (z.B. Townes 1955).

22 GHz-H_2O-Maser werden in vielen Sternentstehungsgebieten beobachtet und in der Regel mit Schockfronten molekularer Ausflüsse junger Sterne in Zusammenhang gebracht. Fiebig et al. (1996) zeigten jedoch, daß die beobachtete Positions- und Geschwindigkeits-Verteilung der 22 GHz-H_2O-Maserquellen in der Dunkelwolke Lynds 1287 durch Ausflußmodelle nur unzureichend modelliert werden kann. Ein einfaches Modell, in dem die Maseremission verursacht wird durch Stoßfronten, die durch den Akkretionsschock klumpiger, in die protostellare Akkretionsscheibe einfallende Materie, entstehen, deckte sich hingegen sehr gut mit der Beobachtung (Fiebig 1997a; vgl. Abschnitt (6.2.2) und Abbildung (6.2)) und soll deswegen in dieser Arbeit durch eine hydrodynamische Simulationsrechnung weiter untersucht werden. Da die Berechnung des Strahlungstransports und der für die 22 GHz-Maser relevanten Besetzungsniveaus über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würden, sollen in diesem Abschnitt zumindest die thermodynamischen Rahmenbedingungen, die H_2O-Maseremission ermöglichen, in groben Zügen betrachtet werden.

2.2 Kollisions- und Strahlungsübergänge

2.2.1 Rotationsquantenzustände des H_2O-Moleküls

Bezüglich seiner Rotationseigenschaften ist das H_2O-Molekül ein asymmetrischer Rotator mit den drei Rotationskonstanten $A = 835.8$ GHz, $B = 435.3$ GHz und $C = 278.1$ GHz. Diese Eigenschaft verleiht dem Wassermolekül ein komplexes Rotationsspektrum. Die gequantelten Rotationszustände eines asymmetrischen Rotators lassen sich als Zwischenzustände der Grenzfälle des *oblaten* und *prolaten* symmetrischen Rotators ansehen und werden, neben der Quantenzahl J (Gesamtdrehimpuls), durch die Quantenzahlen K_{-1} und K_{+1} (auf die Molekülachse projizierte Gesamtdrehimpulse) der symmetrischen Grenzfälle definiert. Man verwendet die Notation $J_{K_{-1}K_{+1}}$ für die Charakterisierung eines Rotationsenergieniveaus (Townes & Schawlow 1956).

Beim Strahlungsübergang zwischen diesen Energiezuständen unterliegen die erlaubten Dipolübergänge den Auswahlkriterien $\Delta J = 0, \pm 1$ und $K_{-1}, K_{+1} = g,u \leftrightarrow u,g$ oder $g,g \leftrightarrow u,u$ (g steht für gerade Zahlen, u für ungerade). Die Übergänge $6_{16} \rightarrow 5_{23}$ und $3_{13} \rightarrow 2_{20}$ liegen z.B. energetisch so dicht, daß sie Radiostrahlung der Wellenlängen 1.35 cm bzw. 1.64 mm emittieren können.

2.2.2 Übergänge zwischen den Maserniveaus

Übergangswahrscheinlichkeiten für Strahlungsübergänge zwischen den Rotationsniveaus sind durch die Einsteinkoeffizienten gegeben. Dabei kommt als Prozeß einmal die spontane Emission vom Niveau i nach j mit der Rate A_{ij} in Frage. Das Niveau i soll energetisch über dem Niveau j liegen mit der Energiedifferenz $E_{ij} = E_i - E_j$. Als weitere Prozesse sind Absorption und stimulierte Emission durch die Koeffizienten B_{ji} bzw. B_{ij} charakterisiert, die mit der einfallenden, über alle Raumwinkel gemittelten Strahlungsintensität $J_\nu = (4\pi)^{-1} \int I_\nu(\Omega) d\Omega$ der Frequenz $\nu_{ij} = E_{ij}/h$ multipliziert werden (h ist das Planksche Wirkungsquantum). Schließlich kann es noch durch Stoßprozesse mit den Stoßraten C_{ij} und C_{ji} zu Übergängen kommen.

Um die Änderung der Besetzungszahl N_i im Maserniveau i zu untersuchen, muß man neben dem unteren Maserniveau j auch sämtliche Nichtmaserniveaus des Moleküls miteinbeziehen, die in einer phänomenologischen Betrachtung (z.B. Goldreich & Keeley 1972) zu einem Reservoir zusammengefaßt werden sollen. Die jeweiligen Übergänge aus den zu betrachtenden Niveaus i und j in das Reservoir faßt man als *Verlustraten* Γ_i und Γ_j zusammen bzw. als *Pumpraten* Λ_i und Λ_j im umgekehrten Falle. So ergibt sich für die zeitliche Änderung der Besetzungszahlen

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \Lambda_i - \Gamma_i N_i - A_{ij} N_i - (B_{ij} N_i - B_{ji} N_j) J_\nu - (C_{ij} N_i - C_{ji} N_j) \qquad (2.1)$$

und für das untere Niveau j

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \Lambda_j - \Gamma_j N_j + A_{ij} N_i - (B_{ji} N_j - B_{ij} N_i) J_\nu - (C_{ji} N_j - C_{ij} N_i). \qquad (2.2)$$

Mit der Einstein-Relation

$$A_{ij} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} B_{ij} \tag{2.3}$$

und der Definition der Strahlungstemperatur T_R,

$$I_\nu = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{ij}}{kT_R}} - 1}, \tag{2.4}$$

kann man zeigen, daß bei Strahlungstemperaturen des Maserüberganges von $T_R \gtrsim 10^{10}$ K, die in vielen Quellen gefunden worden sind, für den Koeffizienten $A_{ij} \ll B_{ij} J_\nu$ gilt und er somit vernachlässigt werden kann. Hier ist k die Boltzmannkonstante und c die Lichtgeschwindigkeit.

Die Stoßraten sind durch das thermodynamische Prinzip des detaillierten Gleichgewichts über die Beziehung

$$C_{ji} = C_{ij} \frac{g_i}{g_j} e^{\frac{-E_{ij}}{kT_{kin}}} \tag{2.5}$$

miteinander verknüpft. Hier sind g_i, g_j die statistischen Gewichte bzw. Entartungsgrade der Rotationsniveaus i, j ($g_{i,j} = 2J_{i,j} + 1$). Die kinetische Temperatur T_{kin} ist über die Maxwell-Verteilung,

$$f(v) = 4\pi N_{Gas} \left(\frac{m}{2\pi k T_{kin}} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m}{2kT_{kin}} v^2}, \tag{2.6}$$

definiert, die Verteilung der Geschwindigkeiten v einer Teilchensorte der Masse m und der Anzahldichte N_{Gas} im thermodynamischen Gleichgewicht. T_{kin} liegt bei den uns interessierenden Fällen bei über 100 K. Für den 22 GHz-Übergang ist $E_{ij}/k \approx 1$ K. Es ist also $kT_{kin} \gg E_{ij}$ und für Gleichung (2.5) läßt sich näherungsweise schreiben,

$$g_i C_{ij} \approx g_j C_{ji}. \tag{2.7}$$

Außerdem gilt noch die Einstein-Relation

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}. \tag{2.8}$$

Für den stationären Fall, indem sich die Besetzungszahl N eines Niveaus zeitlich nicht ändern soll, können die Gleichungen (2.1) und (2.2) gleich null gesetzt werden und man erhält mit obigen Näherungen und nach einer etwas aufwendigen, aber an sich trivialen Rechnung, folgende Schreibweise für die Bedingung der Besetzungsinversion $N_i/g_i - N_j/g_j > 0$, die Voraussetzung für Maseremission ist:

$$\frac{\Lambda_i g_j}{\Lambda_j g_i} > \frac{\Gamma_i}{\Gamma_j}. \tag{2.9}$$

Diese Bedingung ist unabhängig von den Koeffizienten A_{ij}, B_{ij} und C_{ij}. Sie hängt alleine ab von den Pump- und Verlustraten, für die noch keine konkreten Annahmen eingingen, und vom Strahlungsfeld, mit dem diese verknüpft sind.

Die Koeffizienten für stimulierte Emission bzw. Absorption, B_{kl} und B_{lk}, und spontaner Emission, A_{kl}, sind aus der Molekülphysik zumindest theoretisch bekannt und eng mit dem Matrixelement des jeweiligen Überganges verknüpft (die Indizes k, l stehen jetzt für beliebige Rotationsniveaus). Die numerischen Werte für einige wichtige Übergänge können in veröffentlichten Tabellen nachgelesen werden (z.B. Schwendemann & Laurie 1958, Rothman et al. 1992 und 1996).

2.2.3 Stoßraten

Die Werte der Stoßraten C_{kl} werden in erster Linie von der gemittelten Relativgeschwindigkeit v_{rel} zwischen dem Stoßpartner (z.B. H_2) und dem "Masermolekül" (z.B. H_2O), von der Verteilungsfunktion $f(v_{rel})$ und vom Stoßquerschnitt σ_{kl} für den Stoß mit einem Energieübertrag E_{kl} abhängen. Man schreibt für die Rate der Stoßanregung

$$C_{kl} = \int_{v_{kl}}^{\infty} \sigma_{kl} v_{rel} f(v_{rel}) dv_{rel} \tag{2.10}$$

mit $v_{kl} = \sqrt{2E_{kl}/m_{\mathrm{H_2}}}$ als unterer Integrationsgrenze und für die Rate der Stoßabregung

$$C_{lk} = \int_{0}^{\infty} \sigma_{lk} v_{rel} f(v_{rel}) dv_{rel}. \tag{2.11}$$

Für die Verteilungsfunktion $f(v_{rel})$ der mittleren Geschwindigkeiten des stoßenden Gases kann man die Maxwellverteilung (2.6) ansetzen, die proportional zur Anzahldichte des stoßenden Gases N_{Gas} ist. Die Stoßrate ist somit gleichfalls proportional zu N_{Gas}, und man kann einen Stoßratenkoeffizienten

$$K_{lk} \equiv C_{lk}/N_{Gas}. \tag{2.12}$$

definieren.

Die eigentliche Schwierigkeit liegt in der Berechnung von σ_{kl} und σ_{lk}. Sie hängt stark von der Geometrie der Stoßpartner und ihren Anregungszuständen ab. Stoßquerschnitte und damit Ratenkoeffizienten für Stöße zwischen He und H_2O wurden von Green (1993) für verschiedene Temperaturen von 20 bis 2000 Kelvin berechnet. Da die Stoßquerschnitte der H_2O-Moleküle für die hier betrachteten Anregungsenergien deutlich größer sind als die der Stoßpartner, also He bzw. H_2, kann man diese näherungsweise als Punktteilchen ansehen, sodaß in erster Näherung nur die Geometrie von H_2O in die Stoßratenkoeffizienten eingeht. Im genannten Temperaturbereich können die elektronischen Anregungszustände der He-Atome vernachlässigt werden. Das erste Vibrationsniveau von H_2 liegt ebenfalls erst bei einigen tausend Kelvin (Hollenbach & McKee 1979) und elektrische Rotationsdipolübergänge sind für Moleküle ohne permanentem Dipolmoment, wie dem H_2, verboten und werden somit nicht berücksichtigt.

Mit diesen vereinfachenden Annahmen und mit den Gleichungen (2.10), (2.11) und (2.6) ist das Verhältnis der Stoßratenkoeffizienten, K_{lk}^{He} zu $K_{lk}^{\mathrm{H_2}}$, näherungsweise gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten. Damit gilt

$$K_{lk}^{\mathrm{H}_2} \approx \sqrt{\frac{\mu^{\mathrm{He}}}{\mu^{\mathrm{H}_2}}} K_{lk}^{\mathrm{He}} \tag{2.13}$$

mit den reduzierten Massen

$$\mu^{\mathrm{He}} = \frac{m_{\mathrm{He}} m_{\mathrm{H_2O}}}{(m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{H_2O}})} \text{ und } \mu^{\mathrm{H}_2} = \frac{m_{\mathrm{H}_2} m_{\mathrm{H_2O}}}{(m_{\mathrm{H}_2} + m_{\mathrm{H_2O}})}.$$

Man erhält $K_{lk}^{\mathrm{H}_2} \approx 1.4\, K_{lk}^{\mathrm{He}}$ in Übereinstimmung mit Neufeld & Melnick (1991).

2.3 Mindesttemperatur für Maseremission

Im Abschnitt (2.2.2) wurde die Inversionsbedingung erklärt, die notwendige Voraussetzung für Maseremission ist. Um von Gleichung (2.9) allerdings auf makroskopische Größen wie Dichten und Temperaturen zu schließen, müßte man sämtliche Pump- und Verlustraten miteinbeziehen. In diese Raten geht das Strahlungsfeld mit ein, welches zu berechnen über den Rahmen dieser, auf die Hydrodynamik abzielenden Arbeit hinausgehen würde. Numerische Rechnungen unter Vernachlässigung der detailierten hydrodynamischen Vorgänge wurden z.B. von de Jong (1973) oder von Elitzur, Hollenbach & McKee (1989) durchgeführt. Eine kombinierte Rechnung, die den Strahlungstransport und die Niveaubesetzung der H_2O-Moleküle mit einem zweidimensionalen Hydro-Code verbindet, ist zur Zeit in Arbeit (Fiebig et al. 1998).

Es soll deswegen im folgenden erst einmal eine grobe, unterste Abschätzung gemacht werden, bei welchen Temperaturen Maseremission möglich erscheint. Dazu soll untersucht werden, welche Temperaturen notwendig sind, um die Maser- und relevanten Pumpniveaus überhaupt besetzen zu können. Die Besetzung der Niveaus sei durch die Boltzmannverteilung

$$\frac{N_k}{N_l} = \frac{g_k}{g_l} e^{-\frac{E_k - E_l}{k T_{kin}}} \tag{2.14}$$

gegeben. Bei der Boltzmannverteilung wird davon ausgegangen, daß nur Stöße die Übergangsraten bestimmen. Übergänge durch spontane Emission entvölkern aber die energetisch höheren Niveaus besonders bei tiefen Temperaturen, d.h. die Verteilung, die Gleichung (2.14) beschreibt, wird zu gegebener Temperatur die Besetzungszahl des energetisch höheren Niveaus k überschätzen. Will man hingegen ein bestimmtes Besetzungsverhältnis einer kinetischen Temperatur T_{kin} nach Gleichung (2.14) zuordnen, so wird diese unter der wahren kinetischen Temperatur liegen. Die Abschätzung nach der Boltzmannverteilung liefert daher eine untere Grenze an die notwendige Temperatur.

Eine signifikante Besetzung sei gegeben, wenn ein energetisch über dem Maserniveau liegendes Pumpniveau k eine etwa $1/e$-fache Besetzung des untersten Rotationsniveaus l aufweisen kann. Die 22 GHz-Maserniveaus 6_{16} und 5_{23} liegen bei nahezu äquivalenten Niveautemperaturen von etwa 643 K (sämtliche H_2O-Niveauenergien werden von Green et al. (1993) übernommen). Repräsentative

Pumpniveaus für das 6_{16}-Niveau sind z.B. 7_{25} und 7_{07} (de Jong 1973). Für den Pumpzyklus ist die Abschätzung für das 7_{07}-Niveau relevant. Das Grundniveau von Ortho-Wasser, zu dem der 22 GHz-Übergang gehört, liegt bei $E_1/k = 34$ K. Mit der Bedingung $N_k/N_1 > 1/e$ und Gleichung (2.14) erhalten wir damit eine Bedingung für die Masermindesttemperatur. Für das Pumpniveau 7_{07} mit $E_k/k = 844$ K ($g_k = 15$) bekommt man mit der Bedingung $N_k/N_l > e^{-1}$

$$T_{min}^{7_{07}} > 310\mathrm{K}. \tag{2.15}$$

Geht man stattdessen z.B. von der Bedingung $N_k/N_1 > 1$ aus, so erhält man für das Niveau 7_{07} $T_{min} \gtrsim 503$ K. Man kann aber sicher davon ausgehen, daß die Bedingung $N_k/N_1 > 1$ als notwendige Vorraussetzung für Maseremission zu pessimistisch ist. Der Wert

$$T_{kin}^{Maser} \gtrsim 300\mathrm{K} \tag{2.16}$$

scheint als obere Abschätzung für die erforderliche Masermindesttemperatur sinnvoll. Dieser Wert für die Mindesttemperatur stimmt auch mit dem Wert überein, den Goldreich & Kwan (1974) aufgrund der Berechnungen anderer Modelle zur 22 GHz-H_2O-Maseremission erhielten. Die Abschätzung nach Gleichung (2.16) wird im folgenden als makroskopische Bedingung bei der Untersuchung von H_2O-Maseraktivität beim Einfall klumpiger Materie in protostellare Akkretionsscheiben übernommen werden.

2.4 *Quenching*

Zu einer Maseremission kann es dann kommen, wenn von der Boltzmannverteilung (2.14) abweichende Besetzungszahlen der Pump- und Maserniveaus die Voraussetzungen zur Erfüllung der Inversionsbedingung (2.9) schaffen. Werden die Stoßraten so hoch, daß Stöße zum dominierenden Prozeß bei der Besetzung der relevanten Niveaus werden, nähern sich die Besetzungszahlen wieder der Boltzmannverteilung und die Besetzungsinversion verschwindet; die zum Pumpzyklus gehörenden Niveaus "thermalisieren". Diesen Vorgang nennt man *Quenching*.

Um zu untersuchen unter welchen makroskopischen Bedingungen es zum Quenching kommt, wird man wieder, wie schon im Abschnitt (2.3) erläutert, auf numerische Methoden oder auf stark vereinfachende Annahmen zurückgreifen müssen. Die folgende Betrachtung wird sich auf die Untersuchung zweier isolierter Niveaus l und j beschränken und den Einfluß des Strahlungsfeldes vernachlässigen (vgl. z.B. Elitzur 1992). Die Gleichungen (2.1) und (2.2) für Niveaus l und j vereinfachen sich damit zu

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = -\frac{\partial N_l}{\partial t} = N_l A_{lj} - (C_{jl} N_j - C_{lj} N_l). \tag{2.17}$$

Das Niveau l soll energetisch über j liegen. Für den stationären Fall, $\partial N_j/\partial t = \partial N_l/\partial t = 0$, gilt dann

$$\frac{N_l}{N_j} = \frac{C_{jl}}{C_{lj} + A_{lj}} \tag{2.18}$$

Mit Hilfe des Prinzips des detailierten Gleichgewichts und der daraus folgenden Gleichung (2.5), sieht man dann, daß das Verhältnis der Besetzungszahlen der Niveaus l, j durch die Gleichung

$$\frac{N_l}{N_j} = \frac{g_l}{g_j} e^{-\frac{E_{lj}}{kT_{kin}}} \frac{1}{1 + \frac{A_{lj}}{C_{lj}}} \tag{2.19}$$

gegeben ist. Im Grenzfall, in dem die stoßinduzierten Übergangsraten C_{lj} aus dem energetisch höheren Niveau l ins tieferliegende Niveau j bedeutend größer werden als die entsprechenden Raten der spontanen Emission A_{lj}, geht Gleichung (2.19) in Gleichung (2.14) für die Boltzmannverteilung über, und man spricht von thermalisierten Niveaus. Da die Stoßrate C_{lj} proportional zur Anzahldichte N_{Gas} des stoßenden Gases ist, kann man sinnvoller Weise eine *kritische Dichte* N_{Cr} definieren, die ein Maß für die Thermalisierung ist,

$$\frac{N_{Cr}}{N_{Gas}} = \frac{A_{lj}}{C_{lj}}, \tag{2.20}$$

bzw. mit der Definition (2.12)

$$N_{Cr} = A_{lj}/K_{lj}. \tag{2.21}$$

Um einen Maser zu thermalisieren, wird man Dichten benötigen, die weit über der kritischen Dichte liegen. Dieses Ergebnis läßt sich auch auf Modelle mit mehr als zwei Niveaus übertragen (Elitzur 1992).

Man kann das Verhältnis der Besetzungszahlen gemäß Gleichung (2.19) formal durch eine Boltzmann-Verteilung zu einer weiteren Temperatur, der Anregungstemperatur T_x, beschreiben, d.h.

$$e^{-\frac{E_{lj}}{kT_{kin}}} \frac{1}{1 + \frac{A_{lj}}{C_{lj}}} = e^{-\frac{E_{lj}}{kT_x}}. \tag{2.22}$$

Damit erhält man

$$T_x = \frac{T_{kin}}{1 + \frac{kT_{kin}}{E_{lj}} \ln\left(1 + \frac{N_{Cr}}{N_{Gas}}\right)} \tag{2.23}$$

und nach Entwicklung für $N_{Gas} \gg N_{Cr}$

$$T_x \approx T_{kin} \left(1 + \frac{kT_{kin}}{E_{lj}} \frac{N_{Cr}}{N_{Gas}}\right)^{-1}. \tag{2.24}$$

Für thermalisierte Niveaus ist $T_{kin} \approx T_x$. Das bedeutet für die Dichte N_{Gas}, daß bei Thermalisierung

$$N_{Gas} \gg N_{Cr} T_{kin}/T_{lj} \tag{2.25}$$

gelten muß ($T_{lj} \equiv E_{lj}/k$). Je höher die kinetische Temperatur liegt, desto langsamer nähert sich T_x mit steigendem N_{Gas} an T_{kin} und desto höhere Dichten N_{Gas} werden zur Thermalisierung benötigt. Diese Aussage gilt allerdings nur dann uneingeschränkt, wenn N_{Cr} als temperaturunabhängig vorausgesetzt wird, was natürlich nicht der Fall sein wird, da die Stoßratenkoeffizienten von der kinetischen Temperatur abhängen. Diese Zusammenhänge sollen in Abschnitt (2.4.1) noch genauer untersucht werden.

Nun kommt es schon vor einer vollständigen Thermalisierung ($T_{kin} = T_x$) der Pump- und Maserniveaus zum Quenching des Masers. Der Übergang zum gequenchten Maser wird graduell mit zunehmender Dichte vonstatten gehen. Ohne Einbeziehung aller Pump- und Verlustübergänge und des äußeren Strahlungsfeldes, wird man auch hier keine verläßliche Aussage über die genauen Bedingungen für die Thermalisierung des Masers machen können.

Es kann wieder eine *ad hoc* Annahme gemacht werden und die Anregungstemperatur, bei der Quenching des Masers wahrscheinlich wird, auf 90 % der kinetischen Temperatur, $T_x^{Quench} \gtrsim 0.9\ T_{kin}$, festgelegt werden. Setzt man diese Forderung in Gleichung (2.24) ein, so erhält man folgende Bedingung für die entsprechende Dichte:

$$N_{lj}^{Q} \gtrsim 9 \frac{T_{kin}}{T_{lj}} N_{Cr}. \tag{2.26}$$

2.4.1 Zwei repräsentative Übergänge

Gleichung (2.26) macht eine Aussage über die Thermalisierung zweier Niveaus und ist über T_{lj} abhängig von der Energiedifferenz E_{lj} und über N_{Cr} abhängig von den Einstein-Koeffizienten A_{lj} und Stoßratenkoeffizienten K_{lj}. Um quantitative Aussagen machen zu können, sollen zwei repräsentative Pumpübergänge auf die Maserniveaus $(6_{16}, 5_{23})$ betrachtet werden. Es sind dies die Übergänge $7_{07} \rightarrow 6_{16}$ (entspreche $[ki]$) und $6_{34} \rightarrow 5_{23}$ (entspreche $[lj]$) (de Jong 1973). Zur Abschätzung der "Quenchdichte" werden verschiedene Stoßratenkoeffizienten K_{mn}^{He} für Helium und Wasser von Green et al. (1993) in Abhängigkeit von der kinetischen Temperatur T_{kin} übernommen. Mit Hilfe der Gleichung (2.13) können diese auf den für uns relevanten Fall $K_{mn}^{\mathrm{H_2}}$ von Stößen zwischen H_2O und H_2 übertragen werden (Tabelle (2.1)).

Stoßratenkoeffizienten $K_{mn}^{\mathrm{H_2}}[\mathrm{cm^3 s^{-1}}]$			
Übergang	200 K	400 K	1200 K
$7_{07} \rightarrow 6_{16}$	$3.9 \cdot 10^{-11}$	$6.6 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$
$6_{34} \rightarrow 5_{23}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$2.7 \cdot 10^{-11}$	$5.7 \cdot 10^{-11}$

Tabelle 2.1 Stoßratenkoeffizienten für Stöße zwischen H_2 und H_2O. Hierzu wurden die Werte für Stöße zwischen He und H_2O von Green et al. (1993) übernommen und mit Gleichung (2.13) modifiziert.

Mit den Tabellenwerten der A_{mn} für H_2O (Chandra et al. 1984) lassen sich die kritischen Dichten $N_{Cr} = A_{mn}/K_{mn}^{\mathrm{H}_2}$ berechnen, die in Tabelle (2.2) aufgeführt werden.

Kritische Dichten $N_{Cr}[\mathrm{cm}^{-3}]$				
Übergang	A_{mn}	200 K	400 K	1200 K
$7_{07} \to 6_{16}$	$1.16\mathrm{s}^{-1}$	$3.0 \cdot 10^{10}$	$1.8 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$
$6_{34} \to 5_{23}$	$1.69\mathrm{s}^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{11}$	$6.3 \cdot 10^{10}$	$3.0 \cdot 10^{10}$

Tabelle 2.2 Kritische Dichten berechnet mit den Einstein-A-Koeffizienten nach Chandra et al. (1984) und den Stoßratenkoeffizienten aus Tabelle (2.1).

Mit den Werten aus Tabelle (2.2) folgen mit $T_{ki} = 201$ K und $T_{lj} = 292$K (Green 1993) und Gleichung (2.26) schließlich die Werte für N_{mn}^Q (Tabelle (2.3)).

N_{mn}^Q				
Übergang	T_{mn}	200 K	400 K	1200 K
$7_{07} \to 6_{16}$	201 K	$2.7 \cdot 10^{11}$	$3.2 \cdot 10^{11}$	$5.9 \cdot 10^{11}$
$6_{34} \to 5_{23}$	292 K	$8.0 \cdot 10^{11}$	$7.8 \cdot 10^{11}$	$1.1 \cdot 10^{12}$

Tabelle 2.3 N_{mn}^Q-Werte berechnet nach Gleichung (2.26). Die kritischen Dichten aus Tabelle (2.2) und Niveautemperaturen von H_2O nach Green (1993) wurden hierzu verwendet.

Durch die Temperaturabhängigkeit der kritischen Dichte N_{Cr} ist N_{mn}^Q nach Gleichung (2.26) nicht mehr proportional zur kinetischen Temperatur T_{kin}. Die betrachteten Werte für N_{mn}^Q bleiben etwa in derselben Größenordnung.

Als notwendige Bedingung für 22 GHz-H_2O-Maseremission an die Dichte des H_2-Gases bietet sich damit schließlich die Abschätzung

$$n_{\mathrm{H}_2} \lesssim 10^{11}\mathrm{cm}^{-3} \tag{2.27}$$

an. Dieser Wert ist vergleichbar mit den Ergebnissen anderer Modellrechnungen von Goldreich & Kwan (1974), die den Wert $n_{\mathrm{H}_2} \lesssim 10^{10}\mathrm{cm}^{-3}$ als Bedingung für die 22 GHz-Maseremission angeben.

2.4.2 Thermische Linienbreiten

Photonen können durch stimulierte Emission nur in ihrer Frequenz verstärkt werden (innerhalb der *natürlichen Linienbreiten*, die durch die Heisenbergsche Unschärfeferelation gegeben sind). Bewegt sich ein Molekül, welches ein Photon absorbieren und durch stimulierte Emission reemittieren soll, relativ zu dem Molekül, welches das Photon ursprünglich emittiert hat, so ist in dessen Inertialsystem die Frequenz des Photons dopplerverschoben. Entspricht die Relativgeschwindigkeit der beiden Moleküle einer Dopplerverschiebung, die über die natürliche Linienbreite hinausgeht, so kann das Photon nicht zur stimulierten Emission anregen und das Strahlungsfeld wird somit nicht verstärkt.

Soll das Strahlungsfeld, welches von der Vielzahl von Molekülen eines Gases emittiert wurde, verstärkt werden, so ist die natürliche Linienbreite nicht mehr die maßgebende. Durch die thermische Bewegung kommt es zu einer weiteren, dominierenden Linienverbreiterung des Strahlungsfeldes, wenn über alle emittierenden Moleküle gemittelt wurde. Die volle Halbwertsbreite dieser *thermische Linienbreite* kann man direkt in der Dimension einer Geschwindigkeit angeben (z.B. Elitzur 1992),

$$\Delta v_{1/2} = 0.5 \text{ km s}^{-1} \left(\frac{T_{kin}}{100\text{K}}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu}{18}\right)^{-1/2}, \tag{2.28}$$

mit der mittleren Molekülmassenzahl μ ($\mu_{\mathrm{H_2O}} = 18$). Im Geschwindigkeitsfeld eines Gebietes dürfen die Differenzen der Geschwindigkeitskomponenten entlang der Sichtlinie $\Delta v_{1/2}$ nicht wesentlich überschreiten, wenn über die gesamte Länge des Gebietes Maserstrahlung verstärkt werden soll.

2.5 Diskussion der Ergebnisse für die Maserbedingungen

Da es im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist, eine mikroskopische Betrachtung der Maseremission durchzuführen und sich Modellrechnungen anderer Autoren (z.B. Goldreich & Kwan 1974) nicht ohne weiteres auf die hier betrachteten Modelle übertragen lassen, wurden grobe Abschätzungen gemacht, mit denen makroskopischen Größen, bei denen 22 GHz-H_2O-Maseremission möglich erscheint, festgelegt werden sollten. Die Resultate aus den Abschätzungen sind als notwendige, keinesfalls als hinreichende Bedingungen für die Maseremission zu verstehen. Sie wurden im wesentlichen aus Bedingungen, die an die Besetzungsverteilung der Pump- und Maserniveaus gestellt wurden, hergeleitet.

Es haben sich eine Bedingung an die für 22 GHz-Maseremission minimal erforderliche kinetische Temperatur von $T_{kin}^{Maser} \gtrsim 300\text{K}$ und eine Bedingung für die maximal erlaubte Anzahldichte des H_2-Gases, $n_{\mathrm{H_2}} \lesssim 10^{11}\text{cm}^{-3}$, ergeben. Beide Werte sind vergleichbar mit Ergebnissen der Berechnung von H_2O-Maserbedingungen mit Hilfe anderer Modelle (z.B. Goldreich & Kwan 1974).

Schließlich wurde noch eine Bedingung an die maximal erlaubte Geschwindigkeitsdifferenz im Geschwindigkeitsfeld eines potentiellen Masergebietes entlang der Sichtlinie gegeben, welche durch die thermischen Linienbreiten, Gleichung (2.28), eingegrenzt wird.

3 Hydrodynamische Grundgleichungen

Um die makroskopischen Eigenschaften eines Fluids (z.B. Gas) zu verstehen, kann man das Fluid und seine Eigenschaften als Kontinuum betrachten. (Für eine mikroskopische Betrachtung, sowie eine genauere Erörterung des folgenden Überblicks über die Eigenschaften eines Fluids als Kontinuum, siehe z.B. Shu 1992.)

Man steht dann vor der Wahl des Inertialsystems, in dem man sich als Betrachter des Fluids bewegt. Möchte man die Eigenschaften eines Flusses beschreiben, so kann man dies, bildlich gesehen, aus der Perspektive eines Beobachters tun, der von einer Brücke hinunter in den Strom schaut. Ebenso kann man sich auf ein Boot begeben, sich mit dem Strom treiben lassen und von dort aus die nötigen Beobachtungen anstellen. In der ersten Variante charakterisiert man den Fluß durch seine Dichte ρ, Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, Temperatur T, den Druck P usw. als Funktion der Zeit t an verschiedenen, aber festen Punkten $\mathbf{x}$. Man nennt dies die *Eulersche Betrachtungsweise.* In der zweiten Methode wird ein Fluß durch die Eigenschaften eines Fluidelements charakterisiert, welches auf einer festen Bahn $\mathbf{r}(t)$ dem Strom folgt. Diese Methode nennt man *Lagrangesche Betrachtungsweise.*

Für die folgende, kurze Zusammenfassung der für diese Arbeit relevanten, analytischen Grundgleichungen, wird das Fluid aus der Eulerschen Perspektive betrachtet. Im darauffolgenden Kapitel 4 wird dann etwas ausführlicher eine numerische Methode vorgestellt, mit der die eigentlichen Ergebnisse dieser Arbeit erzielt wurden und die eine rein Lagrangesche Betrachtungsweise einnimmt.

3.1 Erhaltungsgleichungen

3.1.1 Kontinuitätsgleichung

Bei Abwesenheit von Massequellen und -senken ist die Änderung der Masse im Volumen V mit der Zeit gleich dem Massefluß durch die Oberfläche A diese Volumens, d.h.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_A \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = -\int_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})dV, \tag{3.1}$$

wobei der Vektor $d\mathbf{f}$ ein Oberflächenelement des Volumens V beschreibt. Der Betrag dieses Vektors ist gleich der Größe des Flächenelements und der Vektor zeigt in die Richtung der äußeren Flächennormalen. Beim rechten Gleichheitszeichen wurde der Gaußsche Satz verwendet. Das Volumen V über das integriert wird ist beliebig und kann zeitlich konstant gewählt werden, sodaß die Differentiation nach der Zeit unter dem Integral ausgeführt werden kann, woraus folgt:

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right] dV = 0.$$

Wenn V beliebig ist muß der Integrand verschwinden und es folgt die Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{3.2}$$

3.1.2 Impulserhaltung

Ähnlich wie die erhaltene Masse ist auch der Impuls $\int_V (\rho \mathbf{v}) dV$ in einem Volumen V erhalten. Quellen und Senken sind hierbei externe Kräfte, die auf die Oberflächen- bzw. Volumenelemente wirken und mit denen sich analog zu Gleichung (3.1) ergibt:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_k dV = - \oint_A (\rho v_k) v_l df_l + \oint_A P_{kl} df_l + \int_V \rho g_k dV, \tag{3.3}$$

wobei die Tensorschreibweise und die Einsteinsche Summenkonvention übernommen wurde. Der Tensor der Impulsstromdichte P_{kl} ist die l-Komponente des Flusses einer Impulsdichte in k-Richtung, df_l ist die l-Komponente des Vektors eines Oberflächenelements und g_k ist die k-te Komponente der gravitativen Beschleunigung. Entsprechend zu Abschnitt (3.1.1) folgt mit dem Gaußschen Satz die Gleichung für die Impulserhaltung:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_k v_l) - \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} - \rho g_k = 0. \tag{3.4}$$

Der Tensor P_{kl} ist ein symmetrischer Tensor 2. Stufe (für den Beweis siehe z.B. Shu 1992), d.h.

$$P_{kl} = P_{lk}. \tag{3.5}$$

Diese Aussage gilt unabhängig von den Eigenschaften des Fluids und gilt für Gase wie für Flüssigkeiten. Damit läßt sich P_{kl} schreiben als

$$P_{kl} = -P\delta_{kl} + \pi_{kl} \tag{3.6}$$

mit dem Kronecker Symbol δ_{kl} und dem skalaren Druck P, der mit dem thermodynamischen Druck identisch ist. Für *Newtonsche Fluide* ist der Tensor π_{kl} proportional zu $\partial v_k / \partial x_l$ (Hookesches Gesetz) und läßt sich für isotrope Fluide in seiner allgemeinsten Form schreiben als

$$\pi_{kl} = \mu D_{kl} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{kl}. \tag{3.7}$$

D_{kl} ist der Reibungstensor:

$$D_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{kl}. \tag{3.8}$$

Die Faktoren μ und λ sind die Koeffizienten für die Scherungs- und Volumenviskosität.

3.1.3 Energieerhaltung

Die Gesamtenergie eines Fluidelements, welches das Volumen V einnimmt, setzt sich zusammen aus der spezifischen inneren Energie u und der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$. In die Bilanz der Gesamtenergie werden miteinbezogen der Fluß kinetischer und innerer Energie durch die Oberfläche A des Volumens, die Arbeit die die Impulsstromdichte pro Zeiteinheit an der Oberfläche leistet, die Arbeit, die gravitative Kräfte pro Zeiteinheit an den Volumenelementen leisten, der Energiefluß, der durch den Wärmefluß $\mathbf{F}$ an der Oberfläche entsteht und den Strahlungsenergiefluß, durch den Volumenelemente Energie gewinnen (Γ) oder verlieren (Λ). Mit dem Gaußschen Satz erhält man also die Energieerhaltungsgleichung,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+u\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+u\right)v_l-v_kP_{kl}+F_l\right]=\rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{v})+\Gamma-\Lambda. \tag{3.9}$$

Der Wärmefluß $\mathbf{F}$ setzt sich aus einem radiativen Anteil $\mathbf{F}_{rad}$ und einem leitenden Anteil $\mathbf{F}_{cond}$ zusammen.

Die Gleichungen (3.2), (3.4) und (3.9) heißen *Navier-Stokes-Gleichungen*, die im Grenzfall $\pi_{kl}\equiv 0$, $\mathbf{F}\equiv 0$ und $\Lambda\equiv\Gamma\equiv 0$ in die sogenannten *EulerGleichungen* übergehen.

3.2 Stoßfronten ohne Strahlungsverluste

Breiten sich Störungen in einem Medium mit einer Geschwindigkeit aus, die höher ist als die Schallgeschwindigkeit im ungestörten Medium, so kommt es zu unstetigen Sprüngen in dessen Eigenschaften wie z.B. der Dichte ρ oder Temperatur T. Die Unstetigkeit tritt auf einer Längenskala l auf, die der mittleren freien Weglänge des zu betrachtenden Gases entspricht. Das Phänomen nennt man eine Stoß- oder Schockfront.

Die Schockfront wird sich also auf eine in makroskopischen Maßstäben dünne Zone reduzieren. Die Zeit, die ein Fluid benötigt, um diese Zone zu überqueren, wird klein sein im Vergleich zu den Zeitskalen, in denen sich die Randbedingungen für das Fluid deutlich ändern. Man betrachtet also einen stationären Fluß, dessen Eigenschaften sich in erster Näherung lediglich in der einen Dimension senkrecht zur Schockfront merklich ändern sollen. Dabei vernachlässigt man Änderungen im Gravitationsfeld und begibt sich ins Inertialsystem der Schockfront selbst. Das ungestörte Gas bewege sich nun aus dem Preschockgebiet (1) mit der Geschwindigkeit w_1 durch die Schockfront in das Postschockgebiet (2), wo es mit der Geschwindigkeit w_2 weiterfließt.

Es soll nun ein Bereich vor und hinter der Schockfront betrachtet werden, dessen Länge L sehr viel größer ist als die mittlere freie Weglänge l, aber klein genug, daß großräumige Variationen der Fluideigenschaften vernachlässigbar sind. Die Regionen (1) und (2) können dann als Gebiete mit jeweils einheitlichen Flußeigenschaften betrachtet werden. Weiter können Diffusionserscheinungen, die durch $\mathbf{F}_{cond}$ und den Tensor π_{kl} gegeben sind, auf diesen Längenskalen ignoriert werden. Es sollen hier nur Stöße betrachtet werden, bei denen es zu keinem Energieverlust durch Strahlung kommt.

Damit reduzieren sich die integrierten, eindimensionalen Erhaltungsgleichungen (3.2), (3.4) und (3.9) auf die Formen

$$\rho_2 w_2 = \rho_1 w_1, \tag{3.10}$$

$$\rho_2 w_2^2 + P_2 = \rho_1 w_1^2 + P_1, \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{2} w_2^2 + h_2 = \frac{1}{2} w_1^2 + h_1. \tag{3.12}$$

Das sind die Rankine-Hugoniotschen Sprungbedingungen. Die *spezifische Enthalpie* $h_{1,2} = u_{1,2} + P_{1,2}/\rho_{1,2}$ wurde hier benutzt. Für ein ideales Gas gilt für die spezifische Enthalpie die Beziehung

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{kT}{m} \tag{3.13}$$

mit der Boltzmannkonstante k, der kinetischen Gastemperatur $T \equiv T_{kin}$, der Masse m eines Gasmoleküls und dem Quotienten γ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen $\gamma = c_P/c_V$. Geht man von einem zweiatomigen Molekül, wie z.B. dem H_2, aus, so ist $\gamma = 7/5$.

Die Rankine-Hugoniotschen Sprungbedingungen lassen sich für ideales Gas noch folgendermaßen umformen:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{(\gamma + 1) + (\gamma - 1)(M_1^2 - 1)} = \frac{w_1}{w_2}, \tag{3.14}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma + 1) + 2\gamma(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)}, \tag{3.15}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[(\gamma + 1) + 2\gamma(M_1^2 - 1)][(\gamma + 1) + (\gamma - 1)(M_1^2 - 1)]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}. \tag{3.16}$$

Die Machzahl ist durch $M_1 = \frac{w_1}{c_s}$ definiert, wobei $c_s = \sqrt{\gamma P_1/\rho_1}$ die adiabatische Schallgeschwindigkeit ist.

Im Grenzfall des starken Stoßes, $M_1 \to \infty$, wird der Dichtesprung und der Sprung der Geschwindigkeiten im Inertialsystem der Schockfront durch einen festen Wert begrenzt. Man erhält mit $\gamma = 7/5$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 6. \tag{3.17}$$

Für starke Stöße ergibt sich das Verhältnis des Drucks vor und nach dem Stoß zu

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} = \frac{7}{6} M_1^2 \tag{3.18}$$

und für die Temperatur bzw. spezifische innere Energie zu

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M_1^2 = \frac{7}{36} M_1^2. \tag{3.19}$$

4 *Smoothed Particles Hydrodynamics*

4.1 Grundlagen

Analytische Lösungen hydrodynamischer Probleme in der Astrophysik sind im Allgemeinen nur bei Vorhandensein hochgradiger Symmetrien oder mit stark vereinfachten Annahmen möglich. Bei komplexeren Problemen wird man also auf numerische Techniken zurückgreifen müssen. Dabei wurden bisher die zu lösenden Differentialgleichungen zumeist mit der Methode der *finiten Differenzen* beschrieben.

Eine Alternative dazu stellt die Methode der *Smoothed Particles Hydrodynamics* (SPH) dar, wie sie zuerst von Lucy (1977) und Gingold & Monaghan (1977) vorgeschlagen wurde. Sie ist besonders bei "filigranen", mehrdimensionalen Problemen einfacher in der Anwendung und benötigt kein Gitter. Bei der Verwendung von SPH werden die Eigenschaften eines Fluids durch diskrete Teilchen repräsentiert. Die hydrodynamischen Erhaltungsgleichungen werden hierbei in Lagrangescher Darstellung verwendet (siehe Kapitel 3). Räumliche Ableitungen werden durch analytische Differentiation eines Interpolationskerns gefunden, wobei der Wert einer Funktion an einer Stelle dargestellt wird durch die interpolierten Werte einer Ansammlung sie umgebender, repräsentativer Punkte - die Teilchen.

Der *Integralinterpolant* einer beliebigen Funktion $A(\mathbf{r})$ ist gegeben durch

$$< A(\mathbf{r}) >_{\mathrm{I}} = \int A(\mathbf{r}')W(\mathbf{r},\mathbf{r}',h)\mathbf{dr}', \tag{4.1}$$

wobei über den gesamten Raum integriert wird und der *Interpolationskern* W die folgenden Eigenschaften besitzen soll:

$$\int W(\mathbf{r},\mathbf{r}',h)\mathbf{dr}' = 1, \tag{4.2}$$

$$W(\mathbf{r},\mathbf{r}',h) = W(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,h), \tag{4.3}$$

und W ist mindestens einmal differenzierbar. Typischerweise hat W ein scharfes Maximum um $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ und soll für $h \to 0$ einer Deltafunktion gleichen. Mit einer Taylorentwicklung des Integranten in Gleichung (4.1) läßt sich für eine Kernfunktion mit diesen Eigenschaften zeigen, daß die Abweichung $< A > - A$ von der Ordnung $O(h^2)$ ist (Gingold & Monaghan 1982). Die *Glättungslänge* h legt das Volumen fest über das integriert wird. Weiter sei angenommen, daß überall $W \geq 0$ gilt.

Sind die Interpolationspunkte mit der Anzahldichte $n(\mathbf{r}_j) \equiv n_j$ auf die Stellen $\mathbf{r}_j$ diskret im Raum verteilt, so gilt die Näherung durch den *Summeninterpolanten*

$$< A(\mathbf{r}_i) >_{\mathrm{S}} = \sum_j \frac{A_j}{n_j} W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \tag{4.4}$$

Hierbei ist der Funktionswert der Funktion A an der Stelle $\mathbf{r}_i$ durch die Werte $A_j \equiv A(\mathbf{r}_j)$ dargestellt und es wird über alle Punkte $\mathbf{r}_j$ summiert.

Sei j der Index eines Teilchens an der Stelle $\mathbf{r}_j$, an der die Massendichte ρ_j herrscht, so läßt sich (4.4) schreiben als

$$< A(\mathbf{r}_i) >_{\mathrm{S}} = \sum_j m \frac{A_j}{\rho_j} W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h), \tag{4.5}$$

wobei m die Masse eines Teilchens ist.

4.2 Der Interpolationskern

Betrachtet man als zu mittelnde Funktion nun insbesondere die Dichte $\rho(\mathbf{r}_i)$ so folgt aus Gleichung (4.5) (der Index S wird im folgenden weggelassen)

$$< \rho(\mathbf{r}_i) > = \sum_j m W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \tag{4.6}$$

Die Glättungslänge h bestimmt hierbei, anschaulich gesehen, das Dichteprofil eines Teilchen. Für eine optimierte Auflösung ist es sinnvoll ein variables h zuzulassen (siehe Abschnitt 4.5). Damit läßt Gleichung (4.6) zweierlei Interpretationen zu (Hernquist & Katz 1989):

In der sogenannten "*Scatter*"-Interpretation ist die Dichte an einem Punkt $\mathbf{r}_i$ gegeben durch die Beiträge der Dichteprofile benachbarter Teilchen j. Die Dichteprofile sind gegeben durch die Masse m, gewichtet mit $W_{ij} \equiv W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_j)$, welches eine Funktion der Glättungslänge h_j der Nachbarteilchen j ist,

$$< \rho(\mathbf{r}_i) > = \sum_j m W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_j). \tag{4.7}$$

Im Gegensatz dazu summiert man in der "*Gather*"-Interpretation die Massen der umgebenden Teilchen, gewichtet mit W_{ij} als Funktion von h_i am Ort $\mathbf{r}_i$ der zu bestimmenden Dichte selbst:

$$< \rho(\mathbf{r}_i) > = \sum_j m W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_i). \tag{4.8}$$

Entscheidet man sich dann für nur eine der beiden Interpretationen, bewirkt die daraus folgende Asymmetrie in den Bewegungsgleichungen eine Verletzung von Newtons drittem Axiom "actio = reactio". In einer symmetrisierten Form lautet Gleichung (4.6) (Hernquist & Katz 1989)

$$< \rho(\mathbf{r}_i) > = \sum_j m \hat{W}_{ij} \tag{4.9}$$

mit

$$\hat{W}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\{W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) + W(\mathbf{r}_{ij}, h_j)\} \tag{4.10}$$

und $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Diese Symmetrisierung hat gegenüber der von Benz (1990) vorgeschlagenen, $\hat{W}_{ij}^{\rm Benz} \equiv W(\mathbf{r}_{ij}, (h_i + h_j)/2)$, den Vorteil, daß sie Postschockoszillationen starker Stöße etwas besser dämpft (Steinmetz & Müller 1993).

Was nun die konkrete Form der Kernfunktion W angeht, so hat sich die $M4$ -Kernfunktion mit kompaktem Träger, wie sie von Monaghan & Lattanzio (1985) vorgeschlagen wurde, am besten bewährt:

$$W(u) = \eta_d \begin{cases} \frac{2}{3} - u^2 + \frac{1}{2}u^3, & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2-u)^3, & 1 < u \leq 2 \\ 0, & 2 < u \end{cases} . \tag{4.11}$$

Hierbei ist $u \equiv |\mathbf{r}_{ij}|/h$ und η_d der von der Dimension d abhängige Normierungsfaktor,

$$\eta_d = \begin{cases} 1/h, & d=1 \\ 15/(7\pi h^2), & d=2 \\ 3/(2\pi h^3), & d=3 \end{cases} . \tag{4.12}$$

Das so definierte W hat eine stetige erste und zweite Ableitung und hat die Eigenschaft, daß $< A > - A$ von der Ordnung h^2 ist.

4.3 Räumliche und zeitliche Ableitungen

Ist der Interpolationskern W differenzierbar und h vorerst als konstant angenommen, so folgt aus der Symmetrie des Kerns um $\mathbf{r}$ wegen $\nabla_{\mathbf{r}'} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = -\nabla_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ nach partieller Integration,

$$< \nabla_{\mathbf{r}} A(\mathbf{r}) > = \int A(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \mathbf{dr}' = \nabla_{\mathbf{r}} < A(\mathbf{r}) >, \tag{4.13}$$

und damit für die Summe

$$< \nabla_i A(\mathbf{r}_i) > = \sum_j m \frac{A_j}{\rho_j} \nabla_i W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \tag{4.14}$$

Das bedeutet, daß der Gradient einer Funktion aus der analytischen Gradientenbildung der Kernfunktion W gebildet werden kann. Höhere Ableitungen bildet man analog, vorausgesetzt W ist entsprechend oft differenzierbar.

Da in Gleichung (4.1) über den gesamten Raum integriert wird, kann man Zeitableitungen folgendermaßen nähern:

$$\frac{d}{dt} < A(\mathbf{r}) > = < \frac{d}{dt} A(\mathbf{r}) > . \tag{4.15}$$

Wird h in Zeit und Raum variabel, so kommutieren die Operatoren $\frac{d}{dt}$ und ∇ nicht mehr mit $<>$. Es treten sowohl im *Scatter*- als auch im *Gather*-Bild weitere Terme proportional zu dh/dt und ∇h von der Ordnung h^2 auf (Hernquist & Katz 1989). Die genauen Abhängigkeiten sind aber weitgehend unbekannt.

4.4 Hydrodynamische Grundgleichungen in SPH-Form

4.4.1 Impulserhaltung

Bei Abwesenheit von äußeren Kräften und Viskosität, gilt für die Impulserhaltung die Eulergleichung der Lagrangeschen Betrachtungsweise in der Form

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{4.16}$$

Gemäß Gleichung (4.14) und der Identität $(\nabla P)/\rho = 2\sqrt{P}(\nabla\sqrt{P})/\rho$ kann in SPH die rechte Seite der Gleichung in einer symmetrischen Form geschrieben werden, die den linearen Impuls und den Drehimpuls erhält (die spitzen Klammern werden im folgenden weggelassen, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind):

$$\frac{\nabla P_i}{\rho_i} = 2\sum_j m\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i\rho_j}\nabla_i \hat{W}_{ij}. \tag{4.17}$$

$\hat{W}_{ij}$ ist durch Gleichung (4.10) definiert. Der Faktor $\sqrt{P_i P_j}/\rho_i\rho_j$ ist das geometrische Mittel von P/ρ^2 für die Teilchen i und j. Häufig wird stattdessen auch das arithmetische Mittel $(P_i/\rho_i^2 + P_j/\rho_j^2)/2$ benutzt, das aber leichter zu negativen thermischen Energien führen kann (Hernquist & Katz 1989; vgl. auch Abschnitt (4.6.2)).

Der thermische Druck P läßt sich aus der idealen Gasgleichung bestimmen, $P = (\gamma - 1)\rho u$, wobei γ bereits in Abschnitt (3.2) definiert wurde.

4.4.2 Künstliche Viskositäten

Um die makroskopischen Grundgleichungen der Hydrodynamik auch über Singularitäten (Schockfronten) hinweg anwenden zu können, wird eine *künstliche Viskosität* $\mathbf{a}^{\mathrm{visc}}$ eingeführt. Sie glättet starke Gradienten, die im Schockbereich auftreten und kann dadurch Postschockoszillationen eindämmen, die im Extremfall zu negativen Energien und Instabilitäten führen können.

Gleichung (4.17) geht dann über in

$$-\frac{\nabla P_i}{\rho_i} + \mathbf{a}_i^{\mathrm{visc}} = -\sum_j m\left(2\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i\rho_j} + \Pi_{ij}\right)\nabla_i \hat{W}_{ij} \tag{4.18}$$

mit dem Viskositätstensor Π_{ij}.

Verschiedene Vorschläge wurden für die Form von Π_{ij} gemacht (siehe z.B. Monaghan 1985). Folgende zwei wurden am häufigsten untersucht und haben gute Ergebnisse erzielt:

Der *Monaghan-Gingold-Tensor* (Monaghan & Gingold 1983) hat die Form

$$\Pi_{ij}^{(a)} = \begin{cases} \frac{-\alpha\mu_{ij}\bar{c}_{ij} + \beta\mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \text{für } \mathbf{v}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{für } \mathbf{v}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

mit

$$\mu_{ij} = \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\bar{h}_{ij}(r_{ij}^2/\bar{h}_{ij}^2 + \eta^2)}. \tag{4.20}$$

Dabei ist $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ die Relativgeschwindigkeit, $\bar{c}_{ij} = (c_i + c_j)/2$ die gemittelte Schallgeschwindigkeit und $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$ die gemittelte Dichte der Teilchen i und j. Hernquist & Katz (1989) benutzen hier die gemittelte Glättungslänge $\bar{h}_{ij} = (h_i + h_j)/2$. Die Bedingung $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0$ ist in SPH das Äquivalent zur Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0$. Sie gilt für sich voneinander entfernende Teilchen, die eine viskose *Kühlung* bewirken würden. Um dies zu vermeiden, muß Π_{ij} für $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0$ verschwinden. Teilchen für die die Bedingung $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0$ gilt, erzeugen entsprechend eine viskose Heizung (siehe Abschnitt (4.4.4). Der erste Term im Zähler von Gleichung (4.19) ist linear in μ_{ij} und erzeugt eine Scherungs- und Volumenviskosität (Monaghan 1985; vgl. auch Abschnitt (3.1.2)). Der zweite, in μ_{ij} quadratische Term, soll verhindern, daß sich Teilchen bei hohen Machzahlen durchdringen. Er entspricht der *Neumann-Richtmyer-Viskosität* (z.B. Richtmyer & Morton 1967). α und β sind freie Parameter und von der Größenordnung eins. Der Faktor $\eta \sim 0.1 h_{ij}$ soll lediglich verhindern, daß $\Pi_{ij}^{(a)}$ divergieren kann.

Um Scherviskositäten zu vermeiden, wurde von Monaghan (1988) folgender Ausdruck für Π_{ij} vorgeschlagen:

$$\Pi_{ij}^{(b)} = \begin{cases} \frac{q_i}{\rho_i^2} + \frac{q_j}{\rho_j^2}, & \text{wenn } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0, & \text{wenn } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

mit

$$q_i = \alpha h_i \rho_i c_i |\nabla \cdot \mathbf{v}|_i + \beta h_i^2 \rho_i |\nabla \cdot \mathbf{v}|_i^2. \tag{4.22}$$

$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i$ wird über den äquivalenten Ausdruck $[\rho^{-1}(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho)]_i$ durch

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j m \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \hat{W}_{ij} \tag{4.23}$$

genähert (Monaghan 1985). Für die verwendeten Rechnungen wurde eine variierte Form von Watkins et al. (1996) übernommen, die mit dem Ausdruck

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = -\sum_j \frac{m}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \hat{W}_{ij} \tag{4.24}$$

genauere Ergebnisse erzielt haben.

4.4.3 Die Energiegleichung

Für die Energieerhaltung gilt bei Abwesenheit von Viskosität oder Wärmetransport der erste Hauptsatz der Thermodynamik in der Form

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{P}{\rho}\right) \nabla \cdot \mathbf{v} \tag{4.25}$$

mit der spezifischen inneren Energie u. Man kann nun genauso vorgehen wie im letzten Abschnitt und zudem noch Wärmetransportvorgänge zulassen, so daß sich die Energieerhaltungsgleichung in SPH-Form wie folgt ergibt (z.B. Hernquist & Katz 1989):

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m \left(\frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2}\Pi_{ij} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \hat{W}_{ij} + \frac{\Gamma_i - \Lambda_i}{\rho_i}. \tag{4.26}$$

Hierbei werden durch den Term $(\Gamma_i - \Lambda_i)/\rho_i$ noch mögliche Heiz- und Kühlprozesse zugelassen; Γ_i ist die Heizrate, Λ_i die Kühlrate.

4.4.4 Thermische Diffusion

Unphysikalische Energieanstauungen aufgrund der künstlichen Viskosität ("wall heating") können durch Einführung einer *thermischen Diffusion*, wie sie von Noh (1987) vorgeschlagen wurde, vermieden werden. Hierzu wird der Term $\rho^{-1}\nabla(Q\nabla u)$ zur Energiegleichung hinzufügt. Q ist gegeben durch:

$$Q = g_1 h\rho c + g_2 \rho h^2 (|\nabla \cdot \mathbf{v}| - \nabla \cdot \mathbf{v}). \tag{4.27}$$

Werte für g_1 und g_2 bewegen sich typischerweise in der Größenordnung von eins. Monaghan (1988) schreibt die thermische Diffusion in den SPH-Gleichungen in der Form

$$2 \sum_j m \frac{\bar{\zeta}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \frac{u_i - u_j}{(r_{ij}^2 + \eta^2)} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}, \tag{4.28}$$

mit $\bar{\zeta}_{ij} = (Q_i/\rho_i + Q_j/\rho_j)$. Man kann für W_{ij} wieder den gemittelten Kern aus Gleichung (4.10) einsetzen.

Die thermische Diffusion trägt zwar nicht zur Gesamtenergie bei, erhöht aber die Entropie (Monaghan 1988).

4.5 Die Glättungslänge

Die Glättungslänge h bestimmt die räumliche Auflösung einer Simulationsrechnung in dem Maße, daß sämtliche Strukturen, die kleiner sind als $\sim h$, stark geglättet werden. Gleichzeitig bestimmt h das Ausmaß stochastischer Schwankungen, die mit zu klein gewähltem h den dominierenden Fehler einer Simulationsrechnung darstellen können. Um lokale Strukturen möglichst gut aufzulösen, ist es sinnvoll, h räumlich und zeitlich so anzupassen, daß immer über nahezu die gleiche Anzahl von Teilchen in einer Umgebung gemittelt wird, auch wenn die Anzahldichte n der Teilchen stark variiert. Da die Glättungslänge die Dimension einer Länge hat, ist der Ansatz

$$h(\mathbf{r}) = \zeta \left(\frac{m}{\rho(\mathbf{r})} \right)^{1/d} \tag{4.29}$$

naheliegend; ζ ist in der Größenordnung von eins. Nach Monaghan & Lattanzio (1985) stellt man konstante Dichten am besten dar durch Teilchen gleicher Masse, die auf einem Gitter mit regelmäßigen Abständen $d = (m/\rho)^{1/d}$ plaziert sind. Nimmt man nun an, daß in einem Gebiet mit Radius $2h$ die Dichte konstant bleibt, so wird mit Gleichung (4.5) eine gleichbleibende Anzahl von Teilchen durch den Kern W nach Gleichung (4.11) berücksichtigt.

Nun tritt das Problem auf, daß zur Berechnung der Dichte ρ die Glättungslänge h benötigt wird und umgekehrt. Miyama et al. (1984) umgingen das Problem, indem sie die Dichte des vorrausgegangenen Zeitschrittes zur Berechnung von h benutzten. Steinmetz & Müller (1993) warnen allerdings vor Instabilitäten, die bei dieser Methode auftreten können.

Um h im Zeitschritt $n+1$ abschätzen zu können, braucht man die Dichte ρ^{n+1}, die man sich durch die Kontinuitätsgleichung verschaffen kann (Benz 1990). Man erhält bis zu einer Genauigkeit in 1.Ordnung in Δt und 0. Ordnung im Teilchenabstand $\Delta x \approx h$:

$$\rho^{n+1} \approx \rho^n(1 - \Delta t \nabla \mathbf{v}) + O(\Delta t^2) + O(h). \tag{4.30}$$

Wird h zu stark an die lokale Dichte gekoppelt, können sich Dichtefluktuationen und die daraus resultierenden Fluktuationen in h gegenseitig hochschaukeln. Besonders bei Simulationen mit inhomogener Dichteverteilung ist es deshalb ratsam, eine lokal geglättete Dichte $\rho_{\text{smooth}}(\mathbf{r}_i)$ einzuführen, mit der h berechnet wird (Haddad et al. 1991). Dies läßt sich naheliegender Weise am einfachsten realisieren, indem man die glättende Eigenschaft des SPH Formalismus benutzt:

$$\rho_{\text{smooth}}(\mathbf{r}_i) = \frac{<\rho^2>}{<\rho>} = \frac{1}{<\rho(\mathbf{r}_i)>} \sum_j m\rho(\mathbf{r}_j)\hat{W}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \tag{4.31}$$

Die Zeitableitung ergibt sich zu

$$\frac{d\rho_{\text{smooth}}}{dt} = \rho_{\text{smooth}} \nabla \mathbf{v} - \frac{2}{\rho} < \rho^2 \nabla \mathbf{v} >_{\text{smooth}} . \tag{4.32}$$

Zusammen mit diesem Ausdruck ergibt sich für die lokale, geglättete Dichte $(\rho_{\text{smooth}})^{n+1}(\mathbf{r}_i)$ in 1. Ordnung

$$(\rho_{\text{smooth}})_i^{n+1} \approx (\rho_{\text{smooth}})_i^n + \Delta t \left(\frac{d\rho_{\text{smooth}}}{dt}\right)_i^n \tag{4.33}$$

und für die Glättungslänge

$$h^{n+1}(\mathbf{r}_i) = \zeta \left(\frac{m}{\rho_{\text{smooth}}^{n+1}(\mathbf{r}_i)}\right)^{1/d} . \tag{4.34}$$

Steinmetz & Müller (1993) bemängeln bei diesem Verfahren, daß man nur für relativ große ζ ein glattes h erhält ($\zeta \geq 1.5$ für $d = 3$, Steinmetz & Müller;

$\zeta > 2$ für $d = 2$, Abschnitt (5.3.1)), was einen entsprechend großen Rechenaufwand mit sich bringt. Sie schlagen einen weiteren Algorithmus vor. Mit dem harmonischen Mittel der Dichte über alle Teilchen,

$$\bar{\rho}^{n+1} = \frac{1}{\sum_i (\rho^{-1}_{\mathrm{smooth}})^{n+1}_i}, \tag{4.35}$$

erhält man ein mittleres $\bar{h}$ aus

$$\bar{h}^{n+1} = \zeta \left(\frac{m}{\bar{\rho}^{n+1}} \right)^{1/d}. \tag{4.36}$$

Steinmetz & Müller definieren ein geglättetes h für ein Teilchen i zum Zeitpunkt $n+1$ schließlich folgendermaßen:

$$h_i^{n+1} = \bar{h}^{n+1} \left(\frac{\bar{\rho}^{n+1}}{(\rho_{\mathrm{smooth}})^{n+1}_i} \right)^k. \tag{4.37}$$

Man beachte, daß sich für $k = 1/d$ wieder Gleichung (4.34) ergibt und daß $h_i^{n+1} = \bar{h}^{n+1}$ aus Gleichung (4.36) für $k = 0$. Höhere Werte für k ($\leq 1/d$) resultieren in einer verbesserten räumlichen Auflösung aber auch in verstärkten stochastischen Schwankungen und instabilerem Verhalten, welches mit steigender Teilchenzahl schwächer wird und bei kinematischen Systemen, in denen die kinetische Energie mehr als einige Prozent der Gesamtenergie ausmacht, ganz verschwindet (Steinmetz & Müller 1993). Kleinere k -Werte stabilisieren die Rechnung, das Ergebnis ist aber stärker geglättet.

4.6 Zeitintegration

4.6.1 Das *Leapfrog*-Verfahren

Die integrierten Bewegungs- und Energiegleichungen eines Teilchens i lauten bis zu einer Genauigkeit in erster Ordnung in Δt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^{n+1} &= \mathbf{r}_i^n + \Delta t \; \mathbf{v}_i^n + O(\Delta t^2) \\ \mathbf{v}_i^{n+1} &= \mathbf{v}_i^n + \Delta t \; \mathbf{a}_i^n + O(\Delta t^2) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \Delta t \; \dot{u}_i^n + O(\Delta t^2). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Mit dem “Leapfrog” Verfahren kann bei der Zeitintegration, praktisch ohne zusätzlichen Rechenaufwand, eine Genauigkeit von $O(\Delta t^2)$ erreicht werden. Dazu werden die “halbzeitige” Beschleunigung $\mathbf{a}_i^{n+1/2}$ und Energieänderung $\dot{u}_i^{n+1/2}$ eines Teilchens in einem Zwischenschritt zum Zeitpunkt $n + 1/2$ benötigt. Diese Werte können zur Integration der Geschwindigkeit und Energie bis zu einer Genauigkeit in 2.Ordnung benutzt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1} &= \mathbf{v}_i^n + \Delta t \; \mathbf{a}_i^{n+1/2} + O(\Delta t^3) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \Delta t \; \dot{u}_i^{n+1/2} + O(\Delta t^3). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Zur Berechnung der halbzeitigen Beschleunigung $\mathbf{a}_i^{n+1/2}$ und Energieänderung $\dot{u}_i^{n+1/2}$ werden unter anderem die halbzeitige Geschwindigkeit und Energie benötigt. Um diese zu bekommen, kann man Abschätzungen 1. Ordnung machen, die nach Gleichung (4.38)

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}_i^n + O((\Delta t/2)^2)$$

$$u_i^{n+1/2} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2}\dot{u}_i^n + O((\Delta t/2)^2) \tag{4.40}$$

lauten.

Nach den Gleichungen (4.39) und (4.40) müßte man die Beschleunigung zum Zeitpunkt n und zum Zeitpunkt $n+1/2$ also zweimal pro Zeitschritt berechnen. Man kann aber den Rechenaufwand um die Hälfte verringern, wenn man nur die halbzeitigen Beschleunigungen und Energieänderungen, d.h. nur einmal pro Zeitschritt, berechnet. Dafür nimmt man zum Fehler der Abschätzung nach Gleichung (4.40) einen zusätzlichen Fehler der Ordnung $O(\Delta t^3)$ in Kauf, indem man schreibt (Monaghan 1988):

$$\tilde{\mathbf{v}}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}_i^{n-1/2}$$

$$\tilde{u}_i^{n+1/2} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2}\dot{u}_i^{n-1/2}. \tag{4.41}$$

Geschwindigkeiten und Energien werden dann nach Gleichung (4.39) zu ganzen Zeitschritten, Teilchenpositionen halbzeitig nach (Hernquist & Katz 1989)

$$\mathbf{r}_i^{n+1/2} = \mathbf{r}_i^{n-1/2} + \Delta t\ \mathbf{v}_i^n + O(\Delta t^3) \tag{4.42}$$

berechnet. Die ganzzeitigen Positionen werden für die Rechnung nicht benötigt.

4.6.2 Ein stabileres Zeitintegrationsverfahren

Abschätzungen der zur Berechnung der Beschleunigung benötigten Parameter in der Form von Gleichung (4.41) können in zwei (und wahrscheinlich auch in drei) Dimensionen zu Instabilitäten führen. Bei starken Gradienten können dabei negative Energien auftreten. Diese Instabilitäten unter Benutzung des Leapfrog-Verfahrens haben Hernquist & Katz (1989) ebenfalls beobachtet und konnten sie unter Benutzung des geometrischen Mittels in Gleichung (4.17) eindämmmen. Die Stablität der Rechnung bei starken Stößen hängt bei diesem Verfahren in empfindlicher Weise von der Wahl der künstlichen Viskosität und der thermischen Diffusion und deren Parameter ab. Höhere α- und β-Werte können die bei starken Stößen auftretenden Gradienten eindämmen und die Stabilität erhöhen. Doch können dann zu hoch gewählte g_1, g_2-Faktoren bei festen α, β die Rechnung wieder instabil werden lassen. Somit kann unter Umständen die durch die künstliche Viskosität anfallende Energieansammlung nicht genügend durch die thermische Diffusion abgeführt werden. Die Rechnung wird noch anfälliger für Instabilitäten, wenn das zu berechnende Problem komplexe Strukturen aufweist, wie sich bei der Simulation eines in eine Akkretionsscheibe einfallenden Klumpen gezeigt hat.

Man kann eine höhere Stabilität auch mit niedrigeren Werten für α und β bzw. höheren für g_1 und g_2 erreichen, wenn man eine Verlängerung der Rechenzeit in Kauf nimmt und die Abschätzungen für die halbzeitige Beschleunigung nach Gleichung (4.40) durchführt. Damit muß die Beschleunigung zwar zweimal pro Zeitschritt berechnet werden, dies kann aber den Vorteil haben, mit einer geringeren künstlichen Viskosität und damit auch thermischen Diffusion auszukommen, was eine verbesserte räumliche Auflösung mit sich bringen kann. Die Zuverlässigkeit dieser Methode hat sich besonders bei der Berechnung komplexer Probleme bewährt.

4.6.3 Variable Zeitschritte

Für explizite Zeitintegratoren sind die Zeitschritte durch die *Courant-Bedingung* (z.B. Anderson 1995) eingeschränkt. Für feste Zeitschritte kann man die Glättungslänge der Courant-Bedingung anpassen (z.B. Evrard 1988), was bei starken Dichtekontrasten entweder zu entsprechend schlechten Auflösungen führt oder bei der Wahl kleinerer Zeitschritte zu beliebig langen Rechenzeiten.

Man kann variable Zeitschritte einführen, die man der jeweiligen Glättungslänge anpaßt und aufgrund dieser eine untere Abschätzung angeben. Die Form dieser variablen Zeitschritte ist abhängig von der Wahl der künstlichen Viskosität und lautet mit $\Pi^{(a)}$ aus Gleichung (4.19)

$$\Delta t_i = \frac{h_i}{h_i|\nabla \cdot \mathbf{v}|_i + c_i + 1.2(\alpha c_i + \beta \mathrm{max}_j|\mu_{ij}|)} \tag{4.43}$$

bzw. mit $\Pi^{(b)}$, Gleichung (4.21),

$$\Delta t_i = \frac{h_i}{h_i|\nabla \cdot \mathbf{v}|_i + c_i + 1.2(\alpha c_i + \beta h_i|\nabla \cdot \mathbf{v}|_i)}, \tag{4.44}$$

wobei in beiden Fällen der zu übernehmende Zeitschritt durch

$$\Delta t = \chi \ \mathrm{min}_i(\Delta t_i)$$

gegeben sein soll (Monaghan 1988). Die Courantzahl χ ist für alle in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen auf $\chi = 0.3$ gesetzt worden. Der Term $\beta h_i|\nabla \cdot \mathbf{v}|_i$ wird für $|\nabla \cdot \mathbf{v}|_i \geq 0$ gleich null gesetzt (vgl. Gleichung (4.21)).

5 Testläufe

5.1 Das Programm

Für die Simulation des Einfalls klumpiger Materie in Akkretionsscheiben wurde ein ursprünglich nur in einer Dimension operierender SPH-Code (Fiebig 1997b) für Rechnungen in zwei Dimensionen erweitert. Das Programm wurde in FORTRAN 77 geschrieben und die Rechnungen auf verschiedenen Workstations und einem PC der Pentium-Klasse durchgeführt.

5.1.1 Berechnung der Summeninterpolanten

Die Subroutinen, die Summen in der Form von Gleichung (4.5) berechnen, bauen auf eine Vektormethode auf, wie sie in einer Dimension in einem MASPAR SPH-Code von Olson (1993) benutzt wurde. Dabei werden die Teilchen zunächst mit einer *Heapsort*-Routine (Press et al. 1986), in einer Dimension x, sortiert (nur notwendig für $d \geq 2$). Alle relevanten Teilchengrößen werden in Form eines n-dimensionalen Vektors geschrieben (n ist die Gesamtzahl der Teilchen). Dieser Vektor wird schrittweise transponiert und so mit seiner nicht-transponierten Form verknüpft. Das Verfahren ist direkt auf zwei Dimensionen übertragbar. Das Programm ließe sich somit leicht umschreiben, wenn man den Vorteil vektoriell arbeitender Maschinen nutzen wollte.

Um zu vermeiden, daß der Rechenaufwand proportional zu n^2 ist, werden nur Teilchen i, j betrachtet, deren räumliche x-Komponenten des Teilchenabstands $x_i - x_j$ kleiner oder gleich 2 $\max(h_i, h_j)$ ist.

Als Beispiel wird im Anhang A die verwendete Subroutine zu Berechnung der Dichte nach Gleichung (4.6) exemplarisch vorgestellt.

5.1.2 Benutzte Verfahren

Beide in Abschnitt (4.4.2) vorgestellten künstlichen Viskositäten wurden getestet. Die Glättungslänge h wurde mit dem Steinmetz-Müller-Verfahren (Steinmetz & Müller 1993; vergleiche Abschnitt (4.5)) angepaßt.

Als Zeitintegrationsverfahren wurden das Leapfrog-Verfahren, Abschnitt (4.6.1), und das Verfahren aus Abschnitt (4.6.2) überprüft und Δt entsprechend den Gleichungen (4.43) bzw. (4.44) angepaßt.

5.2 Der parallele *Schock von Noh*

Um die Funktionalität des Codes zu überprüfen und um die numerischen Parameter für die Gättungslänge, künstlichen Viskositäten und thermische Diffusion zu optimieren, wurde ein starker Stoß zweier mit hoher Machzahl parallel aufeinander zulaufender Gasmassen simuliert und mit den analytischen Lösungen der Rankine-Hugoniotschen Sprungbedingungen (Gleichungen (3.17)-(3.19), Abschnitt (3.2)) für dieses Problem verglichen. Für diese Problemstellung nach Noh (1987) hat sich die Bezeichnung paralleler *Schock von Noh* durchgesetzt (vgl. Monaghan (1988)).

5.2.1 Anfangsbedingungen

Zu Beginn der Testläufe ist Gas ($\gamma = 1.4$) homogen im Bereich von $-0.5 \leq x \leq 0.5$ und $0 \leq y \leq 0.25$ verteilt und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_x = 2$ für $-0.5 \leq x \leq 0$ und $v_x = -2$ für $0 < x \leq 0.5$ spiegelsymmetrisch auf das Zentrum zu. (Das Problem wurde auch nach einer Rotation um 45° und 90° getestet, um systematische Fehler aufgrund der Geometrie auszuschließen.)

Vor dem Stoß beträgt die Massendichte $\rho = 1$ und die thermische Energie $u = 0.025$, daraus ergibt sich der Druck $P = (\gamma - 1)u\rho = 0.01$ und die Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{\gamma P/\rho} \simeq 0.118$. Hinter dem Stoß muß nach Abschnitt (3.2) $\rho = 6$, $P = 4.8$ und $u = 2$ sein (siehe Abschnitt (5.3.4) für ein Beispiel in physikalischen Einheiten).

Zur Durchführung wurden 3600 Teilchen äquidistant auf einem Gitter mit dem Abstand $\Delta x = \Delta y \simeq 0.84 \cdot 10^{-2}$ plaziert. Damit ergaben sich 30 Reihen parallel zur x-Achse mit je 120 Teilchen. Ihnen wurde eine Glättungslänge von $h = \zeta\sqrt{m/\rho}$ zugeordnet, die im Verlauf der Rechnung zeitlich und räumlich durch das Steinmetz-Müller-Verfahren angepaßt wurde. Verschiedene, aber konstante Werte für ζ wurden getestet. Allen Teilchen wurde die gleiche Masse $m = \rho\Delta x\Delta y$ zugeordnet.

Die Teilchen bewegen sich somit frontal auf einander zu. Um Situationen, in denen Teilchen in der Schockfront versetzt aufeinander zu laufen, ebenfalls zu überprüfen, wurde ein Lauf erfolgreich getestet, indem Teilchen links und rechts von der Symmetrieachse bei $x = 0$ um $\Delta y/2$ zueinander versetzt wurden.

Nach Festlegung der Anfangsbedingung wurde das unstetige Geschwindigkeitsfeld geglättet (siehe Monaghan 1988).

5.2.2 Randbedingung

Teilchen, die zu einem vorher festgelegten Rand gezählt werden, sollen sich nicht senkrecht dazu bewegen können. Am Ende jedes Zeitschrittes wird also lediglich die Beschleunigungskomponente, die senkrecht zur Wand verläuft für alle Randteilchen auf Null gesetzt. Damit treten keine Scherviskositäten oder starke Gradienten in der Zone zwischen Randteilchen und frei beweglichen Teilchen auf.

Um zu vermeiden, daß Teilchen aus dem Schockbereich parallel zur Schockfront seitlich hinausdiffundieren, wurden beim Schock von Noh jeweils eine Wand bei $y = 0$ und $y = 0.25$ mit je 480 Randteilchen (das entspricht 4 Reihen) entlang der x-Achse gelegt.

5.3 Diskussion der Testergebnisse

Die Testergebnisse werden anhand von Momentaufnahmen 1.8538 Zeiteinheiten nach erstem Aufeinandertreffen der Gasmassen diskutiert (vgl. Abbildungen (5.1) - (5.7)).

5.3.1 Die Glättungslänge

Die Parameter für das Steinmetz-Müller-Verfahren wurden mit der Viskosität $\Pi^{(b)}$ aus Gleichung (4.21) und dem Zeitintegrationsverfahren aus Abschnitt (4.6.2) optimiert. Für die zweidimensionale Berechnung des Schock von Noh wurden die besten Ergebnisse mit $\zeta = 1.4$ und $k = 0.45$ erzielt (siehe Abbildung (5.2)). Für niedrigere Werte für ζ kam es zu stochastischen Schwankungen, die die Vorteile einer kleinen Glättungslänge nicht mehr kompensieren konnten (siehe Abbildung (5.5)). Ähnliches gilt für den Parameter k. Für $k = 0$ (vergleiche Gleichung (4.34)) mußte $\zeta > 2$ gewählt werden, um zufriedenstellende Ergebnisse erreichen zu können.

Für die im folgenden diskutierten Ergebnisse wurden die Werte $\zeta = 1.4$ und $k = 0.45$ übernommen.

5.3.2 Die künstliche Viskosität $\Pi^{(b)}$

1.Verfahren: Siehe Abbildung (5.1). Hier wurde das Leapfrog-Verfahren verwendet und die Viskosität $\Pi^{(b)}$ aus Gleichung (4.21) benutzt. Für diese Kombination ist die gefundene optimale Parameterwahl $\alpha = 1.0, \beta = 2.0$ und $g_1 = 1.0, g_2 = 2.0$. Die Gesamtenergie hat sich zum diskutierten Zeitpunkt um 0.1 % erhöht.

Die Dichte ist noch etwas zu niedrig. Man hat es also mit einer zu hohen Energieanstauung zu tun. Niedrigere Viskositäten können das Problem nicht lösen ohne Schwingungen im Schockbereich hervorzurufen (z.B. Abbildung (5.6)). Die Wahl der Parameter für die Viskosität ist nach unten auch sehr beschränkt, da es, durch die starken auftretenden Gradienten in der Schockfront, leicht zu Oszillationen und damit negativen Energien und Instabilitäten in der Rechnung kommt. So muß für eine stabile Rechnung mit $\Pi^{(b)}$ z.B. $\alpha \geq 1.7$ mit $\beta = 1.0$ bzw. $\beta \geq 1.6$ mit $\alpha = 1.0$ für $g_1 = 1.0$ und $g_2 = 2.0$ gewählt werden.

Eine höhere thermische Diffusion erzeugt stärkere Streuung im Bereich der Schockfront (z.B. Abbildung (5.7)) und liefert keine befriedigende Ergebnisse.

2.Verfahren: Siehe Abbildung (5.2). Hier wurde die Viskosität $\Pi^{(b)}$ benutzt und die Zeitintegration nach Abschnitt (4.6.2) durchgeführt. Die so gefundenen optimalen Parameter lauten $\alpha = 1.0, \beta = 1.0$ und $g_1 = 1.0, g_2 = 2.0$.

Zum gezeigten Zeitpunkt war die Energie bis auf $\approx 0.01\%$ der gesamten Anfangsenergie erhalten. Das Plateau im Schockbereich hat einen geraden Verlauf. Das Ergebnis ist sehr zufriedenstellend, wenn auch der Bereich der Schockfront etwas stärker ausgeglättet ist als mit einer künstlichen Viskosität nach Gleichung (4.19) und leichte Oszillationen in der x-Geschwindigkeit zu erkennen sind (vgl. z.B. Abbildung (5.4)).

5.3.3 Die künstliche Viskosität $\Pi^{(a)}$

1.Verfahren: Siehe Abbildung (5.3). Die Viskosität $\Pi^{(a)}$ aus Gleichung (4.19) wurde hier mit dem Leapfrog-Verfahren kombiniert. Die Schockfronten sind besser aufgelöst als in Abbildung (5.1), doch auch hier ist die Energieanstauung zu hoch. Dieses Problem ist hier nicht zu beheben, da es sich bei der Wahl von $\alpha = 1.5, \beta = 3.0$ und $g_1 = 1.0, g_2 = 1.5$ um einen Art "magischen" Parameterbereich für das Leapfrog-Verfahren, kombiniert mit $\Pi^{(a)}$ handelt, wenn man starke Stöße berechnet. Eine Variation nur eines dieser Parameter um $\gtrsim 0.2$ läßt die Rechnung instabil werden.

Die Gesamtenergie ist zum gezeigten Zeitpunkt um $\approx 2.5\%$ angestiegen. Der Vergleich mit den y-Geschwindigkeiten im Bereich der Schockfront in Abbildung (5.1), läßt die erhöhte Scherviskosität unter Verwendung von $\Pi^{(a)}$ erkennen. Die Diffusion wird sehr stark eingedämmt. Auch leichte Oszillationen der x-Geschwindigkeiten in Abbildung (5.1) sind hier gänzlich verschwunden.

2.Verfahren: Siehe Abbildung (5.4). Hier wurde die Viskosität $\Pi^{(a)}$ benutzt und die Zeitintegration nach Abschnitt (4.6.2) durchgeführt. Die verwendeten Parameter lauten $\alpha = 1.5, \beta = 2.5$ und $g_1 = 0.5, g_2 = 1.5$. Die Gesamtenergie hat um $\approx 0.06\%$ der Anfangsenergie abgenommen. Im Bereich der Schockfront ist die Energie etwas überhöht, im Schockzentrum zu niedrig. Das deutet auf eine zu hohe Viskosität und thermische Diffusion hin, die man unter Umständen noch optimieren könnte, da man mit dem hier benutzten Zeitintegrationsverfahren einen großen Spielraum bei der Wahl der entsprechenden Parameter zur Verfügung hat. Die Schockfront ist gut aufgelöst. Geschwindigkeitsverläufe sind denen aus Abbildung (5.3) ähnlich.

5.3.4 Zahlenbeispiel

Um ein Gefühl für die physikalische Relevanz der bisher dimensionslosen Rechnungen zu bekommen, soll ein Beispiel für eine Skalierung der Anfangsbedingungen und Ergebnisse gegeben werden, die für astronomische Rechnungen typisch sein könnte:

Wenn man für die anfängliche Anzahldichte $n_1 = 3 \cdot 10^9$ cm^{-3} eines diatomischen Moleküls ($\gamma = 1.4$) einsetzt und die Energie im Preschockbereich von $u_1 = 0.025$ einer Anfangstemperatur von z.B. $T_1 = 20$ K entspricht, so beträgt die Dichte im Postschockbereich $n_2 = 1.8 \cdot 10^{10}$ cm^{-3}, das sechsfache des Wertes von n_1, und die Energie $u_2 = 2$ im Postschock entspricht einer Temperatur von $T_2 = 1600$ K.

Die Gasmassen sind dabei anfänglich über ein Gebiet der Länge $1 \cdot 10^7$ km ≈ 0.067 AU verteilt und bewegen sich in dieser Skalierung mit Geschwindigkeiten von ± 20 km/s aufeinander zu. Die Zentren der SPH-Teilchen sind jeweils 84000 km voneinander entfernt, und ein Teilchen wiegt etwa $7 \cdot 10^{14}$ kg (das entspricht in etwa der Masse eines aus Wassereis bestehenden Kometen von 10 km Durchmesser).

Die Abbildungen (5.1) - (5.7) sind dann Momentaufnahmen, etwa 21.5 Tage nach dem ersten Aufeinandertreffen der Gasmassen. Die Schockfronten haben sich inzwischen mit konstanten Geschwindigkeiten von $\pm$ 4 km/s jeweils $7.4 \cdot 10^5$ km vom Zentrum fortbewegt.

5.4 Zusammenfassung

Insgesamt übertrifft die Qualität der hier präsentierten Rechenergebnisse die von Monaghan (1988). Dieses gute Ergebnis ist sicher auf die Möglichkeit einer variablen Glättungslänge nach dem Steinmetz-Müller-Verfahren zurückzuführen.

Die Instabilitäten, die unter Verwendung des Leapfrog-Verfahrens auftraten, wurden auch von Hernquist & Katz (1989) beobachtet und sind durch die hohen Machzahlen, die in den hier diskutierten Testläufen verwendet wurden, zu erklären.

Für die Simulationsrechnungen des Einfalls klumpiger Materie in Akkretionsscheiben wurden die Parameter und Verfahren aus Abbildung (5.2) übernommen. Der Nachteil langsamerer Rechenzeiten des Verfahrens aus Abschnitt (4.6.2) wurde in Kauf genommen, um auch bei komplexen Dichtestrukturen stabile Rechnungen zu erhalten. Auch die Gesamtenergie scheint mit diesem Verfahren exakter erhalten zu sein. Die Viskosität $\Pi^{(b)}$ aus Gleichung (4.21) wurde für die Simulation übernommen, damit es nicht zu künstlichen Energieansammlungen durch die Scherviskosität kommt, die bei der Wahl von $\Pi^{(a)}$ nach Gleichung (4.19) auftreten kann.

Vergleichsrechnungen mit den Parametern aus Abbildung (5.1) wurden auch für die Akkretionsschockrechnung durchgeführt. Dabei traten etwas höhere Temperaturen ($\sim$ 5%) im Maximum der Schockfronten auf, und die Rechnungen erwiesen sich als weniger stabil.

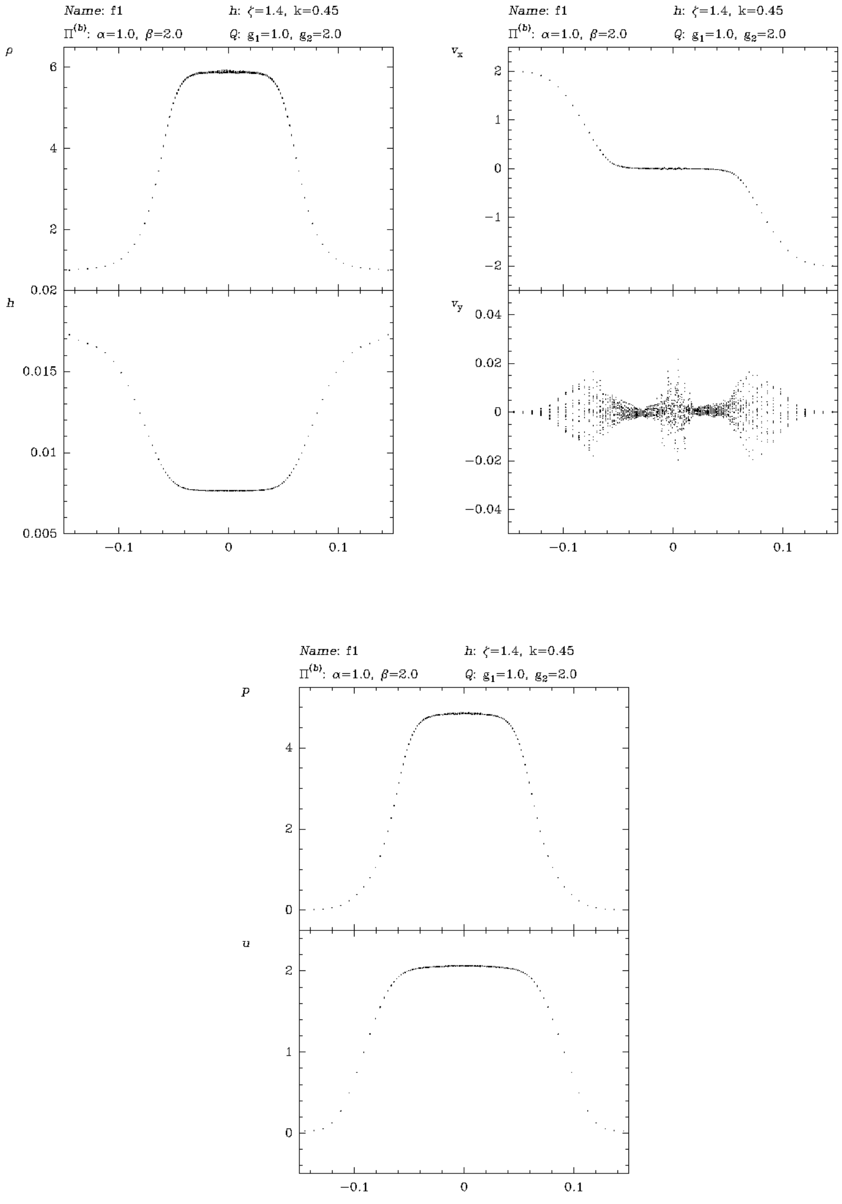

Abbildung 5.1: Der parallele *Schock von Noh*: Momentaufnahmen 1.8538 Zeiteinheiten nach erstem Aufeinandertreffen der Gasmassen. ρ, h, v_x, v_y, p und u sind dimensionslos gewählt. Die x-Achse zeigt Längenskala in x-Richtung. (Siehe Abschnitt (5.3.2).)

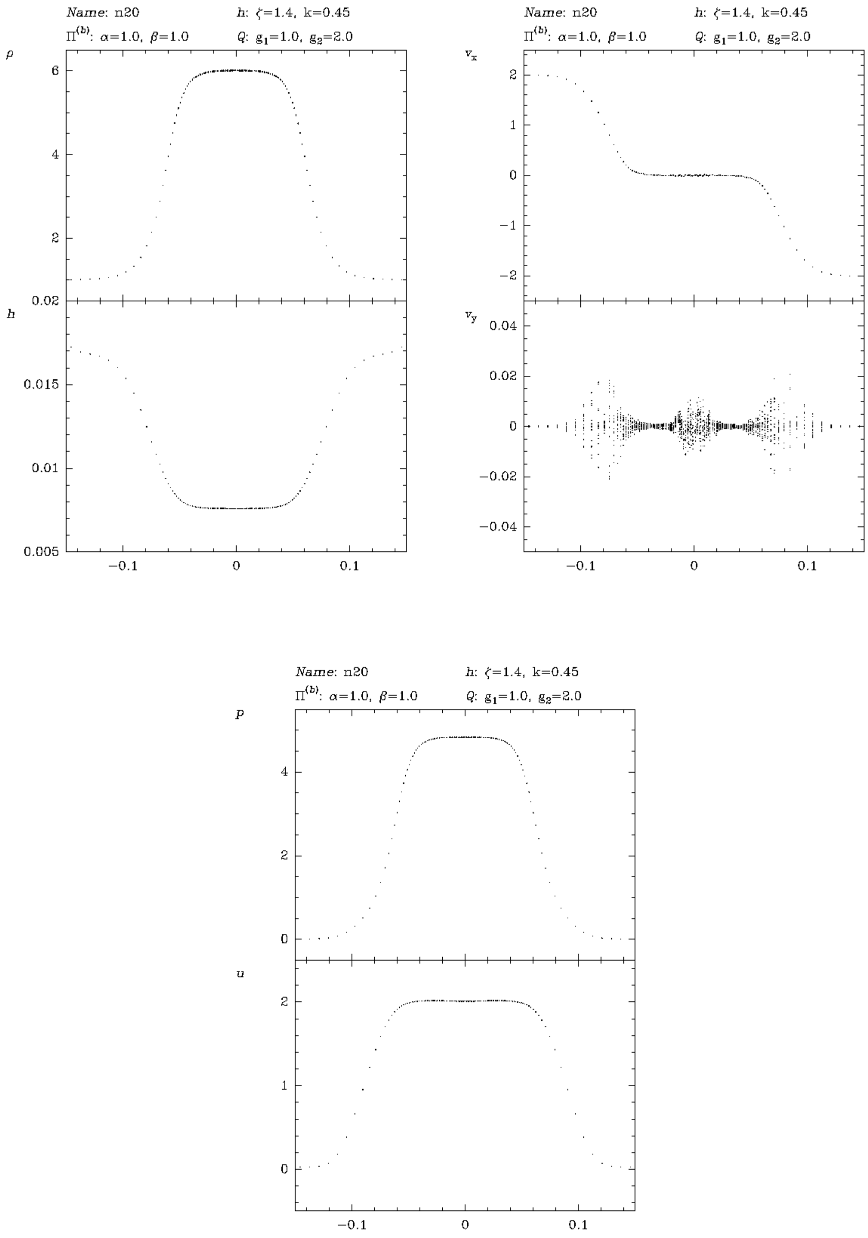

Abbildung 5.2: Zur Erläuterung siehe Abbildung (5.1) und die Abschnitte (5.3.1), (5.3.2).

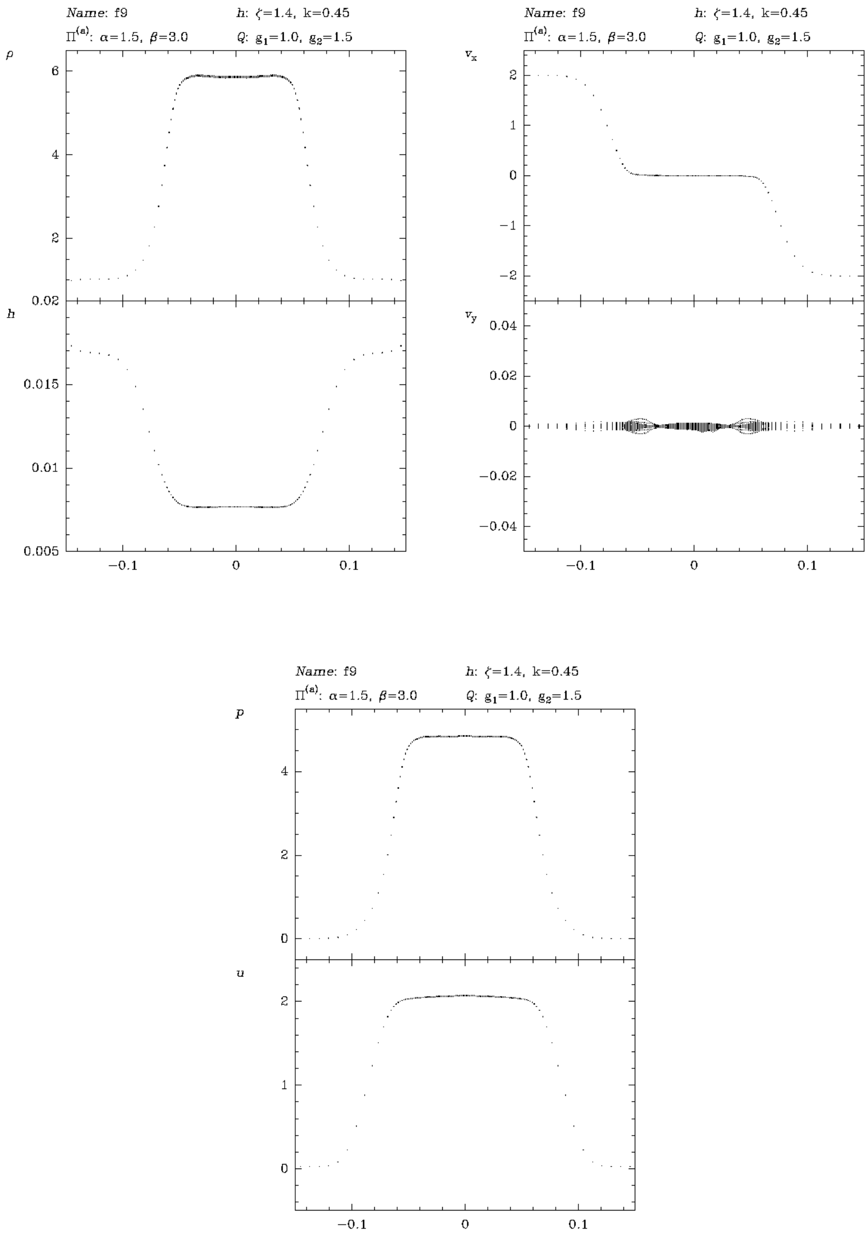

Abbildung 5.3: Zur Erläuterung siehe Abbildung (5.1) und Abschnitt (5.3.3).

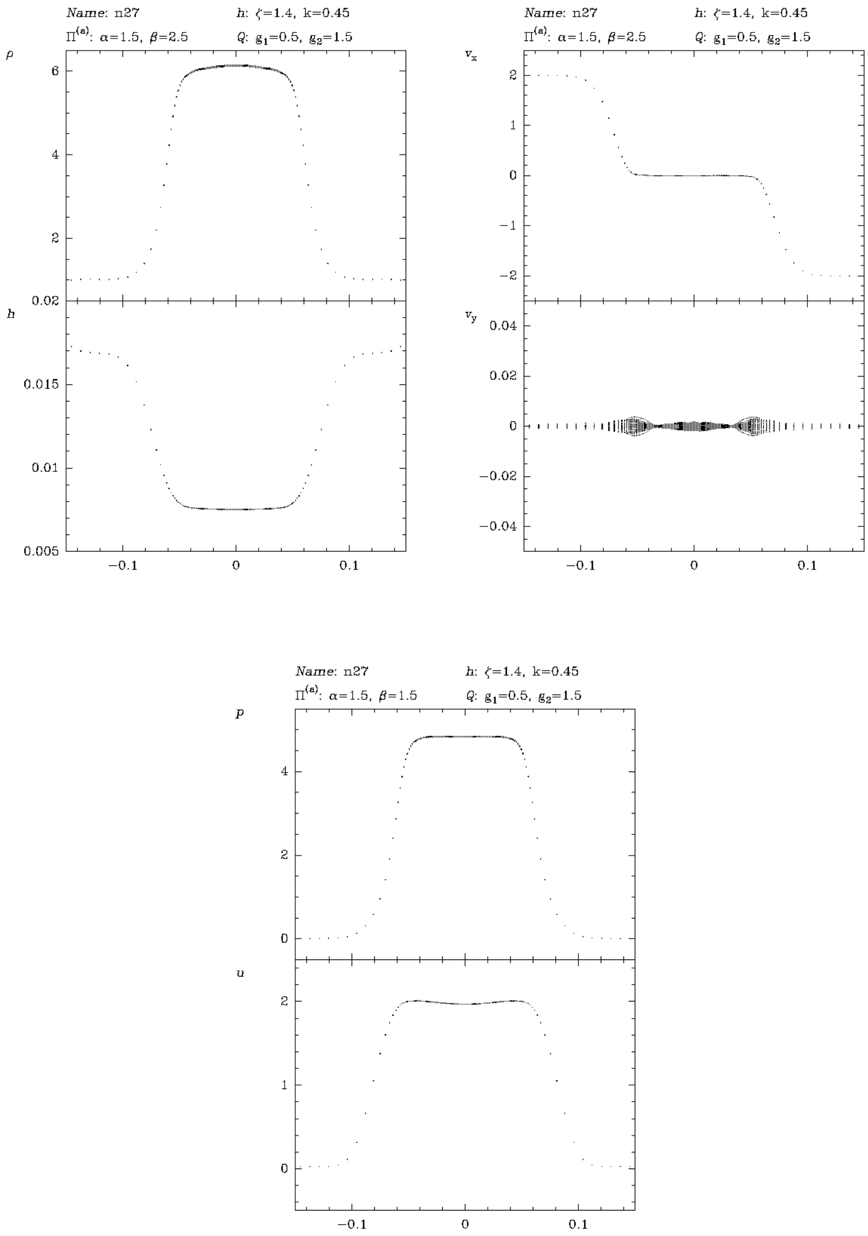

Abbildung 5.4: Zur Erläuterung siehe Abbildung (5.1) und Abschnitt (5.3.3).

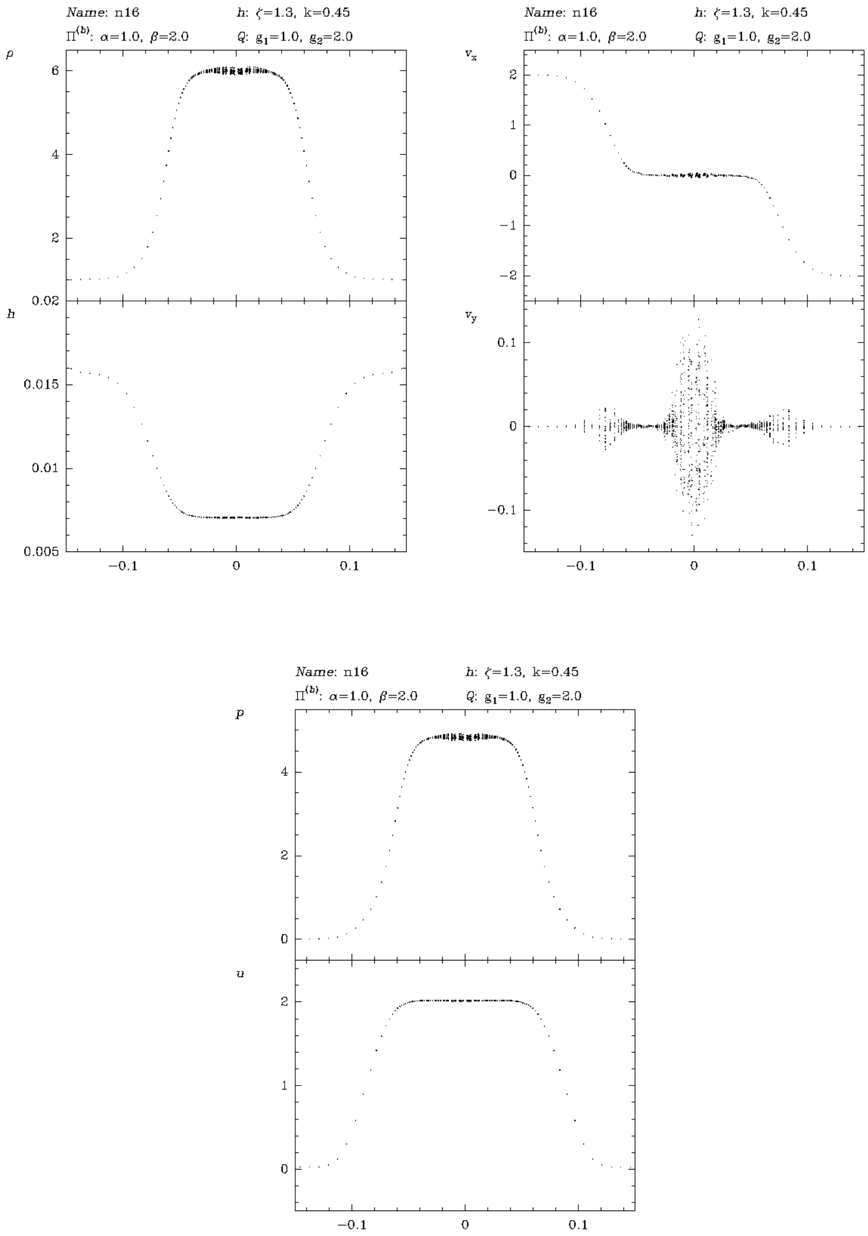

Abbildung 5.5: Zur Erläuterung siehe Abbildung (5.1) und Abschnitt (5.3.1).

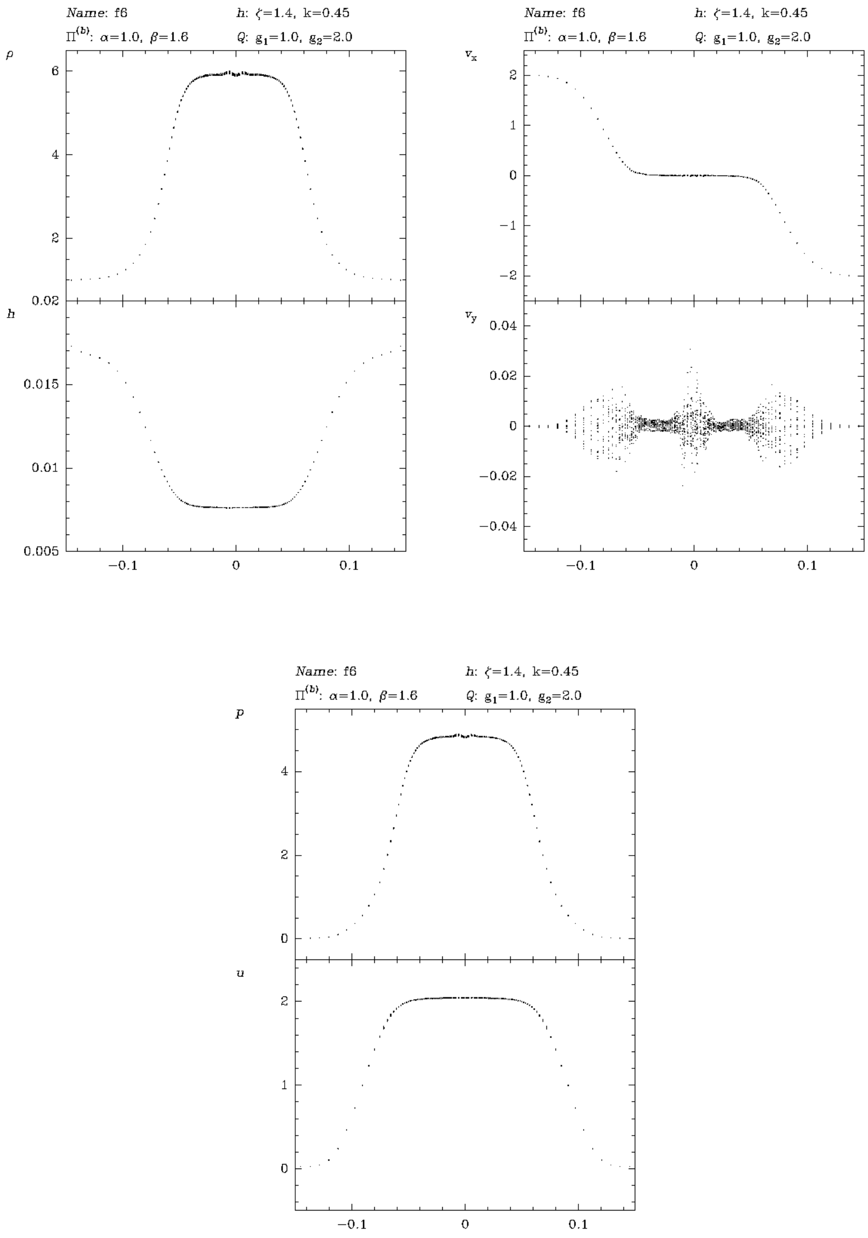

Abbildung 5.6: Zur Erläuterung siehe Abbildung (5.1) und Abschnitt (5.3.2).

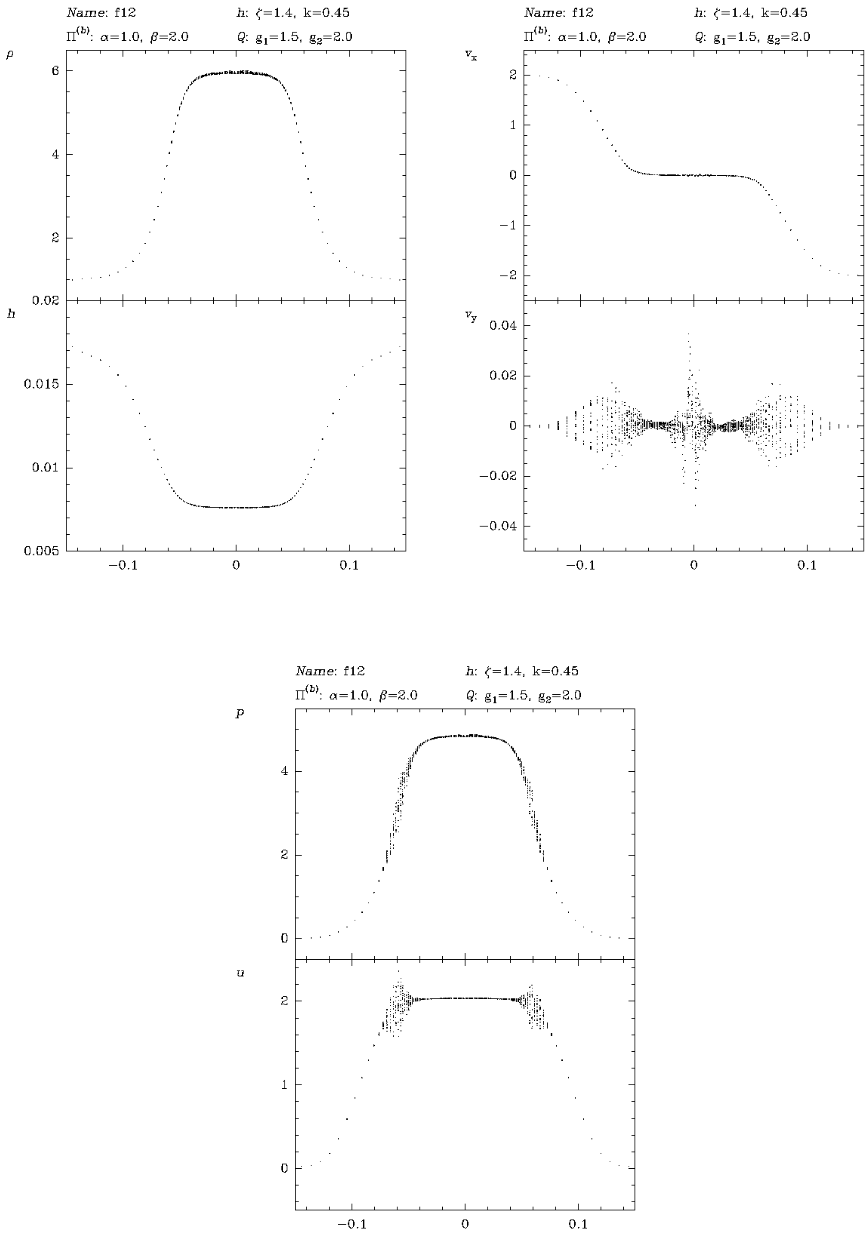

Abbildung 5.7: Zur Erläuterung siehe Abbildung (5.1) und Abschnitt (5.3.2).

6 Modelle zur Simulation

6.1 Die Akkretionsscheibe

Im folgenden soll ein kurzer Überblick über die Grundgleichungen einer optisch dicken, geometrisch dünnen, stationären Akkretionsscheibe im hydrostatischen Gleichgewicht gegeben werden, die für das Modell der Vertikalstruktur einer Akkretionsscheibe in der in Kapitel 7 diskutierten Simulationsrechnung übernommen wurden. Die genauen Rechnungen können z.B. bei Frank et al. (1992) nachgelesen werden.

6.1.1 Erhaltungsgleichungen

Die Struktur der Scheibe wird durch die *Flächendichte*

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) dz \tag{6.1}$$

charakterisiert, wobei z der vertikalen Ortskoordinate entspricht. Die Materie in einem Ring mit den Radien R und $R + \Delta R$ hat dann die Masse $2\pi R \Delta R \Sigma$ und den Drehimpuls $2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega$, wobei die Winkelgeschwindigkeit Ω und die Kreisbahngeschwindigkeit v_Φ am Radius R über die Beziehung $v_\Phi(R) = R\Omega(R)$ zusammenhängen. Im Spezialfall der Rotation ohne Reibung, auf einer Kreisbahn um eine Masse, die ein Zentralkraftfeld hervorruft, ist Ω die Keplerrotation

$$\Omega_K = \left(\frac{GM_*}{R^3}\right)^{1/2} \tag{6.2}$$

mit der Gravitationskonstante G und der Masse M_* des protostellaren Kerns im Scheibenzentrum.

Läßt man in der Scheibe eine radiale Geschwindigkeit v_R zu, so folgt aus der *Masseerhaltung* in einem Ring im Limes $\Delta R \to 0$ die Gleichung

$$R\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) = 0. \tag{6.3}$$

Dabei ist v_R bei einer Akkretion zum Zentralobjekt negativ.

Analog erhält man aus der *Drehimpulserhaltung* die Beziehung

$$R\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G_\nu}{\partial R}. \tag{6.4}$$

Der Faktor G_ν auf der rechten Seite der Gl. (6.4) ist das *viskose Drehmoment*, welches ein äußerer Ring auf einen benachbarten, inneren Ring aufgrund der differentiellen Rotation $\Omega' = \mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}R$ ausübt. Mit einer zunächst noch nicht näher erklärten Viskosität ν (Einheit cm^2/s) kann man schreiben

$$G_\nu(r,t) = 2\pi R \nu \Sigma R^2 \Omega'. \tag{6.5}$$

6.1.2 Stationarität

Mit den zeitabhängigen Gleichungen aus Abschnitt (6.1.1) kann man zeigen, daß sich Veränderungen in der Radialstruktur der Scheibe auf einer Zeitskala von R^2/ν abspielen. Nimmt man an, daß Zeitskalen, mit denen sich äußere Randbedingungen, wie z.B. Masseneinflußrate, merklich ändern, deutlich größer sind als die Zeitskalen der Veränderungen in der Scheibe selbst, so kann die Scheibe als stationär betrachtet werden. Zeitableitungen können dann in den Erhaltungsgleichungen vernachlässigt werden.

Wenn man also in der Gleichung (6.3) wegen der Stationarität $\partial\Sigma/\partial t = 0$ setzt, erhält man nach Integration über dR eine Konstante, die man als Akkretionsrate $\dot{M}$ interpretieren kann, in der Form

$$\dot{M} = 2\pi R\Sigma(-v_R). \tag{6.6}$$

Ebenso bekommt man aus Gleichung (6.4) für die *Drehimpulserhaltung* eine Konstante, die man als Drehimpulsflußrate in den kompakten Protostern im Scheibenzentrum interpretieren kann bzw. als bremsendes Drehmoment, welches der Protostern auf die Scheibe ausübt, wenn man annimmt, daß die Scheibe mit Keplergeschwindigkeit Ω_K rotiert. Die Winkelgeschwindigkeit Ω_* des Sterns muß kleiner sein als die Keplerrotation $\Omega_K(R_*)$ an seiner Oberfläche mit dem Radius R_*, wenn der Stern stabil bleiben soll. Nimmt man weiter an, daß der Übergangsbereich von Ω_K zu Ω_* klein bleibt im Verhältnis zum Sternradius R_*, so erhält man zusammen mit der Masseerhaltung im stationären Fall (Gl. (6.6)) und dem viskosen Drehmoment (Gl. (6.5)) folgenden Ausdruck für das Produkt aus Viskosität und Flächendichte

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]. \tag{6.7}$$

In diese zentrale Gleichung gehen also die Annahmen der Stationarität, Masse- und Drehimpulserhaltung, die Existenz eines viskosen Drehmoments mit der noch unbestimmten Viskosität ν und die Annahme einer mit Kepler-Geschwindigkeit rotierenden Scheibe mit schmalem Übergangsbereich zum Stern ein.

6.1.3 Hydrostatisches Gleichgewicht

Mit den Gleichungen aus den Abschnitten (6.1.1) und (6.1.2) kann man zeigen, daß die Annahme einer *geometrisch dünnen* Scheibe mit *Keplerrotation* in sich konsistent ist, d.h. für die Skalenhöhe H, bei der die Scheibendichte $\rho(z,R)$ auf den e^{-1}-ten Anteil der zentrale Scheibendichte $\rho_c(R) = \rho(z,R)|_{z=0}$ abgefallen ist, gilt $H \ll R$ und für die Rotationsgeschwindigkeit gilt $v_\Phi \approx v_K \equiv R\Omega_K \gg v_R$. Mit der Annahme der geometrisch dünnen Scheibe können die radialen und vertikalen Differentialgleichungen für die Scheibenstruktur weitgehend entkoppelt werden, und man kann die Vertikalstruktur der Scheibe an einem beliebigen Radius behandeln wie die einer eindimensionalen Schichtung.

Hydrostatisches Gleichgewicht wird vorausgesetzt und man betrachtet nun die Druckänderung dp in einer vertikalen Säule, die durch die Masse eines Säulenelements mit der infinitesimalen Höhe dz verursacht wird, also

$$dp = -\rho(z) g_z(z) dz. \tag{6.8}$$

Da die Scheibe selbst als nichtgravitierend vorausgesetzt wurde, gehen externe Kräfte nur vom Protostern im Scheibenzentrum aus. Für $z \ll R$ wird die z-Komponente der Schwerebeschleunigung g_z in der Höhe z dann genähert durch

$$g_z(z) \approx -G \frac{M_*}{R^2} \frac{z}{R}. \tag{6.9}$$

Man kann nun Gl. (6.9) in (6.8) einsetzen und die resultierende Gleichung gleichsetzen mit der differentiellen Form der idealen Gasgleichung

$$dp = \frac{kT}{\mu m_H} d\rho. \tag{6.10}$$

Hier ist μ die mittlere Molekülmassenzahl, m_H die Masse eines H-Atoms, k die Boltzmannkonstante und T die kinetische Temperatur. Wird eine *isotherme Schichtung* ($T =$ const) angenommen, so erhält man nach Integration

$$\rho(z) = \rho_c \cdot \exp - (z/H)^2 \tag{6.11}$$

mit der Skalenhöhe

$$H^2 = \frac{2kT}{\mu m_H} \frac{R^3}{GM_*}. \tag{6.12}$$

Für die Viskosität ν kann man den Ansatz von Shakura und Sunyaev (1973), die sogenannte α-Viskosität, übernehmen,

$$\nu = \alpha c_s H, \tag{6.13}$$

wobei $\alpha < 1$ ist und meist ein Wert in der Größenordnung $\sim 0.01 \ldots 0.1$ angenommen wird. c_s soll die isotherme Schallgeschwindigkeit mit $c_s^2 = P/\rho$ sein. Für Radien $R \gg R_*$ kann man nun mit der Definition der Flächendichte (Gl. (6.1)) und der Erhaltungsgleichung (6.7) die zentrale Dichte ρ_c in Abhängigkeit von R schreiben als

$$\rho_c(R) = \frac{GM_* \dot{M}}{6\alpha R^3} \left(\frac{\mu m_H}{\pi kT}\right)^{3/2}. \tag{6.14}$$

6.1.4 Temperatur in der Scheibe

Eine isotherme Schichtung wurde bereits vorausgesetzt. Nach Butner et al. (1994) kann für einen Abstand vom zentralen Protostern von $R = 40$ AU eine Temperatur von $T \simeq 100$ K angenommen werden. Geht man von einer umgekehrt proportionalen Abhängigkeit der Temperatur zur Wurzel des Scheibenradius, $T \propto R^{-1/2}$, aus (Beckwith et al. 1990), so hat man es bei den in Kapitel 7 betrachteten Radien mit Temperaturen von etwa $T \sim 150$ K zu tun.

6.2 Modell des in die Scheibe einfallenden Klumpens

6.2.1 Klumpige Strukturen in Molekülwolken

Molekülwolken weisen in allen beobachtbaren Größenordnungen Strukturen und Substrukturen auf. Dichteverteilungen, die man aus Linienintensitäten von Rotationsübergängen der Moleküle im interstellaren Medium erhält, lassen eine selbstähnliche, hierarchische Strukturierung zu immer kleiner werdenden Skalen in den Wolken erkennen (z.B. Scalo 1985). Die Massen, insbesondere der masseärmeren, kleineren Klumpen, liegen meist weit unter den Jeans-Massen; sie sind also gravitativ nicht gebunden. Vermutlich werden die massearmen Klumpen durch thermischen und turbulenten Druck des Zwischenklumpenmediums stabilisiert (z.B. Kramer et al. 1998).

Die Selbstähnlichkeit dieser Strukturen läßt sich durch ein Potenzgesetz der Masseverteilung charakterisieren mit

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-\alpha}. \tag{6.15}$$

Das ist die Häufigkeit der Klumpen pro Masseintervall (der Index α hat nichts mit der α-Viskosität aus Gleichung (6.13) zu tun.) Verschiedene Arbeiten (Blitz 1987 & 1993, Lada 1990, Stutzki & Güsten 1990) deuten auf Indizes von $1.1 \leq \alpha < 1.8$ hin, wobei neueste Statistiken einen Spektralindex von $\alpha = 1.65 \pm 0.1$ vermuten lassen, der für Molekülwolken universell zu gelten scheint und der sich über 10 Größenordnungen in der Masse, bis hinunter zu 10^{-4} $M_\odot$ und Klumpenradien von 10^{-3} pc $\approx$ 200 AU, verfolgen läßt (Kramer et al. 1998). Das bedeutet, daß der Hauptanteil der Masse in Molekülwolkenkomplexen in einigen wenigen, großen Klumpen liegt, aber die Häufigkeit der Klumpen rapide mit sinkender Klumpenmasse steigt. Die untere Grenze scheint lediglich durch die begrenzten Auflösungsmöglichkeiten in der Beobachtung gegeben zu sein.

Larsons Massen-Größen-Beziehung, $M \propto R^2$ (Larson 1981), findet sich auch in Gebieten mit H_2-Dichten zwischen 10^4 und 10^7 cm^{-3} (Stutzki & Güsten 1990). Wenn das Volumen der Klumpen proportional zu R^3 ist, sollte die Dichte der Relation $\rho \propto R^{-1}$ gehorchen. Diese Beziehung wurde von Larson für Klumpen mit Größen über 0.1 pc festgestellt.

6.2.2 Geschwindigkeit des einfallenden Klumpens

In einer sphärisch symmetrischen, kollabierenden Wolke verläuft der Kollapsfluß in erster Näherung entlang von Parabelbahnen, die der Bahn von Teilchen entspricht, deren Gesamtenergie gleich Null ist. Die Stromlinien der vorerst als homogen angenommenen Materie verlaufen solange parabelförmig mit Brennpunkt in der Zentralmasse, bis die Materie durch die Scheibe abgebremst wird und es zu einem Akkretionsschock kommt (Cassen & Moosman 1981). Wird die Scheibe nach wie vor als geometrisch dünn angenommen, so wird die Geschwindigkeit der einfallenden Materie kurz vor dem Auftreffen auf die Scheibe in etwa die der Parabelbahnen bei einer Höhe von $z = 0$ entsprechen. Nach Cassen & Moosman (1981) betragen die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten dann in sphärischen Koordinaten

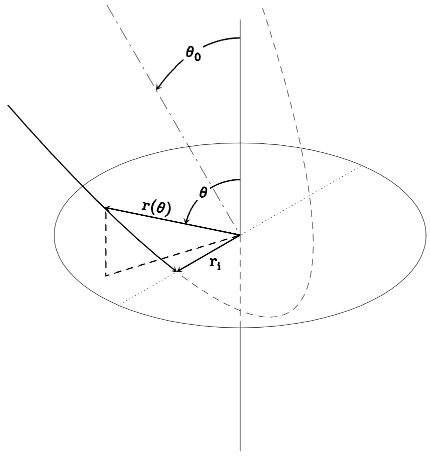

Abbildung 6.1: Trajektorie eines Klumpens der sich der Akkretionsscheibe nähert (nach Cassen & Moosman 1981); θ_0 ist der Winkel zwischen der Hauptachse der Einfallsparabel und der Rotationsachse der Scheibe (die Abbildung wurde Fiebig 1997a entnommen).

$$v_r = -(GM_*/R)^{1/2},$$

$$v_\theta = (GM_*/R)^{1/2} \cos\theta_0,$$

$$v_\phi = (GM_*/R)^{1/2} \sin\theta_0. \tag{6.16}$$

Hier ist θ_0 der Winkel zwischen der Hauptachse der Einfallsparabel und der Rotationsachse der Scheibe und R der Abstand zwischen Scheibenzentrum und Schnittpunkt der Parabelbahn durch die Scheibe (Abbildung (6.1)). Die Scheibe wird hier, wie auch im Abschnitt (6.1), als nichtgravitierend angenommen.

Turbulenzen sind im Umfeld junger Sterne z.B. durch hochenergetische Ausflüsse sehr wahrscheinlich und vermutlich auch verantwortlich für die Entstehung von Klumpen im Kollapsfluß (vgl. Abschnitt (6.2.1)). Es ist zu erwarten, daß sich turbulente Bewegung den idealisierten Einfallsparabeln überlagern wird. Somit werden die Werte aus Gleichung (6.16) nur Richtwerte darstellen.

Dennoch decken sich die aus Gleichung (6.16) ergebenden Positions- und Geschwindigkeitsverteilungen in beeindruckender Weise mit den beobachteten H_2O-Maserquellen in L1287 (Fiebig 1997a), wenn man dort eine geometrisch dünne, nichtgravitierende Scheibe voraussetzt, die senkrecht zur gemessenen Ausflußrichtung (Yang et al. 1991) liegt und die um eine zentrale Masse von 3 $M_\odot$ rotiert (Abbildung (6.2)).

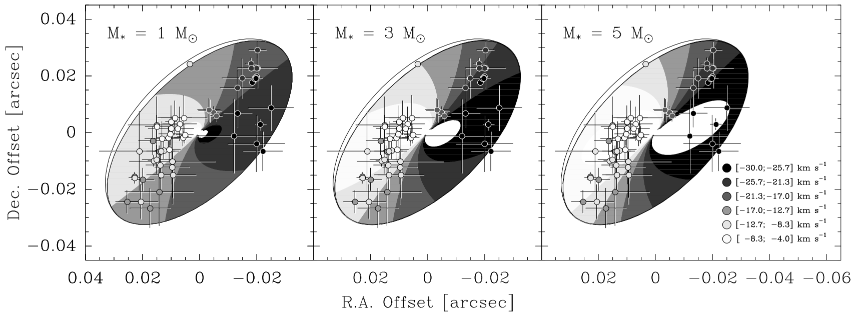

Abbildung 6.2: Geschwindigkeitsverteilung der H_2O-Maserquellen in Lynds 1287 nach Fiebig et al. (1996) (schattierte Meßpunkte). Die farbigen Flächen stellen berechnete *Local Standard of Rest* (LSR-)Geschwindigkeiten für Gasklumpen dar, die auf eine geometrisch dünne Scheibe auftreffen (Fiebig 1997a). Die Rotationsachsen der Scheiben bilden mit der Sichtlinie einen Winkel von 60°. Der angedeutete Rand der Scheibe bei etwa 35 AU hat keine physikalische Bedeutung und wurde nur hinzugefügt, um dem Betrachter einen dreidimensionalen Eindruck zu vermitteln. Die zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung angenommene Zentralmasse M_* wurde jeweils links oben im Kasten angegeben. Die gemessenen Geschwindigkeiten der Maser, sowie die berechnete Verteilung der Auftreffgeschwindigkeiten, wurden in sechs Intervalle aufgeteilt (s. rechts unten im Kasten). Die LSR-Geschwindigkeit des Zentralobjekts beträgt -17 km/s. Die weißen Flächen repräsentieren Gebiete, in denen die LSR-Geschwindigkeit unter -30 km/s oder über -4 km/s liegt (die Abbildung wurde Fiebig 1997a entnommen).

6.2.3 Dichtestruktur der einfallenden Klumpen

Klumpen in den Ausmaßen von ~ 1 AU und weniger, die für die beobachtete Masererzeugung durch Akkretionsschocks in Frage kämen, können mit den heutigen Beobachtungsmethoden nicht direkt beobachtet werden. Schnelle Schwankungen im Linienprofil der Spektren einiger T Tauri Sterne (Mundt & Giampapa 1982) und der Absorptionslinien in YY Orionis Sternen (Krautter et al. 1990) können aber als Einfall klumpiger Materie in Akkretionsscheiben interpretiert werden.

Aus der Beobachtung der Variabilität der Maseremission in L1287 von ~ 1 Monat (Fiebig et al. 1996) und einer typischen Einfallsgeschwindigkeit von $v_\theta \sim 10$ km/s, läßt sich eine Größe der einfallenden Klumpen von ~ 0.2 AU vermuten (Fiebig 1997a). Dabei wird ein Stoß eines Klumpens, der auf einer harten Scheibe auftrifft, angenommen. Mit einer Extrapolation des Larsonschen Massegesetzes auf Skalen von $\lesssim 1$ AU würde dies einer Klumpendichte von $n_{H_2} \simeq 10^9$ cm^{-3} entsprechen.

7 Durchführung der Simulation

7.1 Das Scheibenmodell in der 2D-Simulation

Für das zweidimensionale Modell der Akkretionsscheibe wird ein azimutaler Schnitt durch die Scheibe entlang eines Kreisbogens mit konstantem Abstand R zum Scheibenzentrum gemacht (Abbildung (7.1)). Die Scheibe wird entlang des Kreisbogens $x = \Phi \cdot R$ und in z-Richtung ab einer bestimmten Höhe z_0 modelliert und vom Scheibenzentrum aus betrachtet. Die externe Kraft, die auf jedes Masseelement bzw. SPH-Teilchen wirkt, ist dann nur noch z-abhängig. Damit verändert sich die Dichtestruktur im ungestörten Modell ebenfalls nur in z-Richtung. Die SPH-Teilchen besitzen jeweils die gleiche Masse m, womit die Dichte ρ durch den Abstand der Teilchen bestimmt wird. Im Zweidimensionalen bedeutet das (vgl. Abschnitt (4.5))

$$\Delta x(z) = \Delta z(z) = \sqrt{\frac{m}{\rho(z)}}. \tag{7.1}$$

Es werden feste Randbedingungen bei $z = z_0$ und für $x = x_{min}$ und $x = x_{max}$ angesetzt, wobei eine Beschleunigung für eine gewisse Anzahl von Randteilchen senkrecht zu diesen Rändern unterbunden wird (siehe Abschnitt (5.2.2)). Es wird eine nichtgravitierende Scheibe im hydrostatischen Gleichgewicht angenommen. Es können dann die Gleichungen (6.11), (6.12) und (6.14) in Gleichung (7.1) eingesetzt werden. Als externe Beschleunigung wird Gleichung (6.9) angesetzt. Damit werden bei Abwesenheit äußerer Störungen und abgesehen von numerischen Schwankungen die inneren Druckkräfte direkt durch die externen Kräfte kompensiert. Die Modellscheibe bleibt stationär.

Der zweidimensionale Scheibenausschnitt ruht in einem bewegten Bezugsystem, welches sich mit $v_\phi(R) = v_K$ um das Scheibenzentrum bewegt. Dabei ist der Winkel Φ, der in den hier betrachteten Zeitskalen ($\sim$ 2 Jahre) überstrichen wird, klein genug, daß die azimutale Koordinate x als geradlinig betrachtet werden kann. Die Zentralmasse sei $M_* = 2\ \mathrm{M}_\odot$.

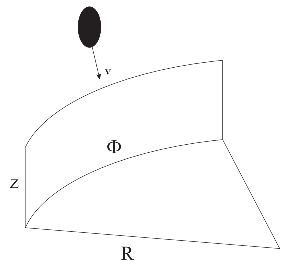

Abbildung 7.1 2-dimensionales Scheibenmodell: Es wird ein Schnitt durch die Vertikalstruktur der Scheibe parallel zur z-Achse und entlang des Azimuts Φ bei konstantem Abstand R vom Scheibenzentrum betrachtet. Ein vom Zentrum aus auf den Schnitt schauender Betrachter rotiert mit der Keplergeschwindigkeit $\Omega_K(R)$ um seine eigene Achse.

7.2 Der Gasklumpen

7.2.1 Geometrie des Klumpenmodells

Da ein an sich dreidimensionales System ohne Symmetrieeigenschaften in zwei Dimensionen modelliert werden soll, stellt das Modell eine starke Vereinfachung der eigentlichen Geometrie dar. Der einfallende Klumpen ist in diesem Modell ein axialsymmetrisches Objekt, dessen Symmetrieachse senkrecht zur Betrachtungsebene steht.

Die Größenordnung der Dichte von $n_{\mathrm{H}_2}^{clump} \sim 10^9$ cm^{-3} aus Abschnitt (6.2.3) wird als Richtwert für die Simulation übernommen, ebenso die Abschätzung des Klumpendurchmessers von $d \lesssim 1$ AU. Für die Dichteverteilung im Klumpen werden Gaußsche und konstante Profile untersucht. Der Klumpen setzt sich aus SPH-Teilchen zusammen, deren Masse konstant und gleich der Masse der SPH-Teilchen in der Scheibe ist. Die Dichte wird wieder durch den Abstand der Teilchen nach Gleichung (7.1) bestimmt. Dabei kann es mitunter zu Auflösungsproblemen kommen, wenn man große Dichtebereiche der Scheibe modellieren möchte. Liegt die maximale Dichte des betrachteten Scheibenausschnitts deutlich über dem zehnfachen der Klumpendichte, so kann, mit einer praktikablen Gesamtteilchenzahl von $\lesssim 10^4$ Teilchen, der Klumpen nicht mehr mit einer angemessenen Mindestteilchenzahl von $\gtrsim 100$ Teilchen aufgelöst werden. Flexibleres Auflösungsvermögen wäre mit individuellen aber zeitlich konstanten Teilchenmassen in SPH zumindest theoretisch möglich. Das Verhalten des SPH-Codes bei unterschiedlichen Massen müßte dazu aber noch genauer untersucht werden.

Der zu wählende Dichte- und z-Bereich der Scheibe ist damit durch das hydrostatische Modell und die gewählte Klumpendichte eingeschränkt. Es können Dichtebereiche, die um etwa drei bis vier Größenordnungen variieren, modelliert werden. Diese werden sich bei einer typischen Klumpendichte von 10^9 cm^{-3} im Bereich von 10^{11} cm$^{-3} \gtrsim n_{\mathrm{H}_2}^{Disk}(z) \gtrsim 10^7$ cm^{-3} bewegen.

7.2.2 Kinematik

Die durchgeführte Parameterstudie umfaßt eine Anzahl verschiedener Einfallsgeschwindigkeiten und -winkel, nach einer Galileotransformation in das sich mit Keplergeschwindigkeit v_K näherungsweise geradlinig bewegende Bezugssystem des Scheibenmodells (vgl. Abschnitte (6.2.2) und (7.1)). Dabei liefern die Gleichungen (6.16) Richtwerte für die Geschwindigkeiten.

Radiale Abhängigkeiten müssen in diesem zweidimensionalen Simulationslauf gänzlich vernachlässigt werden, somit auch die v_r-Komponente aus Gleichung (6.16), obwohl diese immer den höchsten Wert haben wird. Dadurch wird die Einfallsgeschwindigkeit eher unterschätzt werden.

7.3 Allgemeines

7.3.1 Weitere Anfangs- und Randbedingungen

Die Temperatur in der Scheibe und im Klumpen wurde vor dem Stoß als $T = 150\text{K}$ angenommen (s. Abschnitt (6.1.4)). Den Druck erhält man aus der idealen Gasgleichung. Es wurde eine mittlere Molekülmassenzahl von $\mu = 2.33$ (entsprechend der kosmischen Häufigkeiten) angenommen und näherungsweise $\gamma = 7/5$ (für H_2) gesetzt.

Die Glättungslänge wurde wie im Kapitel 5 zuerst mit $h = \zeta(m/\rho)$ initialisiert und im Verlauf der Rechnung nach dem Steinmetz-Müller-Verfahren angepaßt (Abschnitt (4.5)).

Sofern nicht anders vermerkt, wurden für alle Simulationsrechnungen die numerischen Parameter gemäß Abbildung (5.2) übernommen.

Nach Festlegung der Anfangsbedingungen wurden Geschwindigkeits- und Dichtefeld vor der Berechnung des ersten Zeitschrittes geglättet.

7.3.2 Implementierung einer Kühlroutine

Die Auswirkungen des Verlustes an innerer Energie des Gases wurde durch die Implementierung einer Kühlroutine (Fiebig 1998) in den zweidimensionalen SPH-Code überprüft. Die implementierte Routine beinhaltet Strahlungskühlung durch Rotationsübergänge von CO und Rovibrationsübergänge von H_2 nach Hollenbach & McKee (1979) und Kühlung durch Wechselwirkung des Gases mit Staub. Dabei wurde berücksichtigt, daß thermische Energie durch Gas-Staub-Stöße von dem Gas auf die Staubteilchen übertragen wird und daraufhin durch thermische Abstrahlung aus dem Raumgebiet entweicht (z.B. Whitworth & Clarke 1997). Die Gaskühlung wird durch die Wechselwirkung mit dem Staub dominiert, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Modellrechnungen von Els (1998).

8 Ergebnisse

8.1 Struktur des Schocks

8.1.1 Qualitativer Schockverlauf in einer Dimension

Der zu erwartende Ablauf des Einfalls eines Gasklumpens in die Akkretionsscheibe soll vorerst anhand einer qualitativen, eindimensionalen Betrachtung erörtert werden. Der durch den einfallenden Klumpen hervorgerufene Schock sei solange als adiabatisch vorausgesetzt. Dazu betrachte man die Abbildung (8.1). Die Diagramme A - C zeigen dort die Profile der Dichte, Temperatur und des Absolutbetrags der negativen Geschwindigkeit in z zu verschiedenen Zeitpunkten. Die Profile sind nicht maßstabsgerecht und sollen lediglich qualitative Tendenzen deutlich werden lassen.

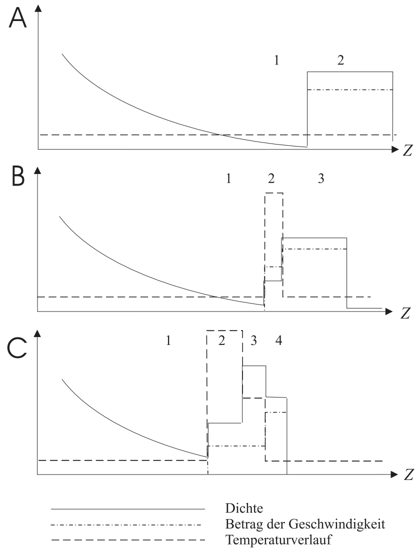

Abbildung 8.1: Qualitativer Verlauf eines Akkretionsschocks, verursacht durch den Einfall klumpiger Materie in die Akkretionsscheibe. Die Diagramme A - C zeigen Dichte, Geschwindigkeits- und Temperaturverlauf zu drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten bis zur Ausbildung eines Reverse-Schocks in der Klumpenmaterie.

In Diagramm A wird der in z gaußförmig abfallende Verlauf der Scheibendichte angedeutet (Bereich 1). Der abrupte Anstieg der Dichte und des Geschwindigkeitsbetrags markiert den Beginn des Klumpenbereichs (2). Das ungestörte Klumpengas kommt von rechts aus einem Bereich mit vernachlässigbar geringer Scheibendichte und bewegt sich mit hoher Machzahl auf das (in der Abbildung nicht dargestellte) Scheibenzentrum bei $z = 0$ zu ($M \sim 10$ für $T = 150$ K und $v \sim 10$ km/s). Die Temperatur ist im gesamten Bereich konstant.

Kommt der Klumpen in Bereiche, in denen die Dichte des ungestörten Scheibengases nicht mehr vernachlässigbar gering ist, wird der Schock, den das Scheibengas durch den einfallenden Klumpen erleidet, spürbar (Abbildung (8.1.B), Bereich 2). Der Klumpen und das geschockte Scheibengas, welches er mit sich reißt, sind zu diesem Zeitpunkt noch nahezu ungebremst. Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit des geschockten Scheibengases verlaufen gemäß der Rankine-Hugoniotschen Sprungbedingung (Abschnitt (3.2)). Der Klumpen schiebt so eine schnell anwachsende Menge an Scheibengas vor sich her, da auch dessen Dichte durch das Gaußprofil der Scheibe mit sinkendem z stetig ansteigt.

Wird der Impuls des geschockten Scheibengases nicht mehr vernachlässigbar, so kann es zum *Reverse*-Schock des Klumpengases kommen, der durch den Bereich 3 in Abbildung (8.1.C) dargestellt wird. Die Temperatur des geschockten Scheibengases (2) ist dann zuerst noch deutlich höher als die des geschockten Klumpengases (3), da die Machzahl an der Schockfront 1 (SF1) zwischen den Bereichen 1 und 2 höher ist als an der neu entstandenen Schockfront 2 (SF2), die die Diskontinuität zwischen den Bereichen 3 und 4 markiert. Man wird ein Temperaturmaximum direkt vor dem Dichtemaximum erwarten.

Zum Reverse-Schock kann es kommen, wenn die Machzahl M_4 des ungestörten Klumpengases im Bezugsystem der Schockfront 2 größer als 1 wird,

$$M_4 = \frac{v_4 - v_{SF2}}{c_4} > 1, \tag{8.1}$$

wobei sich hier die Geschwindigkeiten v auf das Bezugssystem des Betrachters beziehen, mit der Geschwindigkeit des ungestörten Klumpengases v_4, dessen Schallgeschwindigkeit c_4 und der Geschwindigkeit der Schockfront 2 v_{SF2}, die sich aus der Kontinuitätsgleichung (3.10) ergibt:

$$\frac{\rho_4}{\rho_3} = \frac{v_3 - v_{SF2}}{v_4 - v_{SF2}}. \tag{8.2}$$

Solange der Impuls des Scheibengases nicht ausreicht, um es zu einem Reverse-Schock kommen zu lassen, kann sich thermodynamische Information aus dem Schockbereich mit Schallgeschwindigkeit in das ungestörte Klumpenmedium ausbreiten.

Wird die Dichte des ungestörten Scheibengases vergleichbar mit der des ungestörten Klumpengases, werden sich die Zonen 3 und 4 in ihren Eigenschaften angleichen und das Temperaturmaximum wird mit dem Dichtemaximum zusammenfallen. Es ist allerdings fraglich, ob bis zu diesem Zeitpunkt die kinetische Energie noch ausreichend sein wird, um von einem Schock sprechen zu können, oder ob sie nicht schon zum größten Anteil in thermische Energie umgewandelt wurde.

Ist zu diesem Zeitpunkt noch ungestörtes Klumpengas mit genügend kinetischer Energie vorhanden und wächst durch das schnell steigende Gaußprofil die Dichte der ungestörten Scheibe über die ursprüngliche Klumpendichte hinaus, so wird die Dichte des geschockten Scheibengases die des geschockten Klumpengases ebenfalls übersteigen. Die Machzahlen an der Schockfront 1 sinken immer weiter ab und Machzahlen im Klumpen können die in der Scheibe übertreffen. Das Bild wendet sich und das Temperaturmaximum kann hinter das Dichtemaximum fallen und dem Klumpengas zugeordnet werden.

8.1.2 Struktur eines simulierten Schocks

Die Struktur eines adiabatischen Akkretionsschocks, der durch den Einfall klumpiger Materie in Akkretionsscheiben entstehen kann, soll nun anhand eines Simulationsbeispiels erörtert werden.

Der Klumpen möge dabei ein konstantes Dichteprofil von $n_{\mathrm{H}_2} = 8 \cdot 10^8$ cm^{-3} und eine Einfallsgeschwindigkeit von $v = 9$ km/s mit einem Winkel von $\beta = 20°$ ($v_z = -8.5$ km/s, $v_x = 3.1$ km/s) aufweisen. Die Parameter des Einfalls beziehen sich auf das Bezugssystem des bewegten Betrachters, welches in Abschnitt (7.1) bereits definiert wurde. Im Bezugssystem eines außerhalb der Scheibe ruhenden Beobachters würde dies (in Kugelkoordinaten mit Ursprung im Protostern) den Geschwindigkeiten $v_\theta = 8.5$ km/s und $v_\phi = 6.3$ km/s ($\tilde{v} = 10.6$ km/s) entsprechen bei einer Keplergeschwindigkeit von $v_K = 9.4$ km/s, wobei der Einfall bei $R = 20$ AU im Abstand eines zentralen Protosterns von 2 $\mathrm{M}_\odot$ stattfinden soll. Das gaußförmige Dichteprofil der Scheibe wird nach den Gleichungen aus Abschnitt (6.1) modelliert, wobei eine Viskosität von $\alpha = 0.01$ und Masseneinflußrate von $\dot{M} = 10^{-6}$ $\mathrm{M}_\odot$/Jahr angenommen wurde. Die Temperatur der isotherm geschichteten Scheibe und des Klumpens wird als $T = 150$ K vorausgesetzt. Abbildung (8.2)).

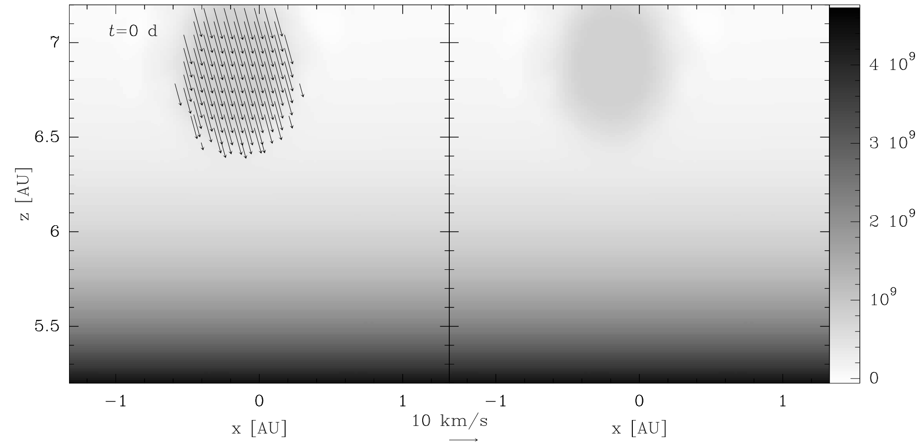

Abbildung 8.2: Anfangsbedingung der Simulation des Einfalls eines Klumpens mit konstanter Dichte; mehr Details dazu im Text. Das Bild ist eine Aufnahme nach Glättung der Anfangsbedingungen. Der Nullpunkt der Länge in x ist willkürlich gewählt. Die Graustufenskala an der rechten Seite gibt die H_2-Anzahldichte n_{H_2} in cm^{-3} an. Geschwindigkeitsvektoren werden hier und in den folgenden Abbildungen nur für Teilchen mit Geschwindigkeiten über 1 km/s dargestellt.

Es wurden 101 Teilchen zur Modellierung des Klumpens und 7547 Teilchen für die Scheibe verwendet.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Klumpen von Scheibenmaterie der Dichte $2 \cdot 10^7 \mathrm{cm}^{-3} \lesssim n_{\mathrm{H}_2} \lesssim 2 \cdot 10^8 \mathrm{cm}^{-3}$ umgeben (vgl. Abbildung (8.2)). Die Dauer eines Zeitschritts in der Simulationsrechnung liegt in der Größenordnung von ~ 5 d.

Nach etwa 4 Monaten wird die Wechselwirkung zwischen Scheiben- und Klumpenmaterie deutlich (Abbildung (8.3)). Das geschockte Scheibengas wird auf über 900 Kelvin erhitzt. Scheibengas wird beschleunigt und Klumpengas leicht abgebremst.

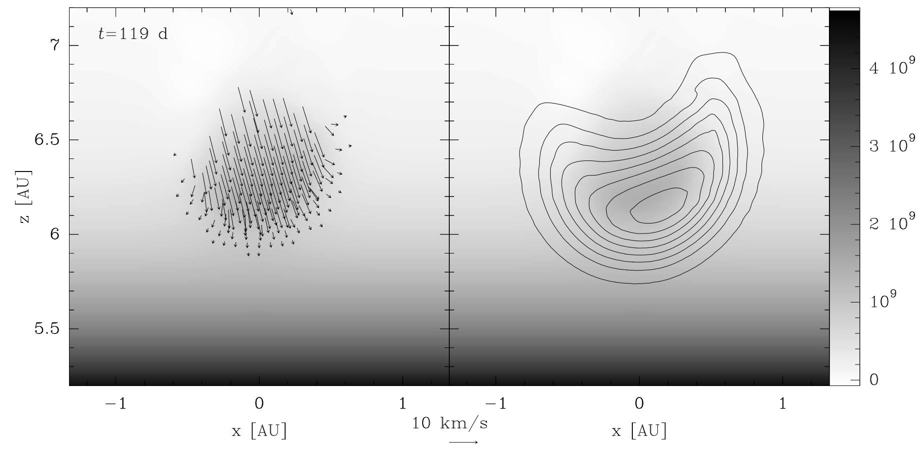

Abbildung 8.3: Der schon deutlich ausgeprägte Akkretionsschock nach etwa 4 Monaten. Links ist wieder die Geschwindigkeitsverteilung der SPH-Teilchen mit $|\mathbf{v}| \geq 1$ km/s zu sehen. Rechts sind Konturlinien in 100 Kelvin-Stufen für $T \geq 200$ K eingezeichnet. Im Maximum herrschen demnach Temperaturen von $T > 900K$. Die Graustufenskala an der rechten Seite gibt die H_2-Anzahldichte n_{H_2} in cm^{-3} an.

Die offensichtliche Glättung der Schockbereiche kann zumindest teilweise auf Glättung durch die SPH-Methode zurückgeführt werden. Die Gättungslänge beträgt im Bereich vor dem Klumpen beim betrachteten Zeitpunkt knapp über 0.1 AU und numerische Glättungen können über den Bereich von $\lesssim 3h$ stattfinden (vgl. Abbildung (5.2). Doch ist die Vorstellung der konstanten Plateaus und geraden Schockfronten wie sie in Abbildung (8.1) dargestellt wurden eine grobe Vereinfachung. Durch die sich ständig ändernde Dichte des ungestörten Scheibengases und durch geometrische Effekte des schrägen zweidimensionalen Stoßes wird es durchaus zu kontinuierlichen Übergängen kommen, die keine methodischen Artefakte sind. Außerdem kann sich, wie schon in Abschnitt (8.1.1) besprochen, vor Ausbildung des Reverse-Schocks Information aus dem Schockbereich in das ungestörte Klumpenmedium ausbreiten. Bei einer Schallgeschwindigkeit von $c \lesssim 2$ km/s kann es sich dabei aber höchstens um einen

Bereich von $\lesssim 0.2$ AU handeln.

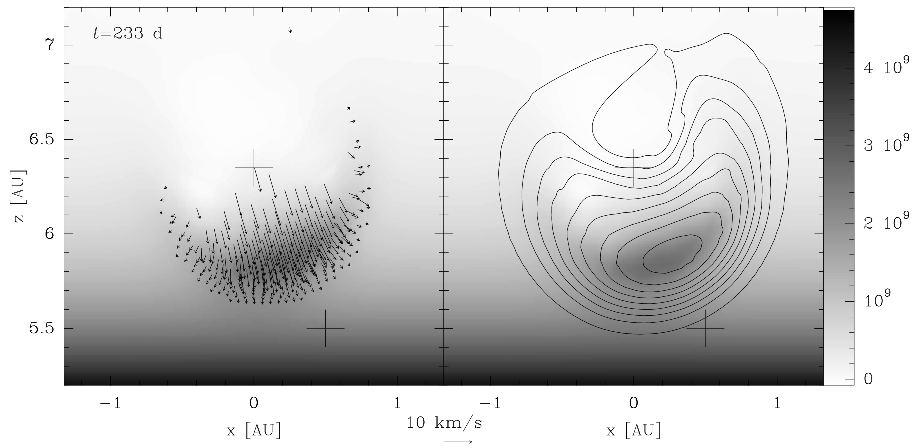

Abbildung 8.4: Klumpen konstanten Dichteprofils, 8 Monate nach den gewählten Anfangsbedingungen. Die Graustufen geben die Gasdichte n_{H_2}, die Konturlinien Temperaturen ($T \geq 200$K) in 100 K-Schritten und Pfeile Geschwindigkeiten über 1 km/s an. Die Kreuze legen die Querschnittslinie fest, entlang der die Diagramme in Abbildung (8.5) verlaufen. Interpolationen im Sog hinter dem Klumpen sind aufgrund dort fehlender Teilchen nicht aussagekräftig.

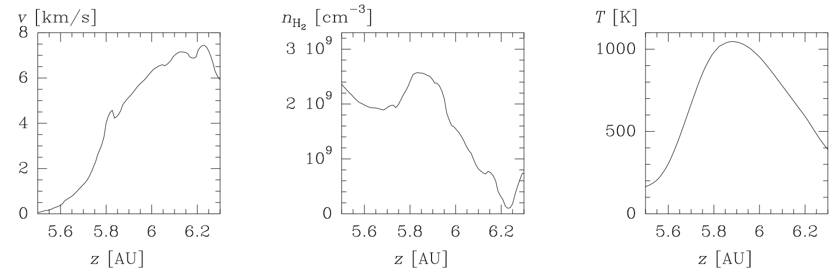

Abbildung 8.5: Querschnitt entlang einer Linie durch die Kreuze in Abbildung (8.4). Die Geschwindigkeiten sind als die auf die Querschnittslinie projizierten Komponenten im Betrag zu verstehen. Die Variationen in den Profilen auf Skalen von weniger als ~ 0.1 AU entstehen durch die nachträglichen Interpolationen zwischen den Teilchen und nicht aufgrund der SPH-Simulation.

Nach knapp 8 Monaten erreicht der Klumpen Bereiche ungestörter Scheibenmaterie, die in der Größenordnungen seiner eigenen ursprünglichen Dichte liegt. Ein Großteil der Klumpenmaterie ist schon stark verdichtet und ebenso stark abgebremst (Abbildung (8.4).

Ob man es hierbei mit einem Reverse-Schock zu tun hat, soll an einem Querschnitt senkrecht zur Schockfront erörtert werden, der entlang einer Linie durch die in Abbildung (8.4) sichtbaren Kreuze gelegt wird. (Abbildung (8.5)).

Aufgezeigt werden dort die auf die Querschnittslinie projizierte Geschwindigkeit, die Gasdichte und die Temperatur. Die wellige Struktur der Querschnitte ist mitunter auf die Interpolationssoftware GreG[1] zurückzuführen, die benutzt wurde, um beliebigen Orten auch zwischen den SPH-Teilchenpositionen physikalische Größen zuzordnen und um eine flächendeckende Darstellung der SPH-Simulationsergebnisse zu erreichen.

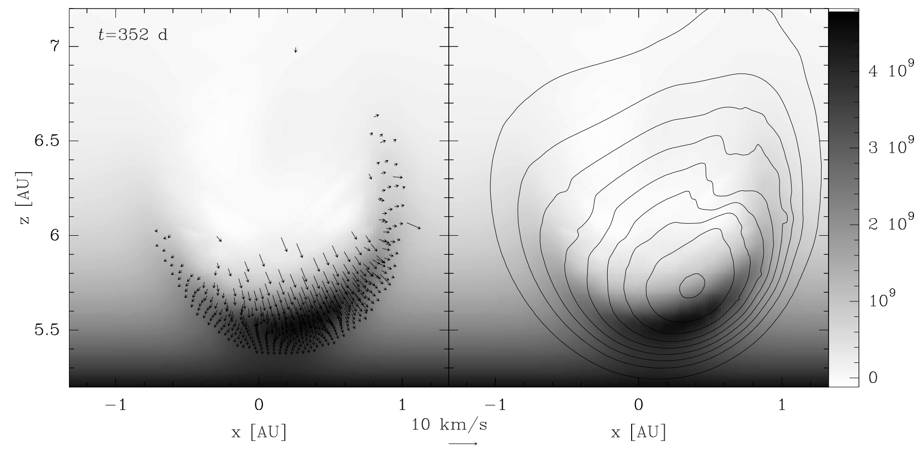

Abbildung 8.6 Klumpen konstanten Dichteprofils, knapp 1 Jahr nach den gewählten Anfangsbedingungen. Die Graustufen geben die Gasdichte n_{H_2}, die Konturlinien Temperaturen ($T \geq 200$K) in 100 K-Schritten und Pfeile Geschwindigkeiten über 1 km/s an. Zu diesem Zeitpunkt sind 65 % der anfänglichen kinetischen Energie in thermische verwandelt worden. Die Gesamtenergie hat sich um 1.7 % erhöht. Am rechten Schockrand treten bei 1 oder 2 Teilchen offensichtlich numerische Artefakte in den Geschwindigkeiten und Temperaturen auf, die sich durch nachträgliche Interpolationen, die für die Darstellung der Konturlinien nötig sind, auf weitere Bereiche des Temperaturverlaufs ausweiten.

Im Dichteverlauf der Abbildung (8.5) läßt sich bei $z = 6.15$ AU ein letzter Rest ungestörten Klumpengases der Dichte $n_{\mathrm{H}_2} = 8 \cdot 10^8$ cm^{-3} vermuten. Da die Temperatur in diesem Bereich schon stark angestiegen ist, ist dies keine konsistente Annahme und nur für einen groben Überschlag legitim. In Analogie zu Abschnitt (8.1.1) soll hier der Bereich 4 aus Abbildung (8.1.C) zu finden sein. Aus Abbildung (8.5) kann man die zugehörige Geschwindigkeit von $v_4 \simeq -7$ km/s ablesen. In der Annahme, daß es sich hierbei um geschocktes Klumpengas handelt, wird zum Vergleich der Bereich 3 bei $z \simeq 5.9$ AU angesetzt,

[1]Grenoble Graphic, 1997, Software der **GILDAS** Arbeitsgruppe

der eine Dichte von $n_{\mathrm{H}_2} = 2.5 \cdot 10^9$ cm^{-3} und eine Geschwindigkeit von etwa -5km/s aufweist. Aus Gleichung (8.2) ergibt sich dann formal die Geschwindigkeit der Schockfront zwischen gestörtem und "ungestörtem" Klumpengas mit $v_{SF2} \simeq -3$ km/s. Mit der Temperatur $T_4 \simeq 700$ K bei $z = 6.15$ AU, läßt sich $c_4 \simeq 2$ km/s abschätzen. Mit diesen Werten würde sich eine Machzahl von $|M_4| \sim 1.5 > 1$ ergeben, die für die in Wirklichkeit wahrscheinlich tieferen Temperaturen T_4 höher wäre. Unter den gegebenen Annahmen ist das Auftreten eines Reverse-Schocks also sehr wahrscheinlich.

Nach einem knappen Jahr ist der Großteil der kinetischen Energie des Klumpens in thermische umgewandelt worden (Abbildung (8.6)). Die Dichte im Klumpen ist auf ein Vielfaches ihrer Anfangsdichte angestiegen. Geschockte Scheiben- und Klumpenmaterie sind kaum noch zu trennen. Das Temperaturmaximum liegt jetzt hinter dem Dichtemaximum, beträgt aber immer noch über 1000 Kelvin.

8.2 Auswirkungen der Kühlfunktion

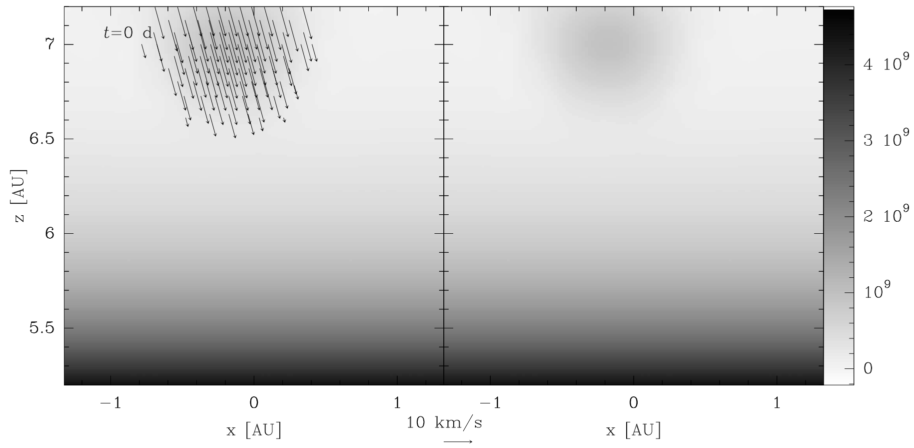

Abbildung 8.7: Anfangsbedingungen für die in diesem Abschnitt besprochenen Simulationen. Die Graustufen geben die Gasdichte n_{H_2}, die Konturlinien Temperaturen ($T \geq 200$K) in 100 K-Schritten und Pfeile Geschwindigkeiten über 1 km/s an. Das Dichteprofil des Klumpens ist in diesem Beispiel gaußförmig.

In Abschnitt (7.3.2) wurde die in den zweidimensionalen SPH-Code implementierte Kühlroutine bereits kurz vorgestellt.

Um die Auswirkungen der Kühlung abschätzen zu können, wurden zwei Läufe mit und ohne Kühlung und ansonsten identischen Anfangs- und Randbedingungen miteinander verglichen. Die Anfangs- und Randbedingungen entsprechen nahezu denen aus Abschnitt (8.1.2), jedoch werden jetzt Klumpen gaußförmigen Dichteprofils betrachtet (Abbildung (8.7)). Die Dichte der Klumpen beträgt $1 \cdot 10^9$ cm^{-3} im zentralen Maximum und fällt zu den Rändern mit einer Halbwertsbreite von 0.5 AU ab. Ebenso wie für die Dichte wurde eine gaußförmige Verteilung für die Absolutgeschwindigkeiten im Klumpen angesetzt.

Die kinetische Anfangsenergie liegt um etwa $\sim 7\%$ unter der des Beispiels aus Abschnitt (8.1.2).

Es wurden 105 Teilchen zur Modellierung des Klumpens und 7545 Teilchen für die Scheibe verwendet.

Die Temperaturen in der Simulation mit Kühlung liegen systematisch unter der ohne Kühlung. Ansonsten sind Geschwindigkeits- und Dichteverläufe der beiden Simulationsläufe kaum zu unterscheiden. Die hier nicht abgebildete Staubtemperatur im gekühlten Lauf entspricht konstant ihrem Anfangswert. Der Staub strahlt also mit maximaler Effektivität ab. Sollte sich die hier verwendete Kühlung als nicht effektiv genug herausstellen, um realistische Verhältnisse zu simulieren, so muß dies am Energieübertrag des Gases an den Staub liegen, der effektiver sein müßte. Entsprechende Modifikationen der Kühlfunktion wurden von Els (1998) untersucht.

Geht man hingegen davon aus, daß die implementierte Kühlroutine eine realistische Effektivität besitzt, so zeigen die hier präsentierten Ergebnisse, daß, zumindest in den betrachteten Zeitskalen, Dichten und Schockgeschwindigkeiten, eine Kühlung des Gases keine nenneswerte Modifikationen mit sich bringt. Ein Vergleich mit den Abbildungen aus Abschnitt (8.1.2) zeigt ebenso, daß unterschiedliche Dichte- und Geschwindigkeitsprofile der Klumpen keine bahnbrechenden Unterschiede in den Ergebnissen hervorrufen. Das Defizit an thermischer Energie in Abbildung (8.10) im Vergleich mit Abbildung (8.6) ist auf die unterschiedlichen kinetischen Energien in den Anfangsbedingungen zurückzuführen.

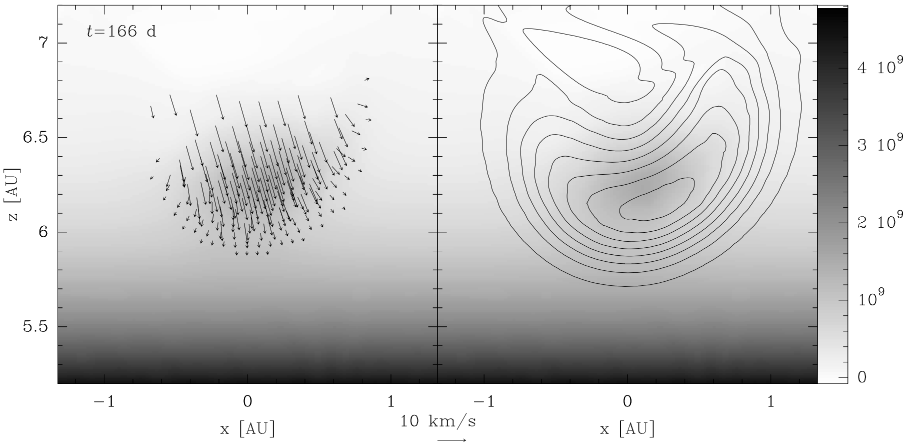

Abbildung 8.8: Lauf ohne Kühlung. Temperatur im Maximum: $T \gtrsim 900$ K.

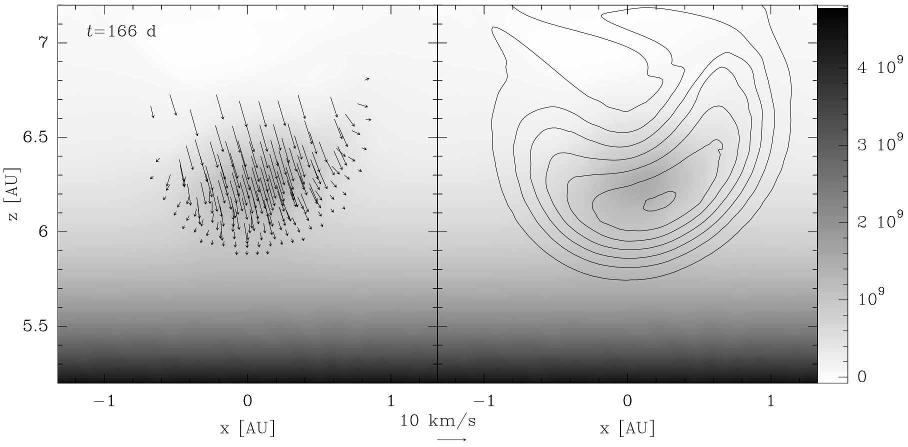

Abbildung 8.9: Lauf mit Kühlung. Die Graustufen geben die Gasdichte n_{H_2}, die Konturlinien Temperaturen ($T \geq 200$K) in 100 K-Schritten und Pfeile Geschwindigkeiten über 1 km/s an. Temperatur im Maximum: $T \sim 800$ K.

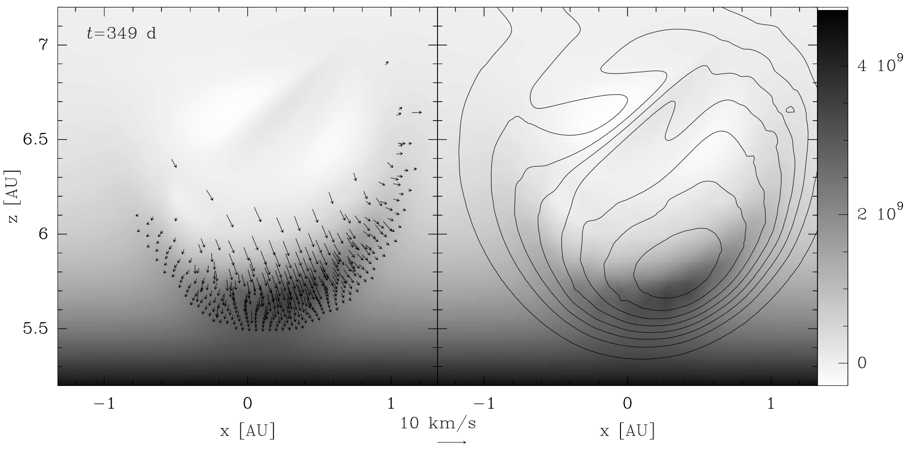

Abbildung 8.10: Lauf ohne Kühlung. Temperatur im Maximum: $T \sim 900$ K.

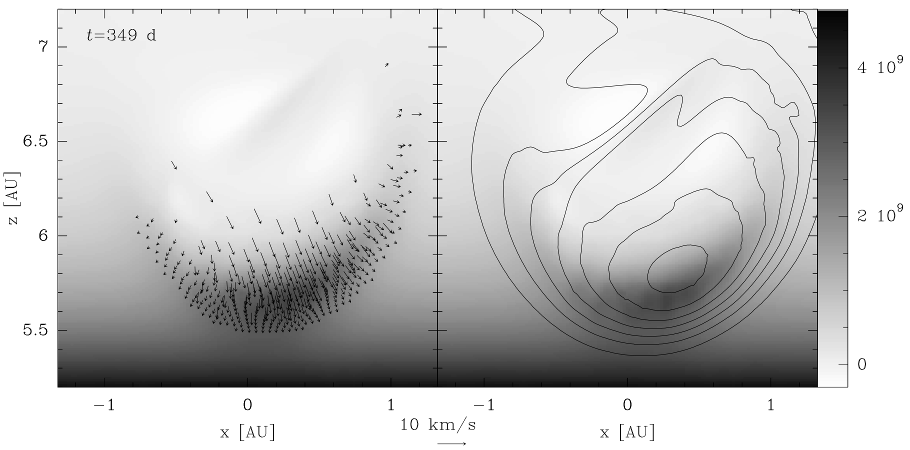

Abbildung 8.11: Lauf mit Kühlung. Die Graustufen geben die Gasdichte n_{H_2}, die Konturlinien Temperaturen ($T \geq 200$K) in 100 K-Schritten und Pfeile Geschwindigkeiten über 1 km/s an.

8.3 Klumpige Akkretionsschocks und H_2O-Maseremission

8.3.1 Die *kohärente Säulendichte*

Hinreichende Bedingungen für die Maseremission erhält man nur über detaillierte Berechnungen der Besetzungszahlen und dem damit verbundenen Strahlungstransport. Derartige Rechnungen, verbunden mit einer hydrodynamischen Simulationsrechnung, werden derzeit angestrebt (Fiebig et al. 1998). Um aber zumindest eine qualitative Aussage über Maseremission in Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern des Einfalls und der Geometrie machen zu können, soll eine speziell mit der SPH-Simulation abgestimmte Größe definiert werden.

Dazu können die in Kapitel 2 erörterten, notwendigen Maserbedingungen übernommen werden. Dort wurden Bedingungen an die Temperatur, Dichte und an den Geschwindigkeitsverlauf des Gases entlang einer vorgegebenen Sichtlinie gestellt.

Die Intensität der Maserstrahlung wächst exponentiell mit der Säulendichte der Moleküle, die die Inversionsbedingung $N_i/g_i - N_j/g_j > 0$ (siehe Abschnitt (2.2.2)) erfüllen (z.B. Elitzur 1992). Durch die Bedingung an die Differenzgeschwindigkeit (Gleichung (2.28)) in Abhängigkeit von der Temperatur zweier potentiell radiativ miteinander wechselwirkender Teilchen, müssen alle Teilchen mit ihren Partnern verglichen werden. Um eine qualitative Aussage machen zu können, muß deswegen für jedes Teilchen entlang der vorgegebenen Sichtlinie über alle Partner summiert werden, die die notwendigen Bedingungen zur Maseremission erfüllen. Die so erhaltene Größe, dividiert durch die für diese Summe betrachtete Fläche, soll *kohärente Säulendichte* genannt werden. Das Maximum entlang einer jeden Sichtlinie bietet sich als qualitatives Maß für die Maserintensität an. Damit können die Ergebnisse der Simulationsrechnungen in Abhängigkeit verschiedener Blickwinkel Θ und Einfallsparameter miteinander verglichen werden.

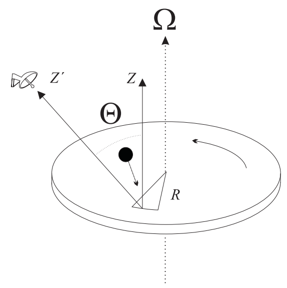

Abbildung 8.12 Skizze zur Beschreibung der Sichtlinie und des Winkels Θ im Verhältnis zu Akkretionsscheibe. Der schwarze Punkt soll den einfallenden Klumpen symbolisieren.

In einer SPH-Simulation kann jedem SPH-Teilchen eine kohärente Säulendichte zugeordnet werden. Dazu wird eine Drehung des (x, z)-Koordinatensystems aus Abschnitt (7.1) durchgeführt, sodaß die z'-Achse des gedrehten

Koordinatensystems parallel zur vorgegebenen Blickrichtung verläuft (vgl. Abbildung (8.12)). Die Sichtlinie soll im folgenden, wenn nicht anders vermerkt, senkrecht zum radialen Vektor R verlaufen. Diese Einschränkung ist durch die Zweidimensionalität des benutzten Modells gegeben. Der Winkel Θ ist dann der Winkel zwischen der Sichtlinie und einer Geraden senkrecht zur Scheibenebene; Sichtlinie und Gerade schneiden sich in der Ebene. Die Geschwindigkeit der Teilchen wird dann auf die so erhaltene z'-Achse projiziert und als v_i bezeichnet. Als x'-Achse soll die Achse senkrecht zur Blickrichtung bezeichnet werden.

Die kohärente Säulendichte Γ_i zu einem SPH-Teilchen i ergibt sich dann, indem man die Zahl der H_2O-Moleküle, $N_j^{H_2O}$, aller SPH-Teilchen j aufsummiert, die in einem Abstand $x_{ij} \equiv |x'_i - x'_j| \leq h_i$ zu finden sind und deren Differenz der projizierten Geschwindigkeiten $v_{ij} \equiv |v_i - v_j|$ innerhalb der gemittelten thermischen Linienbreiten Δv_{ij} liegen, wobei $\Delta v_{ij} \equiv 0.5 \cdot |(\Delta v_{1/2})_i - (\Delta v_{1/2})_j|$ (vgl. Gleichung (2.28)) und die in Kapitel 4 vorgestellte Glättungslänge h_i benutzt wurden. Dabei werden nur SPH-Teilchen i, j berücksichtigt, deren Gastemperatur T_i über 300 K und Dichte $(n_{H_2})_i$ unter 10^{11} cm^{-3} liegen (Gleichungen (2.16) und (2.27)). Diese Summe wird anschließend durch h_i und der Einheitslänge $\hat{y}$ in y geteilt (entsprechend der hier verwendeten zweidimensionalen Simulation). Das heißt also

$$\Gamma_i = \frac{1}{h_i \hat{y}} \sum_j N_j^{H_2O} \text{ mit } \begin{cases} x_{ij} \leq h_i \\ v_{ij} \leq \Delta v_{ij} \\ T_{i,j} > 300\text{K} \\ (n_{H_2})_{i,j} < 10^{11}\text{cm}^{-3} \end{cases} . \tag{8.3}$$

Da die Masse des Gases durch H_2-Moleküle dominiert wird, ergibt sich die Anzahl der H_2-Moleküle, $N_j^{H_2}$, welche ein SPH-Teilchen j umfaßt, aus dessen Masse m_j dividiert durch die Masse m_{H_2} des H_2-Moleküls. Um $N_j^{H_2O}$ zu erhalten wird der Wert relativer Häufigkeiten der Anzahldichten $n_{H_2O}/n_{H_2} \approx 5 \cdot 10^{-6}$ übernommen (Takahashi et al. 1985). Da es sich hier um eine rein qualitative Betrachtung handelt, ist der genaue Wert nicht entscheidend.

Als Beispiel betrachte man Abbildung (8.13). Dort sieht man das oben erläuterte Verfahren zur Bestimmung der kohärenten Säulendichte schrittweise illustriert. Daten wurden dem im Abschnitt (8.2) vorgestellten Simulationslauf ohne Kühlung zum Zeitpunkt $t = 236$ d entnommen. Links oben sind die Positionen der Teilchen, deren Temperaturen über 300 K liegen, nach einer Koordinatentranslation aufgezeichnet. Um den neuen Nullpunkt ($x' = z' = 0$) soll später das Koordinatensystem gedreht werden. Die Gasdichten übersteigen in keinem der Läufe die gesetzte Grenze von $n_{H_2} < 10^{11}$ cm^{-3}. Die linken Diagramme zeigen in der Mitte die Teilchengeschwindigkeiten v_i aufgetragen über x', wobei die Gesamtlänge der angefügten Balken die thermische Linienbreite angibt (Gleichung (2.28)). Das Bild links unten zeigt die kohärente Säulendichte Γ der SPH-Teilchen entlang einer Sichtlinie im Winkel $\Theta = 0°$.

Es wird das Koordinatensystem beispielsweise um den Winkel $\Theta = 45°$ und um die Punkte $x' = z' = 0$ gedreht (Abbildung (8.13), rechts oben). Das mittlere Diagramm rechts zeigt jetzt die auf die neue Sichtlinie projizierten Geschwin-

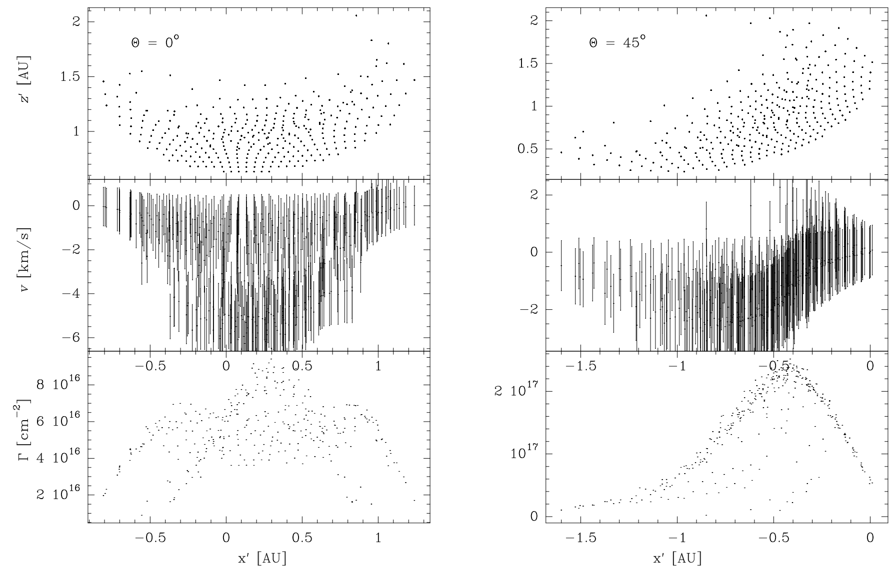

Abbildung 8.13: SPH-Teilchen mit Temperaturen über 300 K zum Zeitpunkt t = 236 d. Anfangsbedingungen entsprechen denen aus Abschnitt (8.2). Es wurde keine Kühlung verwendet. Die obersten Bilder zeigen die Teilchenpositionen nach einer Drehung um den Winkel Θ und um die Punkte $x' = z' = 0$, die willkürlich gewählt wurden. Die mittleren Bilder zeigen die auf die z'-Achse projizierten Geschwindigkeiten v, die der x'-Position zugeordnet wurden. Thermische Linienbreiten wurden als Balken hinzugefügt, deren Gesamtlänge der doppelten vollen Linienbreite entsprechen. Die untersten Bilder zeigen das im Abschnitt (8.3.1) definierte Γ.

digkeitsvektoren mit ihren thermischen Linienbreiten. Direkt darunter können die Γ-Werte der Teilchen abgelesen werden. Der entscheidende Wert ist der maximale Wert Γ_{max} an einer Stelle x'. Für $\Theta = 0°$ beträgt $\Gamma_{max}(0°) \simeq 1 \cdot 10^{17}$ cm^{-2} und für $\Theta = 45°$ liegt $\Gamma_{max}(45°)$ knapp unter $2.5 \cdot 10^{17}$ cm^{-2}. Offensichtlich ist bei diesem Beispiel die Wahrscheinlichkeit, Maseremission beobachten zu können, bei einem Blickwinkel von $\Theta = 45°$ höher als bei $\Theta = 0°$. Das läßt sich natürlicher Weise dadurch erklären, daß bei einer "*face-on*" Beobachtung mit $\Theta = 0$ die Sichtlinie über einen großen Bereich senkrecht zur Schockfront verläuft. Die auf die Sichtlinie projizierten Geschwindigkeitskomponenten spiegeln die deutlichen Unterschiede zwischen den einzelnen Schockphasen wider.

8.3.2 Parameterstudie

Die im letzten Abschnitt definierte maximale kohärente Säulendichte Γ_{max} eignet sich dazu, eine qualitative Aussage über H_2O-Maseremission zu einem bestimmten Zeitschritt eines Simulationslaufes zu treffen. Γ_{max}, als Funktion des

Blickwinkels Θ, läßt sich zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Parameter betrachten. Es soll noch einmal betont werden, daß eine Aussage darüber, unter welchen Bedingungen Maseremission tatsächlich entsteht und intensiv genug sein wird, um sie beobachten zu können, im Rahmen dieser Studie nicht möglich ist. Die gestellten Bedingungen, die in der Größe Γ_{max} zusammengefaßt wurden, sind für einen qualitativen Vergleich dennoch geeignet.

Zeitliche Entwicklung: Wir betrachten wieder das Beispiel aus Abschnitt (8.2) ohne Kühlung. Das Dichteprofil des dort modellierten Klumpens ist gaußförmig, mit einer Dichte von $n_{\mathrm{H}_2} = 10^9$ cm^{-3} im Maximum und einer radialen Halbwertsbreite von 0.5 AU. Der Einfall findet bei einem Scheibenradius von $R = 20$ AU statt. Der Einfallswinkel im Betrachtersystem, welches in Abschnitt (7.1) definiert wurde, beträgt $\beta = 20°$ (das sind $\alpha \simeq 36.5°$ im System eines Beobachters außerhalb der Scheibe). Der Betrag der Einfallsgeschwindigkeit ist in jenem Betrachtersystem $v = 9$ km/s. Die Parameter der einzelnen Rechnungen sind in den Kopfzeilen der Abbildungen (8.14) bis (8.21) wiederzufinden. Die Dichteprofile aller in diesem Abschnitt besprochenen Klumpen sind gaußförmig und die Rechnungen wurden ohne Kühlung durchgeführt, insofern nicht anders vermerkt wurde.

In Abbildung (8.14) wird der Verlauf von Γ_{max} über verschiedene Blickwinkel Θ aufgetragen und das zu verschiedenen Zeiten des Klumpeneinfalls. Das zeitliche Maximum der kohärenten Säulendichte zu gegebenen Winkel wird im gezeigten Verlauf nicht überschritten, obwohl zum Zeitpunkt $t = 583$ d schon etwa 80% der kinetischen Energie in thermische verwandelt wurde und Schockfronten vermutlich nicht mehr auftreten. Das Gas ist noch stark erhitzt ($T \lesssim 900$ K) und die auftretenden Geschwindigkeiten werden allmählich thermisch. Damit verschwinden auch die Geschwindigkeitsgradienten, was Maseremission unterstützt.

Abbildung (8.18) zeigt den zeitlichen Verlauf einer Rechnung, die über das Maximum hinausgeht. In jenem Beispiel (Anfangsbedingungen siehe Kopfzeile in der Abbildung) steigt die kohärente Säulendichte über einen Zeitraum von etwa 2 Jahren auf ihr Maximum an.

Abhängigkeiten vom Blickwinkel: In den Zeiten ihres Maximums ist eine starke Winkelabhängigkeit der kohärenten Säulendichte zu beobachten, die sich für verschiedene Beispiele untersuchter Einfallswinkel ($\beta \geq 0$, d.h. $v_\phi \cdot v_K > 0$) nicht wesentlich unterscheidet (Abbildungen (8.14), (8.15) und (8.16)). Minimum und Maximum liegen mit einem Einfallswinkel von $\beta = 0$ bei $\Theta \approx 0°$ bzw. 90°. Für einen Einfallswinkel von $\beta = 0$ ist $v_\phi = v_K$ und $v_\theta \gg 0$, was nach Cassen & Moosman (1981), vgl. Abschnitt (6.2.2), eher ein unwahrscheinlicher Fall sein dürfte. Die Extrema verschieben sich für $\beta > 0$ zu kleineren Blickwinkeln $\Theta < 90$ bzw. $< 180°$. Für die Beispiele $\beta = 20°, 40°$ liegen die Maxima bei $\Theta \sim 85°$ und 75° (z.B. Abbildung (8.14), Abbildung (8.15)). Die Struktur wird für größere Einfallswinkel $\beta > 20°$ etwas komplexer und es können sich zumindest zeitweise Nebenmaxima ausbilden.

Einfallsgeschwindigkeit: Höhere Absolutgeschwindigkeiten begünstigen einen höheren Wert der kohärenten Säulendichte. Da bei höheren Machzahlen auch höhere Temperaturen auftreten, steigen die thermischen Linienbreiten und die Maserintensität kann über größere Geschwindigkeitsgradienten hinweg verstärkt werden. Die Linienbreite steigt in etwa linear mit der Machzahl in einem Stoß (Gleichungen (3.19) und (2.28)), die Geschwindigkeitsgradienten *senkrecht* zur Schockfront ebenso (Gleichung (3.17)), nicht aber parallel zu ihr. Man könnte bei höheren Einfallsgeschwindigkeiten somit stärkere Winkelabhängigkeiten erwarten, die sich im Vergleich von (8.14) und (8.17) auch bestätigen.

Scheibenradius: Mit steigendem Scheibenradius R wird auch die Skalenhöhe H der Scheibe größer (Gleichung (6.12)). Der Klumpen kann bei großen Scheibenradien somit über einen längeren Zeitraum seine kinetische Energie aufrechterhalten, doch wird er langsam abgebremst (Abbildung (8.20)). Schocks dauern damit länger an, finden aber bei geringeren Scheibendichten statt, was zu niedrigeren kohärenten Säulendichten führt. Bei höheren Scheibendichten hat der Klumpen schon einen Großteil seiner kinetischen Energie verbraucht und kann keine starken Stöße mehr hervorrufen.

Nach Abschnitt (6.1.4) ist $T_{Scheibe} \propto R^{-1/2}$. Für die Schallgeschwindigkeit gilt also $c \propto \sqrt{T} \propto R^{-1/4}$. Wenn man annimmt, daß die Geschwindigkeit im Schock in etwa gleich der Einfallsgeschwindigkeit ist, so gilt $v_{Schock} \approx v_{Einfall} \propto R^{-1/2}$ (Gleichung (6.16)). Für die Machzahl des Schocks als Funktion des Radius erhält man damit $M \propto R^{-1/4}$. Die in Akkretionsschocks auftretenden Machzahlen steigen also mit kleiner werdenden Scheibenradien. Man wird damit, zumindest für den äußeren Scheibenbereich, mit sinkenden Scheibenradien zunehmend verbesserte Bedingungen für Akkretionsschocks vorfinden, die begünstigende Voraussetzungen für H_2O-Maseremissionen schaffen können.

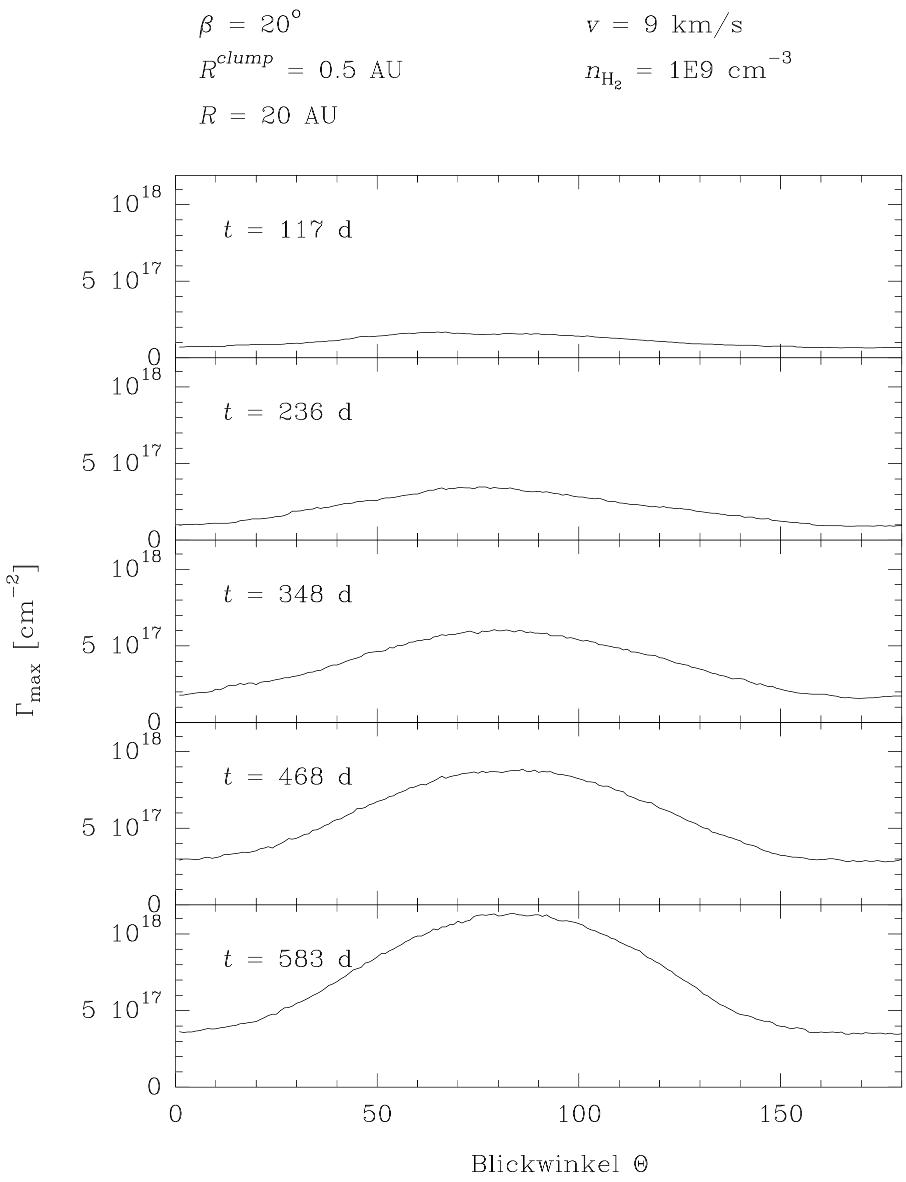

Abbildung 8.14

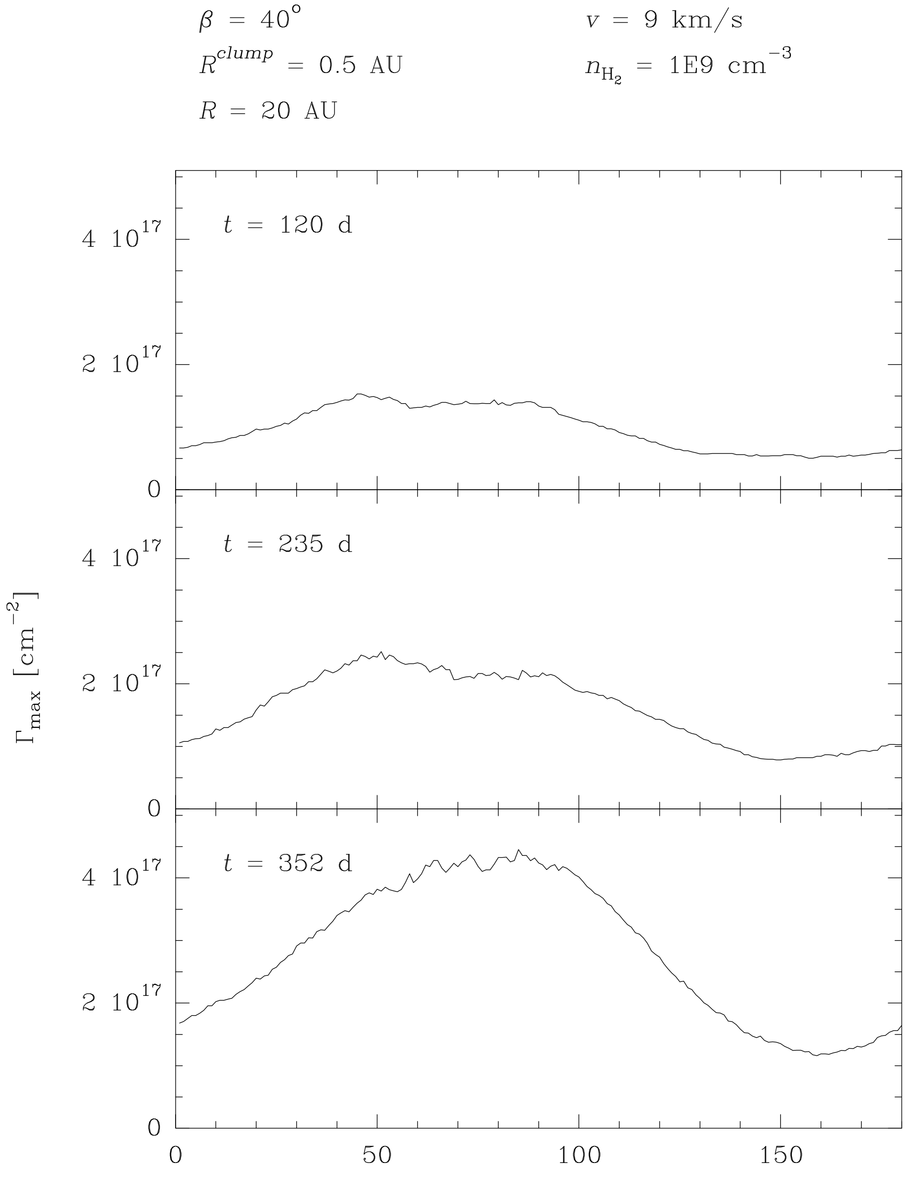

Abbildung 8.15

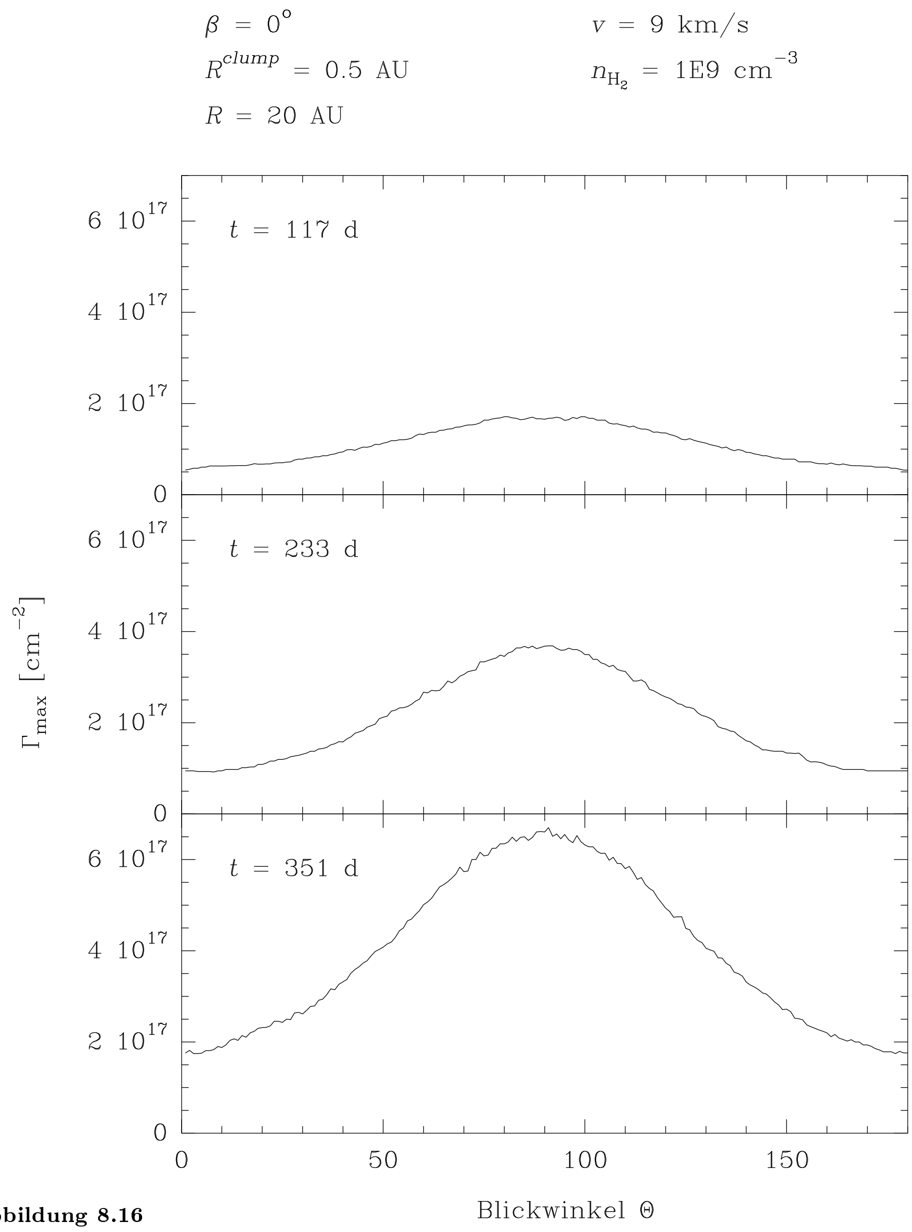

Abbildung 8.16

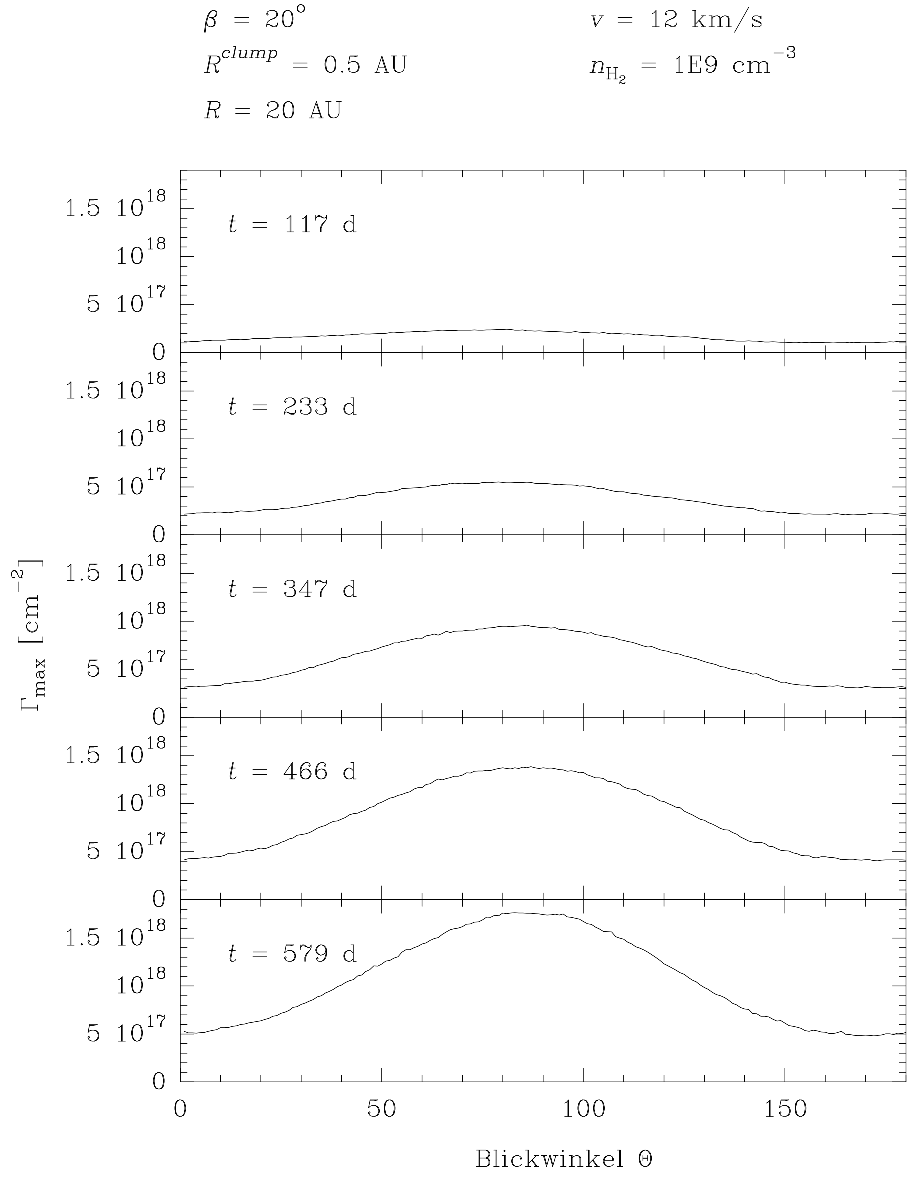

Abbildung 8.17

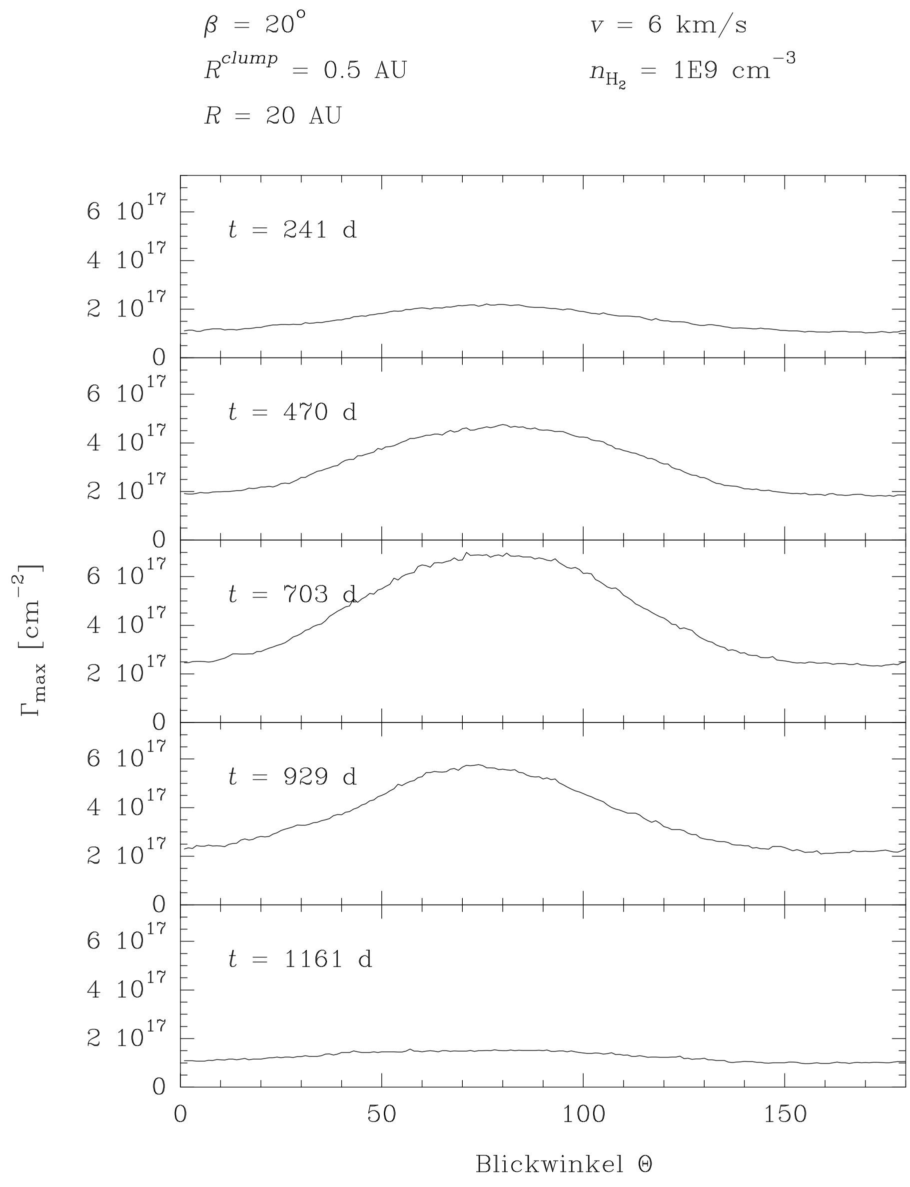

Abbildung 8.18

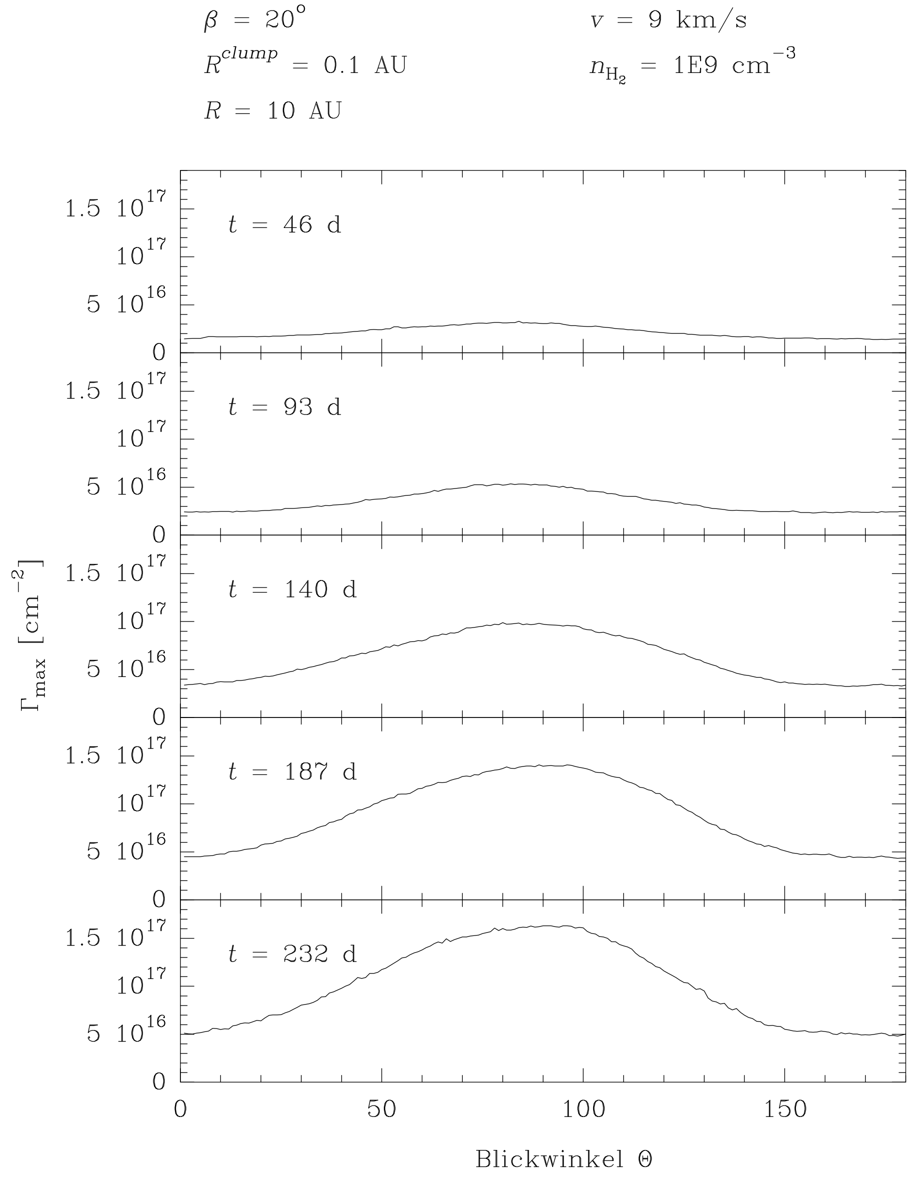

Abbildung 8.19

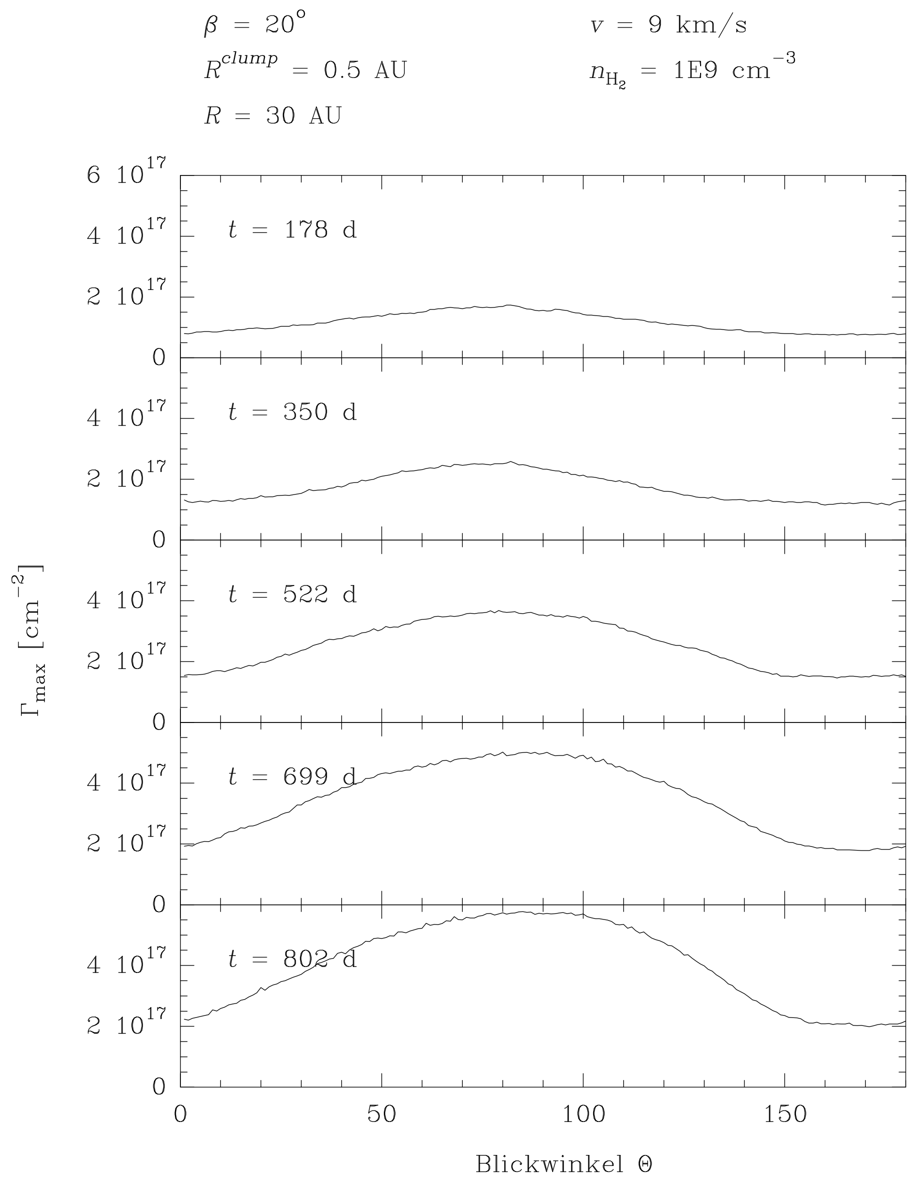

Abbildung 8.20

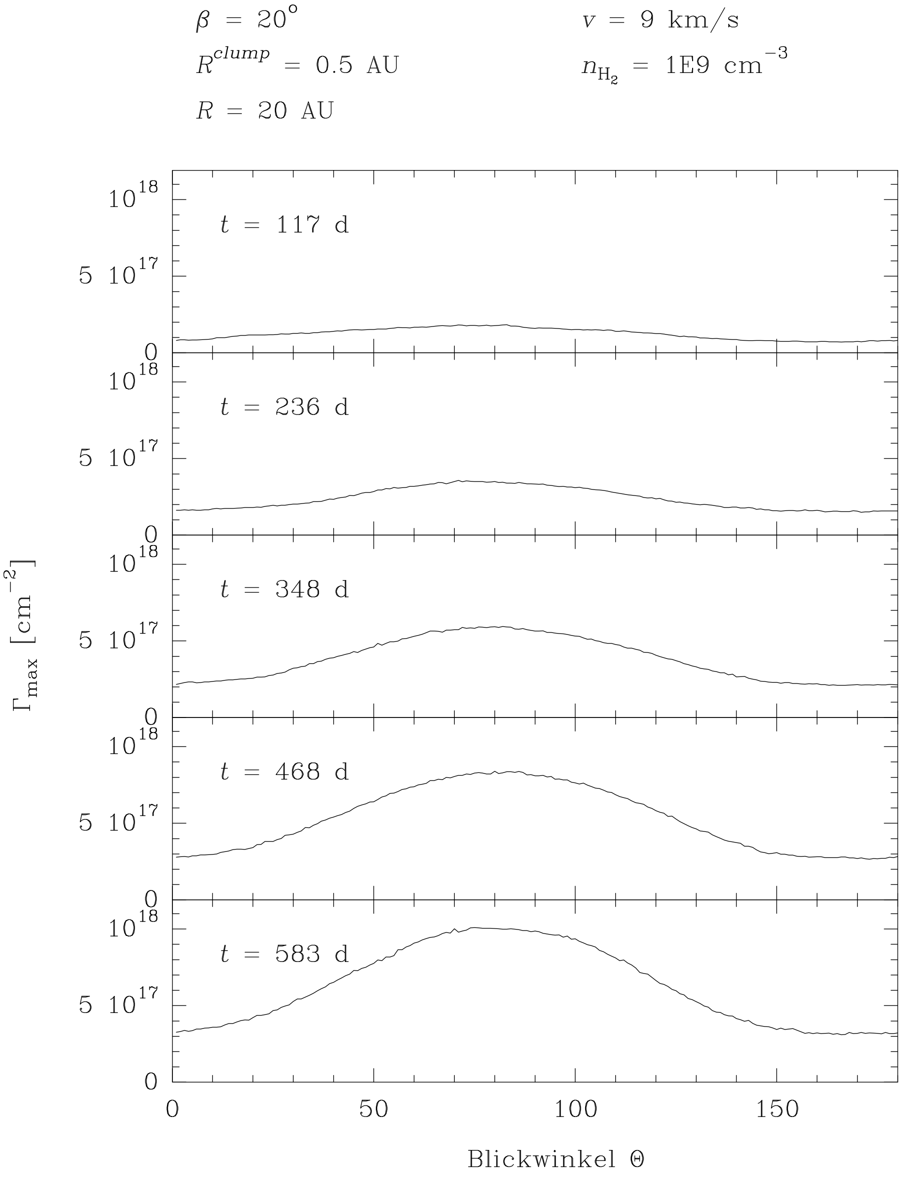

Abbildung 8.21: Lauf mit Kühlung.

A Fortran Subroutine zur Dichteberechnung

```
Subroutine Dichte(xx,yy,mass,den,hh,n)

   implicit none
   integer*4 n, i, j, ncount
   real*4 xx(n), yy(n), mass(n), den(n), hh(n)
   real*4 xt(n), yt(n), masst(n), dent(n), ht(n)
   real*4 w(n), r(n), ry(n), rx(n)
   real*4 xt1, yt1, ht1, masst1, dent1
   real*4 dentt(n)
   integer*4 found

c Speichere Vektorkomponenten für Transposition:

   do i=1,n
     xt(i)=xx(i)          ! xt ist der zu transponierende Vektor zur x-Koordinate xx.
     yt(i)=yy(i)          ! y-Koordinaten.
     ht(i)=hh(i)          ! Die Glättungslänge.
     masst(i)=mass(i)     ! Die Masse.
     den(i)=0.0           ! Die Dichte wird initialisiert.
     dent(i)=den(i)
     r(i)=0.0             ! Der Absolutabstand.
     rx(i)=0.0            ! Der Abstand in x.
     ry(i)=0.0            ! Der Abstand in y.
   enddo

   ncount=0

 1 found=0

c Führe Transpositionen aus und betrachte nur Komponenten mit xx(i) - xxt(j)
c kleiner/gleich 2max(h_i, h_j). Die Teilchen wurden zuvor in x sortiert.

   do i=1,n
   if (abs(rx(i)).le.(2.0*hh(i)).or.abs(rx(i)).le.(2.0*ht(i))) then

      found=found+1

      do j=1,n
        rx(j)=xx(j)-xt(j)
        ry(j)=yy(j)-yt(j)
        r(j)=sqrt(rx(j)**2+ry(j)**2)
      enddo

      call ww(r,hh,ht,n,w)          ! Berechne Kernfunktion Ŵ_ij

c Berechne Dichte nach Gleichung (4.6):
```

```
          do j=1,n
           den(j)=den(j)+masst(j)*w(j)
           if (ncount.gt.0) dent(j)=dent(j)+mass(j)*w(j)
          enddo

          ncount=ncount+1

          xt1=xt(1)                      ! Speichere 1. Komponente bevor
          yt1=yt(1)                      ! Transposition durchgeführt wird.
          ht1=ht(1)
          masst1=masst(1)
          dent1=dent(1)

c Führe Transposition durch:

          do j=1,n-1
           xt(j)=xt(j+1)
           yt(j)=yt(j+1)
           ht(j)=ht(j+1)
           masst(j)=masst(j+1)
           dent(j)=dent(j+1)
          enddo

          xt(n)=xt1                      ! Die n. Komponente wird zur 1.
          yt(n)=yt1
          ht(n)=ht1
          masst(n)=masst1
          dent(n)=dent1

        endif

        if (found.gt.0) goto 1
      enddo

      do i=1,n
          dentt(i)=dent(i)
      enddo

      do i=1,n
          j=i-ncount
          if (j.le.0) j=j+n
          dent(i)=dentt(j)
          den(i)=den(i)+dent(i)
      enddo

      return
      end
```

B Naturkonstanten

Tabelle B.1 (nach Cowley 1995)

Name	Symbol	Wert (cgs)	Einheiten
Gravitationskonstante	G	$6.673 \cdot 10^{-8}$	$\mathrm{cm}^3\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^{10}$	$\mathrm{cm\ s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6.62608 \cdot 10^{-27}$	erg s
Protonenmasse	m_p	$1.672623 \cdot 10^{-24}$	g
Boltzmannkonstante	k	$1.3807 \cdot 10^{-16}$	$\mathrm{erg\ K}^{-1}$
Sonnenmasse	$\mathrm{M}_\odot$	$1.9891 \cdot 10^{33}$	g
Astronomische Einheit	AU	$1.495978 \cdot 10^{13}$	cm
Parsec	pc	$3.084 \cdot 10^{18}$	cm

QUELLENNACHWEISE:

Anderson, D. Jr., 1995, *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York

Beckwith S.V.W., Sargent, A.I., Chini, R.S., Güsten, R., 1990, AJ 99, 924

Benz, W., 1990, *The Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsation, Problems and Prospects*, Hrsg. J.R. Buchler, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London

Blitz, L., 1987, *Physical Processes in Interstellar Clouds*, Hrsg. G.E. Morfill, M. Scholer, Reidel, Dordrecht

Blitz, L., 1993, *Giant Molecular Clouds* in *Protostars And Planets III*, Hrsg. Levy, E.H., Lunine, J.I., The University of Tucson Press, Tucson & London

Butner, H.M., Natta, A., Evans II, N.J., 1994, ApJ 420, 326

Cassen, P., Moosman, A., 1981, Icarus 84, 353

Chandra, S., Kegel, W.H., Varshalovich, D.A., 1984, A&A Suppl. 55, 51

Cheung, A.C., Rank, D.M., Townes, C.H., Thornton, D.D., Welch, W.J., 1969, Nature 221, 626

Cowley, C.R., 1995, *Cosmochemistry*, Cambridge University Press, Cambridge

Downes, D., 1983, *Birth and Infancy of Stars*, Les Houches, Session XLI; Hrsg. Lucas, R., Omont, A., Stora R., North-Holland, Amsterdam

De Jong, T., 1973, A&A 26, 297

Einstein, A., 1917, Physikalische Zeitschrift 18, 121

Elitzur, M., 1992, *Astronomical Masers*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Elitzur, M., Hollenbach, D.J., McKee, C.F., 1989, ApJ 346, 983

Els, S.G., 1998, Diplomarbeit, Universität Heidelberg

Evrard, A.E., 1988, MNRAS 235, 911

Fiebig, D., 1997 (a), A&A 327, 758

Fiebig, D., 1997 (b), *SPH-1D FORTRAN77-Code*, interner Bericht

Fiebig, D., 1998, *Kühlroutine für SPH-Hydro-Codes*, interner Bericht

Fiebig, D., Duschl, W.J., Menten, K.M., Tscharnuter, W.M., 1996, A&A 310, 199

Fiebig, D., Els, S.G., Keller, C.M., 1998, in Vorbereitung

Frank, J. King, A., Raine, D., 1992, *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge

Gingold, R.A., Monaghan, J.J., 1977, MNRAS 181, 375

Gingold, R.A., Monaghan, J.J., 1982, J. Comp. Physics 46, 429

Goldreich, P., Keeley, D.A., 1972, ApJ 174, 517

Goldreich, P., Kwan, J., 1974, ApJ 174, 517

Green, S., Maluendes, S., McLean, A.D., 1993, ApJ Suppl. 85, 181

Haddad, B., Clausset, F., Combes, F., 1991, J. Comp. Physics 97, 107

Hernquist, L., Katz, N., 1989, ApJ Suppl. 70, 419

Hollenbach, D., McKee, C.F., 1979, ApJ Suppl. 41, 555

Kenyon, S.J., 1995, Astroph. Sp. Sci. 223, 3

Knowles, S.H., Mayer, C.H., Cheung, A.C., Rank, D.M., Townes, C.H., 1969, Science 163, 1055

Kramer C., Stutzki, J., Röhrig, R., Corneliussen, U., 1998, A&A 329, 249

Krautter, J., Appenzeller, I., Jankovics, I., 1990, ApJ 241, 416

Larson, R.B., 1981, MNRAS 194, 809

Lada, E., 1990, PhD. thesis, University of Texas at Austin

Litvak, M.M., McWhorter, A.L., Meeks, M.L., Zeiger, H.J., 1966, Phys. Rev. Lett. 17, 821

Lucy, L., 1977, AJ 82, 1013

Masson, C.R., 1995, Astroph. and Sp. Sci., 224, 99

Miyama, S.M., Hayashi, C., Narita, S., 1984, ApJ 279, 621

Monaghan, J.J., 1985, Comput. Phys. Rep. 3, 71

Monaghan, J.J., 1988, *SPH Meets The Shocks of Noh*, unveröffentlicher Report

Monaghan, J.J., Gingold, R.A., 1983, J. Comput. Phys. 52, 374

Monaghan, J.J., Lattanzio, J.C., 1985, Applied Numerical Math., 1, 187

Mundt, R., Giampapa, M.S., 1982, ApJ 256, 156

Neufeld, D.A., Melnick, G.J., 1991, ApJ 368, 215

Noh, W.F., 1987, J. Comp. Phys. 72, 78

Norris, R.P., Byleveld, S.E., Diamond, P.J., Ellingsen, S.P., Ferris, R.H., Gough, R.G., Kesteven, M.J., McCulloch, P.M., Phillips, C.J., Reynolds, J.E., Tzioumis, A.K., Takahashi, Y., Troup E.R., Wellington, K.J., 1998, ApJ, eingereicht

Philipps, C.J., Norris, R.P., Ellingsen, S.P., McCulloch, P.M., 1998, MNRAS, eingereicht

Olson, K., 1993, *SPH_1D MASPAR-Code*, Goddard Space Flight Center

Press, W.H., Brian, P.F., Teukolsky, S. A., Vetterling, W.T., 1986, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge

Richtmyer, R.D., Morton, K.W., 1967, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Wiley, New York

Rothman, L.S., Gamache, R.R., Tipping, R.H., Rinsland, C.P., Smith, M.A.H., Benner, D.C., Devi, V.M., Flaud, J.-M., Camy-Peyret, C., Perrin, A., Goldman, A., Massie, S.T., Brown, L.R., Toth, R.A., 1992, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 48, 469; 1996, update Hitran CD ROM

Scalo, J.M., 1985, *Fragmentation And Hierarchical Structure in The Interstellar Medium* in *Protostars And Planets II*, Hrsg. Black, D.C., Matthews, M.S., The University Press of Arizona, Tucson

Schwendemann, R.H., Laurie, V.W., 1958, *Tables of Line Strength for Rotational Transitions of Asymmetric Rotor Molecules*, Pergamon Press, New York

Shakura, N.I., Sunyaev, R.A., 1973, A&A 24, 429

Shu, F.H., 1992, *The Physics of Astrophysics*, Vol. II, University Science Books, Mill Valley

Shu, F.H., Adams, F.C., Lizano, S. 1987, Ann. Rev. Astr. Astroph. 25, 23

Steinmetz, M., Müller, E., 1993, A&A 268, 391

Stutzki, J., Güsten, R., 1990, ApJ 356, 513

Takahashi, T., Hollenbach, D.J., Silk, J., 1985, ApJ 292, 192

Townes, C.H., 1955, IAU Symp. Nr.4, 92

Townes, C.H., Schawlow, A.L., 1956, *Microwave Spectroscopy*, McGraw-Hill, New York

Torelles, J.M., Gómez, J.F., Rodríguez, L.F., Curiel, S., Anglada, G., Ho, P.T.P., 1998, ApJ, in Druck

Watkins, S.J., Bhattal, A.S., Francis, N., Turner, J.A., Whitworth, A.P., 1996, A&A Suppl. 119, 177

Weaver, H. Williams, D.R.W., Dieter, N.H., Lum, W.T., 1965, Nature 208, 29

Weinreb, S., Meeks, M.L., Carter, J.C., Barrett, A.H., Rogers, A.E.E., 1965, Nature 208, 440

Whitworth, A.P., Clarke, C.J., 1997, MNRAS 291, 578

Yang, J., Umemoto, T., Iwata, T., Fukui, Y., 1991, ApJ 373, 137

Danksagung

Mein Dank geht an Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl für seine freundliche und hilfsbereite Betreuung dieser Arbeit.

Besonders danke ich Herrn Dr. Dirk Fiebig für seine Hilfe, Geduld und seinen mitreißenden Enthusiasmus für dieses vielversprechende Thema, sowie für die Durchsicht des Manuskripts.

Meinen Eltern Werner und Marlis Keller danke ich herzlichst für ihre fortwährende Unterstützung bei meiner Arbeit und meinen Plänen.

Den Mitarbeitern des Instituts für Theoretische Astrophysik der Universität Heidelberg danke ich für die entspannte Arbeitsatmosphäre, besonders Sebastian Els, der die Arbeit zum Vergnügen gemacht hat und Rainer ("das ist der, der den Tieren das Fell über die Ohren zieht") Kürschner für seine Hilfsbereitschaft.

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 31.08.1998