Die numerische Totalenergieerhaltung bei der Simulation des protostellaren Kollapses

Rainer Kürschner

Diplomarbeit
Institut für theoretische Astrophysik
der
Universität Heidelberg

24. Januar 1992

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Historisches

Detaillierte Aussagen über die Entstehung von Sternen wurden erst in den letzten zwei Jahrzehnten möglich. Wesentlicher Grund dafür war die Entwicklung leistungsfähiger Computer, die die numerische Lösung des den protostellaren Kollaps beschreibenden Differentialgleichungssystems ermöglichen. Larson gelang 1969 erstmals die Rechnung eines sphärisch symmetrischen Kollapses einer Molekülwolke. Weitere Versuche anderer Astrophysiker folgten. Diese zeigten, daß die für die Lösung herkömmlicher hydrodynamischer Probleme geeigneten numerischen Verfahren meist versagten. Der sehr starke Akkretionsstoß macht die Verwendung einer zusätzlich zur intrinsischen Viskosität wirkenden künstlichen Viskosität notwendig. Die damals bekannten Ansätze (vor allem der von v.Neumann und Richtmyer) erwiesen sich als unzureichend. Die stark variierenden räumlichen Skalen ließen weder die in der numerischen Strömungsmechanik üblichen Eulerschen (ortsfesten) Koordinaten noch die mit der Strömung mitbewegten Lagrangeschen Koordinaten als optimal erscheinen. Die erste große Verbesserung brachte die Arbeit von K.H.Winkler (Win[76]). Er verwendete ein adaptives Gitter, das sich selbsttätig den während der Rechnung entstehenden Strukturen anpaßt. Die unzureichende künstliche Viskosität zwang ihn allerdings den Akkretionsstoß mittels Sprungbedingungen zu behandeln. Aufgrund der bei realistischen Materialfunktionen nichttrivialen Thermodynamik erwies sich dies ebenfalls als sehr schwierig. Die nächste grundlegende Verbesserung betraf die Verwendung einer Tensorformulierung für die künstliche Viskosität durch Tscharnuter und Winkler (TsW[79]). Diese vermied die Anregung von Störungen an der Stoßfront, die in der v.Neumann-Richtmyerschen Form den Zeitschritt auf Werte zwangen, die wesentlich unter den physikalischen Zeitskalen des Problems lagen. Parallel dazu entwickelten Stahler, Shu und Taam 1980 (SST[80]) ein stationäres Modell der protostellaren Akkretion. Dieses beruhte auf der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, und vermied damit die Probleme der Verfahren für partielle Differentialgleichungen. Eine genaue Analyse der Stabilität der gefundenen stationären Lösungen unterblieb allerdings, die Existenz einer stationären Lösung unter den gemachten Annahmen wurde als selbstkonsistente Bestätigung der Annahmen betrachtet. Die von Stahler, Shu und Taam erhaltenen Ergebnisse deckten sich mit denen von Winkler und Newman (WiN[80a,b]), die diese in der damals genauesten numerischen Simulation erhalten hatten. So galt das Problem des sphärisch symmetrischen protostellaren Kollapses für die nächsten Jahre als weitgehend gelöst und man konzentrierte sich auf mehrdimensionale Rechnungen.

Diese Vorstellung erwies sich allerdings Mitte der 80er Jahre als nicht mehr zutreffend. Neue Rechnungen stellten das bis dahin nicht angezweifelte klassische Bild der Sternentstehung in Frage. Diese Rechnungen zeigten zerstörerische Instabilitäten protostellarer Kerne. Die erste Rechnung dieser Art war eine zweidimensionale Simulation des Sonnennebels durch Morfill, Tscharnuter und Völk 1985 (MTV[85]). Dabei explodierte der neugebildete innere Kern derart, daß die Zentraldichte um etwa 20 Zehnerpotenzen abnahm. Diese Instabilität konnte in eindimensionalen Modellen verifiziert werden. Wesentliche Verbesserung der hierbei angewandten Verfahren war die Neuformulierung der Gittergleichung durch Dorfi und Drury im Jahr 1987 (DoD[87]). Mit demselben numerischen Verfahren fand Balluch 1988 kleinere Stoßfrontinstabilitäten in späten Akkretionsphasen (Bal[88]). 1989 konnte Boss die Instabilitäten des inneren Kerns mit einer anderen numerischen Methode in einer und drei Dimensionen verifizieren (BoT[89], Bos[89]). Balluch fand 1989 (Bal[89]) in einer semianalytischen Stabilitätsuntersuchung protostellarer Akkretion zwei Typen von Instabilitäten: eine Stoßfrontinstabilität durch kritisches Kühlen und eine Vibrationsinstabilität durch einen Kappamechanismus, die auch in dem äusseren Kern wirken sollte. Tatsächlich zeigte eine sorgfältig durchgeführte numerische Simulation diese Instabilität, die, vergleichbar der des inneren Kerns, zu Zentraldichten führen kann, die in der Größenordnung der Anfangdichte der Wolke liegen. Obwohl Instabilitäten von der semianalytischen Betrachtung vorhergesagt werden, sagt diese doch nichts über die Stärke der Explosionen aus, da sie nur eine lineare Analyse beinhaltet, diese Vorgänge aber höchst nichtlinear sind. Deshalb werden die Kernexplosionen auch stark angezweifelt. Ein Argument, daß sie numerische Artefakte sind, ist die numerische Nichterhaltung der Totalenergie (siehe Tsc[89]). Ziel dieser Arbeit ist es die Frage der Erhaltung der Totalenergie in dem Code, der diese Explosionen produziert, zu untersuchen und Möglichkeiten der Verbesserung aufzuzeigen.

1.2 Das klassische Bild der Sternentstehung

Ausgangspunkt des klassischen Bildes ist ein Jeans-instabiles sphärisch symmetrische Molekülwolkenfragment. Da das Fragment anfangs optisch dünn ist, kann die während des Kollapses entstehende Kompressionswärme ungehindert abgestrahlt werden, der Kollaps verläuft isotherm. Weiterhin verläuft der Kollaps stark nichthomolog. Die Dichte in der Zentralregion bleibt räumlich etwa konstant, sie geht zum Außenrand in einen r^{-2} Verlauf über. Erreicht die Zentraldichte etwa $10^{-13}\mathrm{g\,cm^{-3}}$, wird das Zentrum der Wolke optisch dick, der Kollaps verläuft dann adiabatisch. Es bildet sich ein erster Kern aus molekularem Wasserstoff, darüber steilt sich die nach innen gelaufene Kompressionswelle zu einem Stoß auf. Dieser Kern erreicht eine Dichte von etwa $10^{-8}\mathrm{g\,cm^{-3}}$ und eine Temperatur von etwa 2000 K. Bei dieser Temperatur beginnt der Wasserstoff zu dissoziieren, der massengemittelte 1. Adiabatenexponent Γ_1 fällt unter den kritischen Wert von $\frac{4}{3}$ für dynamische Stabilität, und eine instabile Entwicklung auf der Freifallzeitskala setzt ein, die zum Kollaps des Kerns führt. Wieder läuft eine Kompressionswelle nach innen, die sich über einem neuen Kern zum Stoß aufsteilt. Dieser innere Kern hat anfangs eine Zentraldichte von etwa $10^{-2}\mathrm{g\,cm^{-3}}$, er wird im wesentlichen von ionisiertem Wasserstoff gebildet. Die nach außen laufende Verdünnungswelle erreicht den Stoß, der den ersten Kern umgibt und löst ihn auf. Der Protostern tritt nun in die sogenannte Hauptakkretionsphase ein. Er besteht nun aus einer fast frei fallenden Hülle über dem akkretierenden Kern, getrennt durch den Akkretionsstoß. Der Kern akkretiert die Hülle bis ein einsetzender Sternwind die Einwärtsbewegung der Hülle umkehrt oder die gesamte Hülle akkretiert ist. Bei massereichen Sternen kommt es schon während der Hauptakkretionsphase zum Zünden des Wasserstoffbrennens im Kern.

In dem durch die neueren Rechnungen nahegelegten Bild zeigen sich schon in der Phase des ersten äußeren Kern Instabilitäten, die zu dessen mehrfacher Zerstörung und Neubildung führen. Die Auswärtsbewegungen betreffen allerdings nur wenige Prozent der Gesamtmasse, der Großteil der Hülle kollabiert weiter. Durch die Verzögerung der Kernbildung startet der Kollaps, der schließlich zu einem stabilen inneren Kern führt, von einer wesentlich höheren Dichte, was zur Folge hat, daß die Hauptakkretionsphase deutlich kürzer ist. Dies führt zu einer um den Faktor der Verkürzung reduzierten Wahrscheinlichkeit einen Protostern in der Hauptakkretionsphase zu beobachten und könnte damit erklären, warum noch kein solcher gefunden wurde.

Kapitel 2

Das Gleichungssystem

2.1 Grundannahmen

Betrachtet werden soll der protostellare Kollaps in sphärischer Symmetrie. Alle Variable sind dann nur noch vom Betrag des Radiusvektors und der Zeit abhängig. Diese Annahme mag zwar nicht sehr realistisch sein, da in der Realität wahrscheinlich immer der Drehimpuls eine entscheidende Rolle spielt. Allerdings ist das Verständnis des sphärisch symmetrischen Falles eine notwendige Voraussetzung für das Verständnis des mehrdimensionalen Kollapses. Außerdem kann wegen des deutlich geringeren Rechenzeitaufwandes unter dieser Annahme die Modellrechnung wesentlich genauer ausgeführt werden, insbesondere betrifft dies den Strahlungstransport. Weiterhin sollen Magnetfelder vernachlässigt werden. Eine mögliche Energieerzeugung durch Kernprozesse, z.B. Deuteriumbrennen, soll ebenfalls nicht berücksichtigt werden, da dies erst in den späteren Akkretionsphasen, die hier nicht untersucht werden, wichtig wird. Die zu lösenden Gleichungen sind die grundlegenden Erhaltungssätze der Strahlungshydrodynamik für Masse, Impuls und Energie. Diese Erhaltungssätze werden für das Materie- und Photonengas getrennt formuliert unter Berücksichtigung der Materie-Strahlung-Wechselwirkung. Die Strahlung wird hier nur in der grauen Näherung betrachtet, d.h. Größen des Strahlungsfeldes sind immer über alle Frequenzen integriert. Die Erhaltungssätze werden in einem bewegten Koordinatensystem formuliert.

Die abhängigen Variablen des Problems sind:

ρ	Massendichte
M_r	Masse innerhalb des Radius r
u	Materiegeschwindigkeit
e	Innere Energie
J	0. Moment des Strahlungsfeldes
H	1. Moment des Strahlungsfeldes
F_{konv}	Konvektiver Fluß

Unabhängige Variable sollen zunächst der Radius r und die Zeit t sein.

Die totale Ableitung $\frac{d}{dt}$ ist gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{rel}\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.1}$$

mit

$$u_{rel} = u - u_{Koord} \tag{2.2}$$

wobei $u_{Koord} = \frac{\partial r}{\partial t}$ die Geschwindigkeit des Koordinatensystems beziehungsweise im diskreten Fall des Gitters ist.

2.2 Die Grundgleichungen

2.2.1 Massenerhaltung

Die Massenerhaltung wird durch die Kontinuitätsgleichung der Materie beschrieben:

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho\,\mathrm{div}u = 0 \tag{2.3}$$

Die Zahl der Photonen ist im Gegensatz zur Zahl der Atome keine Erhaltungsgröße, deshalb gibt es auch für diese keine separate Kontinuitätsgleichung.

2.2.2 Impulserhaltung

Die Impulserhaltung der Materie wird durch die Eulergleichung beschrieben. Erhaltungsgröße ist hierbei die Impulsdichte ρu. Quellterme werden durch den Druckgradienten, die Materie–Strahlungswechselwirkung und die Gravitation verursacht. Eigengravitation wird hierbei als äußere Kraft behandelt.

$$\frac{d}{dt}(\rho u) + \rho u\,\mathrm{div}u + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{G\rho M_r}{r^2} - \frac{4\pi}{c}\kappa\rho H = 0 \tag{2.4}$$

Hierin ist $P = P(\rho, e)$ der Gasdruck, $\kappa = \kappa(\rho, e)$ die Opazität, G die Newtonsche Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Durch die Annahme sphärischer Symmetrie hat sich die Beschreibung der Eigengravitation wesentlich vereinfacht. Im Falle allgemeiner Geometrie würde als Gravitationsterm $-\rho\nabla\Phi$ stehen, wobei Φ das Gravitationspotential darstellt, das durch eine weitere Gleichung, die Poisson-Gleichung, bestimmt wird:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \tag{2.5}$$

In sphärischer Symmetrie kann diese Gleichung einmal integriert werden und durch Einführen der Massevariablen $M_r = 4\pi\int_0^r \rho r^2 dr$ erhält man:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = 4\pi r^2\rho \tag{2.6}$$

Die Impulserhaltung des Photonengases wird durch die 1-te Momentengleichung der Strahlungstransportgleichung beschrieben. Die Transportgleichung wird in der Formulierung von Castor (Cas[72]) verwendet. Hierbei sind relativistische Korrekturen nur bis zur Ordnung $\frac{u}{c}$ berücksichtigt. Die n-te Momentengleichung erhält man durch Multiplizieren der Transportgleichung mit $\mu^n = (\cos\theta)^n$, wobei θ den Winkel zwischen Strahlrichtung und Austrittsnormale darstellt, und Mittelung von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$. Die 1-te Momentengleichung lautet somit:

$$\frac{dH}{dt} + H\,\mathrm{div}u + c\frac{\partial(fJ)}{\partial r} + c\frac{(3f-1)J}{r} + c\kappa\rho H + H\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \tag{2.7}$$

H ist hierbei das 1-te Moment der Intensität I, die Photonenimpulsdichte ist gegeben durch $\frac{4\pi}{c}H$. Die Größe f ist der Eddingtonfaktor, ein Maß für die Anisotropie des Strahlungsfeldes. Er ist definiert durch:

$$f = \frac{\int_{-1}^{1} I(\mu)\mu^2 d\mu}{\int_{-1}^{1} I(\mu) d\mu} \tag{2.8}$$

f liegt immer zwischen 0 und 1, für ein isotropes Strahlungsfeld ist $f = \frac{1}{3}$, für eine Punktquelle im Zentrum gilt $f = 1$. Alle Größen des Strahlungsfeldes sind auf das mit der Materie mitbewegte Lagrange-Koordinatensystem bezogen.

2.2.3 Energieerhaltung

Bleibt man bei der 2-Komponentenbeschreibung, so kann man für die Materie und das Photonengas 2 getrennte Energiesätze formulieren. Für die Materie hat man als Erhaltungsgröße die innere Energie ρe:

$$\frac{d}{dt}(\rho e) + \rho e\,\mathrm{div}u + P\,\mathrm{div}u + \mathrm{div}F_{konv} + 4\pi\kappa\rho(S-J) = 0 \tag{2.9}$$

Der letzte Term beschreibt hierbei den Energieaustausch zwischen Materie und Strahlung. S ist die Quellfunktion. Unter der Annahme lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (LTE) und unter Vernachlässigung der Streuung ist S durch die Planckfunktion B gegeben. Im grauen Fall hat man damit:

$$S = B = \frac{\sigma}{\pi}T^4 \tag{2.10}$$

$T = T(\rho, e)$ ist hierbei die Gastemperatur, σ die Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante.

Der konvektive Fluß F_{konv} muß durch eine weitere Gleichung bestimmt werden. Dazu ist zunächst eine zeitabhängige Konvektionstheorie erforderlich, deren Entwicklung momentan noch am Anfang steht. Existierende Ansätze haben das Problem mehr oder weniger künstlich eingeführter Parameter und numerischer Schwierigkeiten bei ihrer Realisierung. Da außerdem abzusehen ist, daß eine Berücksichtigung der Konvektion für das Problem der Totalenergie unwesentlich ist (der konvektive Energietransport geht gleich in die Innere– und die Totalenergiegleichung ein), wurde auf eine Behandlung der Konvektion verzichtet und $F_{konv} \equiv 0$ gesetzt.

Die Energieerhaltungsgleichung der Strahlung ist durch die 0-te Momentengleichung der Strahlungstransportgleichung gegeben. Wieder wird die Transportgleichung in der Form von Cas[72] verwendet. Die Strahlungsenergiedichte ist durch $e_{rad} = \frac{4\pi}{c} J$ gegeben. Die 0. Momentengleichung lautet:

$$\frac{dJ}{dt} + J\,\mathrm{div}u + fJ\,\mathrm{div}u - (3f-1)J\frac{u}{r} + \mathrm{div}H - c\kappa\rho(S-J) = 0 \quad (2.11)$$

f ist hierbei wieder der Eddingtonfaktor.

Obwohl die Formulierung der getrennten Energiegleichungen natürlich ist — beide folgen aus den jeweiligen Boltzmanngleichungen durch Momentenbildung — ist dies nicht die einzige Möglichkeit. Ebenso ist es möglich eine dieser Energiegleichungen durch die Totalenergiegleichung zu ersetzen. *Allerdings ist diese Ersetzung im Falle von Eigengravitation nur in sphärischer Symmetrie möglich, da nur dann die Totalenergiegleichung die Form einer lokalen Erhaltungsgleichung hat.* Das Problem hierbei ist die Gravitationsenergie, da diese nichtlokalen Charakter besitzt. Nur im sphärisch symmetrischen Fall läßt sie sich durch den Trick, sowohl die Dichte als auch die Masse M_r als Primärvariable zu verwenden, als nur von lokalen Größen abhängig formulieren. Die Totalenergiegleichung wird gewonnen indem man die Impulsbilanzen von Strahlung und Materie addiert und mit der Strömungsgeschwindigkeit u skalar multipliziert. Die entstehende Gleichung wird mittels der Kontinuitätsgleichung und deren integrierter Form

$$\frac{\partial}{\partial t} M_r + 4\pi\rho r^2 u_{rel} = 0 \quad (2.12)$$

in konservative Form gebracht. Addiert man noch die inneren Energiegleichungen der Materie und Strahlung so erhält man folgende Totalenergiegleichung:

$$\frac{d}{dt}(\rho e_{tot}) + \rho e_{tot}\,\mathrm{div}u + \,\mathrm{div}\left((P + \frac{4\pi}{c} fJ)u + 4\pi H + F_{konv}\right) = 0 \quad (2.13)$$

mit

$$e_{tot} = \frac{1}{2}u^2 + e + \frac{4\pi}{c}\frac{J}{\rho} - G\frac{M_r}{r} \quad (2.14)$$

Dabei wurden durch die Strahlungsimpulsgleichung entstehende Terme der Ordnung $(\frac{u}{c})^2$ vernachlässigt, da die Strahlungsenergiegleichung nur bis zur Ordnung $(\frac{u}{c})$ genau ist.

2.3 Die Materialfunktionen

2.3.1 Die Zustandsgleichung des Gases

Als unabhängige thermodynamische Variable in den Erhaltungsgleichungen werden die Dichte ρ und die spezifische innere Energie e verwendet. Die restlichen thermodynamischen Variablen müssen aus diesen bestimmt werden.

Dies betrifft den Druck P und die Temperatur T, außerdem deren Ableitungen nach den unabhängigen thermodynamischen Variablen, die für das numerische Verfahren benötigt werden. Bei den hier interessierenden Dichten sind die Stoßraten so hoch, daß das Gas lokal als im thermodynamischen Gleichgewicht befindlich betrachtet werden kann. Die hier verwendete Zustandsgleichung geht auf die Arbeit von G. Wuchterl zurück, eine ausführliche Beschreibung und grafische Darstellung der Flächen $T(\rho, e)$ und $P(\rho, e)$ findet sich in Wuc[89].

Die Zustandsgleichung wird zunächst von der chemischen Zusammensetzung bestimmt. Diese wird als zeitlich konstant angenommen, da keine Kernreaktionen, die eine chemische Entwicklung bewirken würden, berücksichtigt werden. Als Zusammensetzung wurden folgende Massenanteile des Wasserstoffs, des Heliums und schwerer Elemente gewählt:

$$\mathrm{X} = 0.770 \qquad \mathrm{Y} = 0.213 \qquad \mathrm{Z} = 0.017$$

An Teilchen wurden berücksichtigt:

- Wasserstoff als H_2, H, H^+
- Helium als He, He^+, He^{2+}
- C, N, O als X, X^+, X^{2+}, X^{Z+}
- Na, Ne, Mg, S, Si, Fe als X, X^+, X^{Z+}
- Elektronen e^-

wobei Z die Kernladungszahl des jeweiligen Elements X ist.
Die Zustandsgleichungen $P(\rho, e)$ und $T(\rho, e)$ lagen für folgenden Bereich tabelliert vor:

$$\begin{array}{rcccl} -14 & \leq & \lg(\rho[\mathrm{g\,cm^{-3}}]) & \leq & 2 \\ 8.5 & \leq & \lg(e[\mathrm{erg\,g^{-1}}]) & \leq & 18 \end{array}$$

Zur Bestimmung von Funktionswerten wurden diese Tabellen mittels eines rationalen zweidimensionalen Splines nach Späth (Spä[85]) interpoliert.

Die Zustandsgleichung wurde als thermodynamischer Gleichgewichtszustand berechnet. Das Elektronengas wurde als ideales relativistisches Fermigas behandelt, die translatorischen Freiheitsgrade der restlichen Teilchen mittels der korrigierten Maxwell-Boltzmann Statistik. An inneren Freiheitsgraden der Atome und Ionen wurde nur der Grundzustand berücksichtigt. Für den Wasserstoff konnte die Los Alamos Zustandsgleichung über den Bereich von

$$\begin{array}{rcccl} -10 & \leq & \lg(\rho[\mathrm{g\,cm^{-3}}]) & \leq & -3 \\ 100\,\mathrm{K} & \leq & T & \leq & 11000\,\mathrm{K} \end{array}$$

verwendet werden. Außerhalb dieses Bereiches wurde die Zustandssumme unter Berücksichtigung von Rotations–, Vibrations– und gemischter Zustände berechnet. Die Dissoziations– und Ionisationsvorgänge wurden mittels des Massenwirkungsgesetzes beziehungsweise der Sahagleichung bestimmt. Da die Druckdissoziation und Druckionisation darin nicht enthalten sind, wurden Korrekturterme angebracht, die dies berücksichtigen, allerdings sind diese mehr einer ad hoc Natur als physikalisch motiviert.

2.3.2 Die Opazität

Unter der Opazität κ soll hier der Extinktionskoeffizient pro Masse (Einheit $[\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}]$) verstanden werden. Die Opazität ist in der Regel eine frequenzabhängige Größe, sodaß für die graue Rechnung geeignet gemittelt werden muß. Im Fall der Impulsgleichungen ist dies das Flußmittel, in den Energiegleichungen das Planck– beziehungsweise das J-Mittel. Da für diese Mittelungen die Lösung der Gleichungen im nichtgrauen Fall notwendig wäre, nimmt man als Näherung das Rosselandmittel. Dies ist exakt im Falle der Diffusionsnäherung, also in optisch dicken Bereichen wie dem Kern. Dieses Rosselandmittel wurde aus folgenden Quellen zusammengestellt:

		T	$\leq$	1700 K	Nach Yorke Yor[79],Yor[80a]
1700 K	$<$	T	$\leq$	5000 K	Nach Krügel, Krü[71]
5000 K	$<$	T			Nach Cox und Steward, CoS[69]

Die tabellierten Werte wurden mittels eines 2-dimensionalen rationalen Splines nach Späth Spä[83] interpoliert. Eine Darstellung des Opazitätsverlaufes als Funktion von Dichte und Temperatur findet sich bei Wuchterl Wuc[89]. Ein Schwachpunkt dieser Behandlung durch Tabellen ist, daß sie frei von Zeitskalen ist. Dies betrifft insbesondere den Staubanteil, der hier instantan vernichtet aber auch instantan neu gebildet werden kann.

2.3.3 Die Zustandsgleichung der Strahlung

Unter der Zustandsgleichung der Strahlung soll hier die Schließungsannahme der Momentengleichungen der Strahlungstransportgleichung verstanden werden. Dieses Problem entsteht dadurch, daß die n-te Momentengleichung das n-te Moment mit dem n+1-ten Moment verknüpft, also jeweils eine neue Variable einführt. Da hier nur 2 Momentengleichungen verwendet werden, wird das 2. Moment K durch fJ ersetzt, wobei der Eddingtonfaktor f noch zu bestimmen ist. Da der Eddingtonfaktor somit den zu K proportionalen Strahlungsdruck mit der zu J proportionalen Strahlungsenergie verknüpft kann man von einer Zustandsgleichung sprechen:

$$p_{rad} = f e_{rad} \tag{2.15}$$

Um f zu berechnen wäre es notwendig die zeitabhängige graue Strahlungstransportgleichung nach Cas[72] zu lösen. Da diese noch recht kompliziert ist, könnte man für geringe Geschwindigkeiten die Transportgleichung in statischen Medien lösen, wie dies beispielsweise von Winkler und Newman (WiN[80a,b]) und Balluch (Bal[88]) durchgeführt wurde:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I(r,\mu,t) + \mu\frac{\partial}{\partial r}I(r,\mu,t) + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}I(r,\mu,t) + \kappa\rho(I-S) = 0 \quad (2.16)$$

Da die Lösung dieser Gleichung ziemlich zeitaufwendig ist — diese ist iterativ an die Hydrodynamik anzukoppeln — begnügt man sich mit vereinfachenden Annahmen. Hier soll die Eddingtonapproximation zur Anwendung kommen:

$$f = \frac{1}{3} \quad (2.17)$$

Dies entspricht einem Strahlungsfeld, bei dem die Intensität wie folgt von μ abhängen kann:

$$I(\mu) = I_0 + \sum_{k=1}^{k_{max}} I_k\, \mu^{2k-1} \quad (2.18)$$

Die Eddingtonapproximation bedeutet also nicht zwangsläufig ein isotropes Strahlungsfeld! Als weitere Folge sind die Strahlungsgleichungen lokale Erhaltungsgleichungen geworden, da die gesamte Nichtlokalität im Eddingtonfaktor enthalten ist, diese aber durch die Eddingtonapproximation eliminiert wurde.

2.4 Die Naturkonstanten

Die Werte der verwendeten Naturkonstanten:

Konstante			Einheit
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.9979245620 \cdot 10^{10}$	$\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$
Boltzmannkonstante	k	$1.380622 \cdot 10^{-16}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{K}}$
Stefan-Boltzmannkonstante	σ	$5.66961 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm^2\,s\,K^4}}$
Gravitationskonstante	G	$6.6732 \cdot 10^{-8}$	$\frac{\mathrm{dyn\,cm^2}}{\mathrm{g^2}}$

Kapitel 3

Das numerische Verfahren

3.1 Numerische Verfahren für Erhaltungssätze

Für das Gleichungssystem der Strahlungshydrodynamik existiert keine allgemeine analytische Lösung, deshalb ist man auf die numerische Lösung angewiesen. Die strahlungshydrodynamischen Gleichungen stellen ein nichtlineares „weitgehend hyperbolisches“ partielles Differentialgleichungssystem dar, was heißen soll, daß bis auf die Eigengravitation, die durch die elliptische Poisson-Gleichung beschrieben wird, das System hyperbolisch ist. Als solches erlaubt es unstetige Lösungen, Unstetigkeiten können sich sogar aus stetigen Anfangsbedingungen entwickeln (siehe CoF[48]). Deshalb muß man zunächst 2 Typen von Lösungen unterscheiden:

- Starke Lösungen
  Dies sind stetige Lösungen des Gleichungssystems in Differentialform.

- Schwache Lösungen
  Schwache Lösungen sind Lösungen des Gleichungssystems in Integralform, die Unstetigkeiten aufweisen können. Will man unstetige Lösungen der Differentialform zulassen, so muß man den Lösungsraum auf Distributionen erweitern, da für Funktionen keine Ableitungen an Unstetigkeiten definiert sind.

Da die zu erwartenden Lösungen Unstetigkeiten aufweisen können, ergeben sich hier Vorteile, falls man zur Diskretisierung statt der Differentialform der Erhaltungssätze deren Integralform benutzt. Diese erhält man, indem man die Gleichungen über ein Kontrollvolumen, das zeitlich variabel sein kann, integriert, auftretende Volumenintegrale über Divergenzen werden mittels des Gaußschen Integralsatzes in Oberflächenintegrale transformiert. Die Erhaltungsgleichungen sind danach von folgendem Typ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \Psi \; dV + \int_{\partial V(t)} \Psi(u_{rel} \cdot dO) + \int_{V(t)} Q \; dV = 0 \tag{3.1}$$

Ψ ist hierbei die Erhaltungsgröße, zum Beispiel ρ, ρu oder ρe, dV das Volumenelement, dO das Oberflächenelement und Q ein Quellterm, der in den einzelnen Gleichungen unterschiedlich ist. Unterteilt man nun das Gebiet in dem die Lösung gesucht wird in N diskrete Zellen, wählt diese als Kontrollvolumina und führt die Integrale numerisch aus so erhält man ein Verfahren vom Finiten-Volumen-Typ. Ein solches Verfahren wurde für die hier durchgeführten Rechnungen verwendet.

Von einem numerischen Verfahren wird zunächst gefordert, daß die damit gewonnene Lösung gegen die exakte Lösung der Differentialgleichung konvergiert falls man die räumliche und zeitliche Diskretisierung verfeinert. Die Potenz der zeitlichen bzw. räumlichen Schrittweite, mit der die Abweichung gegen 0 konvergiert, bezeichnet man als die Ordnung des Verfahrens. Man könnte nun meinen, daß generell die Güte eines numerischen Verfahrens mit seiner Ordnung ansteigt, wie es normalerweise bei Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen der Fall ist; dies trifft für Verfahren zur Lösung hyperbolischer partieller Differentialgleichungen in dieser Stärke nicht zu. Das Gleichsetzen einer hohen Ordnung mit hoher Genauigkeit macht nur dann Sinn, falls man es mit starken Lösungen zu tun hat. Der Grund dafür liegt darin, daß in den Resttermen, die die Konvergenz bestimmen, die Potenzen der Schrittweiten h zusammen mit Ableitungen der Lösungsfunktionen auftreten (diese Restterme werden durch Taylorreihenentwicklung hergeleitet, die typischerweise Terme der Art $h^i F^{(n)}(x)|_{x_0}$ enthält), diese divergieren aber an den Unstetigkeitsstellen. Eine notwendige (und für lineare Differentialgleichungssysteme nach dem Laxschen Äquivalenztheorem auch hinreichende, siehe RiM[57]) Bedingung für die Konvergenz ist die Stabilität des Verfahrens. Stabilität heißt hier, daß keine Mode der numerischen Lösung künstlich verstärkt wird. Nur für numerische Verfahren zur Lösung von Systemen linearer hyperbolischer Differentialgleichungen existiert eine vollständige Theorie und gibt es Kriterien, die hinreichend für die Stabilität sind (z.B. das v.Neumann-Kriterium, siehe RiM[57]). Allerdings existiert ein Kriterium, dessen Erfüllung in allen Fällen notwendig für Stabilität ist, das Courant-Friedrichs-Lewy-Kriterium (im folgenden CFL-Kriterium, in CFL[28] zuerst für den Fall linearer Dgl. abgeleitet). Dieses Kriterium bezieht sich auf die Informationsausbreitung, die bei hyperbolischen Gleichungen mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt. Es besagt, daß der numerische Abhängigkeitsbereich den der Gleichung an jedem Punkt zum neuen Zeitpunkt beinhalten muß. Der numerische Abhängigkeitsbereich bei r_j^{n+1} ist dabei die Menge von Gitterpunkten $\{r_i^n \mid i \in \mathcal{I}\}$ der alten Zeitebene t^n, von denen die Lösung am Ort r_j^{n+1} zur Zeit t^{n+1} aufgrund des numerischen Schemas abhängt. Das Abhängigkeitsgebiet der Differentialgleichung ist durch die Charakteristiken gegeben (siehe CoF[48]). Es ist das r–Intervall zur Zeit t^n, das auf beiden Seiten noch von einer Charakteristik begrenzt wird, wie in Abb. (3.1) dargestellt ist.

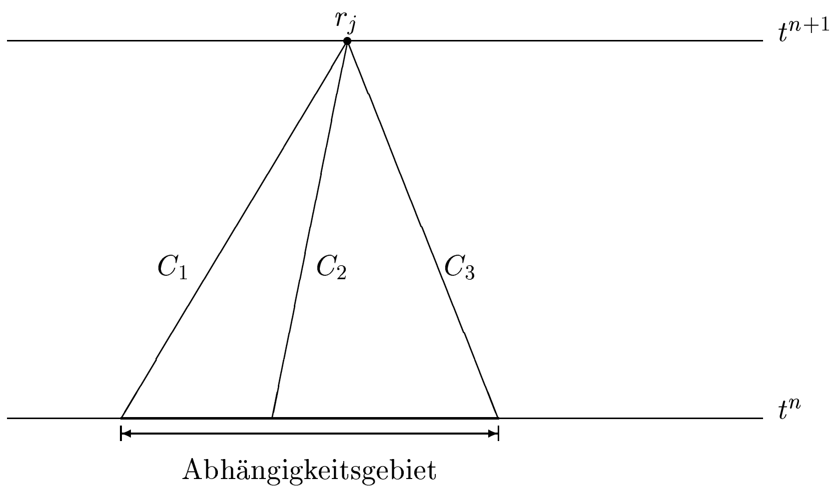


Abbildung 3.1: Das Abhängigkeitsgebiet des Punktes r_j eines Systems hyperbolischer Differentialgleichungen. Die C_i sind die Charakteristiken des Problems.

Außer der Stabilität eines numerischen Verfahrens ist es weiterhin wichtig, daß seine Lösung gewisse Eigenschaften der Lösung der Differentialgleichung besitzt. Dies sind:

- **Erhaltungseigenschaft**
  Die Differentialgleichung beschreibt die Erhaltung von Größen Ψ_i. Falls der Quellterm Q identisch 0 ist, wird insbesondere die zeitliche Veränderung des Integrals von Ψ über das gesamte räumliche Gebiet nur durch die Flüsse durch dessen Oberflächen bestimmt. Verfügt die numerische Lösung auch über diese Eigenschaft, wobei das Integral durch eine geeignete Summation zu ersetzen ist, so spricht man von einem Verfahren in Erhaltungsform. Diese Eigenschaft haben Verfahren von folgendem Typ:

$$D_t \Psi_i + F_{links} - F_{rechts} = 0 \tag{3.2}$$

  wobei für die numerischen Flüsse F gilt :

$$F_{rechts}(\Psi) = F_{links}(T_{\delta r}(\Psi)) \tag{3.3}$$

  D_t ist hierbei ein linearer zeitlicher Differenzenoperator, $T_{\delta r}$ der Translationsoperator um den Gitterabstand δr. Summiert man diese Gleichungen über alle Zellen, so heben sich die Flüsse von Nachbarzellen auf, es bleiben nur noch die Randterme F_0 und F_N übrig:

$$D_t \sum_{i=0}^{N} \Psi_i + F_0 - F_N = 0 \tag{3.4}$$

Falls ein solches Verfahren konvergiert, so konvergiert es nach dem Satz von Lax und Wendroff gegen eine schwache Lösung des Systems von Erhaltungsgleichungen (siehe Sod[85]).

- **Transporteigenschaft**
  Die Transporteigenschaft besagt, daß eine Störung der Lösung nur *mit* der Strömung advektiert werden darf (siehe Roa[76]). Verfahren die eine Upwind-Diskretisierung für die Flüsse verwenden besitzen diese Eigenschaft in der Regel, Verfahren, die für die Flußdifferenz räumlich zentrierte Differenzen benutzen generell nicht.

- **Monotonie**
  Ein numerisches Verfahren heißt monoton falls gilt:

$$\Psi_i^{n+1} = H(\Psi_{\{i\}}^n) \quad i \in \mathcal{I} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Psi_j^n} \geq 0 \;\; \forall\, j \in \mathcal{I} \tag{3.6}$$

  Die Bedeutung dieser Eigenschaft liegt darin, daß nach dem Theorem von Harten, Hyman und Lax für den Fall einer skalaren Erhaltungsgleichung ein konvergentes monotones Verfahren gegen die Entropielösung konvergiert (siehe Sod[85], HHL[76]). Die Entropielösung ist dabei als Grenzwert viskoser Lösungen definiert für den Fall verschwindenter Viskosität. Da die Verwendung nichtviskoser Gleichungen zur Lösung physikalischer Probleme ebenfalls einen solchen Grenzübergang darstellt, ist die so definierte Entropielösung in der Regel auch die physikalisch relevante Lösung. Im Fall einer skalaren Erhaltungsgleichung folgt aus der Monotonie auch, daß ein monotoner Verlauf von Ψ zur Zeit t^n auch zur Zeit t^{n+1} monoton bleibt (Erhaltung der Monotonie). Monotone Verfahren liefern deshalb monotone Stoßprofile. Allerdings sind alle monotonen Verfahren zwangsläufig 1. Ordnung im Raum, Verfahren die eine höhere Ordnung des räumlichen Diskretisierungsfehlers erreichen können *nicht* monoton sein. Die Erhaltung der Monotonie allein (nur definiert für skalare Erhaltungsgleichungen) ist eine schwächere Forderung als die Monotonie, nur im Falle linearer Erhaltungsgleichungen sind beide Begriffe äquivalent. Deshalb gibt es Verfahren höherer Ordnung, die die Monotonie erhalten (siehe Sod[85]).

3.2 Die Diskretisierung

Im folgenden soll die für die hier durchgeführte Untersuchung verwendete Diskretisierung beschrieben werden. Diese beruht weitgehend auf dem von

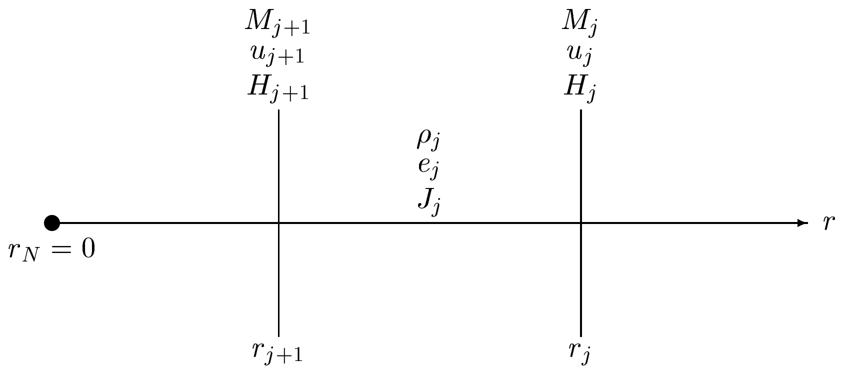


Abbildung 3.2: Das gestaffelte Gitter. Die skalaren Größen ρ, e, J sind im Inneren der Zelle definiert, die Vektoren u und H auf dem Zellrand.

Winkler und Norman WiN[86] beschriebenen Schema.

3.2.1 Gestaffeltes Gitter

Zur Disketisierung wird der Protostern in $N - 1$ Kugelschalen zerlegt. Die Radien dieser Kugelschalen sind zeitlich variabel, sie werden durch eine zusätzliche Gleichung bestimmt, sodaß bestimmte Strukturen gut aufgelöst werden. Skalare Größen werden in den Zellen definiert, Vektoren auf deren Oberfläche. Es ergibt sich so das in Abb. (3.2) gezeigte Bild.

3.2.2 Implizite Zeitdiskretisierung

Das protostellare Akkretionsproblem beinhaltet Zeitskalen, die sehr unterschiedlich sind. So ist die Akkretionszeitskala $\tau_{acc} = \frac{M}{\dot{M}}$ um mehrere Größenordnungen größer als die Schallaufzeit durch den quasihydrostatischen Kern $\tau_{Schall} = \frac{R_{Kern}}{c_s}$. Will man die Vorgänge auf den langen Zeitskalen verfolgen, so muß das numerische Verfahren für beliebige Zeitschritte stabil sein. Verwendet man ein explizites Verfahren, d.h. zeitliche Vorwärtsdifferenzen, so ist das numerische Abhängigkeitsgebiet beschränkt, und damit nach dem CFL-Kriterium auch der Zeitschritt. In der Praxis ergibt sich damit für das hydrodynamische Problem mit den Charakteristiken $u + c$, u und $u - c$ als

Zeitschrittlimit:

$$\delta t \leq \min_{\delta r_j} \left(\min \left(\frac{\delta r_j}{\mid u + c_s \mid} , \frac{\delta r_j}{\mid u - c_s \mid} \right) \right) \tag{3.7}$$

Da außerdem ein adaptives Gitter verwendet wird, das relative Auflösungen von $\frac{\delta r}{r} \simeq 10^{-4}$ schon mit wenigen Hundert Gitterpunkten erreicht, würde diese Bedingung zu extrem kleinen Zeitschritten führen. Deshalb verwendet man ein implizites Verfahren, d.h. zeitliche Rückwärtsdifferenzen. Dann hängt die Lösung an einem Gitterpunkt von allen Gitterpunkten des alten Zeitschritts ab, die CFL-Bedingung ist erfüllt. Allerdings müssen die Größen zum neuen Zeitschritt durch Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems bestimmt werden, was bezüglich eines expliziten Verfahrens wegen des wesentlich höheren Rechenzeitaufwandes pro Zeitschritt von Nachteil ist. Dies betrifft aber nur Phasen, bei der die Entwicklung auf der lokalen dynamischen Zeitskala passiert, da hier der Zeitschritt auch für ein implizites Verfahren von der Größenordnung des CFL-Zeitschrittes sein muß.

3.2.3 Das Advektionsschema

Die Diskretisierung der Advektionsterme $\int_{\partial V(t)} \Psi(u_{rel} \cdot dO)$ erfolgt mittels des Donor-Cell-Schemas. Dieses erfüllt die Erhaltungseigenschaft, die Transporteigenschaft und ist monoton. Donor-Cell ist ein Verfahren 1. Ordnung im Raum. Der Wert von Ψ auf der Zellenoberfläche wird hierbei durch den Wert der stromaufwärts gelegenen Zelle approximiert:

$$\int_{S^2(r_j)} \Psi(u_{rel} \cdot dO) = \begin{cases} 4\pi r_j^2 \Psi_{j-1} u_{rel\,j} & \text{falls } u_{rel\,j} < 0 \\ 4\pi r_j^2 \Psi_j u_{rel\,j} & \text{falls } u_{rel\,j} > 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Hierbei ist $S^2(r_j)$ eine Kugeloberfläche mit Radius r_j.

3.2.4 Die diskretisierten Gleichungen

Die Diskretisierung erfolgt nach Winkler und Norman WiN[86]. Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\delta f_j^{n+1} = f_j^{n+1} - f_j^n \tag{3.9}$$

$$\Delta f_j^n = f_j^n - f_{j+1}^n \tag{3.10}$$

$$\widetilde{\Delta V}_j^n = \frac{1}{3} \left((r_j^n)^3 - (r_{j+1}^n)^3 \right) \tag{3.11}$$

$$u_{rel\,j}^{n+1} = u_j^{n+1} - \frac{r_j^{n+1} - r_j^n}{\delta t} \tag{3.12}$$

$$\xi_j^n = \frac{M_j^n}{4\pi} \tag{3.13}$$

$$\Upsilon f_j^n = \begin{cases} f_{j-1}^n & \text{falls } u_{rel\,j}^n < 0 \\ f_j^n & \text{falls } u_{rel\,j}^n > 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\Delta_{DC} \left(f_j^{n+1}\, \delta\xi_j \right) = \Delta \left(\delta\xi_j \; \Upsilon f_j^{n+1} \right) \tag{3.15}$$

Obere Indizes zählen hierbei die Zeitebenen, untere Indizes die räumlichen Gitterpunkte. Im folgenden werden Zeitindizes von $n+1$ weggelassen, beziehen sich Variable auf die alte Zeitebene n so wird dies durch ein $*$ gekennzeichnet. Die Advektion wurde aus numerischen Gründen mittels der summierten Kontinuitätsgleichung auf die Massenvariable ξ bezogen (siehe WiN[86]).

Die diskretisierten Gleichungen im einzelnen:

- **Poissongleichung**

$$\Delta\xi_j - \rho_j \widetilde{\Delta V}_j = 0 \tag{3.16}$$

- **Kontinuitätsgleichung**

$$\delta(\rho_j\,\widetilde{\Delta V}_j) + \delta t \Delta_{DC}(u_{rel\,j} r_j^2 \rho_j) = 0 \tag{3.17}$$

- **Bewegungsgleichung**

$$\begin{aligned}
\delta\left(u_j \frac{1}{2}(\rho_j\,\widetilde{\Delta V}_j + \rho_{j-1}\,\widetilde{\Delta V}_{j-1})\right) &\quad - \\
\Delta_{DC}\left(\frac{1}{2}(u_j \delta\xi_j + u_{j-1}\delta\xi_{j-1})\right) &\quad + \\
\delta t\left[r_j^2 \Delta P_{j-1} + \frac{1}{2}(\rho_j \widetilde{\Delta V}_j + \rho_{j-1}\widetilde{\Delta V}_{j-1})\right. &\quad \cdot \\
\left.\left(4\pi G \frac{\xi_j}{r_j^2} - \frac{4\pi}{c} H_j \frac{\kappa_j + \kappa_{j-1}}{2}\right)\right] &\quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

- **Innere Energiegleichung**

$$\begin{aligned}
\delta\left(e_j\,\rho_j\,\widetilde{\Delta V}_j\right) - \Delta_{DC}\left(e_j\,\delta\xi_j\right) &\quad + \\
\delta t\left[P_j\,\Delta(u_j r_j^2) - 4\pi\kappa_j\rho_j(J_j - S_j)\,\widetilde{\Delta V}_j\right] &\quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

- **0-te Momentengleichung**

$$\begin{aligned}
\delta(J_j\,\widetilde{\Delta V}_j) - \Delta_{DC}\left(\frac{J_j}{\rho_j}\,\delta\xi_j\right) &\quad + \\
\delta t\left[c\Delta(H_j r_j^2) + f_j J_j \Delta(u_j r_j^2)\right. &\quad - \\
\left.\frac{(3f_j - 1)J_j}{r_j + r_{j+1}}(u_j + u_{j+1})\widetilde{\Delta V}_j + c\kappa_j\rho_j(J_j - S_j)\,\widetilde{\Delta V}_j\right] &\quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

- **1-te Momentengleichung**

$$\begin{aligned}
\delta\left(H_j \frac{\widetilde{\Delta V}_{j-1}+\widetilde{\Delta V}_j}{2}\right) & - \\
\delta t \left[\Delta_{DC}\left(H_j \frac{u_{rel\,j-1} r_{j-1}^2 + u_{rel\,j} r_j^2}{2}\right)\right. & + \\
\frac{u_{j-1}-u_{j+1}}{2} r_j^2 H_j & + \\
\frac{c}{4}\left(\frac{(3f_{j-1}-1)J_{j-1}+(3f_j-1)J_j}{r_j}(\widetilde{\Delta V}_{j-1}+\widetilde{\Delta V}_j)\right. & + \\
\left.\left.(\kappa_{j-1}+\kappa_j)(\rho_{j-1}\widetilde{\Delta V}_{j-1}+\rho_j\widetilde{\Delta V}_j)H_j\right)\right] & + \\
c\,\delta t\, r_j^2\,\Delta(f_{j-1}J_{j-1}) & = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nur für den Fall geringer optischer Tiefe $\Delta\tau_j = \kappa_j \rho_j \, \Delta r_j$ der Zellen werden die innere Energiegleichung und die 0-te Momentengleichung unabhängig gelöst. Da bei ansteigenden optischen Tiefen $J \to S$ konvergiert ist deren Differenz numerisch schlecht bestimmt. Deshalb wird ab einem $\Delta\tau_{Grenz\,1}$ statt der inneren Energiegleichung die Summengleichung der inneren Energien von Materie und Strahlung gelöst, der Materie–Strahlungs–Wechselwirkungsterm fällt hierbei weg, allerdings steht er immer noch in der 0-ten Momentengleichung. Deshalb wird ab einem $\Delta\tau_{Grenz\,2}$ statt die 0-te Momentengleichung zu lösen $J = S$ gesetzt. Für die hier durchgeführten Rechnungen wurde $\Delta\tau_{Grenz\,1} = 0.1$ und $\Delta\tau_{Grenz\,2} = 40$ verwendet.

3.2.5 Anfangs– und Randbedingungen

Als Anfangsbedingung wird eine homogene, isotherme Wolke in Ruhe angenommen. Materie und Strahlung sollen anfangs im Gleichgewicht sein. Damit gilt für das Startmodell für alle $i = 1 \ldots N$:

$$\rho_i = \rho_0 \tag{3.22}$$

$$u_i = 0 \tag{3.23}$$

$$e_i = e_{EOS}(\rho_0, T_0) \tag{3.24}$$

$$J_i = B(T_0) \tag{3.25}$$

$$H_i = 0 \tag{3.26}$$

Die spezifische innere Energie e muß hierbei durch Invertierung der Zustandsgleichung bestimmt werden, dies erfolgt durch ein Iterationsverfahren.

Die innere Randbedingung bei $j = N$ ist durch die sphärische Symmetrie festgelegt:

$$\xi_N = 0 \tag{3.27}$$

$$u_N = 0 \tag{3.28}$$
$$H_N = 0 \tag{3.29}$$

Als äußere Randbedingung gibt es 2 Möglichkeiten:

- Konstantes Volumen
- Konstanter äußerer Druck

In beiden Fällen ist der äußere Rand lagrangesch, es findet darüber keine Advektion statt. Im ersten Fall wird die Bewegungsgleichung außen ersetzt durch:

$$u_1 = 0 \tag{3.30}$$

Im zweiten Fall wird der für die Bewegungsgleichung außen benötigte Druckgradient bezüglich eines zeitlich konstanten Außendruckes gebildet. Dieser wird so gewählt, daß die Wolke anfänglich mit diesem im Druckgleichgewicht ist:

$$P_{ext} = P_{EOS}(\rho_0, T_0) \tag{3.31}$$

Für die Strahlung muß eine separate Randbedingung formuliert werden. Der Protostern sei in ein isotropes Strahlungsfeld der Temperatur T_0 eingebettet. Die Randbedingung der 1-ten Momentengleichung wird nach Yor[80b] formuliert. Das zur Berechnung von $\Delta(fJ)$ benötigte J_0 wird bestimmt durch:

$$J_0 = \frac{1}{2}B(T_0) + \frac{1}{\bar{\mu}}\left(H_1 + \frac{1}{4}B(T_0)\right) \tag{3.32}$$

wobei

$$\bar{\mu} = \frac{\int_0^1 I(R,\mu)\mu \, d\mu}{\int_0^1 I(R,\mu) \, d\mu} \tag{3.33}$$

R ist hierbei der Außenrand des Protosterns. $\bar{\mu}$ wurde hier $\frac{1}{2}$ gesetzt, was für ein isotropes Strahlungsfeld am Außenrand zutrifft.

3.3 Numerische Hilfsmittel

3.3.1 Das adaptive Gitter

Die Erhaltungsgleichungen wurden auf einem beweglichen Gitter formuliert. Dieser zusätzlichen Freiheitsgrad wird dazu benutzt, die Auflösung an Orten mit steilen Gradienten zu erhöhen. Dazu wird das Gleichungssystem um eine zusätzliche Gleichung erweitert. Die Gittergleichung wird hier in der Formulierung von Dorfi und Drury (DoD[87]) verwendet. Diese lautet in ihrer einfachsten Form:

$$\frac{n}{R} = \text{const} \tag{3.34}$$

wobei

$$n = \frac{r}{\Delta r} \qquad \text{erreichte Auflösung} \tag{3.35}$$

$$R = \sqrt{1 + \sum_k \beta_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial r}\right)^2} \qquad \text{erwünschte Auflösung} \tag{3.36}$$

Als Variable f_k werden hier die Logarithmen der Dichte ρ, der innere Energie e, der Absorptionskoeffizient pro Länge $\kappa\rho$ und der Kombination $\frac{u^2}{e} + 1$ gewählt. Zur praktische Anwendung ist es notwendig, R sowohl räumlich als auch zeitlich zu glätten. Für das Lösungsverfahren ist es allerdings besser, den inversen Glättungsoperator auf n anzuwenden. Die diskretisierte Gittergleichung hat dann die Form:

$$\frac{\hat{n}_j}{R_j} = \frac{\hat{n}_{j-1}}{R_{j-1}} \tag{3.37}$$

$$\hat{n}_j = \tilde{n}_j + \frac{\tilde{\tau}}{\delta t}\left(\tilde{n}_j - \tilde{n}_j^*\right) \tag{3.38}$$

$$\tilde{n}_j = n_j - \alpha(\alpha+1)(n_{j+1} - 2n_j + n_{j-1}) \tag{3.39}$$

$$n_j = \frac{r_{j+1} + r_j}{\Delta r_j} \tag{3.40}$$

$$R_j = \sqrt{1 + \left(\frac{r_j + r_{j+1}}{\Delta r_j}\right)^2 \sum_k g_k \ln^2\left(\frac{f_{k;j}}{f_{k;j+1}}\right)} \tag{3.41}$$

Der Parameter α bestimmt hierbei die räumliche Glättung und wird konstant $\alpha = 2$ gesetzt. Dies bedeutet, daß das Verhältnis zweier benachbarter Auflösungen $\hat{n}$ zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$ beschränkt ist. $\tilde{\tau}$ bestimmt die zeitliche Glättung. Da die relevanten Zeitskalen sich während der Rechnung verändern, wird $\tilde{\tau}$ an diese gekoppelt durch $\tilde{\tau} = g_t \, \tau_{\mathit{ff}\ centr}$ wobei die zentrale Freifallzeit $\tau_{\mathit{ff}\ centr}$ gegeben ist durch:

$$\tau_{\mathit{ff}\ centr} = \sqrt{\frac{3\pi}{32\, G\, \rho_N}} \tag{3.42}$$

Ab einer gewissen Gitterpunktanzahl (typ. $400\ldots500$) kann $g_t = 0$ gesetzt werden, das Gitter kann dann auf entstehende Strukturen sofort reagieren.

Für die Gittergleichung müssen noch Randbedingungen formuliert werden. Am äußeren Rand verschwindet die Relativgeschwindigkeit u_{rel}, was dort einem lagrangeschen Gitter entspricht. Am inneren Rand wird ebenfalls ein lagrangesches Gitter gewählt. Die Masse in der zentralen Zelle wird hierbei konstant auf 10^{-9} Sonnenmassen gehalten. Da die Gittergleichung formal eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Auflösungen n ist, müssen noch 2 weitere Randbedingungen gesetzt werden: Die Änderungen der Auflösungen sollen am Rand verschwinden: $n_1 = n_2$ und $n_{N-1} = n_{N-2}$.

3.3.2 Künstliche Viskosität

Wie schon erwähnt läßt das System der Erhaltungsgleichungen die unstetige Lösungen zu. Um dies numerisch zu behandeln kann man entweder Diskontinuitäten explizit einführen (z.B. in Charakteristikenverfahren), oder man verbreitert diese über mehrere Gitterpunkte. Letzterer Ansatz kommt von der Überlegung, daß die physikalischen Lösungen in der Realität keine echten Unstetigkeiten aufweisen, sondern Änderungen der Zustandsgrößen immer nur auf Längenskalen der mittleren freien Weglänge der Teilchen auftreten können. Zur Verbreiterung der Diskontinuitäten in numerischen Rechnungen ahmt man dies durch Einführung einer künstlichen Viskosität nach, die zwar in ihrer Stärke normalerweise um mehrere Größenordnungen über der natürlichen molekularen Viskosität liegt, die Längenskala der Stoßverbreiterung ist aber noch klein gegenüber sonstigen relevanten Längenskalen des Problems.

Bei Verfahren 1. Ordnung im Raum hat der Diskretisierungsfehler die Form eines zusätzlichen Viskositätsterms, sodaß diese intrinsische Viskosität oft ausreicht, schwache Schocks numerisch zu behandeln. Für das protostellare Problem mit seinen starken Stössen ist diese Viskosität allerdings zu klein, es muß eine zusätzliche künstliche Viskosität eingeführt werden. Diese wird in der Formulierung von Tscharnuter und Winkler verwendet (siehe TsW[79]). Die sphärische Symmetrie macht durch das Auftreten geometrischer Kompression einen Tensoransatz erforderlich. Der viskose Drucktensor wird hierbei als spurfrei angesetzt, was bedeutet, daß eine homologe Kontraktion nicht von der Viskosität beeinflußt wird. Für die Bewegungsgleichung ergibt sich als Zusatzterm auf der linken Seite:

$$\frac{3}{r}\,\mathrm{div}\left((\lambda r)^2\,\vec{r}\,\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{3}\,\mathrm{div}\,u\right)\,\mathrm{div}\,u\right) \tag{3.43}$$

In der inneren Energiegleichung muß die daraus resultierende Entropieerzeugung berücksichtigt werden. Der Zusatzterm auf der linken Seite ist:

$$\frac{3}{2}(\lambda r)^2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{3}\,\mathrm{div}\,u\right)^2\,\mathrm{div}\,u \tag{3.44}$$

Beide Terme werden nur im Falle einer Kompression, d.h. $\mathrm{div} u < 0$, berücksichtigt da es keine Verdünnungsstösse geben kann. Der Parameter λ bestimmt die Stärke der Viskosität. Er entspricht etwa der relativen Stoßverbreiterung $\frac{\delta r_{Schock}}{r_{Schock}}$. Will man die Totalenergiegleichung verwenden, so muß man auch dort den Einfluß der künstlichen Viskosität berücksichtigen. Die beiden Terme der inneren Energiegleichung und der Bewegungsgleichung transformieren sich hierbei zu einem formalen Transportterm auf der linken Seite:

$$\mathrm{div}\left((\lambda r)^2\rho\,\mathrm{div}(u)\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{3}\,\mathrm{div}\,u\right)\vec{u}\right) \tag{3.45}$$

In der diskretisierten Form haben die Terme folgende Form :

- Bewegungsgleichung

$$\frac{3\lambda^2\delta t}{32r_j}\Delta\left((r_{j-1}+r_j)^5\rho_{j-1}\cdot\right.$$
$$\left.\left(\frac{\Delta u_{j-1}}{\Delta r_{j-1}}-\frac{\Delta(u_{j-1}r_{j-1}^2)}{3\widetilde{\Delta V}_{j-1}}\right)\frac{\Delta(u_{j-1}r_{j-1}^2)}{3\widetilde{\Delta V}_{j-1}}\right) \tag{3.46}$$

- Innere Energiegleichung

$$\frac{3\lambda^2\delta t}{8}(r_j+r_{j+1})^2\rho_j\Delta\left(u_jr_j^2\right)\left(\frac{\Delta u_j}{\Delta r_j}-\frac{\Delta(u_jr_j^2)}{3\widetilde{\Delta V}_j}\right)^2 \tag{3.47}$$

Mögliche Diskretisierungen des Terms der Totalenergiegleichung werden später behandelt.

3.4 Das Lösungsverfahren

Die diskretisierten Erhaltungsgleichungen und die Gittergleichung sind $7N$ nichtlineare gekoppelte Differenzengleichungen für die $7N$ Unbekannten r_j, ρ_j, ξ_j, u_j, e_j, J_j und H_j; $j = 1\ldots N$. Dieses Gleichungssystem wird mittels des Henyey-Verfahrens gelöst, das auf einer Newton-Raphson-Iteration beruht. Das in jedem Iterationsschritt entstehende lineare Gleichungssystem wird unter Ausnutzung der besonderen Struktur der Funktionalmatrix gelöst. Da die Erhaltungsgleichungen immer nur die Gitterpunkte $j-1$, j und $j+1$ koppeln — nur die Gittergleichung koppelt zusätzlich noch die Punkte $j-2$ und $j+2$ — hat die Funktionalmatrix eine Blockpentadiagonalform. Die Matrix wird mittels Gauß-Elimination invertiert wobei durch die Blockpentadiagonalform der Zeitaufwand nur linear mit der Anzahl der Gitterpunkte N steigt (statt N^3 bei voll besetzter Matrix). Die Iteration wird abgebrochen, falls die relativen Korrekturen kleiner als eine vorgegebene Grenze (typ. 10^{-6}) sind. Ist keine Konvergenz zu erreichen wird der Zeitschritt reduziert. Der Zeitschritt ist bei diesem impliziten Verfahren nur dadurch beschränkt, daß aus dem Modell der Zeitebene t^n durch Extrapolation ein Startmodell innerhalb des Konvergenzgebietes des Iterationsverfahrens bestimmt werden muß. Da durch einen zu großen Zeitschritt allerdings der Diskretisierungsfehler ansteigt, koppelt man den Zeitschritt an die zeitlichen Änderungen der Variablen.

Kapitel 4

Das Totalenergieproblem

Zur numerischen Rechnung hat man aus den 3 im kontinuierlichen Fall äquivalenten Energiegleichungen die Erhaltungsgleichungen der inneren Energie und der Strahlungsenergie ausgewählt. Dies geschah vor allem aus numerischen Gründen. In einer frei fallenden Hülle sind die spezifische kinetische– und potentielle Energie betragsmäßig etwa gleich groß. Löst man nun statt der inneren Energiegleichung die Totalenergiegleichung so muß die innere Energie aus der Totalenergie bestimmt werden. In der protostellaren Hülle gilt folgende Hierarchie: $-E_{pot} \approx E_{kin} \gg E_{int}$. Dies folgt aus folgender Überlegung:
Hat man keine chemischen Reaktionen, Dissoziation oder Ionisation in der Hülle so gilt:

$$\frac{E_{kin}}{E_{int}} = \frac{\frac{1}{2}\rho u^2}{\rho e} \approx \frac{\frac{1}{2}u^2}{\frac{1}{2}c_s^2} = \mathcal{M}^2 \tag{4.1}$$

Da in der Hülle die Machzahl $\mathcal{M}$ hoch werden kann, ist die innere Energie klein gegen die kinetische Energie und damit auch gegen den Betrag der potentiellen Energie. Die innere Energie wäre aus der kleinen Differenz zweier großer Zahlen zu bestimmen und damit extrem von Diskretisierungsfehlern der beiden anderen Energieformen abhängig. Dies betrifft vor allem die Akkretion auf den inneren Kern, da hier die Machzahlen wesentlich höher sind als bei Strömungen auf den ersten Kern. *Legt man aber Wert auf eine korrekte Thermodynamik, so muß man die innere Energiegleichung lösen.*

Die Gleichungen wurden in Erhaltungsform diskretisiert. Dies hat den Vorteil, daß die globalen Erhaltungssätze numerisch exakt erfüllt sind. Somit ist garantiert, daß keine systematische Drift in den globalen Erhaltungsgrößen möglich ist. Hat man nun mehr Erhaltungsgleichungen als unabhängige Erhaltungsgrößen, so ist dies für Erhaltungsgrößen, die man als abhängig gewählt hat nicht mehr garantiert. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die abhängigen Gleichungen aus den Unabhängigen durch nichtlineare Transformationen gewonnen werden. Dieser Fall liegt bei der Totalenergiegleichung vor: Die Impulsgleichung ist skalar mit der Geschwindigkeit zu multiplizieren. Die zur Transformation zur Divergenzform notwendigen

Schritte umfassen das mehrfache Anwenden von Produkt– und Kettenregel der Differentialrechnung. Das Problem entsteht nun daraus, daß diskrete Analoga zu diesen Regeln nur für wenige Differenzenoperatoren gelten, und somit für die meisten Differenzenschemata nicht zusätzlich zu Impuls–, innerer Energie– und Strahlungsenergiegleichung eine dazu konsistente Diskretisierung der Totalenergiegleichung in Erhaltungsform existiert.

Samarskii und Popov (PoS[69]) schlugen vor, daß zusätzlich zu der Erhaltungseigenschaft die vollständige Erhaltungseigenschaft zu fordern sei, das heißt ein numerisches Schema soll *alle* Erhaltungsgleichungen des Problems, also auch die, die nicht zur Diskretisierung verwendet wurden, in Erhaltungsform approximieren. Im Falle der Hydrodynamik sind dies zusätzlich zu Masse, Impuls und innerer Energie die Totalenergie und die Entropie. Er gab für 1-dimensionale Hydrodynamik in Stabgeometrie sowohl für Lagrange– als auch Eulerkoordinaten solche Differenzenschemata an (PoS[70]), wobei die Eulersche Lösung leider falsch war. Kuzmin, Makarov und Meladze (KMM[80]) konstruierten als erste ein vollständig konservatives Schema in Eulerkoordinaten, das allerdings 3 Zeitniveaus verkoppelt und bezüglich der Advektionsterme explizit ist, deshalb ist auch die Größe des Zeitschrittes begrenzt. Kosovichev und Popov (KoP[79]) verglichen ein lagrangesches vollständig konservatives Schema mit Schemata, die diese Eigenschaft nicht besitzen für den Fall der Ausbreitung einer Stoßwelle in einer Sternatmosphäre in planparalleler Näherung. Ihr Schema konnte durch einen freien Parameter so abgestimmt werden, daß der Totalenergiefehler positives oder negatives Vorzeichen hatte. Es zeigte sich, daß vor allem das Temperaturprofil deutliche Unterschiede aufwies, im Fall von Totalenergieerzeugung war das Temperaturmaximum hinter dem Stoß bis zu 3 mal höher als bei gleichzeitiger Totalenergieerhaltung. Auch das Geschwindigkeitsprofil zeigte sichtbare Unterschiede wobei im Fall von künstlicher Totalenergieerzeugung die Geschwindigkeiten höher waren. Kosovichev und Popov kamen zu dem Schluß, daß es für dieses Problem ratsam sei, ein vollständig konservatives Differenzenschema zu benutzen.

Während es bei diesem Schema noch relativ leicht möglich war einen *einfachen* analytischen Ausdruck für den Totalenergiefehler zu bestimmen, ist es bei dem hier verwendeten Schema durch die Advektionsterme und die Tensorviskosität praktisch nicht möglich. Ebenso ist es mangels eines vollständig konservativen Schemas schwierig zu beurteilen, welchen Einfluß auf die Lösung ein vorhandener Totalenergiefehler hat. Ein Vergleich mit Modellen, die unter Verwendung der Totalenergiegleichung gerechnet wurden kann hierfür nützliche Hinweise geben. Eine solche Rechnung sollte zumindest für den ersten äußeren Kern möglich sein, da hier die Machzahlen noch relativ klein sind ($\mathcal{M}_{max} \approx 3 \ldots 4$), und damit auch die Unsicherheit der inneren Energie aufgrund der Diskretisierungsfehler der anderen Energieformen. Ein solcher Vergleich ist insbesondere wegen der starken Schwingungen des äußeren Kerns, die zu dessen Zerstörung führen können, interessant und wurde deshalb hier durchgeführt.

Kapitel 5

Die Totalenergieuntersuchung

Ziel dieses ersten Teils ist es die Stärke der Verletzung der Totalenergieerhaltung festzustellen. Hierzu gibt es 2 Möglichkeiten:

- **Globaler Test**
  Hierbei wird die Totalenergiegleichung über die gesamte protostellare Wolke integriert.

- **Lokaler Test**
  Hierbei wird die Totalenergieerhaltung in jeder Zelle des numerischen Verfahrens bezüglich einer Diskretisierung der Totalenergiegleichung in Erhaltungsform betrachtet.

Der globale Test hat den Vorteil, daß die Ergebnisse nicht von der Diskretisierung der Advektionsterme in der Totalenergiegleichung abhängen, bei denen trotz der Einschränkung der Erhaltungsform ein großer Freiheitsgrad besteht. Allerdings kann man aus einer guten globalen Totalenergieerhaltung noch lange nicht auf die lokale Genauigkeit der numerischen Lösung schließen; räumliche Umverteilungseffekte würden die globale Erhaltung nicht beeinflußen, lokal die Lösung wahrscheinlich stark verändern. Aus einer globalen Totalenergieverletzung folgt zwangsläufig eine lokale Totalenergieverletzung, hier kann eine lokale Untersuchung aufzeigen, aus welchen Regionen der Strömung dieser Fehler hauptsächlich kommt.

5.1 Globale Totalenergieuntersuchung

5.1.1 Diskretisierung der Totalenergiegleichung

Zur globalen Untersuchung wird die Totalenergiegleichung räumlich über den gesamten Protostern und zeitlich vom Startzeitpunkt $t = 0$ bis zur Zeit

t^m integriert. Es ergibt sich:

$$E_{Tot}(t^m) - E_{Tot}(0) + \int_0^{t^m} \int_{\partial V_a} \left(\left(P + \frac{4\pi}{c} f J \right) \vec{u} + 4\pi \vec{H} \right) d\vec{O}\, dt = 0 \quad (5.1)$$

mit

$$E_{Tot}(t) = \int_V \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + \frac{4\pi}{c} J - G \frac{M_r \rho}{r} \right) dV \quad (5.2)$$

∂V_a ist hier die äußere Oberfläche der protostellaren Wolke, $d\vec{O}$ das Oberflächenelement. Hierbei wurde ausgenutzt, daß aus Symmetriegründen $\vec{u}$ und $\vec{H}$ im Zentrum bei $r = 0$ verschwinden. Außerdem ist der Außenrand lagrangesch, sodaß darüber keine Advektion stattfindet, die einzigen Oberflächenterme stammen deshalb von der Arbeit des äußeren Druckes und der Leuchtkraft. Zusätzlich verschwindet außen der viskose Druck, sodaß kein Transport von Totalenergie über den Außenrand aufgrund von Viskosität stattfindet.

Die Untersuchung läuft nun folgendermaßen: Man bestimmt die Totalenergie $E_{Tot}(t^m)$ des Protosternmodells im Alter t^m und rechnet diese mittels der aus der Modellsequenz gegebenen Leuchtkraft und Druckarbeit zur Zeit $t = 0$ zurück. So erhält man die Anfangstotalenergie $\tilde{E}_{Tot}(0)$, von der man starten müsste um zur Zeit t^m ein Modell der Energie $E_{Tot}(t^m)$ zu erhalten, falls das Schema totalenergieerhaltend wäre. Diese vergleicht man mit der Energie des homogenen Startmodells; Abweichungen sind dann auf künstliche Totalenergieerzeugung oder Vernichtung durch das Differenzenschema zurückzuführen.

Aufgrund der Homogenität des Anfangsmodell ist dessen Totalenergie exakt bekannt. Die potentielle Energie ist die einer homogenen Kugel mit Masse M und Radius R:

$$E_{pot} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \quad (5.3)$$

Da anfangs alle Geschwindigkeiten verschwinden, verschwindet auch die kinetische Energie. Außerdem ist dieses Modell isotherm mit Materie und Strahlung im Gleichgewicht bei einer Temperatur T_0. Somit gilt für die Summe aus Strahlungs– und innerer Energie:

$$E_{int} + E_{rad} = \left(\rho_0 e(T_0) + \frac{4\pi}{c} B(T_0) \right) \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (5.4)$$

B ist hierbei die frequenzintegrierte Planckfunktion.

5.1.1.1 Diskretisierung der Inneren– und Strahlungsenergie

Hierbei gilt es folgende Integrale numerisch zu approximieren:

$$E_{int} = \int_V \rho e \, dV \quad (5.5)$$

$$E_{rad} = \int_V \frac{4\pi}{c} J \, dV \quad (5.6)$$

Da für diese beiden Energieformen die Erhaltungsgleichungen gelöst werden, ist es sinnvoll, die zur Berechnung der Modelle verwendete Diskretisierung zu benutzen. Bezüglich dieser Diskretisierung ist die Summe $E_{int} + E_{rad}$ nämlich bis auf Quellterme erhalten. Würde man zur nachträglichen Kontrolle eine andere Diskretisierung wählen, so wäre eine Verletzung der Erhaltung feststellbar, obwohl die Gleichungen in Erhaltungsform gelöst wurden! Wie aus der Diskussion der Erhaltungsform leicht ersichtlich ist, gilt diese Eigenschaft nur falls man die Diskretisierung der Volumenterme bei der Kontrolle genauso ausführt wie in der Gleichung die man löste (Gl. 3.4). Zur Diskretisierung der Integrale werden diese zerlegt in eine Summe über alle Zellen $i = 1 \ldots N-1$ von Integralen über die jeweiligen Zellen. Die zu integrierenden Größen sind als Skalare im Inneren dieser Zellen definiert, sodaß die Integrale wie bei der Berechnung der Modellsequenz als Wert des Integranden in der Zelle multipliziert mit dem Volumen der Zelle approximiert werden.

$$E_{int} = \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i e_i \, \Delta V_i \tag{5.7}$$

$$E_{rad} = \frac{4\pi}{c} \sum_{i=1}^{N-1} J_i \, \Delta V_i \tag{5.8}$$

5.1.1.2 Diskretisierung der potentiellen Energie

Die potentielle Energie ist durch folgendes Integral gegeben:

$$-E_{pot} = \int_V G \frac{M_r \rho}{r} \, dV \tag{5.9}$$

Wieder zerlegt man das Integral in eine Summe von Integralen über die einzelnen Zellen. Dies ist insbesondere aufgrund einer deshalb möglichen lokalen Formulierung, die später benötigt wird, sinnvoll. Hier treten nun Probleme bei der Auswertung der Zellintegrale auf. Die Masse ist jeweils an den Zellrändern gegeben, die Dichte in der Zellmitte. Dadurch wird eine Interpolation notwendig bei der man einige Freiheiten hat. Aus den anderen Erhaltungsgleichungen lassen sich diesbezüglich keine Vorschriften ableiten. Man kann allerdings fordern, daß die Diskretisierung für eine homogene Kugelschale und dadurch auch für das homogene Anfangsmodell das exakte Ergebnis liefert. Dazu nimmt man die Dichte ρ über die Zelle als konstant an. Dadurch wird auch der Verlauf von M_r in der Zelle vorgegeben:

$$M_r(r) = M_r(r_{i+1}) + \frac{4\pi}{3}\rho_i \left(r^3 - r_{i+1}^3\right) \quad \text{für} \quad r_i \geq r \geq r_{i+1} \tag{5.10}$$

Somit ergibt sich:

$$-E_{pot\,i} = 4\pi G \rho_i \int_{r_{i+1}}^{r_i} \frac{M_r(r)}{r} \, r^2 \, dr \tag{5.11}$$

Führt man die Integration aus, so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
-E_{pot\,i} &= G\left(2\pi M_{r\,i+1}\rho_i - \frac{8\pi^2}{3}\rho_i^2 r_{i+1}^3\right)\left(r_i^2 - r_{i+1}^2\right) \\
&+ \frac{16\pi^2 G}{15}\rho_i^2\left(r_i^5 - r_{i+1}^5\right)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

5.1.1.3 Diskretisierung der kinetischen Energie

Zur Bestimmung der kinetischen Energie ist folgendes Integral auszuwerten:

$$E_{kin} = \int_V \frac{1}{2}\rho u^2 \, dV \tag{5.13}$$

Auch hier wird das Integral über das gesamte Volumen in eine Summe von Integralen über die einzelnen Zellen zerlegt. Wieder tritt das Problem auf, daß die Dichte in der Mitte der Zelle, die Geschwindigkeit aber auf der Zelloberfläche definiert ist, sodaß eine Interpolation notwendig wird. Hierbei ist noch weniger als bei der potentiellen Energie eine bestimmte Vorschrift ausgezeichnet. Analog zur Diskretisierung der potentiellen Energie kann man den Skalar ρ in der Zelle konstant annehmen. Die Geschwindigkeit muß dann interpoliert werden, eine einfache Möglichkeit ist die lineare Interpolation.

$$u(r) = u_{i+1} + A\left(r - r_{i+1}\right) \quad \text{mit} \quad A = \frac{u_i - u_{i+1}}{r_i - r_{i+1}} \tag{5.14}$$

Die kinetische Energie in der Zelle i ist somit gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
E_{kin\,i} &= 2\pi\rho_i\left(\frac{1}{3}\left(u_{i+1} - A r_{i+1}\right)^2\left(r_i^3 - r_{i+1}^3\right)\right. \\
&+ \frac{1}{2}\left(u_{i+1}A - r_{i+1}A^2\right)\left(r_i^4 - r_{i+1}^4\right) \\
&+ \left.\frac{1}{5}A^2\left(r_i^5 - r_{i+1}^5\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

A hat hier wieder die Bedeutung des Geschwindigkeitsgradienten.

5.1.1.4 Diskretisierung der Oberflächenterme

Als Oberflächenterme treten hier die integrierte Leuchtkraft und die Arbeit des externen Drucks auf. Diese Zeitintegrale zerlegt man in eine Summe von Integralen über die einzelnen Zeitintervalle von t^n bis t^{n+1} $n = 0 \ldots m-1$.

$$\text{Abstrahlung} = 16\pi^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} H(R)R(t)^2 \, dt \tag{5.16}$$

$$\text{Druckarbeit} = 4\pi \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(P(R) + \frac{4\pi}{c} f J(R)\right) u(R)\, R(t)^2 \, dt \tag{5.17}$$

Der Abstrahlungsterm ist einfacher zu behandeln, da H auf dem Außenrand gegeben ist. Zu diskretisieren ist nur das zeitliche Integral. Dies wird im folgenden durch die Trapezregel approximiert:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} H(R)\,R(t)^2\,dt = \frac{1}{2}\left(H_1(t^{n+1})\,r_1(t^{n+1})^2 + H_1(t^n)\,r_1(t^n)^2\right)\left(t^{n+1}-t^n\right) \tag{5.18}$$

Diese Art der Diskretisierung ist von 2. Ordnung. Eine andere Möglichkeit wäre die bei Modellberechnung verwendete implizite Diskretisierung:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} H(R)\,R(t)^2\,dt = H_1(t^{n+1})\,r_1(t^{n+1})^2\left(t^{n+1}-t^n\right) \tag{5.19}$$

Diese Diskretisierung ist nur von 1. Ordnung. Aufgrund des selbstadaptiven Zeitschritts ist allerdings zu erwarten, daß die Unterschiede zwischen den beiden Diskretisierungen nicht allzu groß ausfallen da in Phasen starker Leuchtkraftschwankungen aufgrund der Konvergenzverschlechterung des Iterationsverfahrens der Zeitschritt verkleinert wird. Die Leuchtkraft selbst wird nicht zur Kontrolle des Zeitschrittes herangezogen, allerdings hat sie in der Regel zusammen mit der Geschwindigkeit entscheidenten Einfluß auf das Konvergenzverhalten der Newton-Raphson-Iteration.

Der Druckarbeitsterm verschwindet im Fall konstanten Volumens als äußerer Randbedingung ($u_1 \equiv 0$). Im Falle konstanten äußeren Drucks ist dieser Term allerdings von 0 verschieden. Zur Auswertung des Integrals muß zunächst der Gesamtdruck auf den Außenrand interpoliert werden. Da der externe Druck die Arbeit verrichten muß ist es sinnvoll hier den Außendruck einzusetzen. Dieser setzt sich zusammen aus dem zeitlich konstanten Gasdruck und dem Strahlungsdruck, der aus der Strahlungsrandbedingung zu berechnen ist. Unter Verwendung der Eddingtonapproximation $P_{rad} = \frac{1}{3}e_{rad}$ ergibt sich:

$$P_{Rand} = P_{Gas}(\rho_0, T_0) + \frac{4\pi}{3c}\left(B(T_0) + H_1(t^{n+1}) + H_1(t^n)\right) \tag{5.20}$$

Da H_1 normalerweise wesentlich kleiner ist als $B(T_0)$, die dominierenden Terme aber zeitunabhängig sind, kann man den gesamten Druckterm aus dem Integral ziehen. Verwendet man außerdem, daß der Rand lagrangesch ist, das heißt $u_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t}$, so läßt sich das verbleibende Integral mit der zeitlichen Veränderung des Gesamtvolumens identifizieren. Man erhält somit für die Druckarbeit:

$$\text{Druckarbeit} = P_{Rand}\,\frac{4\pi}{3}\left(r_1(t^{n+1})^3 - r_1(t^n)^3\right) \tag{5.21}$$

Eine solche Diskretisierung ist, obwohl physikalisch naheliegend, im allgemeinen nicht mit lokalen Diskretisierungen kompatibel, da das Gitter nur an den Rändern lagrangesch ist und somit nur dort die zeitliche Änderung des Volumens eine physikalische Bedeutung hat.

5.1.2 Abschätzungen für die potentielle und kinetische Energie

Während die Diskretisierungen der inneren Energie und der Strahlungsenergie durch die Diskretisierung der Modellgleichungen festgelegt sind, hat man bei der Approximation der potentiellen und der kinetischen Energie einige Freiheiten. Diese Freiheiten können das Ergebnis der Untersuchung wesentlich beeinflussen, da insbesondere im Fall der Existenz des inneren Kerns die potentielle Energie betragsmäßig einige Größenordnungen über der momentanen Totalenergie liegt. Es gilt nun diese Freiheiten abzuschätzen. Diese Abschätzung erfolgt unter Verwendung des des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und einiger Annahmen.

Gesucht wird hier nach einer Abschätzung für $\int f(r) dV$, wobei dV durch $4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi}{3} dr^3$ gegeben ist. Die Integranden f sind hier durch ρu^2 und $\frac{M}{r}\rho$ gegeben. Zur Vereinfachung sei weiterhin angenommen, daß $f(r) \geq 0$ im gesamten Integrationsgebiet, was für die abzuschätzenden Integranden zutrifft. Es gilt nun die folgende Abschätzung:

$$\min_{r_i \leq r \leq r_{i+1}} (f(r)) \;\leq\; \frac{1}{\Delta V_j} \int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r)\, dV \;\leq\; \max_{r_i \leq r \leq r_{i+1}} (f(r)) \tag{5.22}$$

Dies gilt genaugenommen nur dann, falls f stetig ist; durch die Einführung der künstlichen Viskosität hat man allerdings erreicht, daß die hier zu betrachtenden Integranden stetig sind. Nimmt man weiterhin an, daß der Integrand über die Zelle monoton ist, so gilt der Satz, daß f seine Extremwerte an den Zellrändern annimmt. Dies trifft in fast allen Zellen zu. Bei der kinetischen Energie ist die wesentliche Ausnahme die Zelle, in der die Abbremsung der einfallenden Hülle im Akkretionsstoß beginnt. Diese Zelle enthält aber aufgrund des adaptiven Gitters, das in diesem Bereich eine hohe Auflösung bewirkt, sehr wenig Materie und damit auch sehr wenig kinetische Energie verglichen mit den Zellen, die weiter stromaufwärts vor dem Stoß liegen. Bei der potentiellen Energie liegt die wichtigste Ausnahme in den äußeren Schichten des protostellaren Kerns in der Zelle die das Maximum der potentiellen Energie pro Volumen $\frac{M}{r}\rho$ enthält. Die Rechnungen zeigen allerdings, daß dieses Maximum nicht besonders scharf ist, einige benachbarte Zellen haben eine spezifische potentielle Energie, die sich nur um wenige Prozent von der im Maximum unterscheidet. Deshalb ist zu erwarten, daß sich das wirkliche Maximum der spezifischen Energie nur wenig von dem größeren der Zellrandwerte unterscheidet. Da eine genauere Behandlung, zum Beispiel durch Splineinterpolation, recht aufwendig ist ohne wesentliche Verbesserungen der Genauigkeit der Abschätzung zu bewirken, wurde eine solche nicht durchgeführt.

Nun sind nur Teile der beiden Integranden wirklich auf den Zellrändern gegeben, nämlich u^2 und $\frac{M}{r}$. Die Dichte muß auf den Zellrand interpoliert werden, die einfachste Lösung ist das arithmetische Mittel der Dichten der beiden angrenzenden Zellen zu wählen. Man erhält somit:

$$\begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}\left(\rho u^2\right)_j = \begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}\left(\frac{\rho_{j+1}+\rho_j}{2}u_{j+1}^2\,,\;\frac{\rho_j+\rho_{j-1}}{2}u_j^2\right) \tag{5.23}$$

$$\begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}\left(\frac{M}{r}\rho\right)_j = \begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}\left(\frac{M_{j+1}}{r_{j+1}}\frac{\rho_{j+1}+\rho_j}{2}\,,\;\frac{M_j}{r_j}\frac{\rho_j+\rho_{j-1}}{2}\right) \tag{5.24}$$

Für die zentrale Zelle ist diese Abschätzung der potentiellen Energie allerdings nicht sinnvoll, da der Quotient aus Masse und Radius im Zentrum bei $r = 0$ nicht mehr definiert ist. Da die potentielle Energie der zentralen Zelle einige Größenordnungen kleiner als die der Zellen im Kernmantel ist, ist es ausreichend, die minimale und maximale potentielle Energie gleich der potentiellen Energie einer homogenen Kugel der Zentraldichte mit Radius r_{N-1} zu setzen:

$$\begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}\left(\int\frac{M}{r}\rho\,dV\right)_{N-1} = \frac{3}{5}\frac{M_{N-1}^2}{r_{N-1}} \tag{5.25}$$

Für die kinetische Energie existiert dieses Problem nicht wegen der Festlegung der Zentralgeschwindigkeit auf 0 aufgrund der inneren Randbedingung, das Minimum der Abschätzung wird dadurch auf 0 festgelegt. Für die Summe aus potentieller und kinetischer Energie gilt somit:

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}&\left(E_{kin}+E_{pot}\right) = \\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\begin{matrix}\min\\\max\end{matrix}\left(\frac{\rho_{j+1}+\rho_j}{2}u_{j+1}^2\,,\;\frac{\rho_j+\rho_{j-1}}{2}u_j^2\right)\Delta V_j\right)\\ -\;&G\sum_{i=1}^{N-2}\left(\begin{matrix}\max\\\min\end{matrix}\left(\frac{M_{j+1}}{r_{j+1}}\frac{\rho_{j+1}+\rho_j}{2}\,,\;\frac{M_j}{r_j}\frac{\rho_j+\rho_{j-1}}{2}\right)\Delta V_j\right)\\ -\;&\frac{3}{5}G\frac{M_{N-1}^2}{r_{N-1}}\end{aligned} \tag{5.26}$$

Dieses Toleranzgebiet läßt sich nun mittels der Oberflächenterme in ein Toleranzgebiet für die Anfangstotalenergie $\tilde{E}_{Tot\,0}$ zurückrechnen. Liegt die wirkliche Anfangstotalenergie $E_{Tot\,0}$ innerhalb dieses Toleranzgebietes, so bedeutet dies, daß zu diesem Zeitpunkt eine konsistente Diskretisierung der potentiellen und der kinetischen Energie existiert, bei der es *keine* Verletzung der Totalenergieerhaltung gibt. Allerdings kann es passieren, daß diese Diskretisierung nicht zeitlich fest ist, was bedeuten soll, daß zu verschiedenen Zeitpunkten einer Modellsequenz verschiedene Diskretisierungen notwendig sind, um die Totalenergieerhaltung zu gewährleisten.

Die hier ausgeführte Abschätzung ist allerdings nicht die einzig mögliche. Man kann auch, da beide abzuschätzenden Integranden die Dichte als Faktor enthalten, diese mit dem Volumenelement zu einem Massenelement zusammenfassen, was der Philosophie eines lagrangeschen Gitters mit der Massenvariablen als unabhängiger Variablen entspricht.

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} u^2 \rho \, dV = \int_{M_i}^{M_{i+1}} u^2 \, dM \tag{5.27}$$

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{M}{r} \rho \, dV = \int_{M_i}^{M_{i+1}} \frac{M}{r} \, dM \tag{5.28}$$

Die weitere Abschätzung erfolgt wie vorher, allerdings stellt sich hier nicht das Problem die Dichte auf den Zellrand interpolieren zu müssen. Als Abschätzung erhält man:

$$\begin{aligned}
\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} (E_{kin} + E_{pot}) = \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix} \left(u_{j+1}^2 \, , \, u_j^2\right) \rho_j \Delta V_j \right) \\
- & G \sum_{i=1}^{N-2} \left(\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix} \left(\frac{M_{j+1}}{r_{j+1}} \, , \, \frac{M_j}{r_j} \right) \rho_j \Delta V_j \right) \\
- & \frac{3}{5} G \, \frac{M_{N-1}^2}{r_{N-1}}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Welche Abschätzung größere Toleranzgebiete liefert hängt von dem Monotonieverhalten der Dichte ab. Weist die Dichte in einer Zelle dieselbe Monotonie auf wie u^2 beziehungsweise $\frac{M}{r}$, so liefert die erste Abschätzung ein größeres Intervall. Da u^2 und $\frac{M}{r}$ allerdings nicht in der gesamten protostellaren Wolke eine Monotonie aufweisen ist eine detaillierte Aussage einem numerischen Experiment vorbehalten.

5.2 Lokale Totalenergieuntersuchung

Basis der lokalen Totalenergieuntersuchung ist die über ein Kontrollvolumen integrierte Totalenergiegleichung. Da die Totalenergie ein Skalar ist, ist es sinnvoll diese nach der Philosophie des gestaffelten Gitters im Inneren einer Zelle zu definieren und diese Zelle als Kontrollvolumen zu verwenden. Die lokale Totalenergiegleichung lautet:

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta V_j(t^{n+1})} e_{tot}(t^{n+1}) \, dV - \int_{\Delta V_j(t^n)} e_{tot}(t^n) \, dV & + \\
\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial \Delta V_j} e_{tot} u_{rel} \, dO \, dt & + \\
\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial \Delta V_j} \left(\left(P + \frac{4\pi}{c} f J + Q_r^r \right) u + 4\pi H \right) dO \, dt & = 0
\end{aligned} \tag{5.30}$$

mit

$$e_{tot} = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e + \frac{4\pi}{c} J - G \frac{M_r \rho}{r} \tag{5.31}$$

Hierbei ist die rr–Komponente des viskosen Drucktensors gegeben durch (siehe TsW[79]):

$$Q_r^r = (\lambda r)^2 \rho \,\mathrm{div}(u) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{3} \,\mathrm{div} u \right) \tag{5.32}$$

$\partial \Delta V_j$ ist hier die Oberfläche der Zelle j. Setzt man die numerisch erhaltene Lösung in eine diskrete Form der Gleichung (5.30) ein, so wird in der Regel auf der rechten Seite aufgrund der Diskretisierungsfehler nicht 0 stehen. Man kann dann die rechte Seite als eine numerische Energieerzeugung oder Vernichtung auffassen, da beispielsweise auch Energieerzeugung durch Kernreaktionen dort als Term erscheinen würde.

An eine Diskretisierung dieser Gleichung zu ihrer Kontrolle können prinzipiell schwächere Forderungen als bei ihrer Verwendung zur Modellberechnung gestellt werden. So könnte man hier auf die Forderung der Stabilität verzichten. Falls man dann allerdings von einer Lösung fordern würde, daß sie alle 3 Energiegleichungen erfüllt, bedeutete dies, daß es keinen Unterschied (von Rundungsfehlern einmal abgesehen) machen würde, welche 2 der 3 Gleichungen man als unabhängige Energiegleichungen verwendet. Daraus folgt dann aber, daß, falls man eine instabile Diskretisierung der Totalenergiegleichung verwenden würde, im Fall der Verwendung der Totalenergiegleichung zur Modellberechnung instabile Lösungen möglich wären. Da diese Lösungen aber unabhängig von der Wahl der Energiegleichungen wären, hiese dies, daß auch mindestens eine der Diskretisierungen der beiden anderen Energiegleichungen instabil sein müsste. Deshalb ist es sinnvoll hier nur stabile Diskretisierungen der Totalenergiegleichung zu betrachten. Da die Totalenergiegleichung auch direkt zur Rechnung verwendet werden soll, ist die Abweichung von der dort verwendeten Diskretisierung von besonderem Interesse.

Aus der Forderung der Stabilität folgt zunächst, daß die Diskretisierung implizit oder zumindest teilimplizit sein muß, da man die vorherige Überlegung mit einer beliebigen Zeitschrittfolge machen kann, sodaß Stabilität für beliebige Zeitschrittgrößen zu fordern ist. Weiterhin sind, um Vergleichbarkeit mit der globalen Analyse zu gewährleisten, die Oberflächenterme in Erhaltungsform zu diskretisieren.

5.2.1 Diskretisierung der Volumenterme

Die Diskretisierung der Volumenterme kann prinzipiell wie bei der globalen Untersuchung der Totalenergieerhaltung erfolgen. Schon dort wurden die Integrale über die gesamte Wolke in eine Summe von Integralen über die einzelnen Zellen zerlegt. Somit würde die daraus folgende Diskretisierung lauten:

$$\int_{\Delta V_i(t^{n+1})} e_{tot}(t^{n+1})\, dV =$$

$$
\begin{aligned}
& 2\pi\rho_i \left[\frac{1}{3}\left(u_{i+1} - Ar_{i+1}\right)^2 \left(r_i^3 - r_{i+1}^3\right)\right. \\
+ \quad & \frac{1}{2}\left(u_{i+1}A - r_{i+1}A^2\right)\left(r_i^4 - r_{i+1}^4\right) \\
+ \quad & \left.\frac{1}{5}A^2\left(r_i^5 - r_{i+1}^5\right)\right] \\
+ \quad & \rho_i e_i \, \Delta V_i \; + \; \frac{4\pi}{c} J_i \, \Delta V_i \\
- \quad & G\left[\left(2\pi M_{r\,i+1}\rho_i - \frac{8\pi^2}{3}\rho_i^2 r_{i+1}^3\right)\left(r_i^2 - r_{i+1}^2\right)\right. \\
+ \quad & \left.\frac{16\pi^2}{15}\rho_i^2\left(r_i^5 - r_{i+1}^5\right)\right] \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

mit

$$
A = \frac{u_i - u_{i+1}}{r_i - r_{i+1}} \qquad (5.34)
$$

Diese Diskretisierung hat den Vorteil der direkten Vergleichbarkeit mit der globalen Untersuchung, allerdings will man diese Diskretisierung zur Berechnung von Modellen wählen, ist der Aufwand der Realisierung recht hoch. Deshalb wird dort eine einfachere Approximation der potentiellen und kinetischen Energie verwendet. Diese liefert, wie später gezeigt wird, im wesentlichen gleiche Resultate.

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Delta V_i(t^{n+1})} e_{tot}(t^{n+1}) \, dV = \\
& \left(\frac{1}{2}\rho_i\left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}\right)^2 + \rho_i e_i + \frac{4\pi}{c}J_i - G\frac{M_i + M_{i+1}}{r_i + r_{i+1}}\rho_i\right)\Delta V_i \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

Wichtig ist auch hier die gleiche Diskretisierung der inneren und der Strahlungsenergie wie bei der Berechnung der Modellsequenz um die Konsistenz zu gewährleisten.

5.2.2 Diskretisierung der Advektionsterme

Aufgrund der Stabilitätsforderung werden die Advektionsterme mittels des Donor-Cell-Schemas diskretisiert. Ein weiterer Grund dafür ist, daß in ihren Erhaltungsgleichungen sowohl die innere als auch die Strahlungsenergie mit diesem Schema advektiert werden, dadurch werden künstliche Inkonsistenzen vermieden. Um numerische Probleme im Fall großer Advektionsterme bei geringer Totalenergie in der jeweiligen Zelle zu verhindern wird auch hier wie bei den anderen Erhaltungsgleichungen die Formulierung mittels der Massenvariablen verwendet (siehe WiN[86]).

$$
\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial \Delta V_i} e_{tot} u_{rel} \, dO \, dt \; =
$$

$$\Delta_{DC}\left(\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u_i+u_{i+1}}{2}\right)^2+e_i\right.\right.$$
$$+\quad \left.\left.\frac{4\pi}{c}\frac{J_i}{\rho_i}-G\frac{M_i+M_{i+1}}{r_i+r_{i+1}}\right]\delta M_i\right) \tag{5.36}$$

Sowohl am Außenrand als auch im Zentrum der Wolke verschwinden die Advektionsterme, da dort die Relativgeschwindigkeiten verschwinden. Für die andere Diskretisierungsmöglichkeit der Volumenterme sind die spezifische kinetische und potentielle Energie durch die entsprechenden Ausdrücke zu ersetzen.

5.2.3 Diskretisierung der restlichen Oberflächenterme

Der am einfachsten zu behandelnde Term ist der Leuchtkraftterm. Der Strahlungsfluß ist auf der Zelloberfläche gegeben, sodaß keine Interpolation notwendig ist.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\partial\Delta V_i} 4\pi H\, dO\, dt = (4\pi)^2\,\Delta\left(H_i r_i^2\right)\,\delta t \tag{5.37}$$

Der Druckarbeitsterm ist schwieriger zu behandeln. Sowohl der Gasdruck P als auch der Strahlungsdruck $\frac{4\pi}{c}fJ$ sind im Inneren der Zellen gegeben und müssen deshalb auf die Oberfläche interpoliert werden. Eine Behandlung wie die des entsprechenden Oberflächenterms der globalen Untersuchung ist hier nicht möglich, da die zeitliche Änderung des Zellvolumens keine *physikalische* Bedeutung hat. Die Interpolatationsvorschrift kann die Stabilität des Verfahrens beeinflußen. Im Falle eines ortsfesten eulerschen Gitters kann man diesen Druckarbeitsterm mit dem Advektionsterm zusammenfassen, die advektierte Größe ist dann die Summe aus kinetischer und potentieller Energie sowie der Gesamtenthalpie $h = h_{Gas} + h_{Rad}$. In Upwindverfahren, die die Totalenergiegleichung auf einem eulerschen Gitter verwenden, wird für den gesamten Advektionsterm (einschließlich Druck) eine Upwind-Diskretisierung gewählt (siehe Roa[76]). Daraus könnte man folgern, daß es auch hier notwendig ist, den Druck der jeweils stromaufwärtsgelegenen Zelle zu verwenden. Ob dies wirklich zur Stabilisierung notwendig ist zeigt erst die Verwendung der Totalenergiegleichung zur Modellberechnung. Da eine solche einseitige Gewichtung aber kaum von einem Verfahren, das eine von der Richtung der Geschwindigkeiten unabhängige Diskretisierung der Druckterme in der inneren Energiegleichung und der Bewegungsgleichung verwendet, zu erfüllen ist, wird der Druck durch Bildung des arithmetischen Mittels der Werte benachbarter Zellen auf deren gemeinsamen Rand interpoliert.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\partial\Delta V_i} Pu\, dO\, dt = 4\pi\delta t\Delta\left(\frac{P_i+P_{i-1}}{2}u_i r_i^2\right) \tag{5.38}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\partial\Delta V_i} \frac{4\pi}{c} fJu\, dO\, dt = \frac{(4\pi)^2}{c}\delta t\Delta\left(\frac{f_iJ_i+f_{i-1}J_{i-1}}{2}u_i r_i^2\right) \tag{5.39}$$

Der Nachweis der Stabilität dieser Diskretisierung wird später erbracht.

Zusätzlich zur Gas– und Strahlungsdruckarbeit tritt auch noch ein viskoser Transportterm auf. Dieser Term kann prinzipiell ähnlich wie die beiden vorherigen Druckarbeitsterme behandelt werden. Dazu ist die rr–Komponente Q^r_r des viskosen Drucktensors im Inneren einer Zelle zu definieren. Der Vorteil eines solchen Vorgehens ist, daß mit der Dichte, dem Gradienten und der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes die wesentlichen Faktoren dieses Terms im Inneren der Zellen definiert sind. Nur der Radiusfaktor (Skalenfaktor) ist zu interpolieren. Da die künstliche Viskosität nur in einem räumlich sehr begrenzten Gebiet wichtig wird, ist zu erwarten, daß die Art der Mittelung nur geringen Einfluß auf das Ergebnis hat. Somit ergibt sich:

$$Q^r_{r\,i} = 3\lambda^2 \frac{(r_i + r_{i+1})^2}{4} \rho_i \frac{\Delta(u_i r_i^2)}{\Delta r_i^3} \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta r_i} - \frac{\Delta(u_i r_i^2)}{\Delta r_i^3} \right) \tag{5.40}$$

Beachten muß man allerdings, daß die künstliche Viskosität nur im Falle von Kompression ($\operatorname{div} u \leq 0$) als zusätzlicher Term auftritt. Dies erfordert gewisse Vorsicht um die Erhaltungsform nicht zu verletzen. Eine einfache Möglichkeit dies zu verhindern ist:

$$\begin{aligned}
Q_L &= \begin{cases} \frac{Q^r_{r\,i+1} + Q^r_{r\,i}}{2} & \text{falls} \quad \Delta(u_{i+1} r_{i+1}^2) \leq 0 \ \vee \ \Delta(u_i r_i^2) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
Q_R &= \begin{cases} \frac{Q^r_{r\,i} + Q^r_{r\,i-1}}{2} & \text{falls} \quad \Delta(u_i r_i^2) \leq 0 \ \vee \ \Delta(u_{i-1} r_{i-1}^2) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial \Delta V_i} Q^r_r u \, dO \, dt = 4\pi \, \delta t \left(Q_R u_i r_i^2 - Q_L u_{i+1} r_{i+1}^2 \right) \tag{5.41}$$

Um viskosen Transport über den Außenrand zu verhindern verschwindet dort Q_R.

Kapitel 6

Die numerischen Ergebnisse

Die im vorherigen Kapitel beschriebenen Energietests wurden auf verschiedene Modellsequenzen, die mit dem beschriebenen numerischen Verfahren berechnet wurden, angewandt. Bisherige Erfahrungen mit diesem Verfahren zeigten, daß sich sowohl die aufgrund der linearen Stabilitätsanalyse erwarteten Instabilitäten der äußeren Kerne (Kappamechanismus) als auch die der inneren Kerne (Stoßfrontinstabilität durch kritisches Kühlen) zeigen und sich diese anfangs entsprechend der Erwartungen der linearen Analyse entwickeln (Bal[89]). Allerdings können beide Typen von Instabilitäten zur vollständigen Zerstörung der jeweiligen Kerne führen. Weiterhin zeigte sich, daß die Entwicklung von der Anzahl der Gitterpunkte und den Parametern des adaptiven Gitters abhängt. So zeigten sich die Instabilitäten des ersten Kerns erst bei zeitlich nicht gedämpftem Gitter und einer Gitterpunktanzahl von 448 (Bal[89]). Aus der Tatsache, daß die Entwicklung von der Anzahl der Gitterpunkte abhängt, und somit Rechnungen unterschiedlicher Gitterpunktanzahl nicht vergleichbar sind, ergibt sich die Forderung das Problem zu reduzieren. Einerseits muß die Vergleichbarkeit von Modellsequenzen mit unterschiedlicher Gitterpunktanzahl gewährleistet sein, andererseits noch destruktive Instabilitäten, die möglicherweise durch künstliche Totalenergieerzeugung verursacht oder verstärkt werden, erhalten bleiben. Eine Möglichkeit dies zu tun besteht in der Annahme einer konstanten Opazität. Durch diese Vereinfachung kann der Kappamechanismus im ersten Kern nicht wirken. Das Stabilitätskriterium (im 1-Zonen Modell) lautet für diesen Fall (siehe Wuc[89]): $3\Gamma_1 \nabla_{ad} > 1$ mit $\nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S$. Diese Bedingung ist für Temperaturen zwischen etwa 100 K (Ende der H_2-Rotationsanregung) und 1500 K (Beginn der H_2-Dissoziation) bei Dichten die typisch für erste Kerne sind erfüllt. Der erste Kern kollabiert deshalb unabhängig von der Gitterpunktanzahl. Die Rechnungen zeigen nun, daß unter dieser Annahme schon bei der relativ groben Auflösung von 150 Gitterpunkten der innere Kern instabil ist, die Vergleichbarkeit mit höheren Auflösungen ist somit gegeben. Der erste Teil dieses Kapitels besteht somit aus dem Vergleich der Totalenergieerhaltung verschiedener Modellsequenzen, die unter der Voraussetzung konstanter Opazität mit identischen Anfangsbedingungen aber verschiedenen Parametern des Gitters und der künstlichen Viskosität berechnet wurden. Im zweiten Teil werden Modelle mit realen Materialfunktionen untersucht.

6.1 Rechnungen mit konstanter Opazität

Ziel dieser Modellreihen ist es nicht den sphärisch symmetrischen protostellaren Kollaps in allen physikalischen Details zu studieren, sondern das numerische Verfahren zu testen. Deshalb wird auch konvektiver Energietransport, der in den inneren Kernen wichtig werden kann, nicht berücksichtigt. Eine weitere Vereinfachung durch Verwendung der Zustandsgleichung eines idealen Gases ist allerdings nicht möglich, da dann die Entwicklung auch qualitativ von der Entwicklung mit realen Materialfunktionen abweichen würde: Der Kollaps des ersten Kernes bliebe aus, da der massengemittelte Adiabatenexponent Γ_1 immer über dem für dynamische Stabilität kritischen Wert von $\frac{4}{3}$ bliebe. Obwohl nach der linearen Stabilitätsanalyse immer noch Stoßfrontinstabilitäten vorhanden wären, würde deren Entwicklung sich von der realer innerer Kerne doch drastisch unterscheiden, da in diesem Falle keine Umsetzung von innerer Energie aus nichtkinetischen Freiheitsgraden (Ionisations– und Dissoziationsenergie) in kinetische Energie der Auswärtsbewegung möglich ist. Dieser Unterschied könnte die Stärke der Instabilitäten entscheident modifizieren.

Um die Vergleichbarkeit der einzelnen Rechnungen untereinander zu gewährleisten, starten diese mit identischen Anfangsbedingungen. Startmodell ist eine Jeans-instabile interstellare Wolke mit folgenden Parametern:

$$M_0 = 1M_\odot = 1.989 \cdot 10^{33}\,\mathrm{g} \tag{6.1}$$
$$\rho_0 = 10^{-19}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \tag{6.2}$$
$$T_0 = 10\,\mathrm{K} \tag{6.3}$$
$$\kappa = 1\,\mathrm{cm^2\,g^{-1}} \tag{6.4}$$

Daraus folgt für den Radius der Wolke:

$$R_0 = 1.6808 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm} \tag{6.5}$$

Diese Wahl des Anfangsmodells entspricht einer anfänglichen Freifallzeit von:

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\,\pi}{32\,G\,\rho_0}} = 6.643 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s} \tag{6.6}$$

Als Randbedingung wurde ein zeitlich konstanter Außendruck gewählt. Der aus der Anfangsbedingung des Druckgleichgewichts mit dem umgebenden Medium resultierende Außendruck beträgt:

$$P_{ext} = 3.626 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{dyn\,cm^{-2}} \tag{6.7}$$

Die anfängliche Totalenergie beträgt (exakt):

$$E_{Tot} = 1.6441 \cdot 10^{42}\ \mathrm{erg} \tag{6.8}$$

Diese verteilt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} E_{rad} &= 1.505 \cdot 10^{42} && \mathrm{erg} \\ E_{kin} &= 0 && \mathrm{erg} \\ E_{int} &= 1.082 \cdot 10^{42} && \mathrm{erg} \\ E_{pot} &= -9.424 \cdot 10^{41} && \mathrm{erg} \end{aligned}$$

Bei allen Modellsequenzen wurde der räumliche Gittersteifeparameter $\alpha = 2$ gesetzt. Größen, die von der Gittergleichung aufgelöst werden, sind die Logarithmen

- der Dichte ρ
- der spezifischen inneren Energie e
- der Absorption pro Länge $\kappa\rho$
- der Kombination $\frac{u^2}{e} + 1$.

Die Wichtungskoeffizienten $g_k, \quad k = 1 \ldots 4$ wurden alle gleich 1 gesetzt.

Modellsequenzen wurden mit unterschiedlichen räumlichen Auflösungen von 150, 300, 512, 800 und 1200 Punkten gerechnet. Variiert wurden weiterhin der Parameter der künstlichen Viskosität λ und der zeitliche Gittersteifeparameter g_t. Bei Letzterem ist zu beachten, daß erst ab 512 Gitterpunkten $g_t = 0$ gewählt werden konnte, da es sonst schon früh in der Entwicklung (isotherme Phase) zu Konvergenzproblemen des Newton-Raphson-Lösers kommt die eine Fortsetzung der Rechnung unmöglich machen. Bei niedrigeren Auflösungen erwies sich allerdings die Wahl von $g_t = 10^{-5}$ als ausreichend um diese Probleme zu verhindern. Dieser Wert von g_t ist hinreichend klein um das Gitter bei Schwingungen eines Kernes, die sich auf der Freifallzeitskala des Kernes abspielen, ausreichend schnell reagieren zu lassen (Die Zeitkonstante des Gitters ist $10^{-5}\tau_{ff}(\rho_c)$).

Im einzelnen wurden Modellsequenzen mit folgenden Parameterkombinationen berechnet:

Punkte	g_t	λ
150	10^{-5}	10^{-2}
300	10^{-5}	10^{-2}
	10^{-5}	10^{-3}
512	10^{-5}	10^{-3}
	0	10^{-2}
	0	10^{-3}
800	0	10^{-3}
1200	0	10^{-2}

Im Folgenden soll zunächst die unterschiedliche Entwicklung der Modellreihen diskutiert werden, dann deren Totalenergieerhaltung.

6.1.1 Die Entwicklung der Modellreihen

6.1.1.1 Das Modell mit 150 Gitterpunkten

Anfänglich entwickelt sich das Modell ähnlich wie im klassischen Bild. Die Wolke kollabiert stark nichthomolog. Es stellt sich das typische Bild eines Dichteplateaus im Zentrum mit einem $\rho \sim r^{-2}$ Dichteverlauf am äußeren Rand ein (Ähnlichkeitslösung nach Shu[77]). Die Temperatur ist zunächst räumlich konstant; da die Wolke anfangs optisch dünn ist (die optische Tiefe beträgt anfangs $1.7 \cdot 10^{-2}$), kann die entstehende Kompressionswärme ungehindert abgestrahlt werden. Erst als das Zentrum aufgrund der ansteigenden Dichte optisch dick wird, beginnt dort die Temperatur zu steigen. Dies passiert schon bei geringeren Dichten als in Modellen mit realistischen Materialfunktionen da aufgrund der Wahl von $\kappa = 1$ cm^2 g^{-1} die Absorption wesentlich höher ist als bei Verwendung der tabellierten Opazitäten, die bei einer Temperatur von 10 K einen Wert von $\kappa = 5 \cdot 10^{-2}$ cm^2 g^{-1} vorgeben. Über dem sich so bildenden Kern steilt sich die einwärtsgelaufene Kompressionswelle zu einem Stoß auf. Das Modell 300 in Abb. (6.1) zeigt den Zustand der Wolke kurz nach Ausbildung des Stoßes. Seit Beginn des Kollapses sind 242 637 Jahre entsprechend $1.152\, t_{ff\ Anfang}$ vergangen. Innerhalb des Kernes sind 1.17% der Gesamtmasse von 1 $M_\odot$. Die Zentraltemperatur hat 300 K erreicht, sodaß die Rotationsanregung des Wasserstoffs beendet ist, was man auch am Verlauf von Γ_1 erkennen kann, das innen einen Wert von 1.42 annimmt, was nahe bei dem für ein ideales Gas mit 5 Freiheitsgraden zu erwartenden Wert von 1.4 liegt, der wahre Wert liegt durch die He-Beimischung höher, da Helium als einatomiges Gas mit nur 3 Freiheitsgraden alleine ein Γ_1 von $\frac{5}{3}$ hat. Der Bereich in dem die H_2-Rotationsanregung stattfindet ist durch den Abfall von Γ_1 an der Position des Stoßes gekennzeichnet. Die einfallende Hülle erreicht kurz vor dem Stoß eine Machzahl von 2.5. Die Leuchtkraft von $9.7 \cdot 10^{-3}$ $L_\odot$ stromaufwärts des Stoßes stammt zu etwa $\frac{1}{4}$ aus der Kontraktion des Kernes und zu etwa $\frac{3}{4}$ aus dem Stoß selbst. Der Kern erwärmt sich aufgrund der Kontraktion bis die Temperatur der H_2-Dissoziation erreicht ist. Dies ist etwa 405 Jahre nach der Ausbildung des Stoßes um den ersten Kerns gegeben. Zu diesem Zeitpunkt setzt eine dynamische Instabilität ein, die zu einem Kollaps des Kernes führt.

Abbildung (6.2) zeigt die Wolke kurz nach Eintritt des zweiten Kollapses. Man erkennt im Geschwindigkeitsprofil im Inneren des ersten Kerns die einwärtslaufende Kompressionswelle, die zu diesem Zeitpunkt gerade noch subsonisch ist. Innerhalb des ersten Kernes befinden sich $2.45 \cdot 10^{-2}$ $M_\odot$. Die Machzahl des den Kern anströmenden Gases hat sich mittlerweile auf 4.0 erhöht. Im Inneren des Kerns ist Γ_1 aufgrund der Wasserstoffdissoziation mit Werten um 1.15 deutlich kleiner als der für dynamische Stabilität

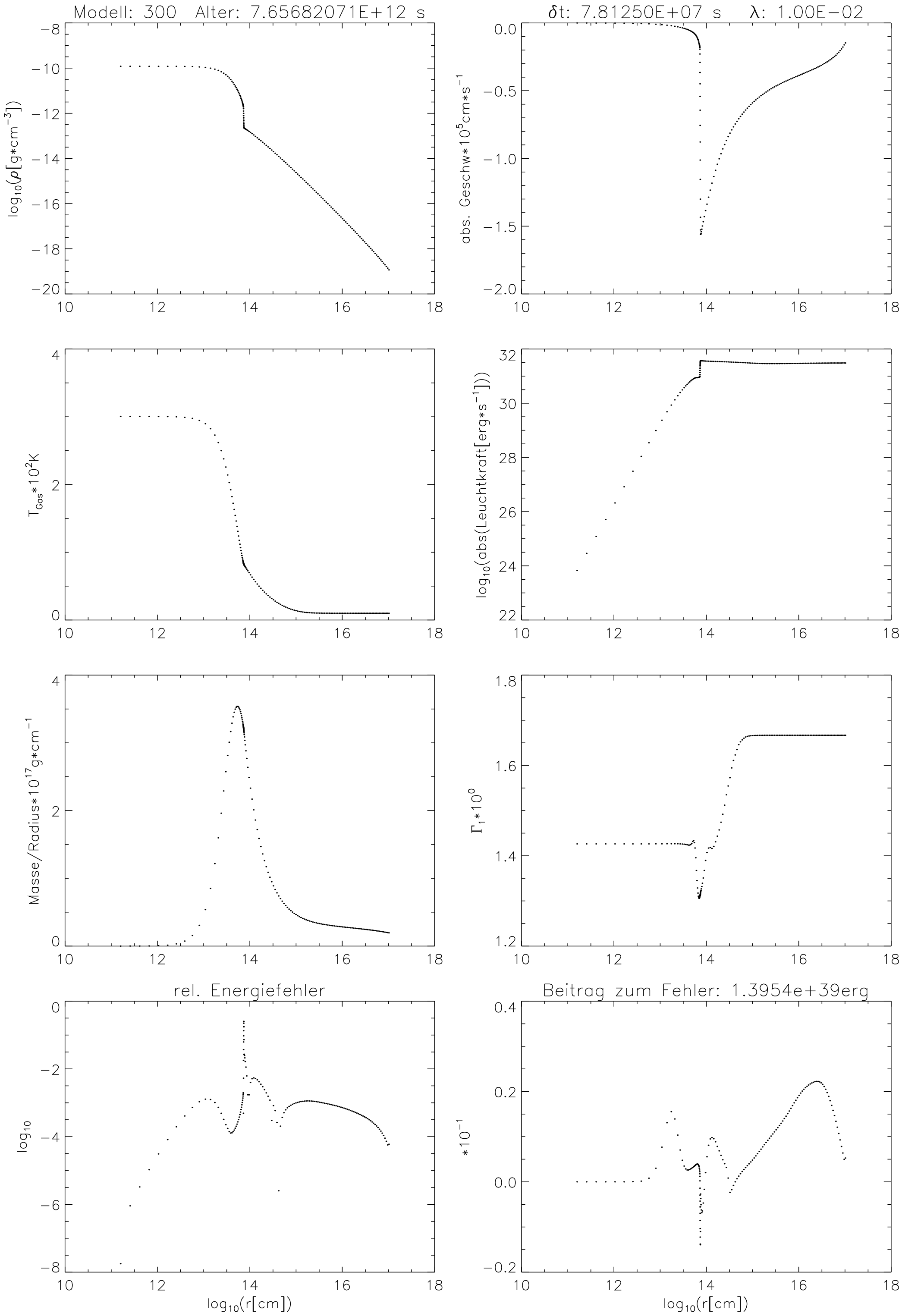


Abbildung 6.1: Modell 300 der Sequenz mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Beginn der Akkretion auf den ersten Kern.

kritische Wert von $\frac{4}{3}$. Die Zentraldichte beträgt bereits $6.4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, die Zentraltemperatur 3390 K.

Der zweite Kollaps wird bei einer Zentraldichte von $1.2 \cdot 10^{-2}$ g cm^{-3} gestoppt. Es kommt noch zu einer leichten Auswärtsbewegung als Folge des Stoppens des Kollapses (Kernbounce). Der innere Kern relaxiert allerdings auf einer Zeitskala weniger Tage (entsprechend der Schallaufzeit durch den Kern) und beginnt die Reste des äußeren Kernes zu akkretieren. Bis hierhin entspricht die Entwicklung dem, was man aufgrund des klassischen Bildes der Sternentstehung erwartet. Abb. (6.3) zeigt die Wolke am Ende dieser Phase, 7.58 Jahre nach dem Stoppen des zweiten Kollapses. Der innere Kern enthält bereits $2.35 \cdot 10^{-2}\ M_{\odot}$, der Zeitschritt ist wieder auf etwa 2 Monate gestiegen. In der Leuchtkraftdarstellung erkennt man innerhalb des Kerns kleine Störungen, die Leuchtkraft wechselt mehrfach das Vorzeichen. Die Geschwindigkeit ist allerdings überall im inneren Kern negativ, ebenso $\mathrm{div}(u)$. In der Temperaturstruktur erkennt man ein kleines lokales Maximum im Kern bei $r = 6 \cdot 10^{10}$ cm. Da der Temperaturgradient dort sein Vorzeichen wechselt, kehrt auch die Leuchtkraft wegen der dort gültigen Diffusionsnäherung $L \sim \frac{\partial}{\partial r} T^4$ ihr Vorzeichen um. In dem Verlauf von Γ_1 erkennt man von außen kommend die H_2-Rotationsanregungszone bei $r \approx 10^{14}$ cm, die Wasserstoff-Dissoziationszone mit ihrem tiefen Minimum von 1.09 bei $r \approx 2.2 \cdot 10^{12}$ cm und die Wasserstoff-Ionisationszone bei $r \approx 6 \cdot 10^{11}$ cm. Die optische Tiefe $\Delta\tau_j$ der Zellen im inneren Akkretionsstoß ist von der Größenordnung 1, sodaß hier keine Kühlzone mit ihrem Gastemperaturmaximum erkennbar ist[1]. Am äußeren Stoß ist eine Kühlzone aufgelöst, die optische Tiefe der Zellen ist dort von der Größenordnung 10^{-2}.

1.1 Jahre nach dem Modell 750 kommt es im Zentrum des inneren Kerns zu einer Expansionsbewegung, $\mathrm{div}(u)$ kehrt sein Vorzeichen um. Dies geschieht obwohl Γ_1 überall, und damit auch im Massenmittel, in diesem innersten Bereich größer als $\frac{4}{3}$ ist, also keine dynamische Instabilität vorliegt. Diese Expansionszone breitet sich innerhalb weniger Wochen nach außen über den gesamten inneren Kern aus. Hinter dem Akkretionsstoß erreicht sie eine Zone in der aufgrund von Wasserstoffionisation Γ_1 unter $\frac{4}{3}$ liegt. Dort wird die Störung verstärkt und es kommt zu einer massiven Auswärtsbewegung. Abbildung (6.4) zeigt die Wolke während der Expansionsphase, 4.4 Monate nach Beginn der Explosion. Die auswärtslaufende Stoßfront hat den äußeren Stoß um den ehemaligen ersten Kern noch nicht erreicht. Die Zentraldichte hat bereits um etwa 3 Zehnerpotenzen auf $1.3 \cdot 10^{-4}$ g cm^{-3} abgenommen, die Temperatur um fast 1 Zehnerpotenz auf 5560 K. Hinter dem inneren Stoß bewegt sich die Materie mit $2.2 \cdot 10^{6}$ cm s^{-1} nach außen, was einer lokalen Machzahl von 6.2 entspricht. In der Leuchtkraftstruktur sieht man in der Hülle bei $r = 2 \cdot 10^{16}$ cm die durch die Explosion verursachte Lichtfront. Da die Leuchtkraft nicht von der Gittergleichung aufgelöst wird, ist die Lichtfront durch den diffusiven Charakter der Donor-Cell Advektion

[1]Die Bedingung für das Auflösen einer Kühlzone ist $\Delta\tau_j < 10^{-2}$ (siehe Bal[89]).

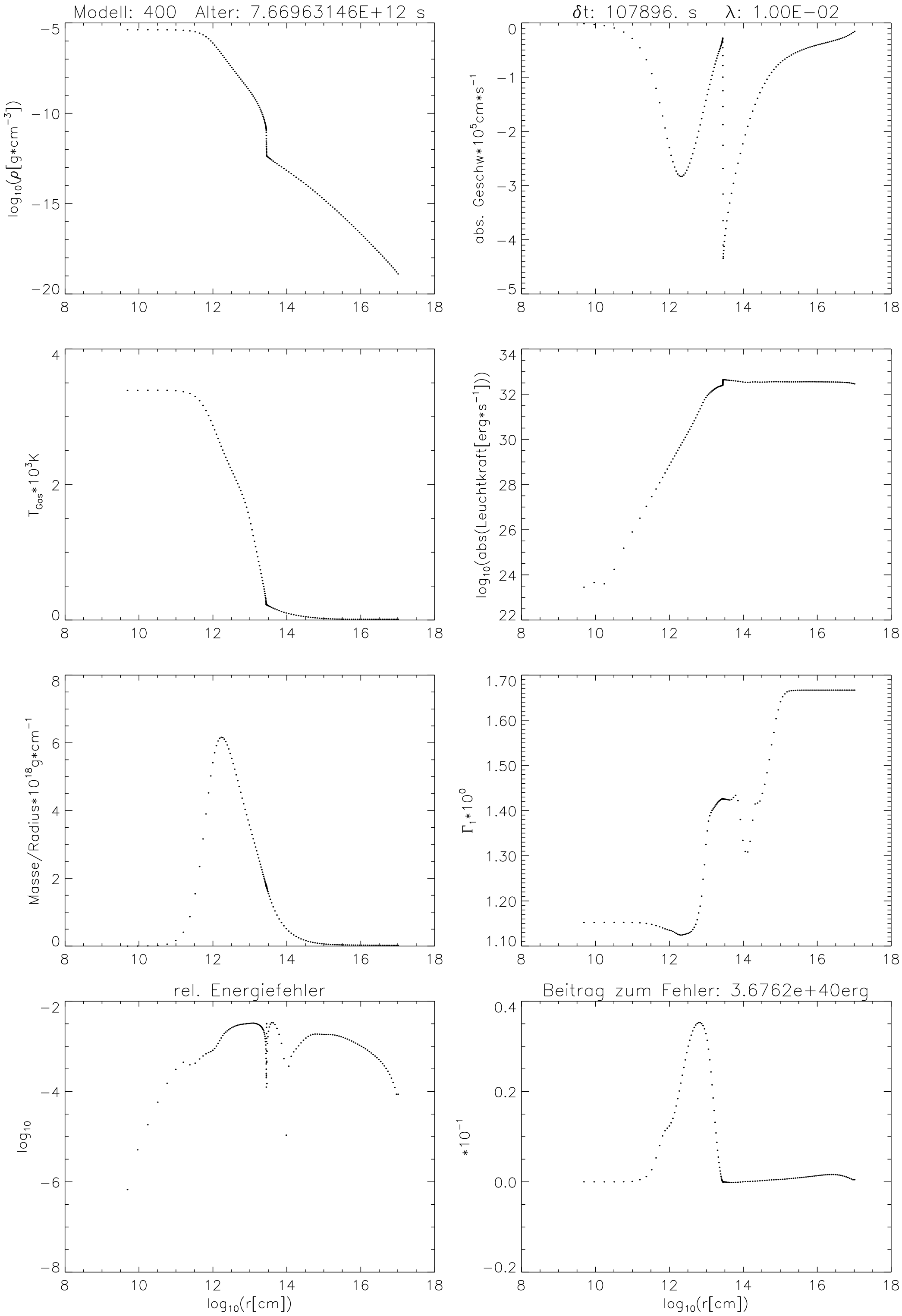


Abbildung 6.2: Modell 400 der Sequenz mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Der erste Kern kollabiert aufgrund der H_2-Dissoziation.

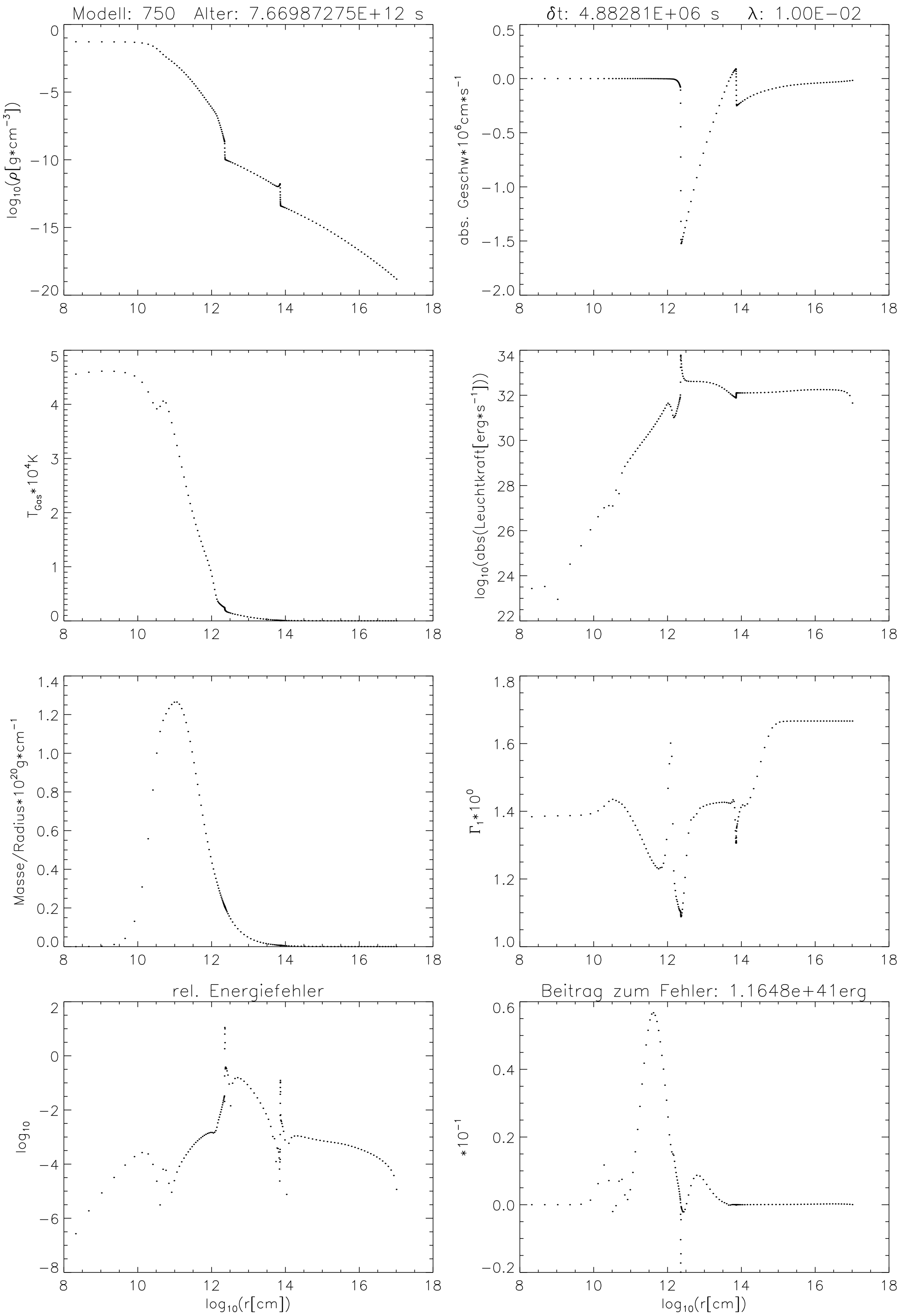


Abbildung 6.3: Modell 750 der Sequenz mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Ruhige Akkretionsphase des zweiten Kerns vor dessen Explosion.

über ein größeres Gebiet verbreitert. Im inneren Kern ist Γ_1 überall kleiner als $\frac{4}{3}$ aufgrund von Wasserstoffrekombination. Durch die dabei freiwerdende Ionisationsenergie wird die Auswärtsbewegung unterstützt. Eine Kühlzone ist weder im inneren noch im äußeren Stoß aufgelöst.

Abbildung (6.5) zeigt das Modell kurz bevor aufgrund von Konvergenzproblemen des Newton-Raphson Lösers der Zeitschritt zusammenbrach. Der auswärtslaufende innere Stoß hat den äußeren Stoß der noch von dem ersten Kern stammt erreicht, die Lichtfront ist über den Außenrand hinweggewandert. Seit dem Modell 1000 sind 2.3 Jahre vergangen. Die Zentraldichte ist auf $3.8 \cdot 10^{-11}$ g cm^{-3} gesunken. Die Auswärtsbewegung betrifft zu diesem Zeitpunkt aber nur 2.48% der Gesamtmasse. Γ_1 ist innerhalb der Kernrestes immer noch kleiner als $\frac{4}{3}$, bei den Kerntemperatuen unter 2000 K ist Wasserstoffassoziation der dafür verantwortliche Prozeß. Da innerhalb des Stoßes die optische Tiefe pro Zelle auf etwa 10^{-3} abgesunken ist, ist mittlerweile auch die Kühlzone aufgelöst.

Da aufgrund von Konvergenzproblemen die Rechnung abgebrochen werden mußte, kann zunächst über den weiteren Verlauf der Instabilität keine Aussage gemacht werden. Die Probleme äußern sich vor allem in einem starken Absinken der Strahlungsenergiedichte am Außenrand. Dies deutet auf eine nicht vollständig absorbierende äußere Randbedingung für die beiden Strahlungsgleichungen hin. Dieses Problem läßt sich vermeiden, falls man anstatt der vollen 1-ten Momentengleichung die Diffusionsnäherung verwendet. Unter dieser Näherung verläuft die Entwicklung fast identisch, nur die Lichtfronten werden wegdiffundiert. Die Probleme am Außenrand treten durch die Diffusionsnäherung nicht auf, die Rechnung kann weiter verfolgt werden. Die Explosion führt in diesem Fall zu einem Absinken der Zentraldichte auf $3 \cdot 10^{-24}$ g cm^{-3}! Danach kommt es zu einem weiteren Kollaps mit Bildung eines äußeren und später eines inneren Kernes, dieser ist allerdings kleiner als der erste innere Kern. Auch dieser innere Kern ist wieder instabil und explodiert auch wie sein Vorgänger. Diese Explosion führt wieder zu Zentraldichten, die mit der Anfangsdichte von 10^{-19} g cm^{-3} vergleichbar sind. Die maximalen Auswärtsgeschwindigkeiten liegen mit maximal $9 \cdot 10^6$ cm s^{-1} deutlich höher als bei der ersten Kernexplosion, eine Konsequenz des im Radius kleineren Kerns. Allerdings liegen die Auswärtsgeschwindigkeiten auch bei vergleichbaren Orten der auswärtslaufenden Stoßfront immer noch etwa um einen Faktor 2 über denen der ersten Explosion. Zu diesem Zeitpunkt musste die Rechnung wegen Konvergenzproblemen abgebrochen werden. Diese Konvergenzprobleme stammen aus einer Inkonsistenz der zeitlichen Entwicklung der Massenvariablen, da ξ_j und $\Delta\xi_j$ separat zu jedem Zeitschritt aktualisiert werden. Ist nun die Masse in einer Zelle j sehr klein im Vergleich zur Masse innerhalb von r_j, wie dies typisch bei sehr hohen Auflösungen, z.B. in Stößen ist, kann dies aufgrund von Rundungsfehlern dazu führen, daß die Massenvariable ξ keine monotone Funktion des Gitterpunktindexes mehr ist.

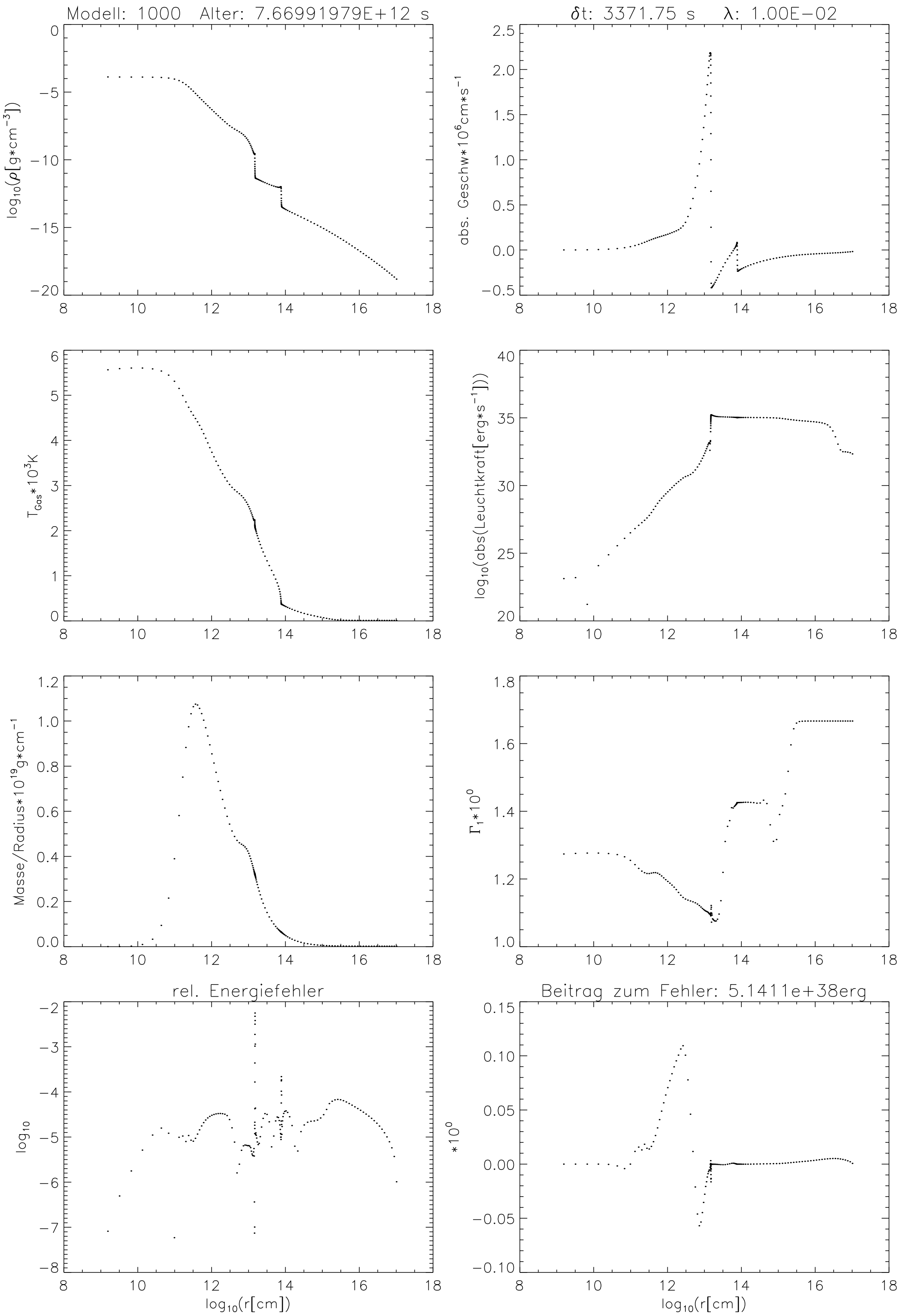


Abbildung 6.4: Modell 1000 der Sequenz mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Der innere Kern expandiert mit maximaler Geschwindigkeit.

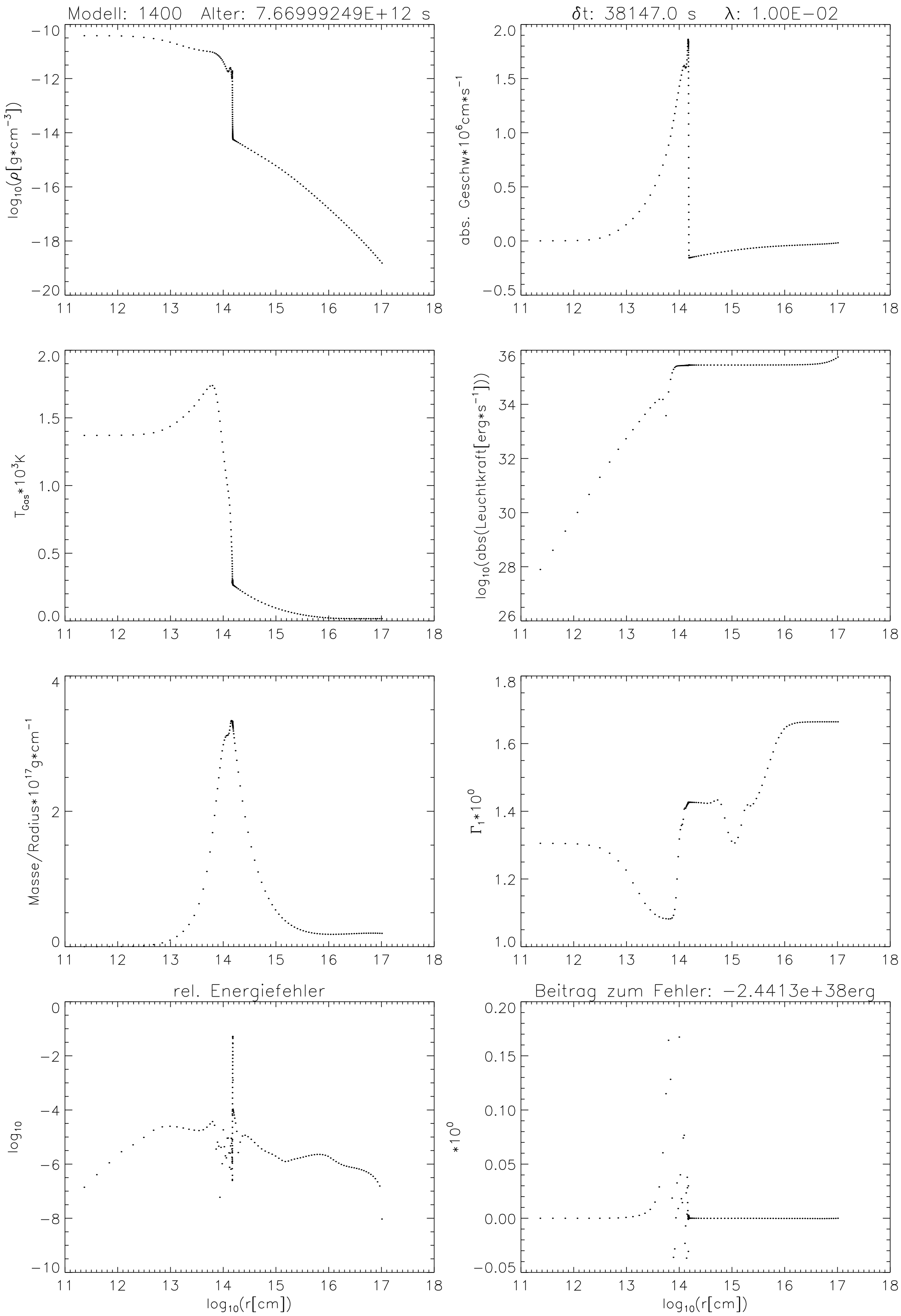


Abbildung 6.5: Modell 1400 der Sequenz mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Die Rechnung mußte zu diesem Zeitpunkt wegen Konvergenzproblemen abgebrochen werden.

6.1.1.2 Die Modelle mit 300 Gitterpunkten

Die Entwicklung der Modelle mit 300 Gitterpunkten verläuft anfänglich analog dem Modell mit gröberer Auflösung. Bis zur Ausbildung des zweiten Kernes bestehen zwischen den Entwicklungen keine qualitativen Unterschiede. Abbildung (6.6) zeigt das Modell 3.77 Jahre nach dem Stoppen des zweiten Kollapses. Die Kernmasse beträgt zu diesem Zeitpunkt $2.35 \cdot 10^{-2}\, M_{\odot}$, ist also gleich der Kernmasse von Modell 750 der Sequenz mit 150 Gitterpunkten. Obwohl die Zentraltemperaturen vergleichbar sind, ist die Zentraldichte mit 0.234 g cm^{-3} etwa um einen Faktor 4 höher als bei dem Modell mit geringerer Auflösung. Dies hat zur Ursache, daß Γ_1 im Zentrum kleiner als $\frac{4}{3}$ ist. Allerdings muß bemerkt werden, daß die Zustandsgleichung in diesem Bereich der Druckionisation keine hohe Konsistenz aufweist (siehe Wuc[89]). Das relativ kleine lokale Temperaturmaximum im Kern des Modells mit 150 Gitterpunkten ist bei höherer Auflösung wesentlich stärker ausgeprägt. Ursache für das relativ starke Temperaturmaximum ist die anfangs hohe Akkretionsrate, die zu einer Verdoppelung der Kernmasse in wenigen Jahren führt, auf einer Zeitskala die kleiner ist als die Helmholz-Kelvin-Zeitskala des Kerns. Aufgrund der hohen optischen Tiefe des Kerns kann die bei der Kompression der akkretierten Materie entstehende Wärme nicht sofort abtransportiert werden. Die Strahlungsdiffusionszeitskala $t_{Diff} = 3\tau\frac{R}{c}$ ist bei optischen Tiefen von $\tau = 10^9$ im Zentrum des Kerns bezogen auf das Temperaturmaximum etwa von der Größenordnung 150 Jahre und damit wesentlich größer als das Alter des inneren Kerns. Daß dieses Temperaturmaximum bei einer Auflösung von nur 150 Gitterpunkten nicht so ausgeprägt ist dürfte auf erhöhte numerische Diffusion zurückzuführen sein. Da die optische Tiefe der Zellen im inneren Stoß im Falle $\lambda = 10^{-2}$ von der Größenordnung 1 ist, ist dort keine Kühlzone aufgelöst, am äußeren Stoß ist eine solche angedeutet. Im Falle kleinerer Viskositätslängenskala sind die optischen Tiefen der Zellen in den Stössen um den Faktor 10 kleiner, sodaß in dieser Phase am äußeren Stoß eine Kühlzone zwar ausgeprägt, am inneren Stoß allerdings auch nicht vorhanden ist.

Die weitere Entwicklung unterscheidet sich von der Sequenz mit 150 Gitterpunkten. Als die auswärtslaufende Verdünnungswelle den äußeren Stoß erreicht wird dieser nicht vollständig aufgelöst. Er bleibt bestehen, die Stoßposition beginnt aber instabil zu werden. Dies ist ein typisches Verhalten der Modelle mit höherer Auflösung. Der äußere Stoß beginnt einwärts zu laufen. Bei den Modellen mit einer Auflösung von 300 Gitterpunkten kommt es allerdings nicht zur Wechselwirkung des einwärtslaufenden äußeren Stoßes mit dem quasistationären inneren Stoß um den neugebildeten Kern. Bei beiden Viskositätslängenskalen kommt es vor diesem Ereignis zu einer massiven Explosion des inneren Kernes. Der Beginn der Explosion ähnelt stark dem der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten. Wie dort beginnt die Expansionsbewegung im Zentrum des Kerns. Bezogen auf die Position des äußeren Stoßes erfolgt die Explosion bei der Modellsequenz mit einem Viskositätsparameter

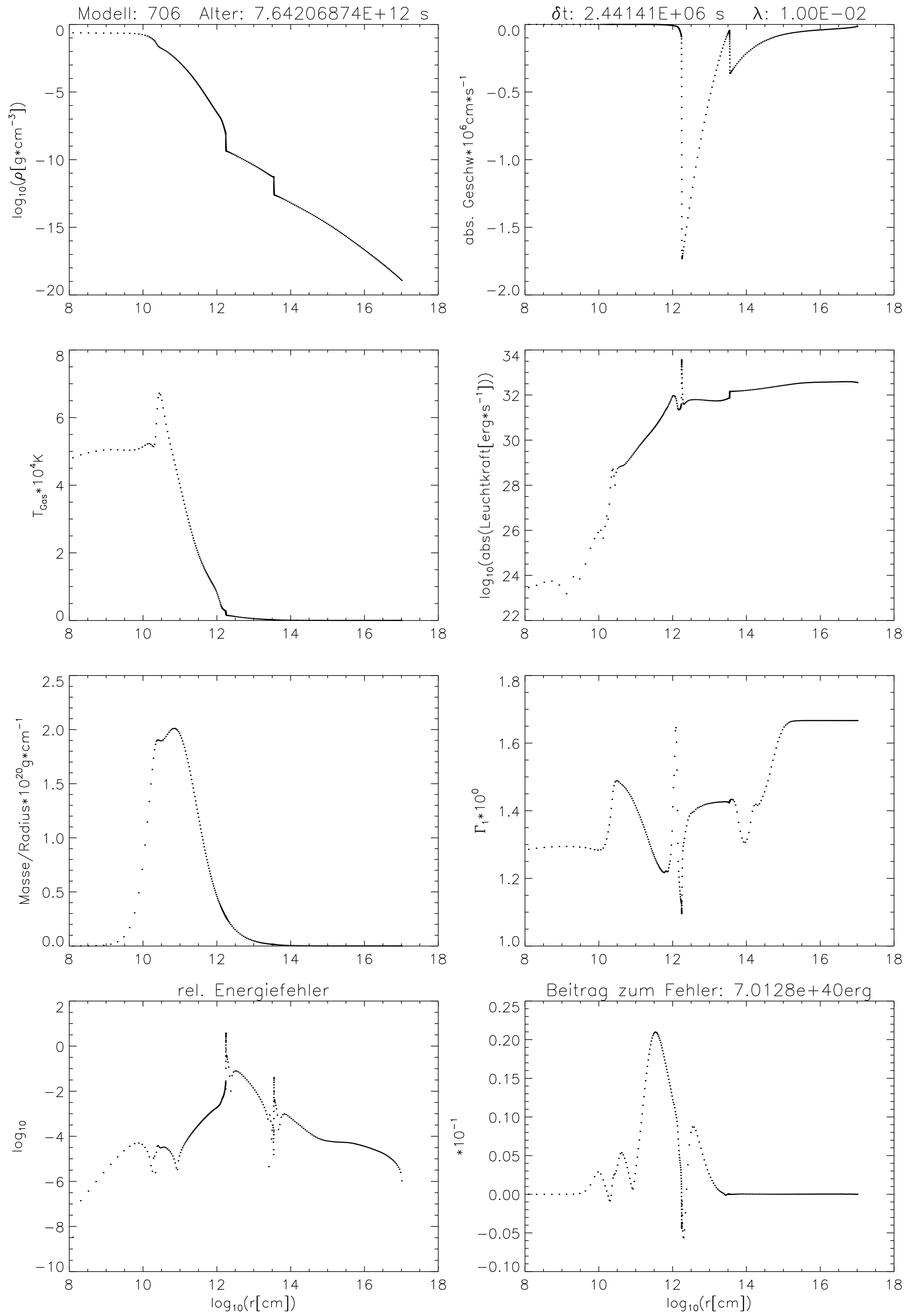


Abbildung 6.6: Modell 706 der Rechnung mit 300 Gitterpunkten, konstanter Opazität und $\lambda = 10^{-2}$. Der innere Kern ist relaxiert und enthählt 2.35% der Gesamtmasse.

von $\lambda = 10^{-2}$ später als bei der Wahl von $\lambda = 10^{-3}$. In der Modellsequenz mit höherer Viskosität kommt es fast zur Wechselwirkung vor der Explosion (siehe Abb. (6.7)). Die maximalen Auswärtsgeschwindigkeiten liegen im Fall höherer Viskosität mit $2.2 \cdot 10^6\,\mathrm{cms}^{-1}$ etwa auf dem Niveau wie bei geringerer räumlicher Auflösung, im Fall niedrigerer Viskosität mit $2.4 \cdot 10^6\,\mathrm{cms}^{-1}$ etwas höher. In beiden Fällen konnten die Rechnungen aus demselbem Grund wie bei der Rechnung mit 150 Gitterpunkten nicht bis zum Ende der Expansionsphase fortgesetzt werden. Bei beiden Wahlen des Viskositätsparameters erreichte die Zentraldichte am Ende der Rechnung Werte die etwas unter 10^{-11} g cm^{-3} lagen. Zu diesem Zeitpunkt war die Expansionsphase noch nicht abgeschlossen, sodaß mit einem weiteren Absinken der Zentraldichte, vergleichbar der Entwicklung des Modells mit 150 Gitterpunkten, zu rechnen ist. Aus Rechenzeitgründen wurden diese Modellsequenzen nicht unter Verwendung der Diffusionsnäherung weiterverfolgt.

6.1.1.3 Die Modelle mit 512 Gitterpunkten

Auch die Modelle mit 512 Gitterpunkten entwickeln sich anfangs sehr ähnlich wie die Modelle mit geringerer Auflösung. Abbildung (6.8) zeigt das Modell mit $\lambda = 10^{-2}$ und $g_t = 0$ in der Phase des ersten Kernes. Zu diesem Zeitpunkt sind erst $1.17 \cdot 10^{-2}\,M_{\odot}$ im Kern enthalten. Dieses Modell unterscheidet sich in seiner Struktur nur wenig von dem entsprechenden Modell mit 150 Gitterpunkten in Abb. (6.1). Die Modellsequenz mit 512 Punkten erreicht die vergleichbare Kernmasse allerdings schon früher, das Alter beträgt 1.148 t_{ff}. Die Zentraltemperatur ist mit etwa 330 K um 10% höher als bei der Sequenz mit nur 150 Gitterpunkten. Zu diesem Zeitpunkt unterscheiden sich die 3 verschiedenen Modellsequnzen mit 512 Gitterpunkten nur geringfügig. Einziger deutlicher Unterschied ist die bei einem Viskositätsparameter von $\lambda = 10^{-3}$ aufgelöste Kühlzone. Die weitere Entwicklung der 3 Modellreihen verläuft ähnlich. Es kommt zu einem weiteren Kollaps und Ausbildung des zweiten Kerns. Im Folgenden soll die Entwicklung des Modells mit $\lambda = 10^{-2}$ und zeitlich frei beweglichem Gitter genauer betrachtet werden. Abbildung (6.9) zeigt das Modell zu dem Zeitpunkt zu dem 2.35% der Gesamtmasse im inneren Kern enthalten sind. Seit der Bildung des inneren Akkretionsstoßes sind 3.06 Jahre vergangen.Die Zentraldichte ist mit $0.417\mathrm{gcm}^{-3}$ nochmals um fast einen Faktor 2 höher als in der Modellsequenz mit 300 Gitterpunkten. Die Zentraltemperatur ist geringfügig niedriger, das Temperaturmaximum mit etwa 80000 K deutlich ausgeprägter als bei geringerer Auflösung. Die Γ_1-Struktur unterscheidet sich nur wenig von der mit 300 Gitterpunkten, in beiden Fällen ist Γ_1 im Zentrum kleiner als $\frac{4}{3}$. Auch in dieser Modellsequenz beginnt der äußere Stoß nach innen zu laufen. Noch bevor er den inneren Stoß erreicht kommt es zu einer Expansionsbewegung im Zentrum. Diese breitet sich allerdings langsamer nach außen aus als bei den Modellreihen mit geringerer räumlicher Auflösung. Deshalb kommt es zur Stoß-Stoß-Wechselwirkung noch bevor eine nennenswerte Auswärtsbe-

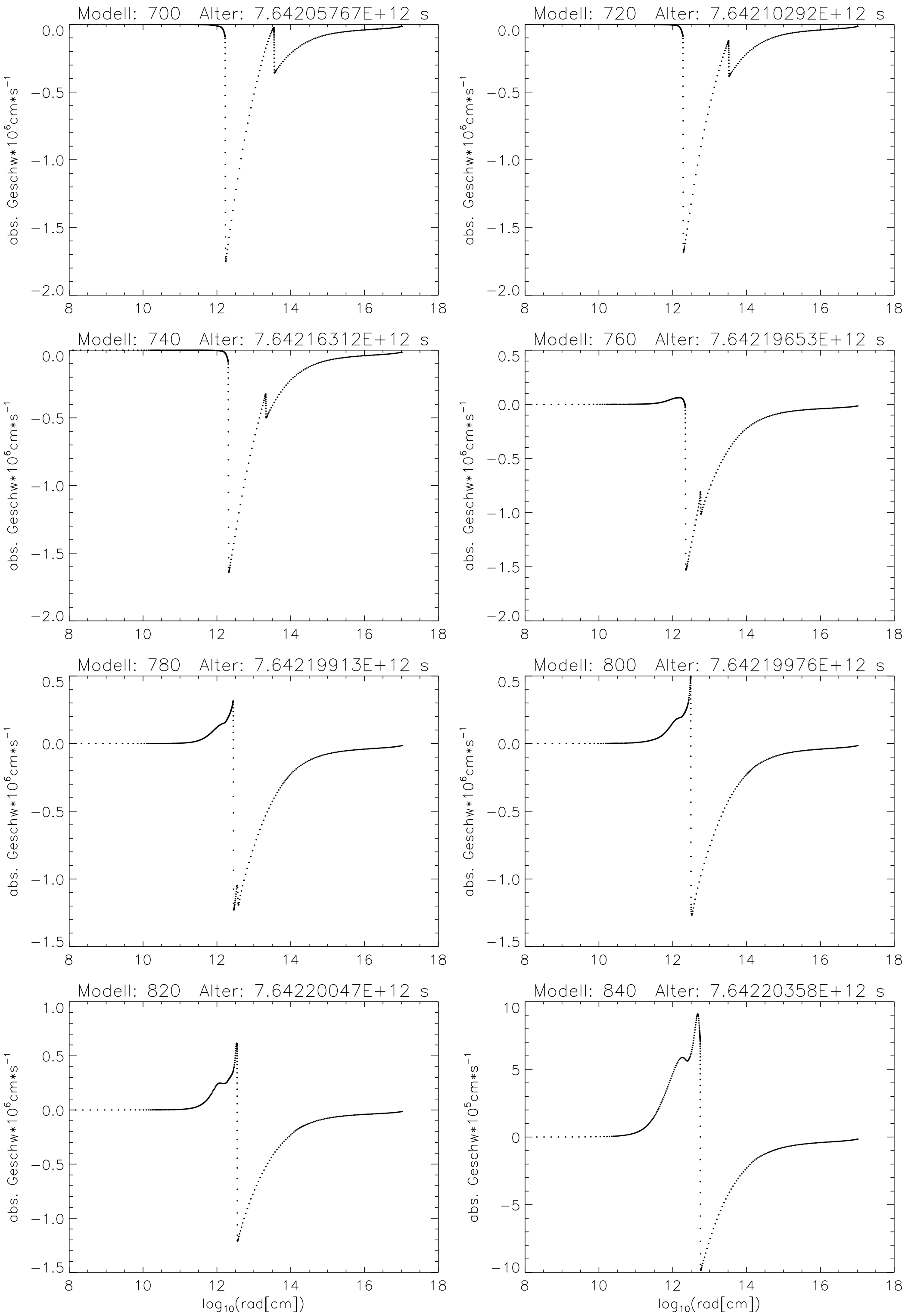


Abbildung 6.7: Geschwindigkeitsprofile der Modelle 700 bis 840 der Modellsequenz mit 300 Punkten und $\lambda = 10^{-2}$. Die Position des äußeren Stoßes wird instabil, gleichzeitig kommt es zur Explosion des inneren Kernes.

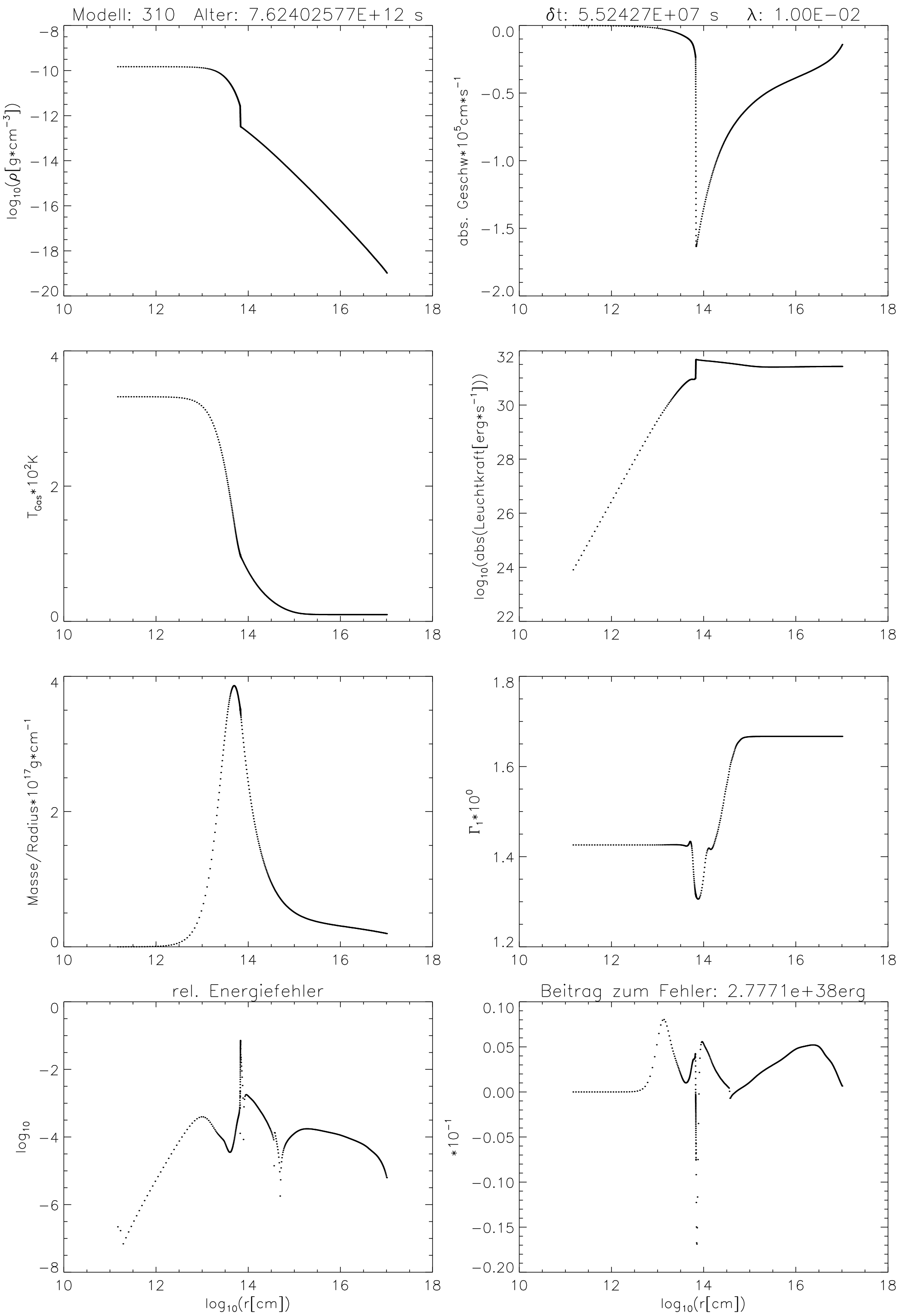


Abbildung 6.8: Modell 310 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, konstanter Opazität, $\lambda = 10^{-2}$ und $g_t = 0$. Beginn der Akkretion auf den ersten Kern.

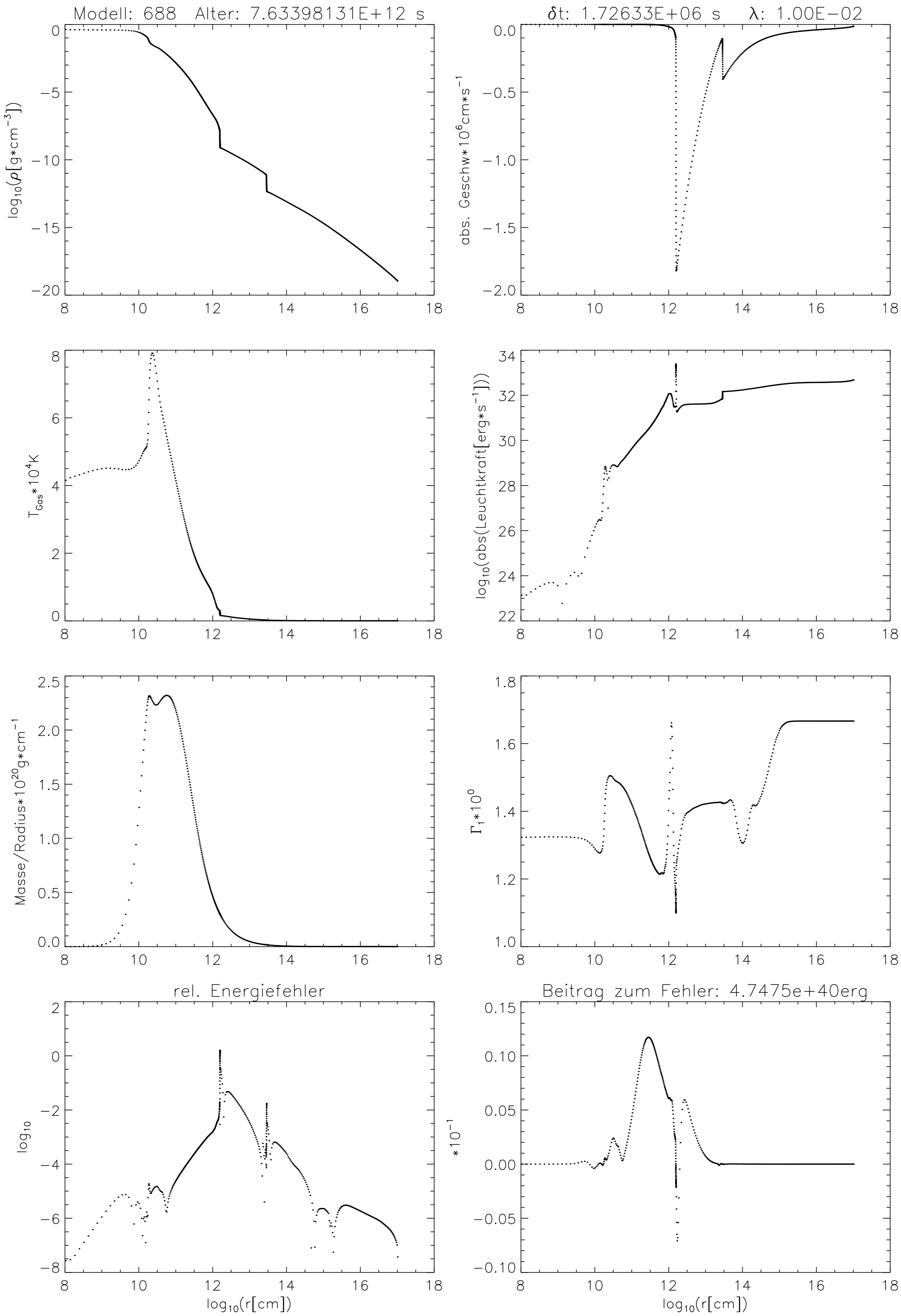


Abbildung 6.9: Modell 688 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, konstanter Opazität, $\lambda = 10^{-2}$ und $g_t = 0$. Der innere Kern enthält zu diesem Zeitpunkt 2.35% der Gesamtmasse.

wegung eingesetzt hat. Abb. (6.10) zeigt den Ablauf der daraufhin eintretenden Ereignisse. Mehrfach kommt es zu kleineren Auswärtsbewegungen am äußeren Kernrand, unterbrochen durch ruhigere Phasen. Im Inneren des Kerns setzt sich die Expansionsbewegung allerdings fort. Ihr Anwachsen erfolgt allerdings nicht auf dynamischer Zeitskala, die im Zentrum etwa 2 Stunden beträgt, sondern wesentlich langsamer. Der Indikator für dynamische Stabilität Γ_1 ist nur innerhalb von $3 \cdot 10^{10}$ cm kleiner als $\frac{4}{3}$, darüber liegt eine Zone, die wesentlich mehr Masse enthält, in der Γ_1 mit Werten von maximal 1.5 deutlich über dem kritischen Wert liegt. Erst 2.6 Jahre nach der Wechselwirkung der Stöße kommt es zur heftigen Auswärtsbewegung großer Teile des Kernmantels. Diese Auswärtsbewegung führt zu Geschwindigkeiten von maximal $1.7 \cdot 10^6\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, also deutlich kleineren Werten als bei niedrigerer räumlicher Auflösung. Aufgrund derselben Probleme mit der Strahlungsenergiedichte in der Hülle wie bei den vorhergehenden Rechnungen mußte auch diese Rechnung abgebrochen werden. Die Auswärtsgeschwindigkeit war zu diesem Zeitpunkt bereits auf $1.4 \cdot 10^6\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ abgesunken. Die Zentraldichte ist auf $3 \cdot 10^{-3}$ g cm^{-3} gefallen, was erst etwa 2 Größenordnungen unter der Zentraldichte vor der Explosion liegt.

Die beiden anderen Modellsequenzen mit $\lambda = 10^{-3}$ unterscheiden sich in ihrer Entwicklung nur wenig von der die hier beschriebenen wurde. Die maximalen Auswärtsgeschwindigkeiten liegen mit $1.8 \cdot 10^6\,\mathrm{cms^{-1}}$ nur geringfügig über dem Wert der Sequenz mit höherem Viskositätsparameter. Trotz geringerer Stoßbreite ist am inneren Stoß vor der Explosion keine Kühlzone aufgelöst, am äußeren Stoß ist, solange dieser existiert, die Kühlzone, die bei der Wahl von $\lambda = 10^{-2}$ nur angedeutet ist, wesentlich stärker ausgeprägt. Die Tatsache, daß sich die Modellreihen unabhängig von der Wahl des zeitlichen Gittersteifeparameters g_t gleich entwickeln bestätigt im Nachhinein die vorher geäußerte Vermutung, daß die Wahl von $g_t = 10^{-5}$ die Kernexplosionen nicht beeinflußt. Die Resultate, die bei geringeren Auflösungen mit $g_t = 10^{-5}$ erhalten wurden, sind somit mit den Ergebnissen höherer Auflösungen mit der Wahl von $g_t = 0$ direkt vergleichbar.

6.1.1.4 Das Modell mit 800 Gitterpunkten

Die Modellsequenz mit 800 Gitterpunkten unterscheidet sich nur geringfügig von der mit 512 Gitterpunkten. Aufgrund der geringeren Viskositätslängenskala ist schon früh nach Ausbildung des ersten Kerns eine Kühlzone am Stoß deutlich sichtbar. Nach dem zweiten Kollaps wird auch hier die Position des äußeren Stoßes instabil, sodaß es 4.6 Jahre nach Ausbildung des inneren Akkretionsstoßes zur Stoß-Stoß-Wechselwirkung kommt. Der Ablauf dieser Wechselwirkung ähnelt sehr dem mit 512 Gitterpunkten. 1.9 Jahre nach der Stoß-Stoß-Wechselwirkung kommt es auch hier zur Explosion des inneren Kernes. Aufgrund der höheren Anzahl an Gitterpunkten und der kleinen Viskositätslängenskala, die zu kleineren Gitterpunktabständen Δr führt und damit die Konditionierung der Funktionalmatrix der Newton-Raphson-

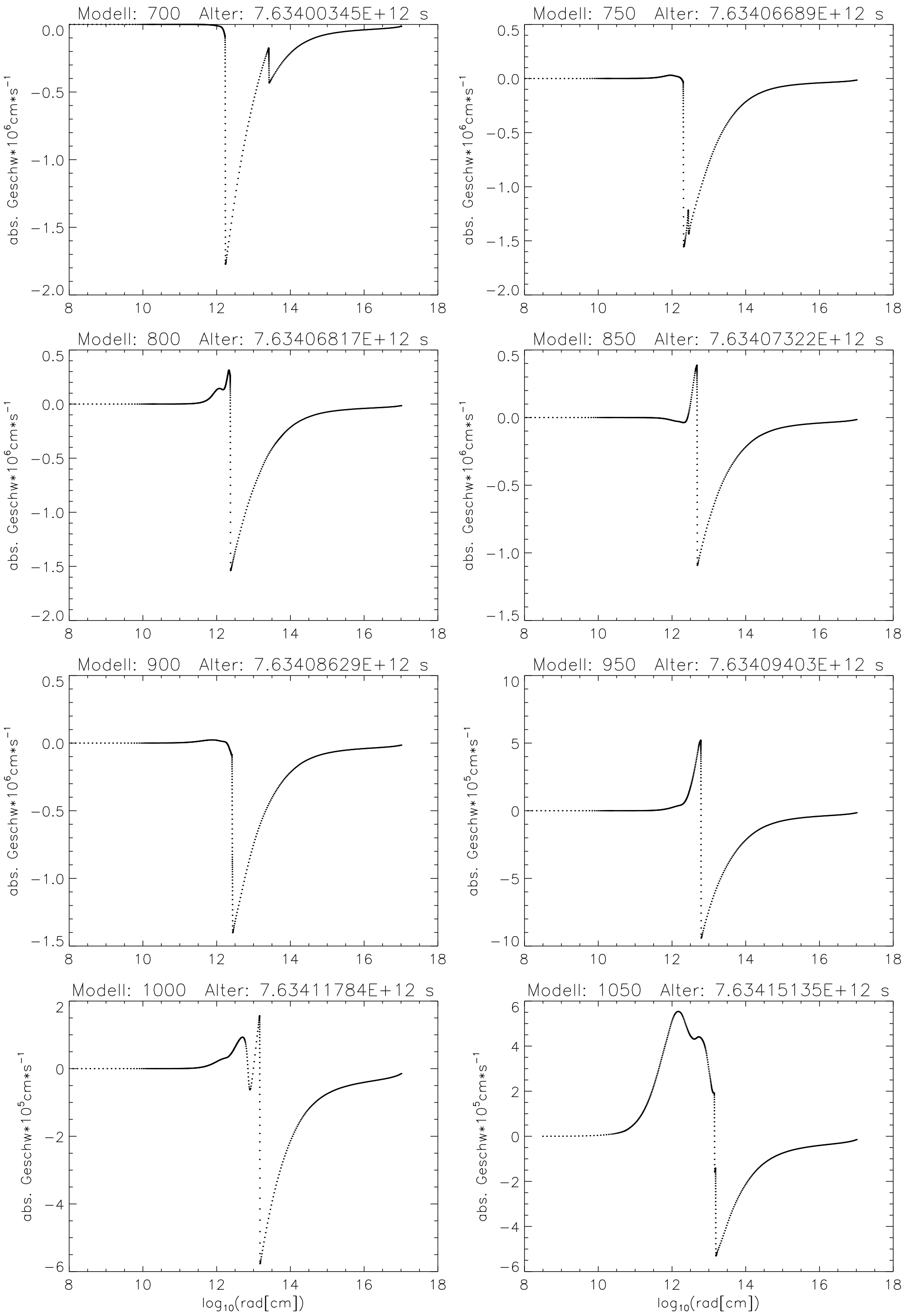


Abbildung 6.10: Geschwindigkeitsprofile der Modelle 700 bis 1050 der Modellsequenz mit 512 Punkten, $\lambda = 10^{-2}$ und $g_t = 0$. Es kommt zur Wechselwirkung des einwärtsgelaufenen äußeren Stoßes mit dem inneren Stoß um den zweiten Kern, anschließend zur Explosion des inneren Kerns.

Iteration verschlechtert, verschlechtert sich damit auch die Konvergenz des Iterationsverfahrens, was zu kleineren Zeitschritten als in den vorhergehenden Modellreihen führt, sodaß vergleichbare Entwicklungsstadien erst bei höheren Modellnummern erreicht werden. Die Explosion führt zu maximalen Auswärtsgeschwindigkeiten von $1.2 \cdot 10^6$ cm s^{-1}, wiederum niedriger als die entsprechenden Werte bei geringeren Auflösungen. Aufgrund derselben Probleme wie bei den vorhergehenden Rechnungen mußte die Rechnung beendet werden. Am Ende der Rechnung hatte die Auswärtsgeschwindigkeit in ihrem Maximum zwar schon leicht abgenommen, im Zentrum war die Dichte jedoch erst um etwa 2 Größenordnungen gefallen.

6.1.1.5 Das Modell mit 1200 Gitterpunkten

Die Modellsequenz mit 1200 Gitterpunkten wurde wieder mit einer größeren Viskositätslängenskala gerechnet um im Kern eine höchstmögliche Auflösung zu erreichen. Da die Steigerung der Auflösung von 512 auf 800 Gitterpunkten keine wesentliche Veränderung mehr brachte, könnte man meinen, daß diese Entwicklung der exakten Entwicklung weitestgehend entspricht. Das Modell mit 1200 Gitterpunkten zeigt allerdings, daß diese Annahme höchst zweifelhaft ist. Anfänglich entwickelt sich diese Modellreihe ähnlich wie die Vorhergegangenen. Abbildung (6.11) zeigt das Modell kurz nach Ausbildung des ersten Kerns, zu einem Zeitpunkt zu dem 1.17% der Gesamtmasse in diesem Kern enthalten sind. Vergleicht man dieses Modell mit dem Modell 310 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten in Abb. (6.8) das dieselbe Kernmasse besitzt, so stellt man nur minimale Unterschiede fest. Zunächst wird diese Kernmasse wiederum geringfügig früher erreicht, das Alter des Modells beträgt $1.147\, t_{ff}$. Die Zentraltemperatur ist mit 345 K nochmals leicht höher als bei der Rechnung mit 512 Gitterpunkten. Obwohl im Stoß die optische Tiefe der Zellen von der Größenordnung 10^{-2} ist, ist die Kühlzone in dieser frühen Phase nur angedeutet. Die weitere Entwicklung ähnelt zunächst der des Modells mit 512 Gitterpunkten.

Abbildung (6.12) zeigt das Modell 2.9 Jahre nach Ausbildung des inneren Akkretionsstoßes. Zu diesem Zeitpunkt sind 2.35% der Gesamtmasse im inneren Kern enthalten. Im direkten Vergleich mit dem entsprechenden Modell der Serie mit 512 Gitterpunkten in Abb. (6.9) sieht man im innerësten Kernbereich deutliche Unterschiede, insbesondere in Γ_1. Das zentrale Γ_1 ist hier deutlich größer als $\frac{4}{3}$. Der kleine Anstieg in Γ_1 bei einem Radius von 10^{10} cm zu kleineren Radien hin bei dem Modell mit 512 Gitterpunkten ist mit 1200 Punkten wesentlich stärker ausgeprägt und führt im Zentrum zu Werten, die über 1.4 liegen. Die Zentraltemperatur liegt mit 31200 K deutlich niedriger als in allen vorhergehenden Rechnungen zum vergleichbaren Zeitpunkt, gleichzeitig ist die Zentraldichte mit 0.844 g cm^{-3} höher. Dies bedeutet allerdings, daß die Thermodynamik im Zentrum noch weiter im inkonsistenten Bereich der Zustandsgleichung liegt als in den anderen Modellen. Diese Inkonsistenz könnte insbesondere Γ_1 betreffen, sodaß die

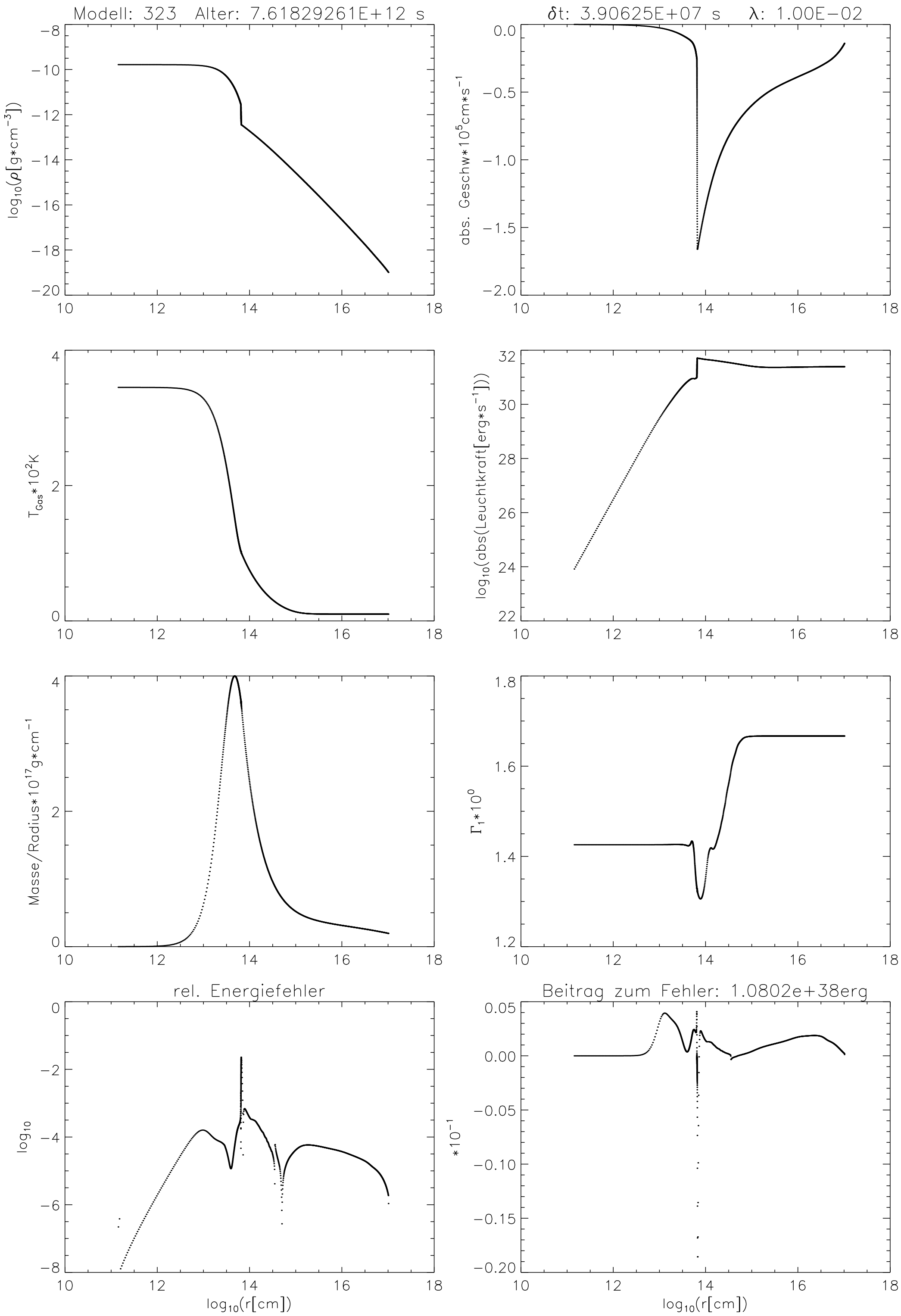


Abbildung 6.11: Modell 323 der Rechnung mit 1200 Gitterpunkten, konstanter Opazität, $\lambda = 10^{-2}$ und $g_t = 0$. Beginn der Akkretion auf den ersten Kern.

Aussage bezüglich der Stabilitätsgrenze mit Vorsicht zu betrachten ist. Das Temperaturmaximum bei einem Radius von $2 \cdot 10^{10}$ cm ist mit 91000 K nochmals höher.

Auch bei dieser Auflösung wird die Position des äußeren Stoßes instabil und er beginnt nach innen zu laufen. Noch vor der Wechselwirkung mit dem inneren Stoß kommt es im Zentrum des inneren Kernes wie auch in den vorhergehenden Modellsequenzen zu einer Expansionsbewegung. Diese führt allerdings zu keiner nennenswerten Auswärtsbewegungen vor der Stoß-Stoß-Wechselwirkung. Die Ereignisse nach der Wechselwirkung der beiden Stöße sind prinzipiell ähnlich denen der Modelle mit weniger Gitterpunkten. Ein wesentlicher Unterschied sind die um etwa einen Faktor 3 kleineren Auswärtsgeschwindigkeiten. Anders als bei allen vorhergehenden Modellreihen kommt es hier *nicht* zu einer massiven Auswärtsbewegung großer Teile des Kerns. Der Kern beruhigt sich nach 2 Schwingungen und beginnt die Hülle zu akkretieren. Abbildung (6.13) zeigt das Modell 1793 Jahre nach der Stoß-Stoß-Wechselwirkung zu dem Zeitpunkt als die Rechnung abgebrochen wurde. Im Gegensatz zu allen vorhergehenden Rechnungen mußte diese Modellreihe nicht aufgrund von Konvergenzproblemen abgebrochen werden. Allerdings traten in Abständen von etwa 40 Jahren kleine Stoßfrontinstabilitäten auf. Ein solches Verhalten ist aufgrund der linearen Stabilitätsanalyse von M.Balluch (Bal[89]) zu erwarten. Für die Rechnung sind diese allerdings unangenehm, da sie den Zeitschritt von maximal 20 Jahren auf wenige Stunden zwangen. Eine Fortsetzung der Rechnung bis zur vollständigen Akkretion der Hülle konnte deshalb aus Zeitgründen nicht durchgeführt werden, hierfür wären schätzungsweise mindestens 10000 Modelle notwendig. Zum Zeitpunkt des Abbruches hatte der Kern bereits eine Masse von $7.67 \cdot 10^{-2}\, M_\odot$. Die Temperaturstruktur im Kern weist immer noch eine ähnliche Struktur auf wie in Modell 1016. Das Temperaturmaximum ist breiter geworden aufgrund der seitdem akkretierten Materie. Die Zone annähernd konstanter Temperatur im Zentrum enthält immer noch etwa $2 \cdot 10^{-3}\, M_\odot$, also die Masse die der innere Kern zunächst hatte als der zweite Kollaps gestoppt wurde. Da die optische Tiefe von der Temperaturflanke aus ins Zentrum gemessen auf $1.2 \cdot 10^{10}$ angestiegen ist liegt die Strahlungsdiffusionszeitskala bei 380 Jahren. Dies ist allerdings kleiner als das Alter dieser Flanke, sodaß man annehmen sollte, daß sie durch radiative Diffusionsprozeße wesentlich abgeschwächt sein sollte. Die Zentraltemperatur liegt mit 28400 K aber niedriger als bei Modell 1016. Eine mögliche Erklärung liegt in der Thermodynamik der zentralen Zone. Der zentrale Bereich im Temperaturplateau ist partiell entartet. Obwohl die zentrale Temperatur gefallen ist hat die innere Energie im Zentrum von Modell 1016 zu Modell 2570 von $2.5 \cdot 10^{13}$ erg g^{-1} auf $3.5 \cdot 10^{13}$ erg g^{-1} zugenommen. Dieser Energiegewinn durch Strahlungstransport wurde zur Druckionisation verwendet. Aufgrund eines negativen Entropiegradienten würde in einem realistischeren Modell sowohl an dem Temperatursprung als auch im Innersten des Kerns Konvektion einsetzen. Die Druckionisationszonen im Inneren des Kerns erkennt

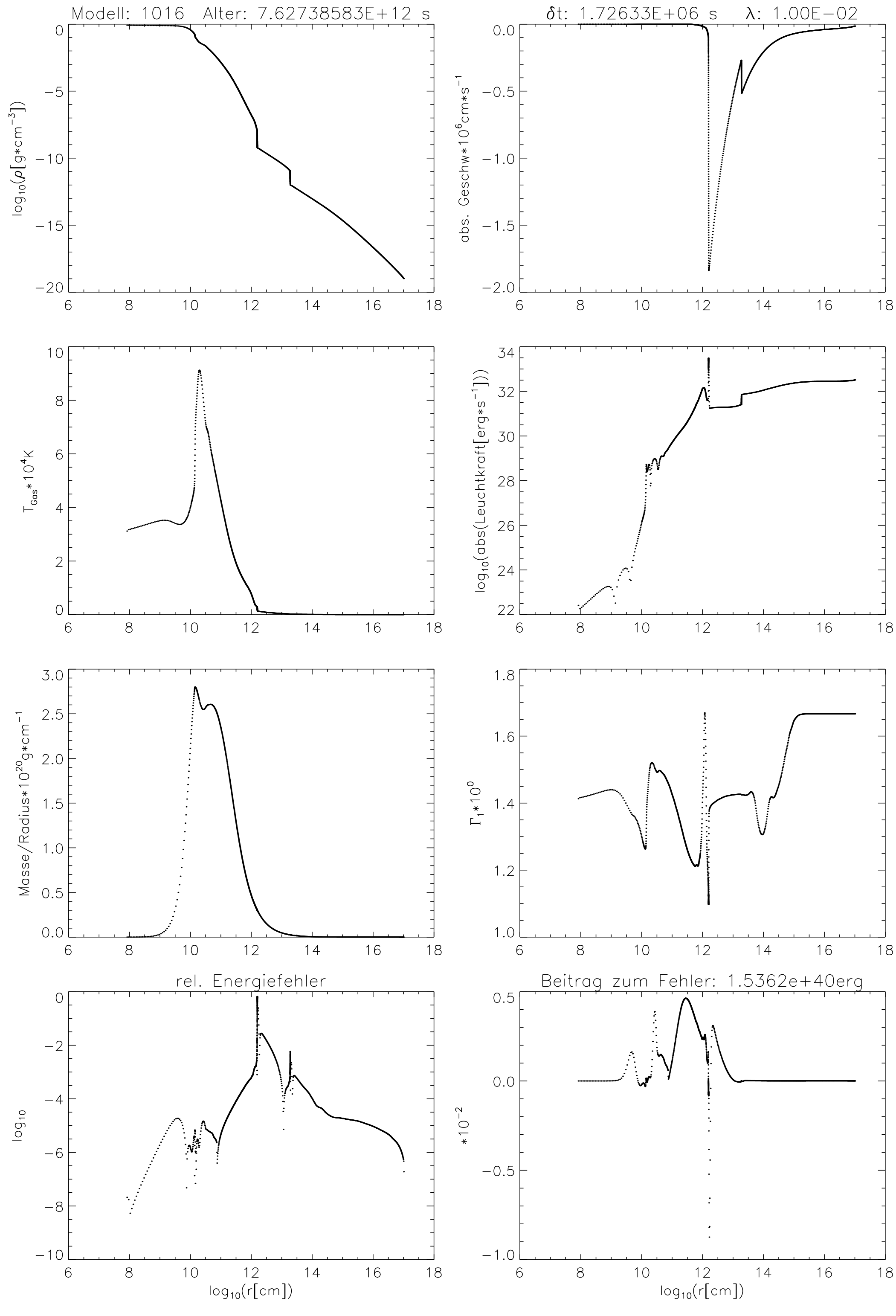


Abbildung 6.12: Modell 1016 der Rechnung mit 1200 Gitterpunkten, konstanter Opazität, $\lambda = 10^{-2}$ und $g_t = 0$. Der innere Kern enthält zu diesem Zeitpunkt 2.35% der Gesamtmasse.

man in den Einbrüchen in Γ_1 zwischen den Radien von 10^9 cm und 10^{10} cm. Weiterhin erkennt man in dem Verlauf von Γ_1, daß die Wasserstoffdissoziation schon in der Vorheizzone vor dem Akkretionsstoß stattfindet. An dieser Zone ergeben sich Probleme mit dem adaptiven Gitter das dort im Verlauf der inneren Energie reißt. Am deutlichsten ist dies im Verlauf von Γ_1 zu sehen, wo der monotone Anstieg nach innen bei einem Radius von $3 \cdot 10^{12}$ cm abrupt abbricht. Eine mögliche Erklärung dafür liegt in der Interpolation der tabellierten Zustandsgleichung durch rationale Splines. Hierbei wurde fälschlicherweise nicht der Glättungsparameter verwendet, der eine maximale thermodynamische Konsistenz gewährleistet (G. Wuchterl, pers. Mitteilung). Eine mögliche Folge wären Abweichungen von einem monotonen Verhalten beispielsweise an der scharfen Kante in Γ_1 in der Wasserstoffdissoziationszone aufgrund unzureichender Glättung. Eine Verbesserung ließe sich durch Aufnahme von Γ_1 in die aufzulösenden Terme der Gittergleichung erreichen, dies würde wahrscheinlich zumindest das Reißen des Gitters vermeiden. Die Leuchtkraft in der Hülle ist räumlich konstant bis auf eine in der doppeltlogarithmischen Darstellung nur angedeutete Lichtfront bei einem Radius von $3.5 \cdot 10^{12}$ cm, die von der vorhergegangenen Stoßfrontinstabilität stammt, die Leuchtkraft am Außenrand beträgt zu diesem Zeitpunkt 6 Sonnenleuchtkräfte. Im Stoß ist die optische Tiefe der Zellen noch geringfügig größer als 10^{-2}, sodaß die Kühlzone nur schwach angedeutet ist.

Über das weitere Schicksal der Modellreihe kann keine absolut sichere Aussage getroffen werden. Eine destruktive Instabilität wie in den vorhergehenden Modellsequenzen erscheint allerdings unwahrscheinlich. Im Kern werden zwar regelmäßig Störungen angeregt, die zu leichten Auswärtsbewegungen am Stoß führen, der Kern hat aber schon 40 solcher Ereignisse unbeschadet überstanden.

6.1.2 Die Totalenergieerhaltung der Modelle mit konstanter Opazität

6.1.2.1 Globale Totalenergieerhaltung

Auf die im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Modellreihen wurden die globalen Energietests angewandt. Zunächst soll die Totalenergieerhaltung des Modells mit 150 Gitterpunkten genauer dargestellt werden. Aufgrund der recht groben räumlichen Auflösung ist zu erwarten, daß die Fehler hier am deutlichsten auftreten. Abbildung (6.14) zeigt die zurückintegrierte Totalenergie dieser Modellreihe. Das Diagramm ist folgendermaßen zu lesen: Aufgetragen ist die zur Zeit $t = 0$ zurückintegrierte Totalenergie $\tilde{E}_{Tot}(0)$ für verschiedene Diskretisierungen als Funktion der Modellnummer von der zurückintegriert wurde. Die waagrechte Linie entspricht der exakten Totalenergie des Startmodells von in diesem Fall $1.644 \cdot 10^{42}$ erg. Die mittlere der 3 Kurven entspricht der im Abschnitt über die globale Totalenergieuntersuchung beschriebenen Diskretisierung. Die beiden anderen Kurven markieren

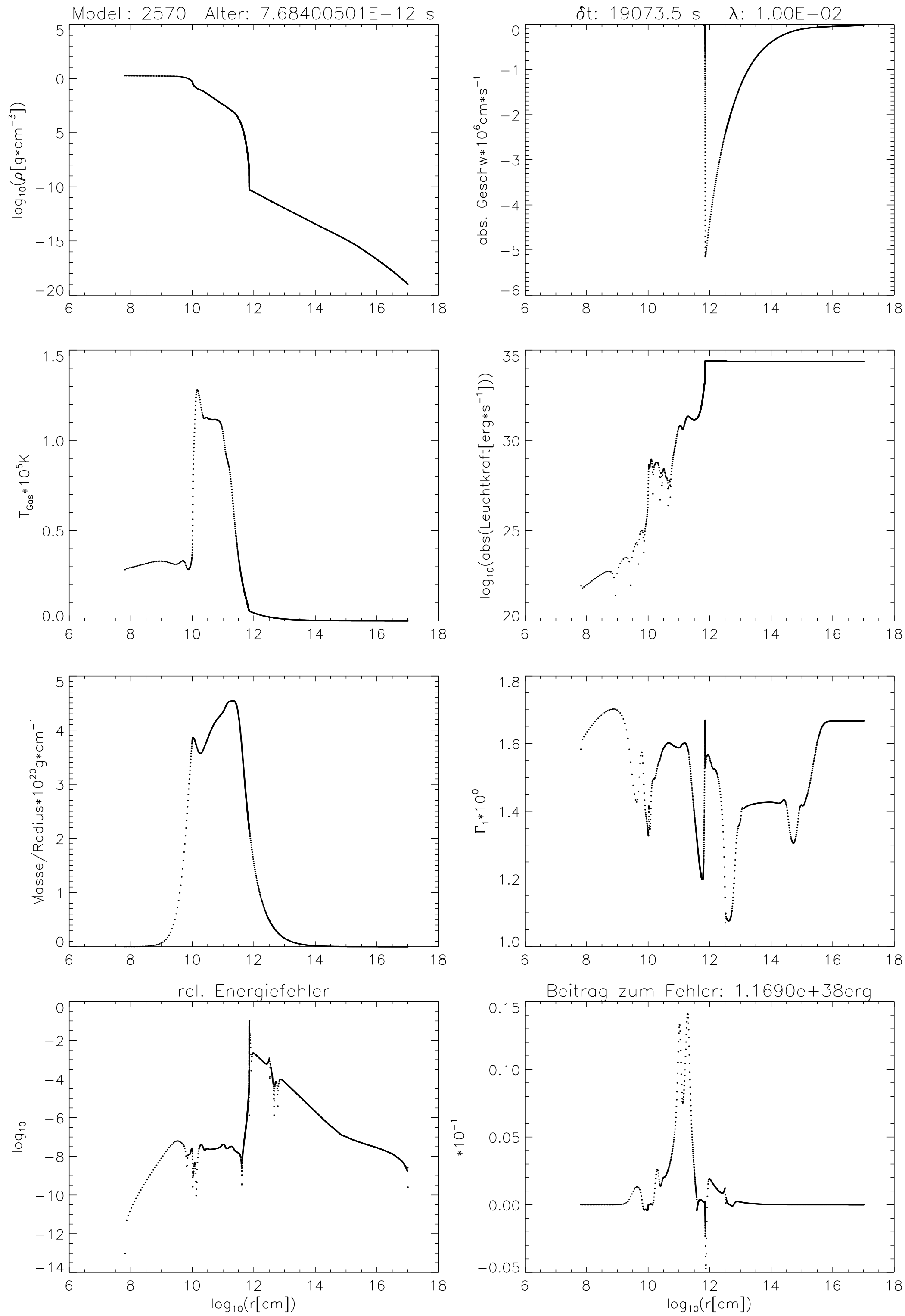


Abbildung 6.13: Modell 2570 der Rechnung mit 1200 Gitterpunkten, konstanter Opazität, $\lambda = 10^{-2}$ und $g_t = 0$. Die Rechnung wurde zu diesem Zeitpunkt abgebrochen.

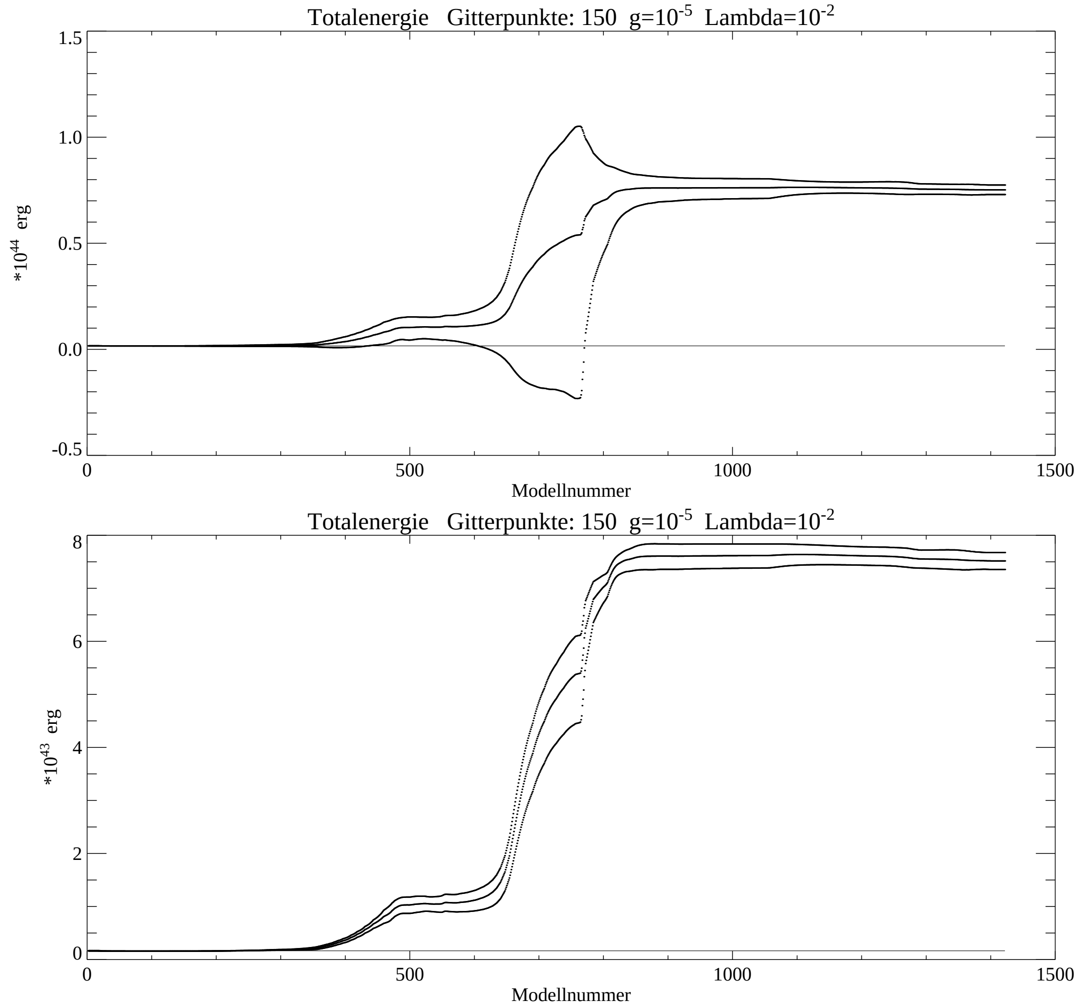


Abbildung 6.14: Darstellung der zurückintegrierten Totalenergie als Funktion der Modellnummer von der zurückintegriert wurde für die Modellreihe mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Oben: Abschätzung unter Verwendung von Gleichung (5.26). Unten: Abschätzung unter Verwendung von Gleichung (5.29). Zur Zeitintegration wurde in beiden Fällen die Trapezregel benutzt.

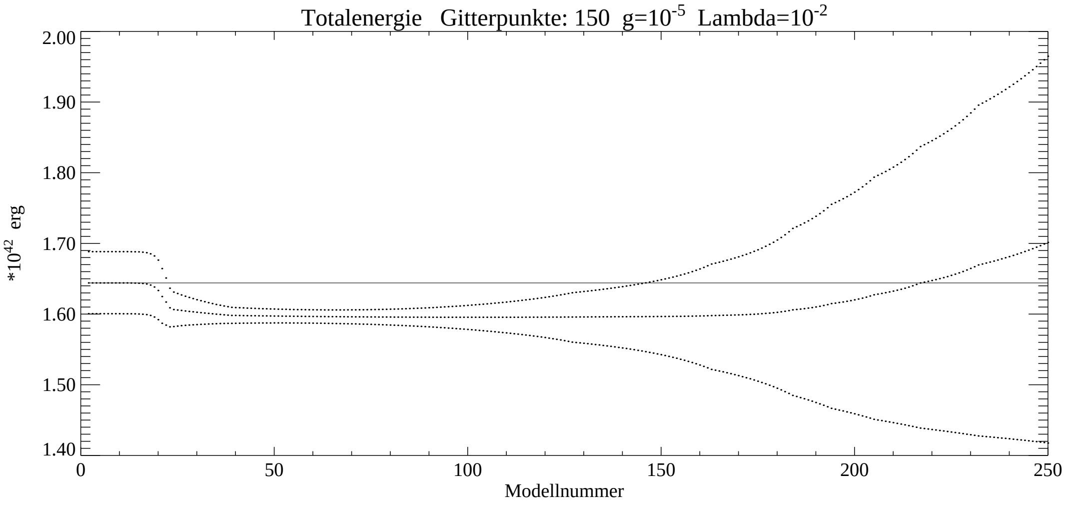


Abbildung 6.15: Verlauf der zurückintegrierten Totalenergie für die Modellreihe mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Vergrößerung des Kurvenanfangs des oberen Diagramms aus Abb. (6.14) oben. Abschätzung unter Verwendung von Gleichung (5.26).

das aufgrund der Abschätzungen der kinetischen und der potentiellen Energie gewonnene Toleranzintervall. Liegt die anfängliche Totalenergie in diesem Intervall, so kann nicht von einer Verletzung der Totalenergieerhaltung gesprochen werden, da es in diesem Fall eine konsistente Diskretisierung gibt, bezüglich der die Totalenergie erhalten ist. Liegen die Kurven allerdings über der anfänglichen Totalenergie, so bedeutet dies, daß das Modell scheinbar mit einer höheren Totalenergie startete, die Differenz entspricht damit einer künstlichen Totalenergieerzeugung; umgekehrt falls die Kurven unter der Anfangsenergie liegen liegt eine künstliche Totalenergievernichtung vor.

Im oberen Diagramm von Abb. (6.14) wurde die Abschätzung der Summe $E_{kin} + E_{pot}$ aus Gleichung (5.26) verwendet, im unteren Diagramm die aus Gl. (5.29). Beide Abschätzungen unterscheiden sich in der Behandlung des Dichtefaktors, im ersten Fall wurde die Dichte auf den Zellrand interpoliert, im zweiten Fall die Dichte mit dem Zellvolumen zur Zellmasse zusammengefasst. Wie man sofort sieht liefert die Abschätzung, bei der die Dichte gemittelt wird, deutlich größere Toleranzintervalle. In beiden Fällen wurde zur Zeitintegration die Trapezregel verwendet. Betrachtet man die Diagramme so stellt man fest, daß bis zur Modellnummer 300, also bis zur Bildung des ersten Kerns, keine Abweichungen von der Totalenergieerhaltung feststellbar ist. Dies ist allerdings nur ein Skaleneffekt. Deshalb ist in Abbildung (6.15) der Verlauf der Totalenergieerhaltung der Modelle bis zur Nummer 250 vergrößert dargestellt. Das Toleranzintervall wurde mittels der Abschätzung (5.26) bestimmt. Anfangs ist die Totalenergie im Wesentlichen durch die positive Strahlungsenergie eine wohldefinierte Größe.

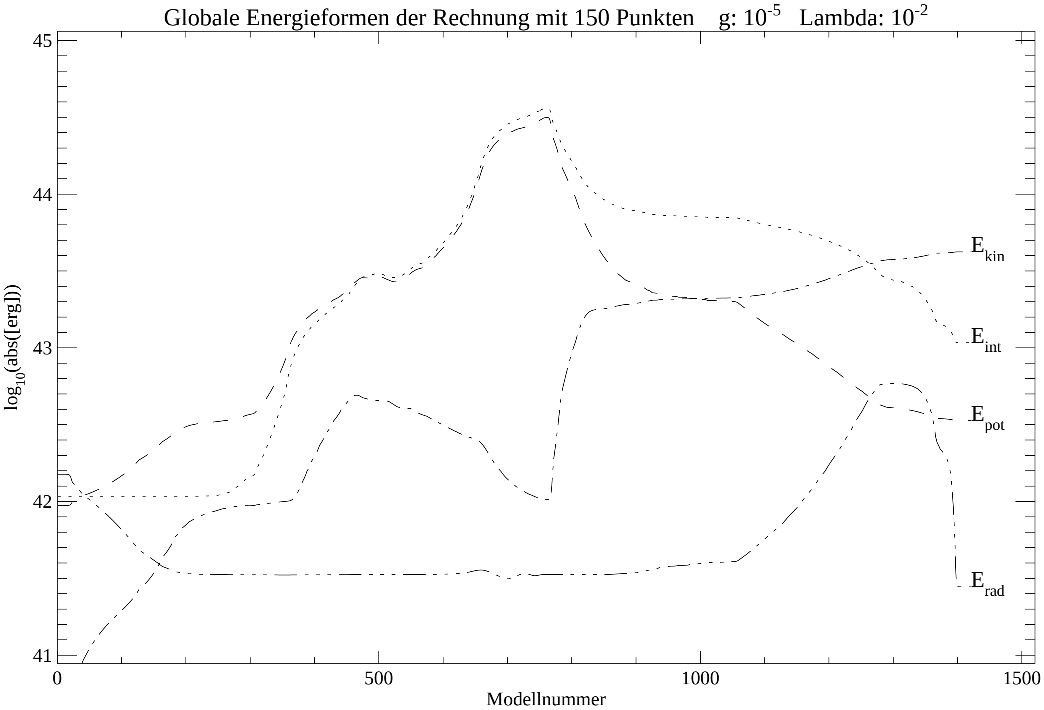


Abbildung 6.16: Darstellung der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Energieformen der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität.

Wie man zunächst erkennt, ist der Beginn der isothermen Phase geprägt von einer leichten Totalenergievernichtung. Dieser Effekt beträgt maximal etwa 3% der anfänglichen Totalenergie. Die anfängliche Totalenergie liegt allerdings außerhalb des Toleranzintervalles. Verwendet man eine implizite Zeitdiskretisierung zur Integration der Leuchtkraft, so reduziert sich die Diskrepanz auf maximal 1%, allerdings liegt auch hier die Anfangsenergie zeitweise außerhalb des Toleranzintervalls. Daß die rückintegrierte Totalenergie bei impliziter Diskretisierung ansteigt kann verstanden werden, da aufgrund des monotonen zeitlichen Anstiegs der Randleuchtkraft die implizite Disretisierung einen größeren Wert des Zeitintegrals liefert. Der Effekt des Totalenergieentzugs in der Anfangsphase ist auch bei den Modellreihen mit höheren Gitterpunktanzahlen in gleicher Stärke vorhanden, sodaß man daraus schließen kann, daß dieser Fehler von dem Oberflächenterm herrühren muß. Die sehr gute Totalenergieerhaltung bis zu einer Modellnummer von 20 ist darauf zurückzuführen, daß die Modellreihe mit einem bezüglich der Freifallzeitskala kleinen Zeitschritt startet, der sich erst allmählich der physikalisch relevanten Zeitskala anpasst. Wegen der dadurch bedingten nur kleinen zeitlichen Veränderung der Modelle ist zwangsläufig auch die Totalenergieerhaltung gut.

Mit dem Übergang zu einer Kern-Hülle-Struktur nehmen die potentielle und die kinetische Energie betragsmäßig zu, dies wird aus Abb. (6.16) ersichtlich; die Strahlungsenergie nimmt aufgrund des schrumpfenden Volumens und anfangs gleichbleibender Strahlungstemperatur ab, die innere Energie bleibt wegen der zeitlich konstanten Temperatur und Gesamtmasse zunächst unverändert. Die momentane Totalenergie wird ab Modell 126 negativ bezüglich der gegebenen Diskretisierung. Durch diese Entwicklung dominieren die nichtradiativen Energien ab diesem Zeitpunkt über die Strahlungsenergie bis zum Ende der Rechnung. Eine weitere Folge der zunehmenden Konzentration der Materie zum Zentrum hin ist, daß das Toleranzintervall größer wird, sodaß die anfängliche Totalenergie wieder darin enthalten ist. Dies ist bis zum zweiten Kollaps erfüllt, als eine starke Totalenergieerzeugung dazu führt, daß selbst die ansteigende Breite des Toleranzintervalls nicht ausreicht, die anfängliche Totalenergie darin zu halten. Erst als die Akkretion auf den inneren Kern zu einer weiteren Konzentration der Materie zum Zentrum hin führt, vergrößert sich der Toleranzbereich wesentlich. Der Anstieg der zentralen Materiekonzentration kann gut in der Darstellung des Verlaufes des Verhältnisses Masse durch Radius, das bis auf den Faktor G der spezifischen potentiellen Energie entspricht, verfolgt werden. Während zu Beginn der Phase des ersten Kerns das Maximum des Verhältnisses bei $3.6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ (Modell 300 siehe Abb. (6.1)) liegt, hat sich dieses bis kurz vor der Explosion auf $1.3 \cdot 10^{20}\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ (Modell 750 siehe Abb. (6.3)) erhöht. Zur Zeit des Modells 750 ist die momentane Totalenergie der festen Diskretisierung schon positiv, der Vorzeichenwechsel findet schon während des zweiten Kollapses statt. Im Modell 750 steht einer potentiellen Energie von $-3.0 \cdot 10^{44}$ erg eine gesamte innere Energie von $3.5 \cdot 10^{44}$ erg gegenüber; die beiden anderen Energieformen sind zu diesem Zeitpunkt mehr als 2 Größenordungen kleiner. Das große Toleranzintervall zeigt aber an, daß die Totalenergie in dieser Phase eine schlecht definierte Größe ist. Das Toleranzintervall von maximal $1.3 \cdot 10^{44}$ erg Breite ist verglichen mit der anfänglichen nahe bei 0 liegenden Totalenergie von $1.64 \cdot 10^{42}$ erg riesig. Das breite Toleranzintervall führt dazu, daß die Anfangsenergie wieder darin enthalten ist. Dies gilt bis zur Explosion. Erst als aufgrund der Auswärtsbewegung die viel potentielle Energie tragende Kernmantelzone zerstört wird, verkleinert sich das Toleranzintervall deutlich. Den größten Anteil an der Breite des Toleranzintervalls bewirkt die Abschätzung der potentiellen Energie in der Kernmantelzone, in der sowohl die Dichte als auch die spezifische potentielle Energie nach außen abfallen; dies erklärt die starke Verkleinerung des Toleranzintervalls nach der Explosion um eine Zehnerpotenz.

Zum Zeitpunkt des Abbruchs der Rechnung bei einer Modellnummer von 1422 liegt die rückintegrierte Totalenergie bei $(7.52 \pm 0.22) \cdot 10^{43}$ erg unter Benutzung von Abschätzung (5.26). Verwendet man die andere Abschätzung (5.29) so reduziert sich die gesamte Breite des Toleranzintervalls auf $0.31 \cdot 10^{43}$ erg. Zum Zeitpunkt des Abbruchs beträgt der unter Verwendung der Trapezregel zur Integration der Leuchtkraft summierte Oberflächenterm $2.54 \cdot 10^{43}$ erg. Verwendet man eine implizite Diskretisierung zur Leuchtkraftintegration so ergibt sich ein Wert von $2.56 \cdot 10^{43}$ erg, bei einer expliziten Diskre-

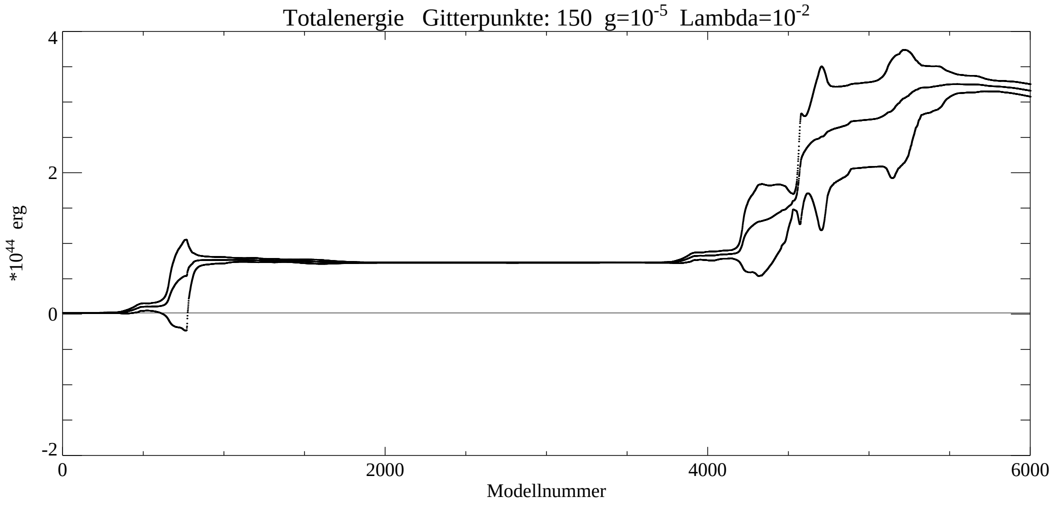


Abbildung 6.17: Verlauf der zurückintegrierten Totalenergie für die Modellreihe mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität unter Verwendung der Diffusionsnäherung. Abschätzung unter Verwendung von Gleichung (5.26).

tisierung $2.52 \cdot 10^{43}$ erg. Die Art der Leuchtkraftintegration hat somit auf die Frage der Totalenergieerhaltung nur eine sehr geringe Bedeutung. Der Totalenergiegewinn des Endmodells beträgt das 2.9 fache des Oberflächenterms. Zum Vergleich beträgt die kinetischen Energie der Auswärtsbewegung am Ende der Rechnung $4.1 \cdot 10^{43}$ erg, und immer noch steigt diese aufgrund der ansteigenden auswärtsbewegten Masse (obwohl die Materiegeschwindigkeit schon fällt) weiter an. Aufgrund der großen Abweichung muß hier von einem echten Problem gesprochen werden. Allerdings macht erst die Zerstörung des Kerns das Ausmaß der Totalenergieverletzung eindeutig sichtbar! Während der Existenz des inneren Kernes kann aufgrund der schlechten Definition der momentanen Totalenergie, die in sehr großen Toleranzintervallen resultiert, keine Verletzung der Totalenergieerhaltung bewiesen werden.

Da die Modelle mit anderen räumlichen Auflösungen in leicht unterschiedlichen Phasen der Expansion abbrachen stellt sich die Frage, wie repräsentativ für die weitere Entwicklung der Wert der rückintegrierten Totalenergie zum Zeitpunkt des Abbruchs ist. Um diese Frage zu klären wurde die Modellreihe wie vorher beschrieben mit der Diffusionsnäherung wiederholt, hierbei war es möglich die Expansionsphase und den daraufhin wieder einsetzenden Kollaps zu verfolgen. Weiterhin dient diese Rechnung auch dazu, die Frage zu klären, ob der Wegfall der Zeitterme in der ersten Momentengleichung, der genaugenommen notwendig ist um die volle Konsistenz mit der Totalenergiegleichung zu gewährleisten, wesentlichen Anteil an der Verletzung der Totalenergieerhaltung hat. Abbildung (6.17) zeigt den Verlauf der zurückintegrierten Totalenergie für diese Modellsequenz unter Verwendung der Trapezregel für die Leuchtkraftintegration. Vergleicht man dieses Diagramm mit der Totalenergieerhaltung der Modellreihe mit der vollen ersten Momentengleichung in Abb. (6.14) oben, so sieht man kaum einen Unterschied. Die minimalsten Differenzen rühren von der leicht unterschiedlichen Entwicklung des Zeitschrittes, der aufgrund der besseren Konvergenz des Iterationsverfahrens im Fall der Diffusionsnäherung zeitweise größer ist. Vergleicht man die rückintegrierte Totalenergie der Modellnummer 1400 bevor der Zeitschritt in der Serie mit der vollen Momentengleichung zusammenbrach, so sind deren $(7.52 \pm 0.22) \cdot 10^{43}$ erg innerhalb des Toleranzintervalls der Modellsequenz mit Diffusionsnäherung von $(7.54 \pm 0.18) \cdot 10^{43}$ erg. Die Verwendung der Diffusionsnäherung scheint also keinen wesentlichen Einfluß zu haben, was aufgrund der bezüglich der Lichtgeschwindigkeit kleinen Materiegeschwindigkeiten auch nicht verwundert[2]. Weiterhin sieht man, daß in der weiteren Expansionsphase die Totalenergieerhaltung recht gut ist. Das Toleranzintervall des Modells 3500, einem Zeitpunkt kurz vor dem Beginn eines neuen Kollapses, beträgt $(7.26 \pm 0.01) \cdot 10^{43}$ erg. Hieraus folgt, daß während der Expansion eine leichte künstliche Totalenergievernichtung stattfand, die in ihrem Ausmaß allerdings bei weitem nicht mit der Totalenergieerzeugung während der Phase der Existenz des inneren Kerns vergleichbar ist. Die Modellnummer 3900 entspricht der Ausbildung eines neuen inneren Kerns, was sich in einer sichtbaren Aufweitung des Toleranzintervalles bemerkbar macht. Die Schwankungen der Breite des Toleranzintervalls entsprechen Schwingungen des Kernmantels die der Explosion vorangehen. Nach dieser Explosion wird deutlich, daß das Modell wiederum künstlich Totalenergie gewonnen hat, am Ende der Rechnung bei einer Modellnummer von 6403 beträgt das Toleranzintervall $(3.10 \pm 0.06) \cdot 10^{44}$ erg, die Oberflächenterme $2.52 \cdot 10^{44}$ erg. Auch während der zweiten Expansionsphase ist wieder eine leichte Totalenergievernichtung sichtbar.

Es stellt sich nun die Frage wie der Totalenergiefehler von der räumlichen und zeitlichen Auflösung abhängt. Zunächst soll die Abhängigkeit von der Größe des Zeitschrittes betrachtet werden. Hierzu ist in Abbildung (6.18) der Totalenergiefehler pro Zeitschritt der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten und der vollen Momentengleichung dargestellt. Dazu wurde die Totalenergiegleichung nur von t^n bis t^{n+1} integriert, die numerische Testmethode ist die gleiche wie bei der Rückintegration zu $t = 0$. Auch hier wurde die Leuchtkraftintegration mittels der Trapezregel durchgeführt. Da sich die Energieskalen im Laufe der Rechnung ändern wird der Totalenergiefehler relativ zur momentanen potentiellen Energie (diskretisiert mittels Gleichung (5.12)) aufgetragen. Wegen der relativ großen Änderung dieser Größe im Verlauf der Rechnung wurde der Logarithmus des Betrages dargestellt. Zunächst sieht man die Pole bei einer Modellnummer von 102 und 1104, die einem Wechsel von künstlicher Totalenergievernichtung zu Erzeugung im ersten Fall und von Erzeugung zu Vernichtung im zweiten Fall entsprechen. Der Betrag

[2] Die zusätzlichen Terme in der Totalenergiegleichung im Falle der Benutzung der vollen Momentengleichung sind von der Ordnung $\left(\frac{u}{c}\right)^2$.

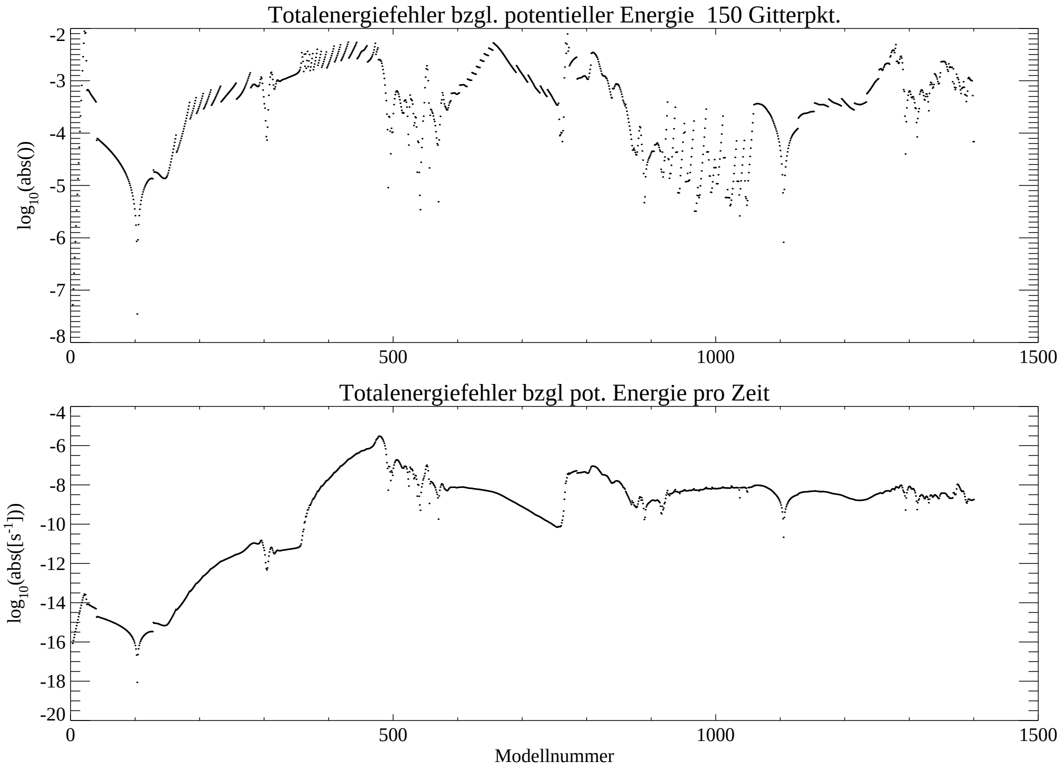


Abbildung 6.18: Totalenergiefehler pro Zeitschritt, 150 Gitterpunkte, $\kappa = 1\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{g}^{-1}$. Oben: Relativer Fehler bezüglich der momentanen potentiellen Energie. Unten: Gleiche Größe nur bzgl. der Größe des Zeitschrittes.

des relativen Totalenergiefehlers ist über die gesamte Rechnung kleiner als $8 \cdot 10^{-3}$ pro Zeitschritt, die betragsmäßig größten Fehler treten kurz nach der Kernexplosion auf. Daraus folgt aber, daß das Verfahren einen solch kleinen Totalenergiefehler bezüglich der potentiellen Energie (beziehungsweise der sonst maximalen mechanischen Energie) garantiert, bezüglich der wesentlich kleineren Anfangstotalenergie entspricht dieser Fehler allerdings 117%. Um die Abhängigkeit von der Größe des Zeitschrittes zu bestimmen wird der relative Fehler durch diesen dividiert. Das Ergebnis ist im unteren Diagramm von Abb. (6.18) dargestellt. Was als erstes auffällt ist die Tatsache, daß aus dem höchst unstetigen Verlauf des relativen Fehlers pro Zeitschritt eine weitgehend stetige Kurve des Fehlers pro Zeit geworden ist. Dies besagt, daß der relative Totalenergiefehler pro Zeitschritt proportional zu dessen Größe ist. Dies zeigt sich auch falls man von einem Modell mit einem Zeitschritt weiterrechnet, der kleiner ist als der, der durch die automatische Anpassung ausgewählt wurde; falls man den Zeitschritt innerhalb von 5 Größenordnungen reduziert, reduziert sich der relative Fehler pro Zeitschritt um denselben Faktor. Dies ist aber eine höchst unangenehme Tatsache: Verwendet man einen um einen Faktor k kleineren Zeitschritt, so reduziert sich zwar der

Fehler pro Zeitschritt um den Faktor k, da man aber zur Überdeckung einer gleichen Entwicklungsphase die k–fache Anzahl an Zeitschritten benötigt und wie die Rechnung zeigt in der Regel der Totalenergiefehler in jedem dieser Zeitschritte dasselbe Vorzeichen hat, ist dadurch keine Verbesserung der Totalenergieerhaltung möglich. Dies gilt allerdings nur unter der Bedingung, daß der Zeitschritt klein gegenüber der Zeitskala der physikalischen Entwicklung ist, was man aus dem Vorhandensein von Veränderungen des Totalenergiefehlers pro Zeit auf längeren Zeitskalen sieht. Typischerweise steigt der Totalenergiefehlers pro Zeit in Phasen in denen auf der dynamischen Zeitskala des Objektes Veränderungen ablaufen, so in der Phase des zweiten Kollapses zwischen den Modellnummern 370 und 480 und kurz nach der Explosion des zweiten Kernes bei Modellnummer 760.

Um die Abhängigkeit des Totalenergiefehlers von der räumlichen Auflösung zu untersuchen werden die Modellsequenzen mit unterschiedlicher Gitterpunktanzahl verglichen. Die Abbildungen (6.19) und (6.20) zeigen den Verlauf der zurückintegrierten Totalenergie der Modellreihen mit 300 bis 800 Gitterpunkten. In allen Fällen wurde die Abschätzung (5.26) verwendet. In der folgenden Tabelle sind die Toleranzintervalle und die zeitlich integrierten Oberflächenterme zum Zeitpunkt des Abbruchs der Rechnung aufgeführt. Diese sind, wie die Rechnung unter Verwendung der Diffusionsnäherung gezeigt hat, repräsentativ für die rückintegrierte Totalenergie während der Expansionsphase, das Absinken bis zu deren Ende betrug in dieser Rechnung nur 3.7%.

Pkt.	g_t	λ	Nr_{Abbr}	Tol. Interv. [erg]	O. Term [erg]
150	10^{-5}	10^{-2}	1422	$(7.52 \pm 0.22) \cdot 10^{43}$	$2.54 \cdot 10^{43}$
300	10^{-5}	10^{-2}	1362	$(6.91 \pm 0.12) \cdot 10^{43}$	$2.55 \cdot 10^{43}$
	10^{-5}	10^{-3}	1369	$(7.18 \pm 0.14) \cdot 10^{43}$	$2.62 \cdot 10^{43}$
512	10^{-5}	10^{-3}	1323	$(5.65 \pm 0.17) \cdot 10^{43}$	$1.87 \cdot 10^{43}$
	0	10^{-2}	1307	$(5.57 \pm 0.16) \cdot 10^{43}$	$1.91 \cdot 10^{43}$
	0	10^{-3}	1349	$(5.65 \pm 0.18) \cdot 10^{43}$	$1.87 \cdot 10^{43}$
800	0	10^{-3}	1797	$(4.85 \pm 0.15) \cdot 10^{43}$	$1.74 \cdot 10^{43}$

In allen Fällen ist somit nach Zerstörung zumindest des Kernmantels eine deutliche Erzeugung von Totalenergie sichtbar, die tatsächliche Anfangstotalenergie betrug $1.644 \cdot 10^{42}$ erg. In allen Fällen beträgt diese Totalenergieerzeugung mehr als das Doppelte des Oberflächenterms, ebenso ist die momentane Totalenergie zum Zeitpunkt des Abbruchs (gegeben durch rückintegrierte Totalenergie − Oberflächenterme) immer positiv und liegt auch eindeutig über der anfänglichen Totalenergie. Es ist jedoch ein klarer Trend zu niedrigerem Totalenergiefehler bei Erhöhung der Gitterpunktanzahl zu erkennen. Allerdings ist diese Verbesserung schwächer als linear von der Gitterpunktanzahl abhängig, der Erhöhung der Gitterpunktanzahl um einen Faktor 5.33 von 150 auf 800 Gitterpunkten entspricht nur eine Verbesserung

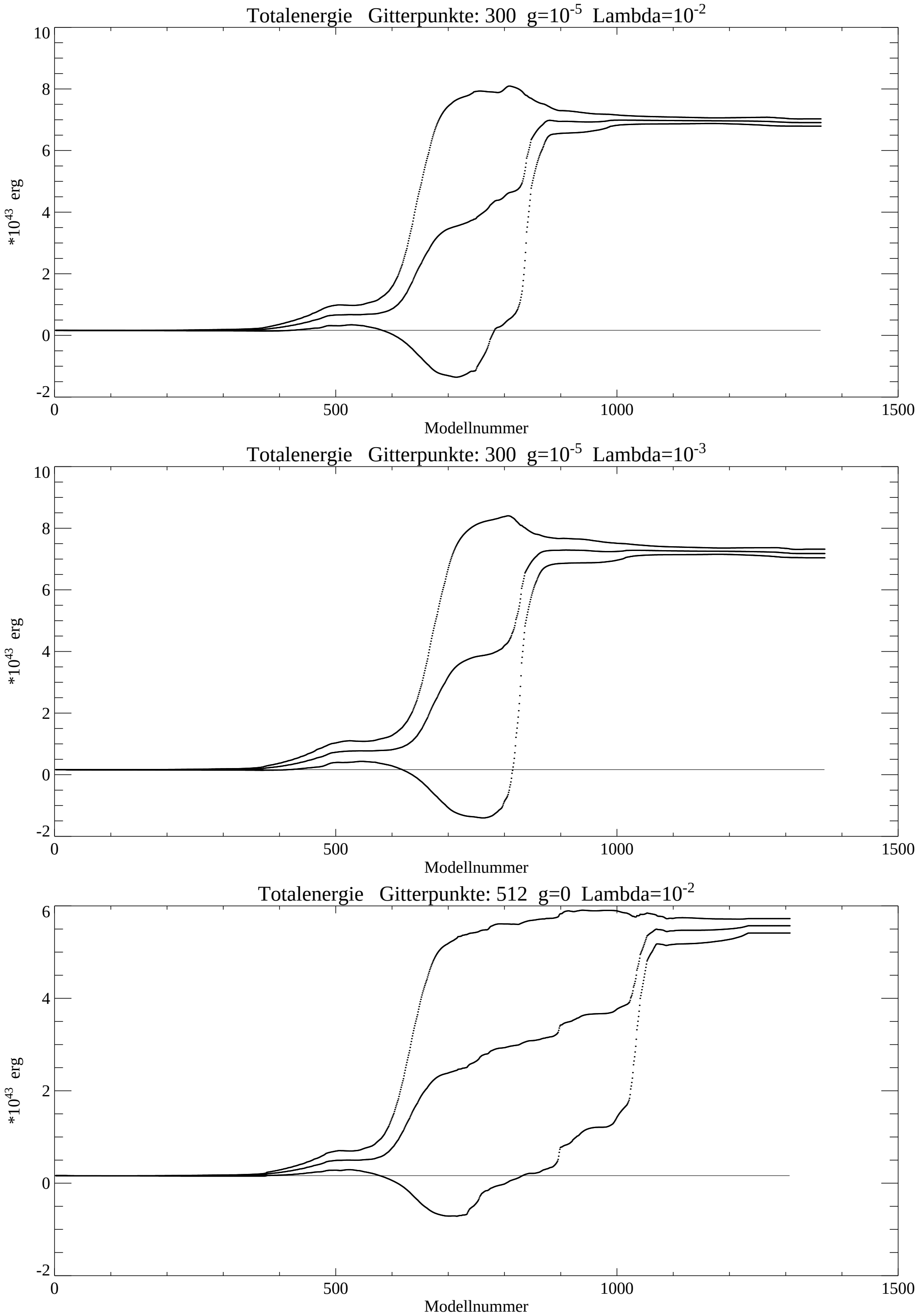


Abbildung 6.19: Zurückintegrierte Totalenergie der Modelle konstanter Opazität mit 300 und 512 Gitterpunkten.

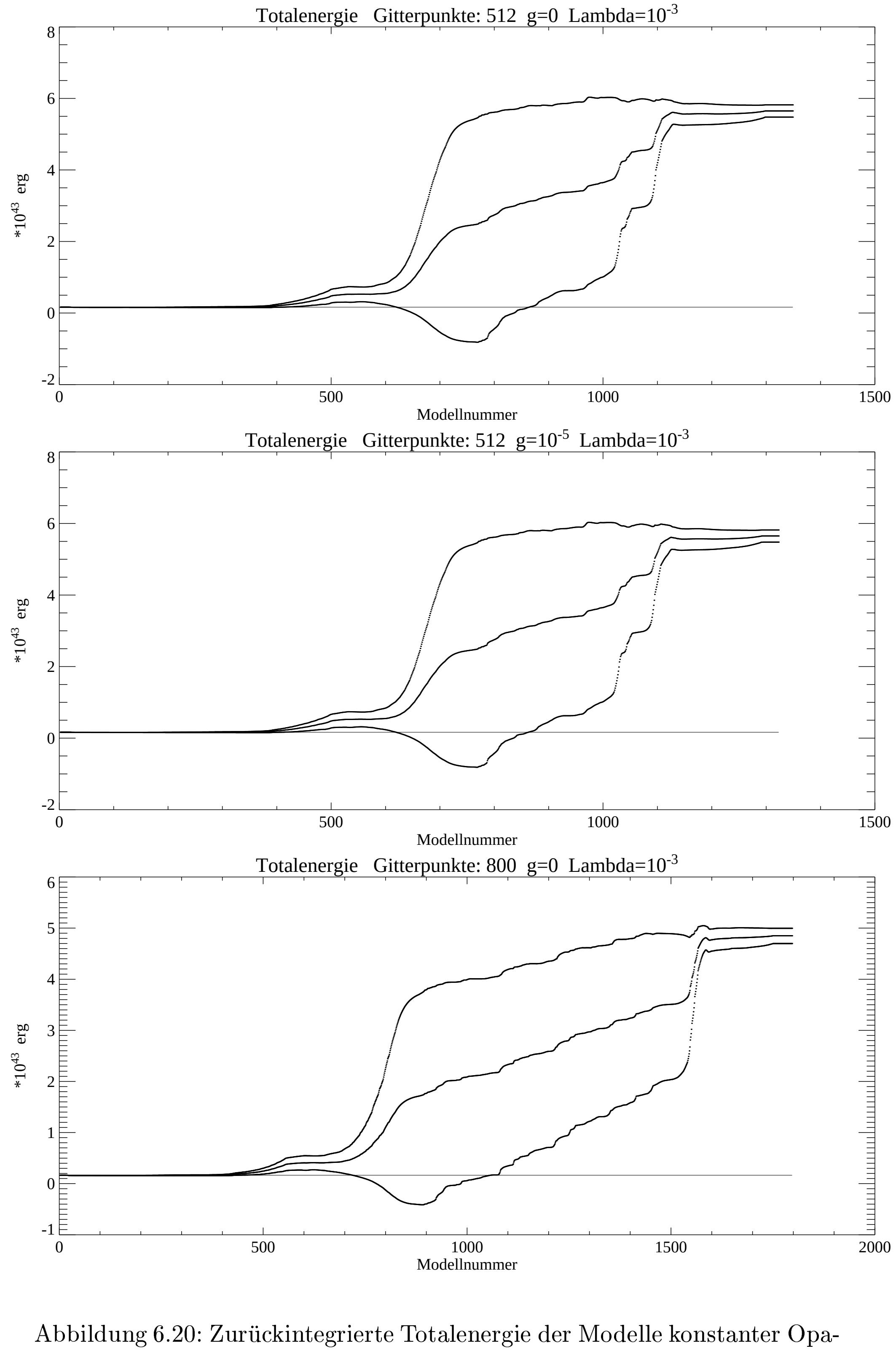


Abbildung 6.20: Zurückintegrierte Totalenergie der Modelle konstanter Opazität mit 512 und 800 Gitterpunkten.

um einen Faktor 1.57! In dem Verlauf des Totalenergiefehlers als Funktion der Modellnummer weisen die beiden Modellreihen mit 150 und 300 Gitterpunkten sowie die mit 512 und 800 Gitterpunkten große Ähnlichkeiten auf, wie auch die Entwicklung dieser beiden Gruppen ähnlich ist. Sowohl mit 150 als auch mit 300 Gitterpunkten kommt es zu einer massiven Auswärtsbewegung noch bevor es zur Wechselwirkung der beiden Stöße kommt. Deshalb nehmen die Toleranzintervalle in ihrer Breite nach dem Beginn der Kernexplosion rasch ab, die Totalenergie wird schnell wieder zu einer gut definierten Größe. Im Fall der beiden höheren Auflösungen kommt es zuerst zur Stoß-Stoß-Wechselwirkung und erst dann zur Explosion. Dies hinterläßt auch im Verlauf der Totalenergieerhaltung Spuren. Konsequenz ist ein Anstieg der rückintegrierten Totalenergie während der Phase der Schwingungen der Kernmantelzone, die der Wechselwirkung folgen. Dadurch liegt die Anfangsenergie schon zu Beginn der Kernexplosion außerhalb des Toleranzintervalls. Obwohl bei diesen Modellreihen die Zentraldichte bei Abbruch im Vergleich zu den beiden gröberen Auflösungen nur schwach abgenommen hatte, ist die Zerstörung der Kernmantelzone offenbar ausreichend, das Toleranzintervall drastisch zu verkleinern. Der scheinbar langsamere Anstieg der rückintegrierten Totalenergie im Falle von 800 Gitterpunkten ist auf den dort kleineren Zeitschritt in der Phase der Kernmantelschwingungen zurückzuführen.

Untersucht man den Einfluß des zeitlichen Gittersteifeparameters g_t auf die Totalenergieerhaltung, so sieht man, daß in den Modellreihen mit 512 Gitterpunkten die Wahl von $g_t = 10^{-5}$ die Totalenergieerhaltung nicht verschlechterte. Dies ist durch die Tatsache erklärbar, daß während der Rechnung keine deutlich kürzeren Zeitskalen aufzulösen waren als die durch diese Wahl von g_t bedingte Gitterrelaxationszeitskala. Da die Wahl von $g_t = 10^{-5}$ offenbar keinen Einfluß auf die Totalenergieerhaltung hat, sind die Modellreihen mit 150 und 300 Gitterpunkten, bei denen aus technischen Gründen $g_t = 0$ nicht gewählt werden konnte, direkt mit denen höherer Gitterpunktanzahlen vergleichbar. Anders sieht es bei der Abhängigkeit der Totalenergieerhaltung von der Viskositätslängenskala λ ab. Hier ergeben sich insbesondere bei den Modellsequenzen mit 300 Gitterpunkten erkennbare Unterschiede. Bei der Wahl einer kleineren Viskositätslängenskala verschlechtert sich die Totalenergieerhaltung. Derselbe Effekt ist auch in der Modellreihe mit 512 Gitterpunkten sichtbar, dort allerdings in schwächerer Form. Daß der Effekt der Viskositätslängenskala relativ klein ist, dürfte auf das adaptive Gitter zurückzuführen sein, das dafür sorgt, daß der Verlauf der Größen als Funktion des Gitterindexes sehr ähnlich für verschiedene Werte von λ aussieht. Nur die räumliche Glättung des Gitters sorgt dafür, daß die Anzahl von Gitterpunkten, die notwendig ist, einen bestimmten Bereich in Δr zu überdecken, mit diesem logarithmisch ansteigt, dies ist allerdings eine sehr schwache Abhängigkeit. Trotzdem ist es wahrscheinlich, daß deshalb eine Gitterpunktanzahl von 300 etwas wenig für die Wahl von $\lambda = 10^{-3}$ ist, sodaß für den Stoß mehr Punkte benötigt werden, die in anderen Bereichen

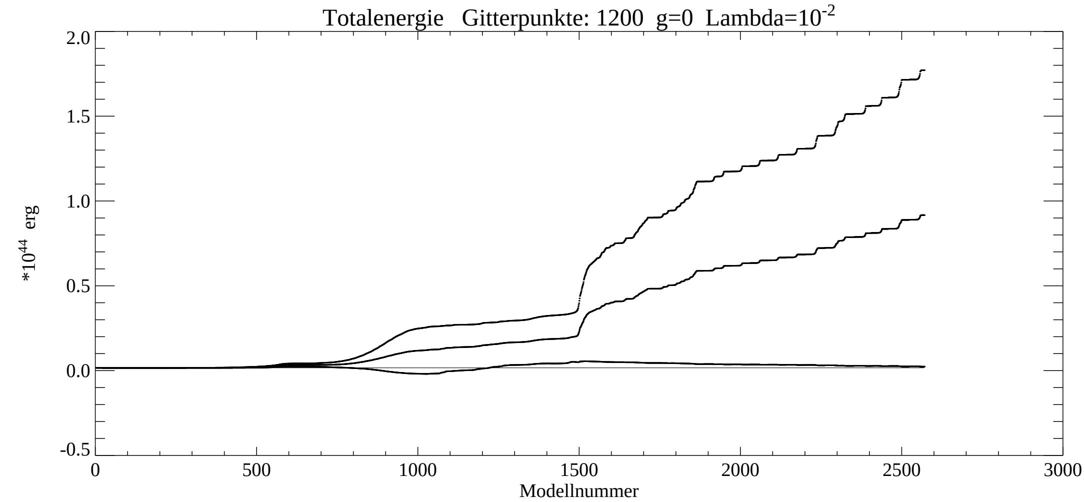


Abbildung 6.21: Verlauf der zurückintegrierten Totalenergie für die Modellreihe mit 1200 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Abschätzung unter Verwendung von Gleichung (5.26).

der Strömung fehlen. Diese Tatsache kann die größere Abweichung in der Totalenergieerhaltung bei 300 Gitterpunkten im Vergleich zu 512 Punkten erklären.

Die Modellreihe mit 1200 Gitterpunkten nimmt hier aufgrund der Tatsache, daß es nicht zu einer Kernexplosion kam, eine Sonderstellung ein. In Abb. (6.21) ist die rückintegrierte Totalenergie für diese Modellsequenz dargestellt. Zum Zeitpunkt, als die Rechnung von Hand abgebrochen wurde, war eine Anfangstotalenergie von $2.37 \cdot 10^{42}$ erg bis $1.77 \cdot 10^{44}$ erg mit dem Endmodell verträglich; der unter Verwendung der Trapezregel summierte Oberflächenterm betrug $5.78 \cdot 10^{44}$ erg. Bemerkenswert ist insbesondere, daß die untere Schranke in diesem Fall nur 0.1% des Oberflächenterms über der wirklichen Anfangsenergie von $1.644 \cdot 10^{42}$ erg liegt. Der steile Anstieg des Totalenergiefehlers bei einer Modellnummer von 1500 ist durch das Ansteigen des Zeitschritts zu diesem Zeitpunkt von 10^6 s auf $6.25 \cdot 10^8$ s zu erklären. Die sich bei höheren Modellnummern anschliessende Treppenstruktur insbesondere in der oberen Abschätzung ist ebenfalls ein Effekt der Zeitschrittvariation, in diesem Fall aufgrund der Stoßfrontinstabilitäten. Betrachtet man die Totalenergie zum Abschluß der Kernmanteloszillationen aufgrund der Stoß-Stoß-Wechselwirkung, so liegt diese deutlich günstiger als in der Modellreihe mit 800 Gitterpunkten. Legt man die festen Diskretisierungen der potentiellen und kinetischen Energie (5.12) und (5.15) zugrunde, so liegt die rückintegrierte Totalenergie der Modellreihe mit 800 Gitterpunkten unmittelbar vor der Explosion bei $3.5 \cdot 10^{43}$ erg, im Falle von 1200 Gitterpunkten bei Modell 1400, nachdem sich der Kern beruhigt hat, bei $1.85 \cdot 10^{43}$ erg, selbst die obere Abschätzung liegt zu diesem Zeitpunkt mit $3.2 \cdot 10^{43}$ erg noch unter dem Wert für 800 Gitterpunkte. Im Gegensatz zu den Modellreihen mit schlechterer Auflösung scheint hier der Totalenergiefehler stärker als linear zu sinken, einer Steigerung der Gitterpunktanzahl um einen Faktor 1.5 entspricht ein Rückgang des Totalenergiefehlers um einen Faktor 2! Weiterhin ist auffällig, daß die untere Abschätzung nach Eintritt in die Akkretionsphase etwa ab Modell 1500 nahezu konstant bleibt, und nicht ebenso wie die feste Diskretisierung und die obere Abschätzung ansteigt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß bei allen Modellreihen, die zu Kernexplosionen führen, die rückintegrierte Totalenergie der nach der Explosion expandierten Modelle (die zu diesem Zeitpunkt recht gut definiert ist) signifikant über der Anfangsenergie liegt, die Abweichung ist zu groß um den Fehler durch Unsicherheiten der Diskretisierung der nicht eindeutig definierten kinetischen und potentiellen Energie oder durch Unsicherheiten in der zeitlichen Integration der Oberflächenterme zu erklären. Nur im Fall der Modellsequenz mit der höchsten Auflösung kommt es nicht zu einer Kernexplosion, hier ist die rückintegrierte Totalenergie angesichts der Unsicherheit der zeitlichen Integration gerade noch mit einer Totalenergieerhaltung verträglich.

6.1.2.2 Lokale Totalenergieerhaltung

Da die globale Analyse deutliche Abweichungen von der Totalenergieerhaltung ergeben hat, stellt sich die Frage, aus welchem Bereich der Strömung diese stammen. Die Antwort darauf kann der lokale Vergleich der nicht die Totalenergie erhaltenden Lösung mit einer Diskretisierung der Totalenergiegleichung in Erhaltungsform geben. Im Abschnitt über die lokale Totalenergieuntersuchung wurden dazu 2 verschiedene Diskretisierungsmöglichkeiten beschrieben, die erste verwendet die schon zur globalen Untersuchung benutzte Approximation der Volumenterme (Gl. (5.33)), die zweite die Approximation, die in den Rechnungen unter Verwendung der Totalenergiegleichung als unabhängiger Gleichung zur Anwendung kommt (Gl. (5.35)). Zunächst stellt sich die Frage, ob diese zweite Diskretisierung deutlich andere Ergebnisse liefert. Um diese Frage zu klären ist in Abbildung (6.22) der lokale Energiefehler pro Zeitschritt (entspricht der rechten Seite von Gl. (5.30)) für diese beiden Diskretisierungen der Volumenterme am Beispiel des Modells 750 der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten dargestellt, also in einer Phase, in der die globale Analyse einen großen Totalenergiefehler aufzeigte. Um die Größe dieses Fehlers bewerten zu können, ist dieser relativ zum Betrag der betragsmäßig größten Teilenergie der jeweiligen Zelle, die mit der entsprechenden Diskretisierung der Volumenterme bestimmt wurde, aufgetragen. Im Zentrum ist dies die innere Energie, weiter außen die potentielle Energie. Im direkten Vergleich der beiden Diagramme sind nur geringfügige Unterschiede sichtbar. Der relative Unterschied des Totalenergiefehlers der beiden Diskretisierungen außerhalb der Nulldurchgänge liegt typischerweise bei wenigen Prozent. Der über alle Zellen summierte Totalenergiefehler (der

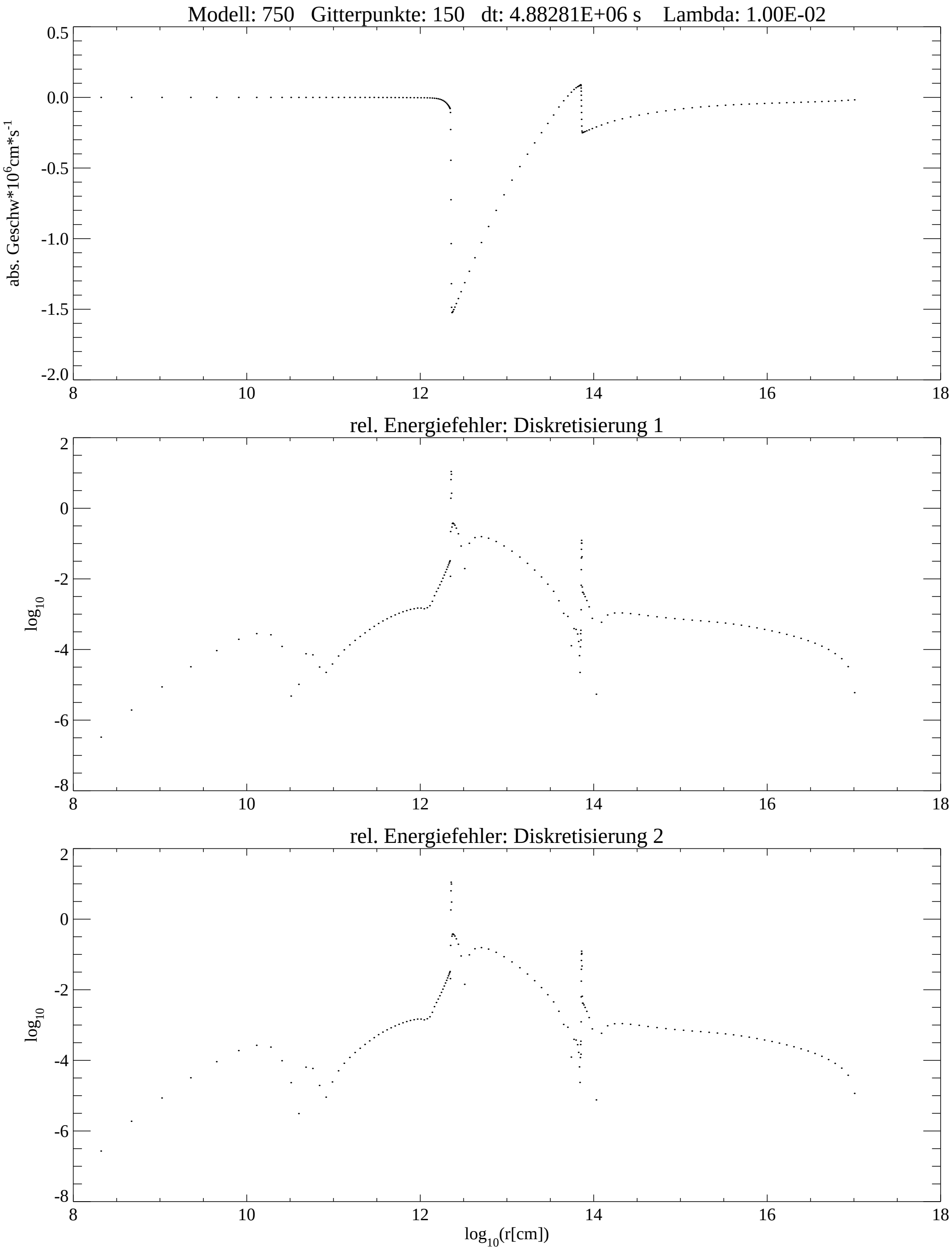


Abbildung 6.22: Vergleich des lokalen Energiefehlers relativ zur betragsmäßig größten Energieform der jeweiligen Zelle des Modells 750 mit 150 Gitterpunkten und konstanter Opazität. Diskretisierung 1 verwendet Gl. (5.33), Diskretisierung 2 Gl. (5.35) zur Approximation des Volumenterms.

aufgrund der unterschiedlichen Behandlung der Oberflächenterme nicht exakt dem der globalen Untersuchung entspricht) beträgt im Fall der ersten Diskretisierung $1.212 \cdot 10^{41}$ erg, bei der zweiten Diskretisierung $1.165 \cdot 10^{41}$ erg, der Unterschied beträgt somit 3.9% (im Falle der globalen Untersuchung betrug der Fehler ebenfalls gerundet $1.212 \cdot 10^{41}$ erg). Aufgrund der kleinen Unterschiede und der großen morphologischen Ähnlichkeit der Fehlerverteilung kann man sagen, daß beide Diskretisierungen im wesentlichen gleiche Resultate ergeben, dies bestätigt sich auch bei der Untersuchung anderer Modelle. In den Abbildungen der Modelle im Abschnitt über deren Entwicklung wurde zur Fehlerbestimmung die Diskretisierung 2 (Approximation mittels Gl. (5.35)) verwendet, die auch für die Rechnungen mit der Totalenergiegleichung benutzt wurde. Zunächst soll die Modellsequenz mit 150 Gitterpunkten genauer betrachtet werden, dann die Unterschiede zu den anderen Modellreihen.

In den Abbildungen (6.1) bis (6.5) der Modelle mit 150 Gitterpunkten ist in den beiden unteren Diagrammen der lokale Totalenergiefehler aufgetragen. Das linke Diagramm zeigt den Fehler pro Zeitschritt relativ zu der betragsmäßig größten Energieform pro Zelle, dieselbe Größe wie in Abbildung (6.22). Im rechten Diagramm ist der Fehler pro Zelle und Zeitschritt bezüglich des über alle Zellen summierten Gesamttotalenergiefehlers pro Zeitschritt aufgetragen. Positive Werte bedeuten hier, daß in der jeweiligen Zelle der Totalenergiefehler dasselbe Vorzeichen wie der Gesamtfehler hat, deshalb ist dieser zusätzlich angegeben. Dieses Diagramm erlaubt Rückschlüsse darüber, aus welchem Bereich des Protosterns der globale Fehler stammt.

Das Modell 300 in Abb. (6.1) steht repräsentativ für die erste Phase, in der wie die globale Analyse zeigt, deutliche Abweichungen von der Erhaltung der Totalenergie sichtbar werden. Der gesamte Totalenergiefehler pro Zeitschritt von $1.394 \cdot 10^{39}$ erg ist positiv, es liegt also eine künstliche Erzeugung von Totalenergie vor. Der lokale Fehler relativ zur größten Energieform liegt für den größten Teil der Strömung zwischen 10^{-3} und 10^{-4} pro Zeitschritt — Ausnahmen sind das Zentrum, in dem der Totalenergiefehler wesentlich kleiner ist und der Stoß wo deutlich gößere Werte erreicht werden, im Gegensatz zum größten Teil der restlichen Strömung liegt dort eine künstliche Totalenergievernichtung vor. Daß die Totalenergieerhaltung zum Zentrum hin immer besser wird, dies ist ein auch für andere Modelle typisches Phänomen, ist dadurch zu verstehen, daß dort die kinetische und potentielle Energie um Größenordnungen unter der inneren Energie liegen, die Totalenergiegleichung dort also in die Innere-Energiegleichung übergeht, die aber wurde in Erhaltungsform gelöst. Der starke Anstieg im Stoß ist auf das Hinzukommen des zusätzlichen Viskositätsterms, der dort wichtig wird, zurückzuführen. Bis auf die Spitze im Stoß ist das Profil des lokalen Totalenergiefehlers durch 3 lokale Maxima geprägt, die alle einer Totalenergieerzeugung entsprechen. Eines davon liegt im Kernmantel, das zweite in der frei-fallenden Hülle kurz vor dem Stoß und das dritte sehr breite noch weiter stromaufwärts. Das Maximum im Kern fällt mit dem relativ schlecht aufgelösten Anstieg in der spezifischen potentiellen Energie zusammen, das vor dem Stoß mit dem dortigen Anstieg in der Geschwindigkeit (bzw. der spez. kinetische Energie), dies ist mit einer Verschlechterung der Auflösung der spezifischen kinetischen Energie verbunden. Das äußere Maximum dürfte von den Advektionstermen durch die Gitterbewegung außen stammen, da in dieser Phase der Entwicklung das Gitter immer noch nach innen in den stärker werdenden Stoß läuft. Der größte Teil des Gesamtfehlers fällt außen an, dort sitzt in dieser Phase allerdings auch der Hauptanteil der Masse.

In der Phase des zweiten Kollapses bei Modell 400 in Abb. (6.2) sieht das Profil des Totalenergiefehlers bezüglich der größten Energieform wesentlich gleichmäßiger aus. Der starke Anstieg im Stoß ist verschwunden. Der absolute Fehler wird praktisch vollständig von der sich einwärtsbewegenden Mantelzone des ersten Kerns dominiert. Die Ursache dafür ist, daß in dieser Zone bei räumlich nur schwach veränderlichem relativen Fehler der größte Anteil speziell an potentieller Energie sitzt. Das in der Phase des ersten Kerns dominierende Maximum in der äußeren Hülle ist nur noch leicht angedeutet.

Der größte Anstieg in der globalen rückintegrierten Totalenergie erfolgte in der Phase der Existenz des zweiten Kerns. Das Modell 750 in Abb. (6.3) steht repräsentativ für diese Phase. Der relative Fehler bezüglich der lokal größten Energieform ist in den beiden Stößen maximal, vor allem im inneren Stoß beträgt die Abweichung, die einem Totalenergieentzug entspricht, maximal 1113% pro Zeitschritt der lokalen potentiellen Energie. Für den Gesamttotalenergiefehler sind diese Zonen allerdings von geringer Bedeutung. Im Diagramm des Anteils am Gesamtfehler ist von dem äußeren Stoß nichts zu sehen, die Wirkung des inneren Stoßes beschränkt sich auf 5 Zellen, deren Anteil am Gesamtfehler zusammen weniger als 5% beträgt. Der Grund dafür liegt in der kleinen Masse und damit auch geringen Energie, die aufgrund des adaptiven Gitters in diesen Zellen enthalten ist. Eine weitere Zone mit relativ hohem lokalen Totalenergiefehler ist das Gebiet zwischen dem inneren und dem äußeren Stoß. Der relative Fehler pro Zeitschritt liegt dort im Maximum bei 16% der lokalen potentiellen Energie. Diese Zone trägt schon deutlicher zum Gesamtfehler bei. Der Hauptanteil des Gesamtfehlers kommt allerdings aus der Mantelzone des inneren Kerns zwischen 10^{11} cm und 10^{12} cm. Von den Zellen im Maximum tragen allein 7 mit jeweils über 5% zum Gesamtfehler bei, also pro Zelle mehr als im gesamten inneren Stoß anfiel. Diese große Totalenergieerzeugung erfolgt obwohl der lokale relative Fehler pro Zeitschritt dort weniger als 10^{-3} der lokalen potentiellen Energie beträgt! Allein die Tatsache, daß in dieser Region die spezifische potentielle Energie ihr Maximum hat, ist für diese Größe des absoluten Fehlers verantwortlich. Im innersten Bereich des Kernes, wo die Expansionsbewegung kurz darauf startet, ist der relative Totalenergiefehler besser als $3 \cdot 10^{-4}$ pro Zeitschritt der lokalen inneren Energie, ist also nicht schlechter sondern eher besser als in anderen Bereichen der Strömung, sodaß ein Schluß von einer schlechten Totalenergieerhaltung zum Entstehen einer künstlichen Instabilität nicht möglich ist.

In der Phase der Expansion bei Modell 1000 in Abb. (6.4) ist der lokale relative Totalenergiefehler bis auf die beiden Stöße auf weniger als 10^{-4} pro Zeitschritt der lokal größten Energieform gesunken. Dies dürfte hauptsächlich auf den stark verkleinerten Zeitschritt zurückzuführen sein, da schon die globale Analyse gezeigt hat, daß der Fehler linear von der Größe des Zeitschritts abhängt. Selbst in den Stößen hat sich der Fehler auf maximal $5.6 \cdot 10^{-3}$ pro Zeitschritt bezogen auf die inneren Energie reduziert. Der größte Anteil des Gesamtfehlers fällt immer noch in der Kernmantelzone an, allerdings hat sich jetzt eine Zone hinter dem inneren Stoß ausgebildet, in der der Totalenergiefehler negativ ist und in der einzelne Zellen schon signifikant zum Gesamtfehler beitragen.

Gegen Ende der Rechnung bei Modell 1400 in Abb. (6.5) hat sich das Vorzeichen des globalen Totalenergiefehlers umgekehrt. Auch in dieser Phase ist der lokale relative Totalenergiefehler bis auf den Stoß besser als 10^{-4} pro Zeitschritt. Im Kern ist mit Ausnahme einzelner Zellen der lokale Totalenergiefehler negativ, in der einfallenden Hülle generell positiv. In der Hülle ist der lokale Fehler etwas geringer als im Kern, für den Beitrag der einzelnen Zellen zum Gesamtfehler ist dies allerdings nicht relevant. Da die Zellen hinter dem Stoß im Geschwindigkeitsmaximum die höchste Energie, in diesem Fall kinetische Energie, enthalten, tragen diese hauptsächlich zum Gesamtfehler bei.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Differenzenschema, von für globale Betrachtungen unwesentlichen Ausnahmen in Stößen abgesehen, eine nur gering schwankende räumliche Verteilung des Betrages des lokalen Fehlers relativ zur lokal größten Energieform garantiert, das genaue Aussehen der Verteilung, insbesondere die Vorzeichenwechsel können speziell in der Expansionsphase einen teilweise komplizierten Verlauf besitzen. Der Hauptbeitrag zum Gesamtfehler kommt aufgrund der gleichmäßigen Verteilung des relativen Fehlers aus den Gebieten, in denen die spezifischen Energieformen maximal sind, während der Phase des maximalen globalen Fehlers ist dies die Mantelzone des inneren Kerns.

Von der Modellreihe mit 300 Gitterpunkten und einer Viskositätslängenskala von $\lambda = 10^{-2}$ ist nur das Modell 706 in der Phase der Akkretion auf den zweiten Kern in Abb. (6.6) dargestellt. Die Kernmasse ist dieselbe wie in Modell 750 der Reihe mit 150 Gitterpunkten. Auch hier entspricht diese Phase einer starken künstlichen Totalenergieerzeugung. Will man dieses Modell mit dem mit 150 Gitterpunkten vergleichen, so muß man bedenken, daß der Zeitschritt der Modellreihe mit 300 Gitterpunkten bei dieser Modellnummer um den Faktor 2 kleiner ist als mit 150 Punkten. Der gesamte Energiefehler ist aber trotz halbiertem Zeitschritt und doppelter Punktanzahl nur um einen Faktor 1.66 gesunken. Das Fehlerprofil ähnelt sehr dem mit 150 Gitterpunkten. Deutlichster Unterschied ist ein Ansteigen des relativen Fehlers vor dem äußeren Stoß, das aber bezüglich des dadurch bedingten

Beitrages zum Gesamtfehler unbedeutend ist. Der größte Anteil des Gesamtfehlers kommt auch hier aus der Kernmantelzone, wo die spezifische potentielle Energie ihr Maximum hat. In der weiteren Entwicklung tritt während der Expansionsphase auch in dieser Modellreihe eine Zone künstlicher Totalenergievernichtung hinter dem auswärtslaufenden Stoß in Erscheinung, die gegen Ende der Rechnung den Gesamtfehler dominiert.

Für die Modellreihe mit 512 Gitterpunkten und $\lambda = 10^{-2}$ ist der lokale Totalenergiefehler während der Phase des ersten Kerns in Abb. (6.8) dargestellt. Für den globalen Totalenergiegewinn bis zum Ende der Rechnung ist diese Phase allerdings nicht von großer Bedeutung. Die Verteilung des Fehlers relativ zur lokal größten Energieform zeigt große Ähnlichkeit mit der der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten. Im Beitrag zum Gesamtfehler hat der Stoß allerdings einen deutlich höheren Anteil als bei geringerer Auflösung, der Beitrag ist hier auch negativ, entsprechend einer lokalen Totalenergievernichtung. Der Zeitschritt des Modells mit 512 Punkten ist um einen Faktor 1.4 gegenüber dem mit 150 Gitterpunkten kleiner, dies resultiert zusammen mit der höheren räumlichen Auflösung in einem um einen Faktor 5.0 kleineren Gesamtfehler. Dies wäre konsistent mit der Annahme eines linearen Zusammenhangs des Totalenergiefehlers mit der Gitterpunktanzahl, dies würde in einem Faktor 4.8 resultieren. Zur Phase der Akkretion auf den zweiten Kern erweist sich diese Annahme als falsch. Das Modell 688 in Abb. (6.9) weist, obwohl der Zeitschritt um einen Faktor 2.8 kleiner ist als im vergleichbaren Modell 750 mit 150 Gitterpunkten, nur eine Reduktion des gesamten Totalenergiefehlers um einen Faktor von 2.5 auf. Das Profil des Fehlers relativ zur lokal größten Energieform zeigt einige Unterschiede im Vergleich mit dem Modell geringerer Auflösung. So tritt in der Hülle bei einem Radius von 10^{15} cm eine Zone mit Totalenergievernichtung auf, für den Gesamtfehler ist diese allerdings unwesentlich. Der Anstieg des relativen Fehlers vor den beiden Stößen ist deutlich ausgeprägter als mit 150 Gitterpunkten. Vor allem der Anstieg vor dem inneren Stoß trägt deutlich zum Gesamtfehler bei, dessen Hauptanteil kommt aber immer noch aus der Kernmantelzone, obwohl dort der relative Fehler pro Zeitschritt besser als 10^{-3} ist, in der Zelle mit dem maximalen absoluten Fehler beträgt der Fehler pro Zeitschritt nur $2 \cdot 10^{-4}$ der potentiellen Energie. Im Kern sind hier auch Bereiche mit negativem Energiefehler aufgrund der höheren Auflösung deutlicher sichtbar als mit 150 Gitterpunkten, diese tragen aber nicht wesentlich zum Gesamtfehler bei. Diese Fehlerstruktur mit dem Hauptbeitrag aus der Kernmantelzone bleibt auch während der Kernschwingungen aufgrund der Stoß-Stoß-Wechselwirkung bestehen. Die Ausbildung einer Zone mit Totalenergievernichtung hinter dem auswärtslaufenden Stoß findet in dieser Modellreihe nicht statt, allerdings konnte diese Rechnung nicht so weit wie die Rechnungen mit geringerer Auflösung verfolgt werden, sodaß nicht ausgeschlossen werden kann, daß eine solche später entsteht.

Die Entwicklung des Fehlerprofils der Rechnung mit 800 Punkten entspricht im wesentlichen der der Modellreihe mit 512 Gitterpunkten. Während der Phase des größten Anstiegs der globalen rückintegrierten Totalenergie kommt auch hier der Hauptbeitrag des Fehlers aus der Kernmantelzone. Bis zum Abbruch der Rechnung tritt analog zu der Rechnung mit 512 Punkten keine Zone mit Totalenergievernichtung hinter dem auswärtslaufenden Stoß in Erscheinung.

Der Zustand der Modellreihe mit 1200 Gitterpunkten ist wieder zur Phase des neugebildeten ersten Kerns dargestellt. Vergleicht man den Totalenergiefehler relativ zur lokal größten Energieform des Modell 323 in Abbildung (6.11) mit dem von Modell 310 mit 512 Gitterpunkten in Abb. (6.8) so sieht man, daß keine neuen Strukturen hinzugekommen sind. Beim Beitrag zum Gesamtfehler ist auch hier der Stoß von größerer Bedeutung als bei den gröbsten Auflösungen. Auch zur Phase der Existenz des zweiten Kerns bei der Modellnummer 1016 in Abb. (6.12) ähnelt das Profil des relativen Totalenergiefehlers dem des Modells mit 512 Gitterpunkten. In der Hülle ist der Vorzeichenwechsel bei einem Radius von 10^{15} cm verschwunden, in der gesamten Hülle ist der Fehler positiv wie bei den Rechnungen mit 150 und 300 Gitterpunkten. Betrachtet man den Anteil der einzelnen Zellen am Gesamtfehler, so sieht man, daß in einigen Zellen im inneren Stoß eine beträchtliche Totalenergievernichtung stattfindet. Der Hauptanteil am Gesamtfehler kommt aber weiterhin aus der Kernmantelzone. Vergleicht man die Größe des Gesamtfehlers mit der des vergleichbaren Modells mit 512 Punkten, so stellt man fest, daß bei identischer Größe des Zeitschrittes der Fehler um einen Faktor 3.1 zurückging, obwohl die Gitterpunktanzahl nur um einen Faktor 2.3 erhöht wurde, bei den Modellen mit gröberer Auflösung ergab sich in dieser Phase keine signifikante Reduktion des Fehlers durch die Erhöhung der Gitterpunktanzahl! Die weitere Entwicklung dieser Modellreihe ist nicht mehr mit mit denen geringerer Auflösung zu vergleichen, da mit 1200 Gitterpunkten die Hauptakkretionsphase erreicht wird. Auch gegen Ende der Rechnung (siehe Modell 2570 in Abb. (6.13)) kommt immer noch der Hauptbeitrag des Gesamtfehlers aus der Kernmantelzone. Im Kern ist allerdings zu diesem Zeitpunkt der Fehler relativ zur lokalen potentiellen bzw. inneren Energie auf unter 10^{-7} pro Zeitschritt zurückgegangen, ist also schon besser als die garantierte Abbruchgenauigkeit der Newton-Raphson-Iteration, die in dieser Rechung 10^{-6} beträgt[3]. Dieser geringe Fehler ist allerdings auch eine Folge des zu diesem Zeitpunkt kleinen Zeitschritts. In der einfallenden Hülle ist der lokale relative Fehler deutlich größer, zum Gesamtfehler trägt die Hülle aber wegen der geringeren spezifischen Energien weniger bei. Der größte Teil des absoluten Fehlers stammt also aus einer Region in der der Fehler relativ zur lokal größten Energieform schon sehr gering ist.

[3]Die praktisch erreichte Abbruchgenauigkeit liegt aufgrund einer Nachiteration besser, typisch 10^{-11} bis 10^{-12}, wesentliche Limitierung ist hierbei die Genauigkeit der Matrixinversion.

6.1.3 Zusammenfassung und Diskussion der Resultate

Die Modellreihen mit konstanter Opazität waren vor allem als Testfall für das numerische Verfahren gedacht. Ziel war es, verschiedene Auflösungen und Wahlen der Gitterträgheit und der Viskositätslängenskala miteinander zu vergleichen; unter Verwendung realer Opazitäten ist dies problematisch. Hauptunterschied in der Entwicklung gegenüber Modellen mit realer Opazität ist, daß der zweite Kollaps aufgrund der im Temperaturbereich des ersten Kerns im realen Fall um fast 4 Zehnerpotenzen höheren Opazität durch die Wahl von $\kappa = 1\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}$ erst bei höheren Dichten gestoppt wird. Somit liegen die inneren Kerne thermodynamisch weiter im Bereich der Elektronenentartung. Außerdem müßte im Kern Konvektion berücksichtigt werden. Da dies für die Frage der Totalenergieerhaltung unwesentlich ist, wurde dies nicht getan. Auch eine wahrscheinlich vorhandene Inkonsistenz der Zustandsgleichung im Bereich der Dichte und Temperatur des inneren Kerns spielt für die numerische Totalenergieerhaltung keine Rolle; da in der Transformation der Gleichungen zur Totalenergiegleichung nirgendwo thermodynamische Ableitungen auftreten, muß diese für *jede* Vorgabe einer Druckfunktion $P = P(\rho, e)$ gelten. Für andere Erhaltungssätze, beispielsweise für die Entropie, können allerdings dadurch Fehler entstehen.

Alle Modelle entwickeln sich bis zur Bildung des zweiten Kerns im wesentlichen gleich. Kleine Unterschiede betreffen das Alter beim Erreichen gleicher Kernmassen, Modelle mit höheren Auflösungen erreichen diese früher als Modelle geringerer räumlicher Auflösung. Dies ist auch zu erwarten, da ein stabiles numerisches Verfahren dämpfend wirken muß, also den Kollaps verzögert. Erhöht man die Auflösung, so reduziert man die Dämpfung, vergleichbare Zustände werden so geringfügig früher erreicht. Beim Stoppen des zweiten Kollapses ist eine deutliche Tendenz zu höheren Zentraldichten erkennbar. In der Entwicklung nach Ausbildung des inneren Kerns ist bei den Modellen bis einschließlich 800 Gitterpunkten der Hauptunterschied ob der Kern vor oder nach der Wechselwirkung des einwärtslaufenden äußeren Stoßes mit dem inneren Stoß explodiert. In all diesen Fällen ist der Explosionsmechanismus sehr ähnlich. Die Explosion beginnt einige Jahre nach Ausbildung des inneren Kerns mit einer Expansionsbewegung im Zentrum, die wesentliche Verstärkung findet in der Wasserstoffionisationszone im Kernmantel statt, also in einem Bereich, der weit außerhalb des inkonsistenten Bereichs der Zustandsgleichung liegt. Eine künstliche Totalenergieerzeugung als Ursache dieser Störung erscheint unwahrscheinlich. Obwohl die lokale Totalenergieuntersuchung auch im Zentrum einen positiven Totalenergiefehler aufzeigte, ist dieser dort doch recht gering, da im Zentrum die kinetische und potentielle Energie nur eine geringe Rolle spielen, die Erhaltungsgleichung für die Summe aus Strahlungs– und inneren Energie aber gelöst wurde. Die Explosion kann nur im Fall der beiden gröbsten Auflösungen soweit verfolgt werden, daß die Zentraldichte gegen Ende der Rechnung wesentlich abgenommen hat, in allen Fällen treten die Probleme, die zum Abbruch der

Rechnung führen, nach Verlassen der durch die Explosion bedingten Lichtfront auf. Wahrscheinlich ist eine vollständig absorbierende Randbedingung für das Strahlungsfeld am Außenrand notwendig, um solche Probleme zu verhindern, eine Lösung hierfür ist jedoch nicht Ziel dieser Arbeit. Die globale Totalenergieuntersuchung zeigt, daß die Endzustände eine höhere Totalenergie besitzen als das Anfangsmodell obwohl in der Zwischenzeit Energie abgestrahlt wurde[4]. Bei allen Modellreihen, die zu Kernexplosionen führen, ist die globale Totalenergieerzeugung um einen Faktor von 2.8 bis 3.0 größer als der integrierte Oberflächenterm, kann also nicht durch Unsicherheiten in dessen zeitlicher Integration erklärt werden. Der Totalenergiefehler ist im Rahmen der getesteten Werte von der Wahl des zeitlichen Gittersteifeparameters und der Viskositätslängenskala nur sehr schwach abhängig, er ändert sich ebenfalls nur sehr schwach falls man die zeitabhängige erste Momentengleichung des Strahlungsfeldes durch die Diffusionsnäherung ersetzt. Letzteres ist durch die bei den hier auftretenden Geschwindigkeiten unwichtigen zeitabhängigen Terme bedingt. Der Hauptanteil der Totalenergieerzeugung muß während der Existenz des inneren Kerns passieren. In dieser Phase ist die Totalenergie zwar eine schlecht definierte Größe, was sich in breiten Toleranzintervallen für die zurückintegrierte Totalenergie äußert, da aber bis zur Bildung des inneren Kerns und nach dessen Zerstörung die Totalenergie wesentlich besser definiert ist und zwischen diesen beiden Phasen der Hauptanstieg der Abweichung stattfand, ist diese mit der Phase des zweiten Kerns zu identifizieren. Das Ansteigen des absoluten Fehlers ist allerdings nicht durch ein Ansteigen des Fehlers relativ zur Größe der momentanen Energieformen bedingt, sondern durch ein Ansteigen der Energieskalen, insbesondere der potentiellen Energie, in dieser Phase um mehr als 2 Größenordnungen. Ein ähnliches Resultat ergibt auch die lokale Totalenergiefehleranalyse. Hier reichen die räumlichen Schwankungen des Totalenergiefehlers relativ zur lokal größten Energieform nicht aus um die räumliche Variation der spezifischen Energien zu kompensieren, sodaß der Großteil des Fehlers aus der Region im Maximum der größten Energieform stammt, im Falle der Phase der Existenz des inneren Kerns ist dies dessen Mantelzone. Da die Inkompatibilität mit der Totalenergiegleichung durch das fehlende diskrete Analogon der Transformation der mit u multiplizierten Bewegungsgleichung in konservative Form entsteht, ist natürlich, daß die potentielle und die kinetische Energie die Skala des absoluten Fehlers bestimmen. Falls diese Energieformen groß gegen die anfänglichen Energieskalen werden, hat jedes numerische Verfahren, dessen Fehler nicht exakt 0 ist, in diesen Phasen Probleme, eine akzeptable Totalenergieerhaltung bezüglich der anfänglichen Totalenergie zu erreichen.

Die Modellreihe mit 1200 Gitterpunkten unterscheidet sich in ihrer Entwicklung von denen geringerer Auflösung, hier kommt es nicht zu einer Kern-

[4]Die geleistete Arbeit des Außendrucks spielt nur zu Beginn der isothermen Phase eine Rolle.

explosion. Daß diese Tatsache durch die gegenüber den anderen Modellreihen höhere Zentraldichte und damit andere Thermodynamik verursacht wird erscheint unwahrscheinlich, da es auch hier im Zentrum zu einer Expansionsbewegung kommt, die Ursache der Explosion ist also auch hier vorhanden. Das Schicksal dieser Störung entschied sich in allen Modellreihen in den äußeren Kernschichten, in denen aufgrund von Wasserstoffdissoziation und Ionisation Γ_1 kleiner als $\frac{4}{3}$ ist, diese ist auch bei dieser Modellreihe vorhanden. Die globale Totalenergieuntersuchung zeigt, daß diese Modellreihe sich an der Grenze zur signifikanten Totalenergieerzeugung befindet. Aufgrund des starken Anwachsens der Unsicherheit in der potentiellen Energie ist die globale Analyse nicht sehr aussagekräftig. Erst die Explosionen der Kerne in den vorhergehenden Modellreihen machen das Ausmaß der Totalenergieerzeugung deutlich, kommt es nicht zur Kernexplosion, so wächst das Toleranzintervall zu stark an, um eine sichere Aussage zur anfänglichen Totalenergie zu machen. Würde man allerdings eine Modellreihe finden, bei der es ohne Kernexplosion zu einer bezüglich des Toleranzintervalls signifikanten Totalenergieerzeugung kommt, wäre dies ein Indiz dafür, daß die globale Totalenergieerhaltung nicht unbedingt für die Stabilität im nichtlinearen Bereich notwendig ist. Eine probeweise durchgeführte Rechnung mit konstanter Opazität und der Zustandsgleichung eines idealen Gases, bei der es zu keiner destruktiven Instabilität kam und die Akkretion bis zu dem Zeitpunkt verfolgt werden konnte, zu dem 99.9999% der Masse in den Kern akkretiert waren, zeigte, daß auch hier die anfängliche Totalenergie gegen Ende der Rechnung immer noch im Toleranzintervall lag, dessen Breite war allerdings auf $1.5 \cdot 10^{49}$ erg angestiegen! Diese Breite ist 7 Zehnerpotenzen größer als die anfängliche Totalenergie. Dies macht klar, daß unter solchen, zugegebenermaßen für ein numerisches Verfahren sehr harten, Bedingungen, bei jedem Schema, das nicht gleichzeitig die Totalenergie exakt erhält und damit auch exakt definiert, eine Verbesserung dieses Problems kann durch einfache Erhöhung der Gitterpunktanzahl nicht erreicht werden.

6.2 Rechnungen mit realer Opazität

In diesem Abschnitt soll die Übertragbarkeit der Ergebnisse der Totalenergieerhaltung der Rechnungen mit konstanter Opazität auf den realen Fall überprüft werden. Dazu wurden 2 Rechnungen mit 150 und 512 Gitterpunkten durchgeführt, die in ihrer Parameterwahl Modellen mit konstanter Opazität entsprechen. Die Rechnung mit 512 Gitterpunkten wurde ohne zeitliche Gitterdämpfung gerechnet mit dem Ziel, die Totalenergieerhaltung während der Instabilitäten des ersten Kerns zu untersuchen. Die bei der Rechnung mit 150 Gitterpunkten notwendige zeitliche Gitterdämpfung von $g_t = 10^{-5}$ bewirkt eine Verschlechterung der Auflösung der Moden des Kappamechanismus im ersten Kern, sodaß es zu einem zweiten Kollaps mit der Bildung eines inneren Kernes kommt. Weiterhin wurde eine Rechnung mit 512 Gitterpunkten, einer Gesamtmasse von 9 Sonnenmassen sowie einer Anfangstemperatur von 40 K durchgeführt, die zuerst ein Problem des zeitlich frei beweglichen Gitters aufzeigte. Dieses Problem trat auch in der Rechnung gleicher Auflösung mit $1\,\mathrm{M}_\odot$ als Gesamtmasse auf. Da in der Rechnung mit der höheren Anfangstemperatur das Problem klarer zutage tritt und zuerst dort gelöst wurde, soll diese Rechnung vor der mit $1\,\mathrm{M}_\odot$ dargestellt werden. Die Parameter des Anfangsmodells der $1\ \mathrm{M}_\odot$-Modelle entsprechen den im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Parametern der Anfangsmodelle der Rechnungen mit konstanter Opazität, somit ist die Vergleichbarkeit mit diesen gewahrt. Die Anfangsopazität liegt mit $\kappa = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}$ um einen Faktor 20 unter der der Modelle mit konstanter Opazität, das Anfangsmodell ist damit mit $\tau = 8.4 \cdot 10^{-4}$ deutlich optisch dünner. Die Parameter des adaptiven Gitters wurden ebenfalls gleich gewählt, allerdings kommt jetzt dem $\kappa\rho$-Term in der Auflösungsfunktion eine wichtige Funktion zu. Bei den Modellen mit konstanter Opazität wurde er nur wegen der besseren Vergleichbarkeit mitgeführt, seine Wirkung beschränkte sich auf eine effektive Verdoppelung des Gewichtes der Dichte in der Auflösung. Hier ist dieser Term zur Auflösung der steilen Kanten in der Opazität insbesondere aufgrund der Staubzerstörung unbedingt notwendig. Alle 3 Modelle wurden mit der Diffusionsnäherung anstatt der vollen 1-ten Momentengleichung gerechnet, da sonst schon kurz nach den ersten Auswärtsbewegungen aufgrund von Problemen mit dem Strahlungsfeld keine Konvergenz des Iterationsverfahrens mehr erreicht wurde. Die Untersuchung der Modelle mit konstanter Opazität hat gezeigt, daß die bei Verwendung der Diffusionsnäherung vernachlässigten Terme für die Totalenergieerhaltung unwesentlich sind, auch ist genaugenommen die Totalenergiegleichung erst bei Verwendung der Diffusionsnäherung mit den anderen Gleichungen im Rahmen der gemachten Näherung für $u \ll c$ voll konsistent.

Auch hier soll zunächst die Entwicklung der Modelle, dann deren globale und lokale Totalenergieerhaltung betrachtet werden.

6.2.1 Die Entwicklung der Modellreihen

6.2.1.1 Das Modell mit 150 Gitterpunkten

Die Modellreihe mit realer Opazität entwickelt sich anfänglich wie die Modellreihe mit konstanter Opazität; dies ist auch zu erwarten, da bei beiden Modellreihen die anfängliche optische Tiefe der Wolke gering ist und die Thermodynamik durch die Bedingung $T_{Gas} = const$ bestimmt ist. Durch den geringeren Wert der Anfangsopazität kommt es erst später zur Ausbildung eines optisch dicken Kerns, allerdings erreicht die Opazität aufgrund der dann steigenden Temperatur schnell Werte, die vergleichbar dem Wert der Modellsequenz mit konstanter Opazität von $\kappa = 1\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}$ sind[5]. Auch

[5] Die Opazität (Rosselandmittel) ist in diesem thermodynamischen Bereich praktisch nur von der Temperatur und nicht von der Dichte abhängig, siehe Darstellung in Wuc[89].

hier kommt es zu einer Ausbildung eines ersten Kerns, über dem sich die einwärtslaufende Kompressionswelle zu einem Stoß aufsteilt. Die Abbildung (6.23) zeigt das Modell kurz nach Ausbildung des Stoßes, zu einem Zeitpunkt, zu dem 1.17% der Gesamtmasse im Kern enthalten sind. Das Alter dieses Modells entspricht dem 1.153-fachen der anfänglichen Freifallzeit. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, daß die anfängliche Entwicklung der Modellreihen mit konstanter und mit realer Opazität recht ähnlich ist, da die Zeit bis zum Erreichen gleicher Kernmassen kaum differiert.

In den Darstellungen der Modelle mit realer Opazität ist statt des Verhältnisses von Masse zu Radius die Opazität aufgetragen, da diese für das Verständnis der Entwicklung dieser Modelle wichtig ist. In dem äußeren kalten Bereich der Hülle hat die Opazität noch ihren Anfangswert von $5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}$ und steigt nach innen mit steigender Temperatur an. In der obersten Kernschicht sinkt κ um etwa 1 Größenordnung ab, dieser Abfall wird durch das Absublimieren der Eismäntel um die Staubkörner bei einer Temperatur um 120 K verursacht. In diesem Temperaturbereich wird die Opazität fast vollständig durch den Staub bestimmt. Weiter innerhalb des Kerns steigt κ gemäß dem Anstieg der Temperatur. Der Verlauf von Γ_1 zeigt keine wesentlichen Unterschiede zum entsprechenden Modell mit konstanter Opazität. Der Kern des Modells mit realer Opazität ist bei gleicher Kernmasse wärmer und dichter als mit konstantem κ, die Zentraltemperatur beträgt 467K, die Zentraldichte $9.0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{g\,cm}^{-3}$. Aufgrund des Opazitätsabfalls über den Stoß ist im Temperaturprofil eine Kühlzone leicht angedeutet. Im Geschwindigkeitsprofil erkennt man am Stoß eine Störung, die sich mit der aufgrund des Kernbounces auswärtslaufenden Welle identifizieren läßt. Da sich diese Welle auf der Freifallzeitskala des Kernes bewegt, kann diese wegen des aufgrund der kleinen Wahl von $g_t = 10^{-5}$ auf dieser Zeitskala gut beweglichen Gitters verfolgt werden. Der Hauptteil der Leuchtkraft stammt zu diesem Zeitpunkt noch aus der Kontraktion des Kernes, der Stoß trägt nur mit etwa $\frac{1}{3}$ bei.

Im Laufe der weiteren Entwicklung erwärmt sich auch dieser erste Kern bis die Temperatur soweit angestiegen ist, daß Γ_1 aufgrund der Wasserstoffdissoziation unter den für dynamische Stabilität kritischen Wert von $\frac{4}{3}$ fällt. Die dafür notwendige Temperatur von etwa 1600 K fällt hier aber mit der Temperatur der Sublimation des Staubes (Silikate) zusammen, sodaß die Opazität gleichzeitig um etwa 2 Zehnerpotenzen absinkt. Durch die Wahl von g_t, die zu einer zeitlichen Gitterdämpfung führt, deren Zeitskala über den für den Kappamechanismus relevanten lokalen Schallaufzeiten im Kern liegt, kommt es nicht zu nennenswerten Kernschwingungen bevor die dynamische Instabilität des ersten Kernes erreicht wird. Die Abbildung (6.24) zeigt das Modell während der Phase des Kollapses des ersten Kerns 2 Jahre nach dessen Beginn. Im Geschwindigkeitsprofil ist die einwärtslaufende Kompressionswelle zu erkennen, die Materie ist in dem Geschwindigkeitsmaximum gerade noch subsonisch. Bei einem Radius von $7.9 \cdot 10^{12}\,\mathrm{cm}$ erkennt man eine Störung, die durch den Kappamechanismus verursacht wurde. Diese konnte

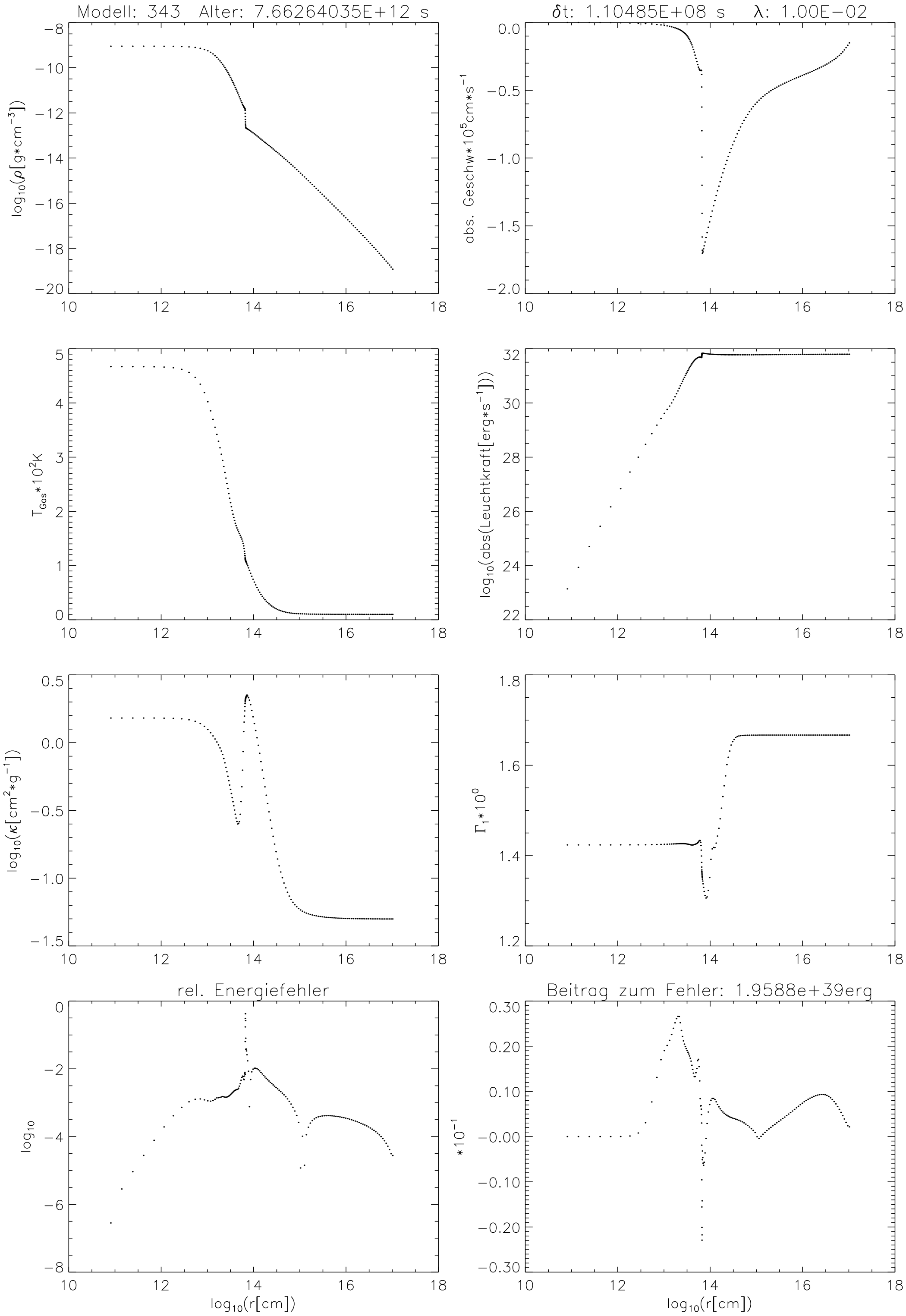


Abbildung 6.23: Modell 343 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Akkretion auf den ersten Kern.

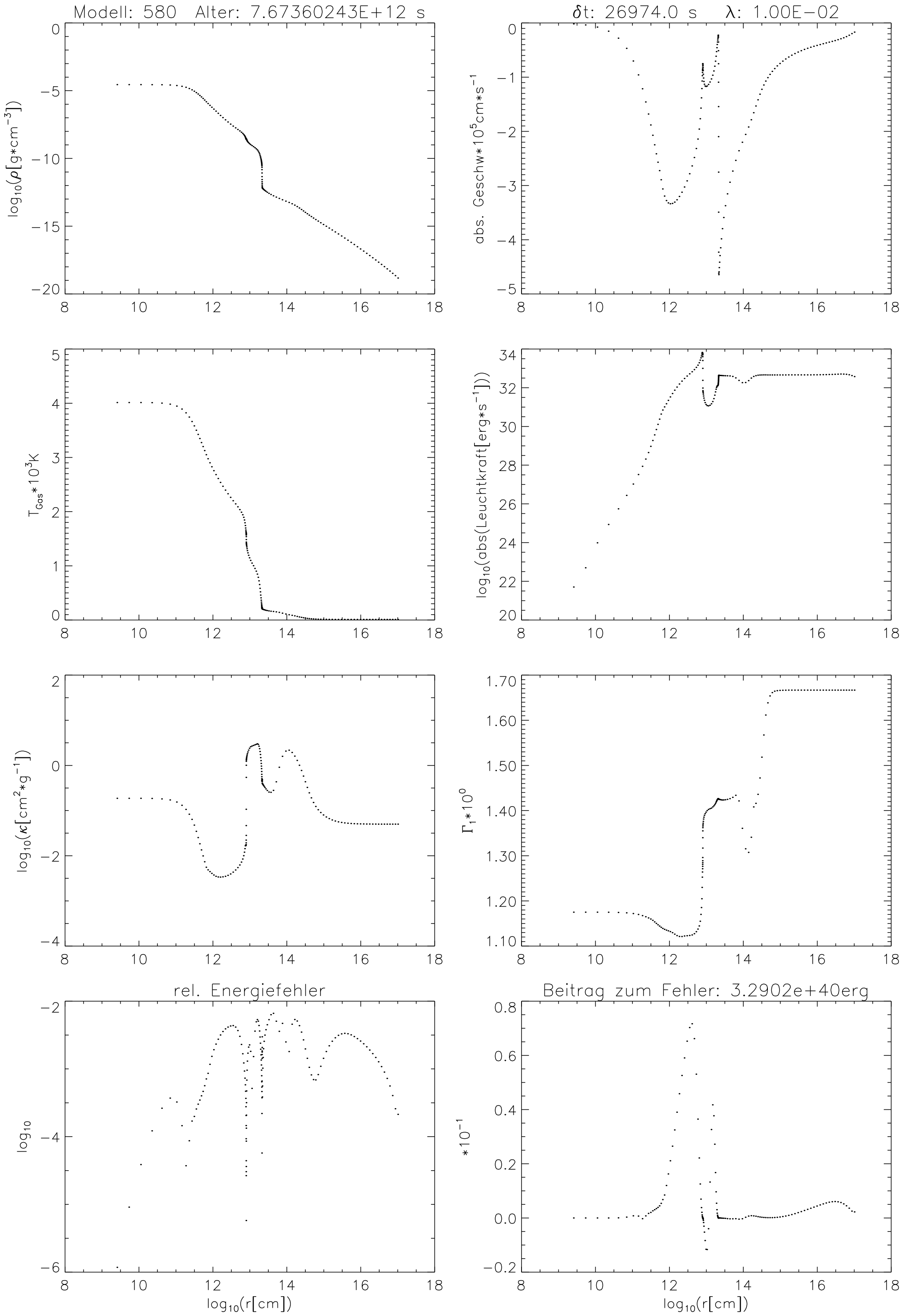


Abbildung 6.24: Modell 580 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Der erste Kern kollabiert aufgrund der H_2-Dissoziation.

nicht schnell genug anwachsen um den Kollaps zu verhindern. Diese Struktur ist verbunden mit einer Änderung der Opazität um etwa einen Faktor von 400, innerhalb deren Radius ist der Staub zerstört. Da sich für die Strahlung, die in der Kompressionswelle erzeugt wird, die Absorption auf einer kurzen Längenskala erhöht, und diese noch nicht genügend Zeit hatte, in das optisch wesentlich dickere Gebiet zu diffundieren, sinkt an dieser Stelle die Leuchtkraft deutlich ab. In der Leuchtkraftstruktur findet man weiterhin bei einem Radius von 10^{14} cm noch vor dem Stoß einen ähnlichen Einbruch, der auch in der linearen Stabilitätsanalyse in Bal[89] gefunden wurde und von dem Opazitätsabfall durch die Eissublimation verursacht wird. Im Zentrum erreicht die Temperatur bereits 4010 K, was zu einem Anstieg von κ aufgrund der H^--Bildung führt. Innerhalb des Kerns ist Γ_1 kleiner als $\frac{4}{3}$, dies ist die Ursache des Kollapses, weiter außen erkennt man in dem Minimum bei $r = 1.5 \cdot 10^{14}$ cm die H_2-Rotationsanregungszone. Auch in dieser Rechnung wird der Kollaps bei einer Zentraldichte von $1.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$gestoppt. Die daraufhin einsetzende Entwicklung unterscheidet sich allerdings von der der Modelle mit konstantem κ, es kommt zwar auch hier zu einer Explosion, die Zeitskalen sind aber verschieden.

Die Abbildung (6.25) zeigt das Modell etwa 8 Stunden nach der Ausbildung des Stoßes um den neugebildeten Kern. Als die aufgrund des Stoppens des Kollapses auswärtslaufende Welle (Kernbounce) den neugebildeten Stoß erreichte, sank der Zeitschritt aufgrund von Konvergenzproblemen auf teilweise unter 10 Sekunden. Im Geschwindigkeitsprofil erkennt man die auswärtslaufende Welle an den positiven Geschwindigkeiten kurz hinter dem inneren Stoß. Im Kern hat die Temperatur etwa 21000 K erreicht, was sich durch die Ionisation des Wasserstoffs in einer stark erhöhten Opazität von $4 \cdot 10^4\ \mathrm{cm^2\ g^{-1}}$ auswirkt. Der innere Kern ist deshalb mit einer optischen Tiefe von 10^{13} deutlich opaker als im Falle konstanter Opazität. Im Temperaturprofil erkennt man ein deutliches lokales Maximum an der Position des Stoßes. Dies ist allerdings *keine* Kühlzone, da die optische Tiefe der Zellen im inneren Stoß größer als 10^4 ist. Diese Struktur wurde wahrscheinlich von der Wechselwirkung des Kernbounces mit dem Stoß verursacht und hatte aufgrund der hohen optischen Tiefen noch nicht genügend Zeit wegzudiffundieren. Für die Gesamtleuchtkraft ist der neugebildete Kern noch unbedeutend. Ein größerer Anteil stammt aus dem einfallenden Rest des ersten Kernes. In der Verdünnungswelle hat sich die Störung an der Staubflanke der Opazität zu einer Diskontinuität aufgesteilt. Darüber liegt eine Zone mit annähernd konstanter Einwärtsgeschwindigkeit, die nach außen vom Akkretionsstoß des alten ersten Kerns begrenzt wird. In dieser Zone ist Γ_1 größer als $\frac{4}{3}$, an der inneren Diskontinuität sinkt Γ_1 aufgrund von Wasserstoffdissoziation unter den kritischen Wert. Am inneren Rand ist der Abfall in der Opazität sehr schlecht durch das Gitter aufgelöst. Die Leuchtkraft sinkt in dieser Zone um mehr als 4 Größenordungen ab, der größte Teil der Leuchtkraft am Außenrand stammt zu diesem Zeitpunkt aus dem äußeren Stoß.

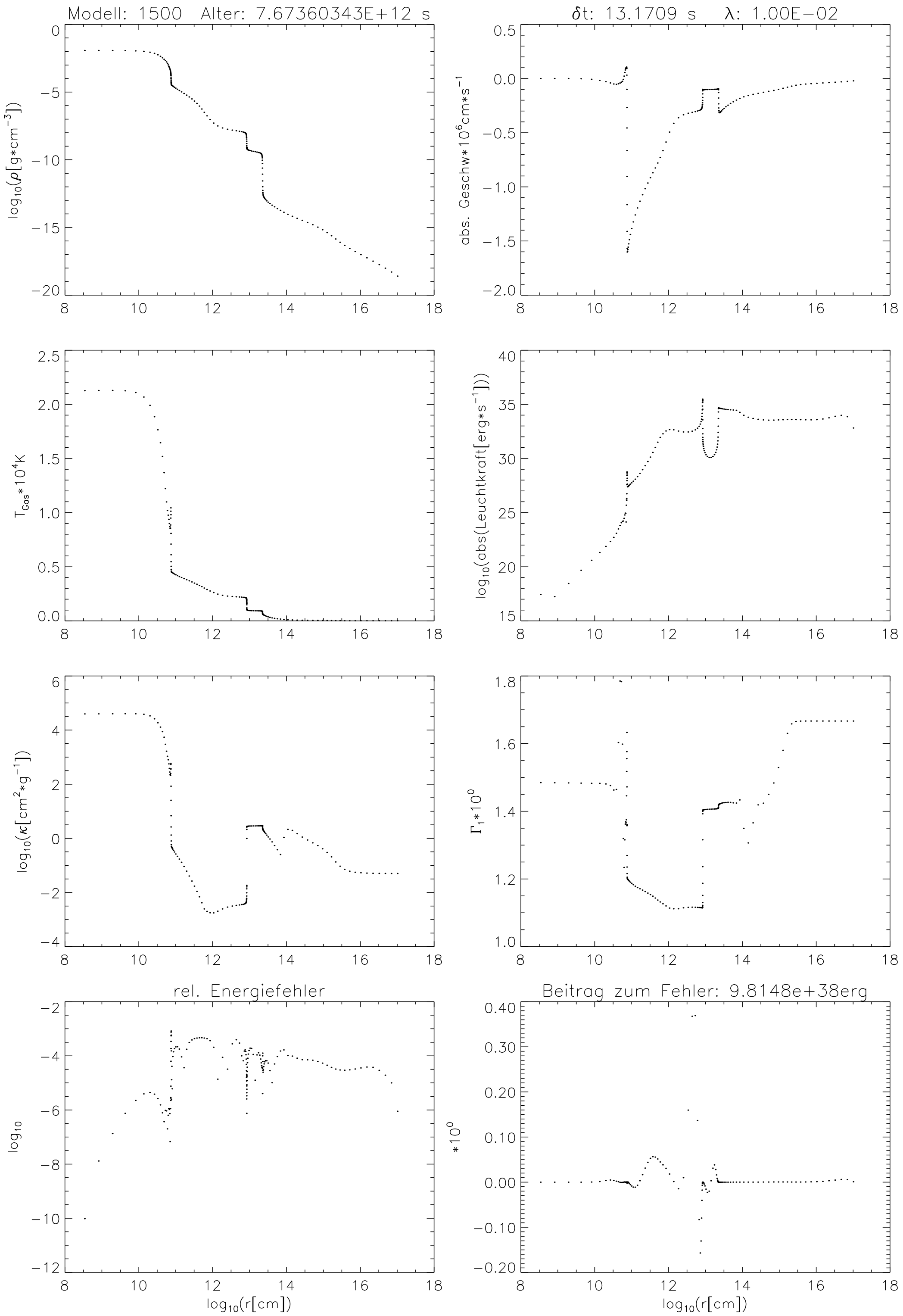


Abbildung 6.25: Modell 1500 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Der innere Kern ist erst wenige Stunden alt und noch unruhig.

Die aufgrund des Kernbounces verursachte Auswärtsbewegung verstärkt sich zwar leicht auf $3 \cdot 10^5$ cm s^{-1}, sie scheint aber für die dann folgenden Ereignisse nicht direkt verantwortlich zu sein. Im inneren Kern des Modells 1500 ist Γ_1 noch größer als $\frac{4}{3}$, auch herrscht im Zentrum noch eine Kompression vor. 5 Stunden später setzt allerdings im Zentrum eine Expansionsbewegung ein, die in ihrem Verlauf zu einer massiven Verstärkung der Auswärtsbewegung hinter dem inneren Stoß führt.

In Abb. (6.26) ist das Modell zur Phase der maximalen Auswärtsgeschwindigkeit, 5.8 Tage nach Beginn der Explosion, dargestellt. Die Materie bewegt sich mit maximal $1.2 \cdot 10^6$ cm s^{-1} nach außen, was einer lokalen Machzahl von 2.1 entspricht. Im inneren Kern ist aufgrund von Wasserstoffrekombination Γ_1 unter $\frac{4}{3}$ gesunken, dies ist der Motor der Expansionsbewegung. Im Zentrum ist die Materie bereits auf 5700 K abgekühlt, die Zentraldichte hat bereits um fast 2 Größenordnungen auf $2.5 \cdot 10^{-4}$ g cm^{-3} abgenommen. In der über dem Kern liegenden einfallenden Schicht erreicht Γ_1 durch die dort immer noch ablaufende Wasserstoffdissoziation sein Minimum mit Werten von 1.12, gleichzeitig ist auch κ aufgrund des zerstörten Staubes minimal. Bei einem Radius von 10^{13} cm befindet sich noch die Staubzerstörungs– und Dissoziationsfront. Am äußeren Stoß erkennt man eine leichtes Störung in der Geschwindigkeit, die, obwohl hier noch unbedeutend, für die weitere Entwicklung wichtig ist.

Die Energie aus der Rekombination und Assoziation des Wasserstoffs ist offenbar nicht dafür ausreichend, daß die Auswärtsbewegung den äußeren Stoß erreicht[6]. In Abb. (6.27) ist die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils gegen Ende der Expansionsphase des inneren Kerns dargestellt. Die Expansionszone erreicht nur die Dissoziationsfront bevor es aufgrund der Gravitation wieder zum Materieeinfall kommt. Bei Modell 3000 hat die Kerndichte wieder Werte von 10^{-8} g cm^{-3} erreicht, einen Wert, der dem zu Beginn des zweiten Kollapses entspricht. Bis auf die innerste Zone bei Radien kleiner als $5 \cdot 10^{10}$ cm ist Γ_1 mit einem Wert von 1.11 tief im Bereich, der dynamische Instabilität bedeutet. Am äußeren Stoß läuft die Materie mit $2.9 \cdot 10^5$ cm s^{-1} nach außen, diese Geschwindigkeit verändert sich auf den kurzen Zeitskalen, auf denen die Entwicklung des Kernes fortschreitet, kaum. Als Resultat der Expansion kommt es bei Modell 3000 im zentralen Bereich zu einer Abkühlung unter die Dissoziationstemperatur und zur Staubneubildung, sodaß sowohl Γ_1 als auch κ zum Zentrum hin ansteigen. Die Zustandsgleichung wird mit einem zentralen Γ_1 von 1.39 wieder merklich härter. Die aufgrund der Gravitation nach der Abbremsung nach innen laufende Kompressionswelle wird deshalb im Zentrum reflektiert, es kommt zu *keinem* weiteren Kollaps. Die reflektierte Welle führt erneut zu einer weite Teile des Kerns betreffenden Expansionsbewegung. Als diese den Rand

[6] Dies ist auch physikalisch zu erwarten, da aus Energieerhaltungsgründen die in Ionisation und Dissoziation gesteckte Energie maximal der Differenz der potentiellen Energien des inneren und des äußeren Kernes entspricht, die Strahlungsverluste sind aufgrund der relativ geringen Kernleuchtkraft und der kurzen dynamischen Zeitskala klein.

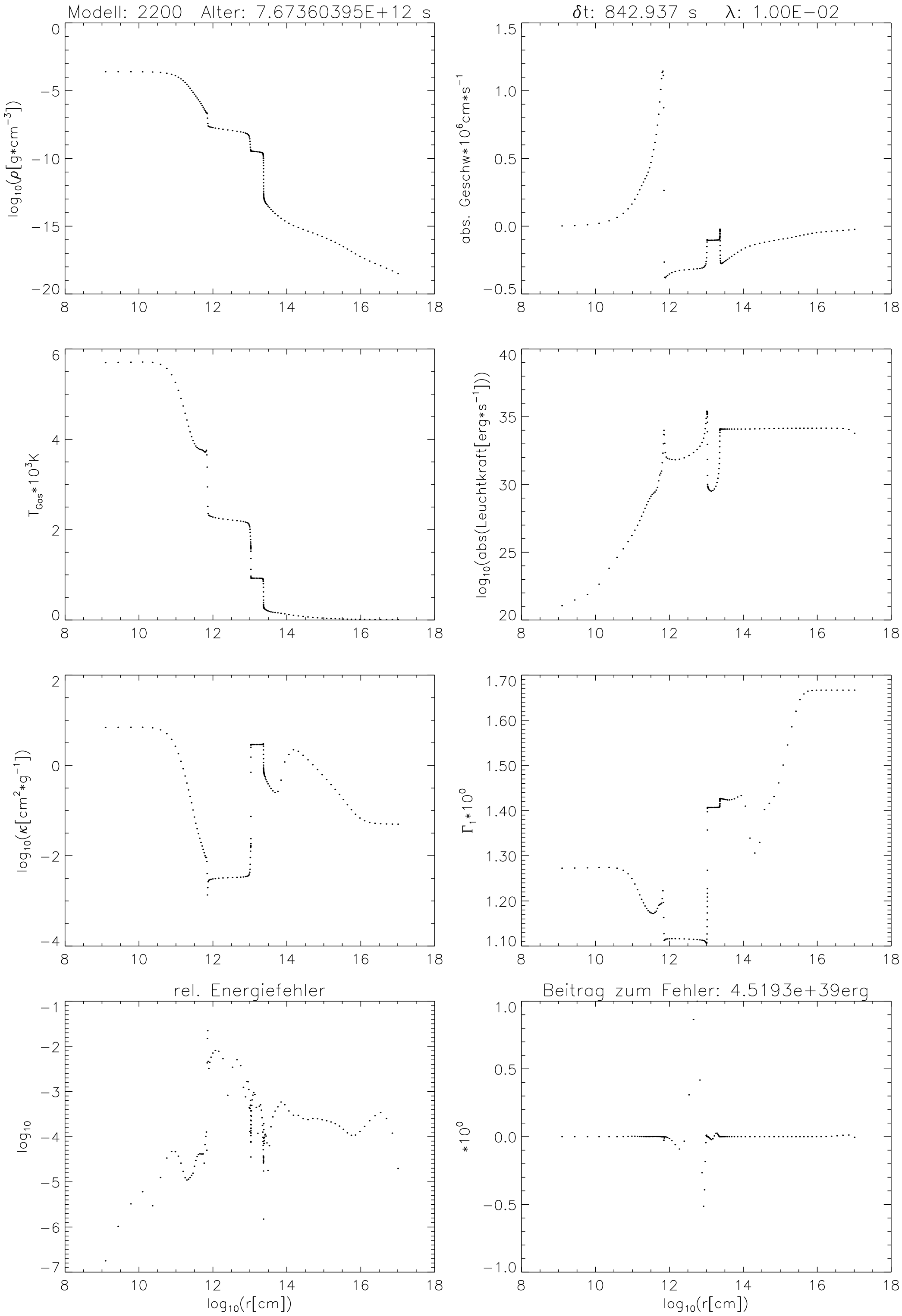


Abbildung 6.26: Modell 2200 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Der innere Kern befindet sich in der Explosionsphase.

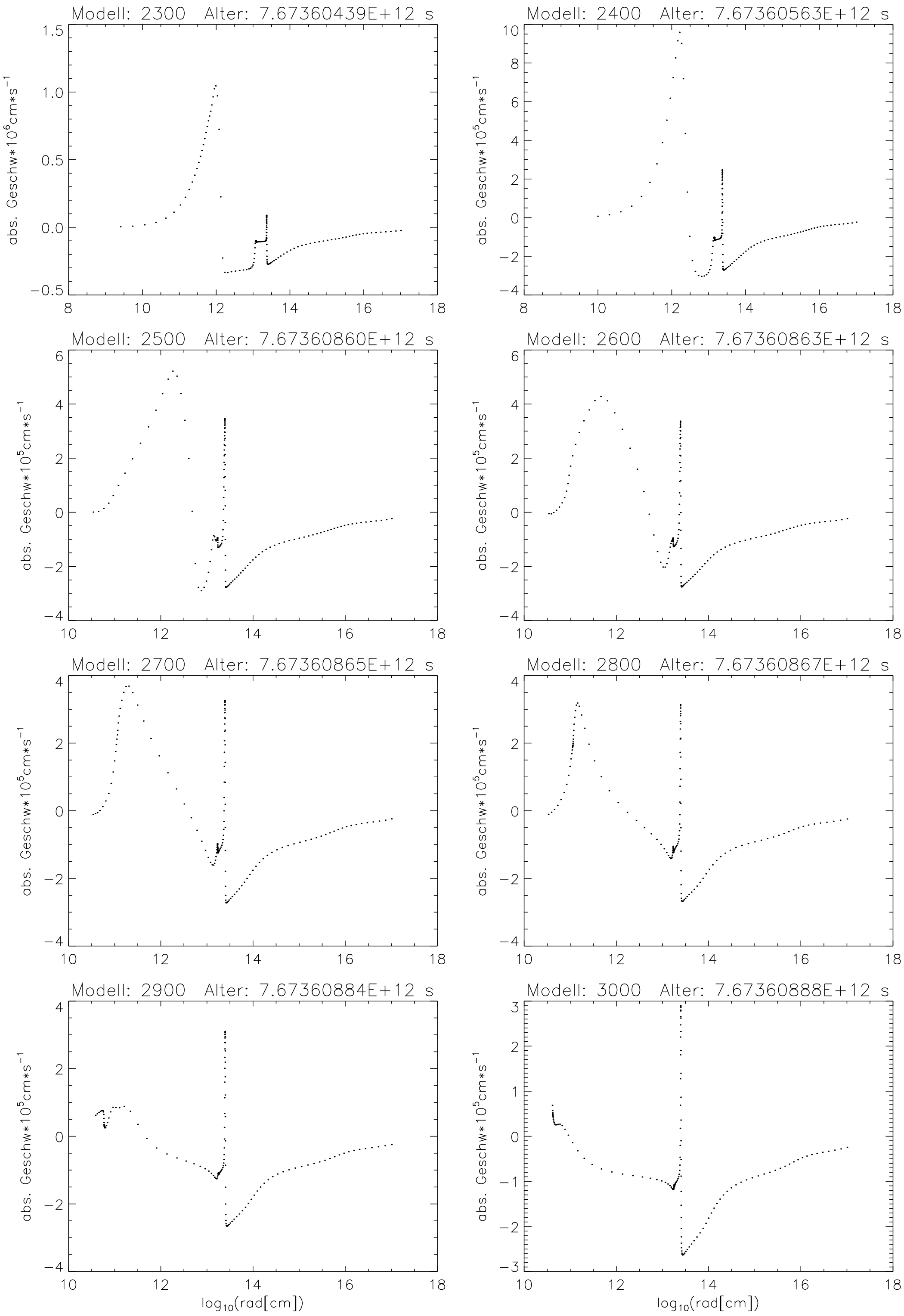


Abbildung 6.27: Geschwindigkeitsprofile der Modelle 2300 bis 3000 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Die Expansion des zweiten Kernes endet noch innerhalb des Radius des Stoßes um den ersten Kern.

des Kernes erreicht kommt es dort zusammen mit der schon existierenden Störung zu einer massiven Auswärtsbewegung.

Die Abbildung (6.28) zeigt das Modell nach Einsetzen der Explosion des Kernes. Die Materie bewegt sich mit maximal $9 \cdot 10^5$ cm s^{-1} nach außen, dies entspricht einer Machzahl von 2.1. Am auswärtslaufenden Stoß ist eine Kühlzone deutlich aufgelöst, die optische Tiefe der Zellen beträgt dort 10^{-6}. Im Inneren des Kernes ist Γ_1 1.425 liegt also schon über der kritischen Grenze von $\frac{4}{3}$. Die Wasserstoffassoziation ist schon beendet, im Kern liegt wieder molekularer Wasserstoff vor, ebenso wurde der Staub neu gebildet[7], was an der erhöhten Opazität zu erkennen ist. Die einzige Zone in der Γ_1 Werte unter $\frac{4}{3}$ erreicht ist die Kühlzone am Stoß , hier findet die H_2-Rotationsanregung statt. Die Zentraldichte hat bereits auf $2.2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ abgenommen, die Zentraltemperatur auf 407 K. Die Explosion wurde aus Zeitgründen nicht mehr weiterverfolgt, der Zeitschritt blieb aufgrund von Konvergenzproblemen unter 10^5 s. Der zweite Schritt der Explosion von Ausgangsbedingungen, die einem ersten äußeren Kern entsprechen, scheint recht ähnlich den in Bal[89] beschriebenen Instabilitäten zu sein, obwohl hier aufgrund der zeitlichen Gitterdämpfung und der Dämpfung aufgrund der schlechten räumlichen Auflösung die Wellen, die vom Kappamechanismus angeregt werden, weggedämpft werden.

6.2.1.2 Das Modell mit $9\,\mathrm{M}_\odot$ und 512 Gitterpunkten.

Das 9 Sonnenmassen-Modell startete wie die anderen Modellreihen mit einer Anfangsdichte von $10^{-19}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, es wurde ebenso ein zeitlich konstanter Außendruck angenommen. Die Anfangstemperatur wurde mit 40 K deutlich höher als in den Modellen mit 1 $\mathrm{M}_\odot$ gewählt. Dem liegt die Annahme zugrunde, daß massereichere Sterne aus Molekülwolken höherer Temperatur gebildet werden, da die Jeanslänge mit steigender Temperatur anwächst. Aus dieser Anfangsbedingung folgt für den Außendruck:

$$P_{ext} = 1.4505 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{dyn\,cm^{-2}} \tag{6.9}$$

Die anfängliche Totalenergie beträgt:

$$E_{tot} = 3.4284 \cdot 10^{45}\,\mathrm{erg} \tag{6.10}$$

Diese ist wie folgt verteilt:

$$\begin{array}{lcrl} E_{rad} & = & 3.467 \cdot 10^{45} & \mathrm{erg} \\ E_{kin} & = & 0 & \mathrm{erg} \\ E_{int} & = & 4.244 \cdot 10^{43} & \mathrm{erg} \\ E_{pot} & = & -3.670 \cdot 10^{43} & \mathrm{erg} \end{array}$$

[7]Ob dies in der dafür zur Verfügung stehenden Zeit möglich ist, sollte genauer untersucht werden; hierzu wäre die Erweiterung des Gleichungssystems um zeitabhängige Gleichungen, die die Stauberzeugung und Vernichtung beschreiben, notwendig.

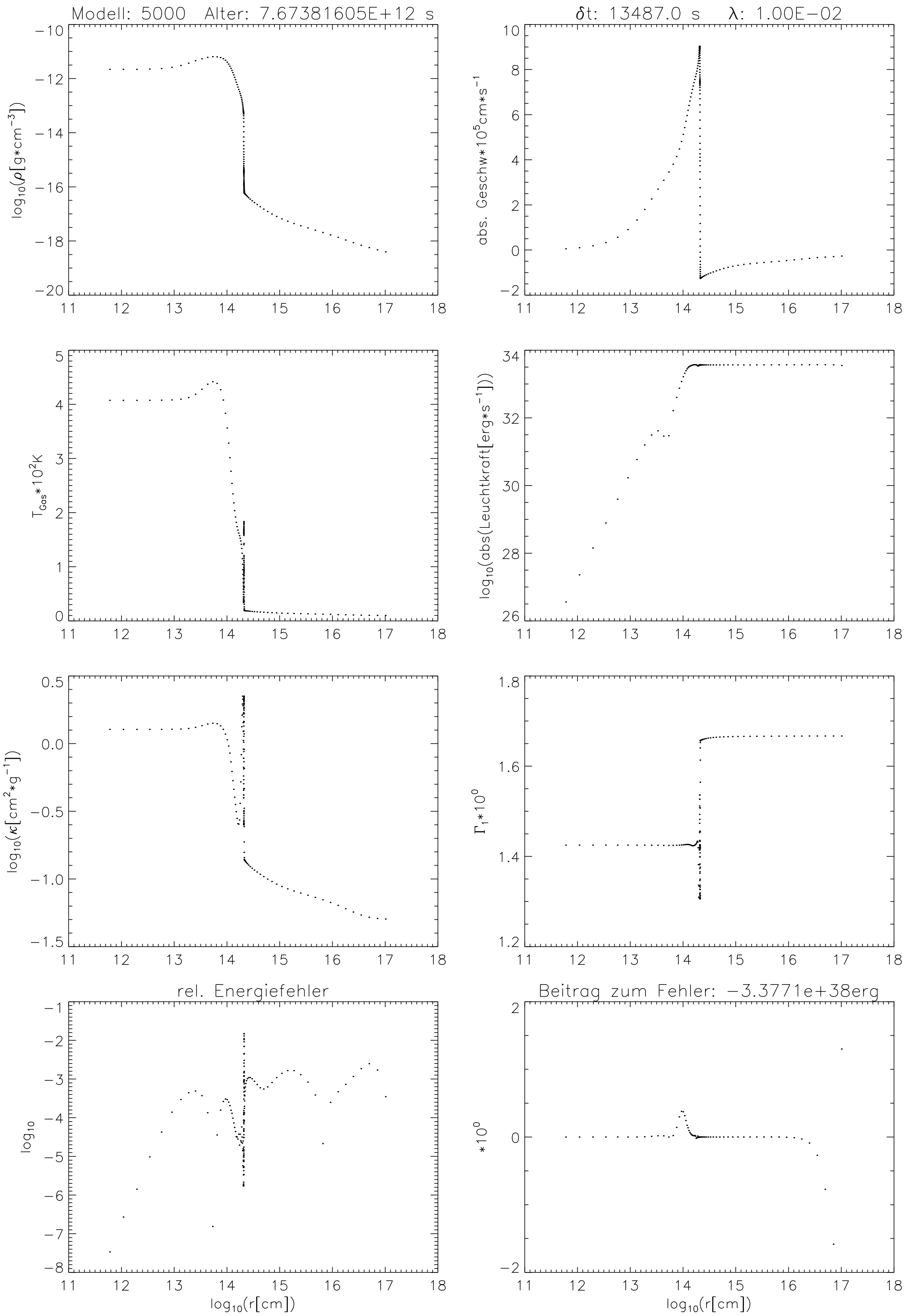


Abbildung 6.28: Modell 5000 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Der neuerlich gebildete äußere Kern explodiert. Die Rechnung wurde zu diesem Zeitpunkt abgebrochen.

Durch die hohe Anfangstemperatur ist das Wolkenfragment strahlungsdominiert. Die Rechnung wurde wie die der $1\,\mathrm{M}_\odot$-Rechnungen unter Annahme der Diffusionsnäherung statt der vollen ersten Momentengleichung und mit einem zeitlich frei beweglichen Gitter durchgeführt. Die Viskositätslängenskala wurde auf $\lambda = 10^{-2}$ gesetzt. Für die restlichen Parameter wurden diesselben Werte wie in den vorherigen Rechnungen gewählt.

Das Modell entwickelt sich zunächst ähnlich wie das entsprechende Modell mit einer Gesamtmasse von $1\mathrm{M}_\odot$. Es kommt zur Bildung eines ersten Kerns, der aufgrund des Kappamechanismus zu schwingen beginnt. Im Verlauf dieser Kernschwingungen kommt es im äußeren Bereich der Hülle zu Schwankungen in der Leuchtkraft um fast eine Größenordnung. Die Gastemperatur ist in diesem Bereich praktisch konstant. Da zusätzlich dieser Bereich optisch dünn ist, ist auszuschließen, daß diese Schwankungen mechanisch angeregt werden. Die Strahlungstemperatur ist in diesem Bereich ebenfalls annähernd konstant, aber nicht exakt ($\approx 10^{-4}$ relative Änderung von Zelle zu Zelle), da ein Gradient notwendig ist, die Photonen nach außen diffundieren zu lassen. Nach einer kleineren Auswärtsbewegung des Kerns schwächt sich das Leuchtkraftmaximum in der Hülle ab, um bei der nächsten Auswärtsbewegung im Kern wieder an Amplitude zuzunehmen. Die Rechnung ist zu diesem Zeitpunkt nicht mehr weiterzuführen, da die starken Leuchtkraftschwankungen in der Hülle, die auch zu Vorzeichenwechseln in der Leuchtkraft führen, den Zeitschritt auf Werte deutlich unter 1 s zwingen.

Zunächst ist zu bemerken, daß die Annahme der Diffusionsnäherung in der optisch dünnen Hülle sicherlich nicht zu physikalisch exakten Werten der Leuchtkraft führt, da dort die Annahmen der Diffusionsnäherung nicht gelten. Trotzdem gibt es keinen einsichtigen Grund, warum die Lösung einer Diffusionsgleichung, bei der Störungen in der Regel wegdiffundiert werden, solche starken Schwankungen aufweisen sollte. Eine Erklärung liefert das adaptive Gitter. Betrachtet man die Störungen, so stellt man fest, daß sie mit der Gitterbewegung korreliert sind. Die Störungen sind immer dann maximal, wenn aufgrund neugebildeter Strukturen im Kern (Kappamechanismus) das Gitter in der Hülle mit einer starken Einwärtsbewegung reagiert um diese aufzulösen. Hierbei wirkt sich die niedrige Ordnung des Donor-Cell-Advektionsschemas negativ aus. Da der Gradient in der Strahlungsenergiedichte in den äußeren Bereichen der Hülle sehr gering ist, sind die Diskretisierungsfehler der Advektionsterme dort vergleichbar mit diesem. Da das Gitter Geschwindigkeiten von $10^{12}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ erreicht, wird die nullte Momentengleichung in diesen Phasen fast vollständig von den Advektionsterme dominiert[8]. Aufgrund der Diffusionsnäherung ist der Strahlungsfluß direkt an den Gradienten der Strahlungsenergiedichte gekoppelt. Daraus ergibt sich die Forderung, einen Zustand räumlich (in der Praxis nur fast)

[8]Die Gültigkeit der Gleichungen aufgrund der Näherung $\frac{u}{c} \ll 1$ ist davon nicht betroffen, da die Größen des Strahlungsfeldes immer im mit der *Materie* bewegten Bezugssystem bestimmt werden.

konstanter Strahlungsenergiedichte bei Abwesenheit von Quelltermen (Materie ist optisch dünn und Materiegeschwindigkeiten sind klein gegenüber c) bei einer Gitterbewegung mit Geschwindigkeiten, die groß gegenüber der Materiegeschwindigkeit sind, zu erhalten.

Gegeben sei die Advektionsgleichung auf einem beweglichen Gitter $r = r(s,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(J\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(Jr^2\frac{\partial r}{\partial t}\right) = 0 \tag{6.11}$$

Diese Gleichung entspricht den in der äußeren Hülle wesentlichen Termen der nullten Momentengleichung. Die Advektion ist hier in der (bis auf numerische Rundungsfehler) der verwendeten Advektionsbeschreibung äquivalenten Formulierung mittels der Relativgeschwindigkeit beschrieben. $J = const$ in r und t ist eine triviale Lösung dieser Gleichung. Diese entspricht in guter Näherung der Lösung in der äußeren Hülle. Diskretisiert sei diese Advektionsgleichung analog der Diskretisierung der nullten Momentengleichung:

$$\delta\left(J_i\,\widetilde{\Delta V_j}\right) + \delta t\,\Delta_{DC}\left(J_i\,u_{rel\,j}\,r_j^2\right) = 0 \tag{6.12}$$

mit

$$u_{rel\,j} = -\frac{\delta r_j}{\delta t} \tag{6.13}$$

$$\widetilde{\Delta V_j} = \frac{1}{3}\Delta\left(r_j^3\right) \tag{6.14}$$

Setzt man die in r und t konstante Lösung $J_i^n = J_0$ in diese diskretisierte Gleichung ein, so stellt man fest, daß sie im diskreten Fall die Gleichung nicht mehr löst. Aufgrund der r^2 Terme ist die Donor-Cell-Advektion nicht mehr in der Lage eine konstante Erhaltungsgröße ohne Fehler zu advektieren, so wie es im Fall ebener Geometrie der Fall ist. In den Testproblemen (Stoßrohr z.B. in DoD[87]), die in ebener Geometrie gerechnet wurden, tritt dieses Problem deshalb nicht auf.

Als mögliche Lösungswege um die Modellreihe weiterverfolgen zu können bieten sich an:

- In den Hülle ist das Gitter zeitlich zu dämpfen, d.h. g_t ist dort ungleich 0 zu wählen. Dieses Vorgehen hat den Nachteil, daß außen die Gitterpunkte „eingefroren" werden und im Kern, wo sie benötigt würden, fehlen.

- Man ändert die Advektionsterme, sodaß ein konstantes Profil korrekt advektiert wird. Dies erlaubt, im Bedarfsfall Gitterpunkte aus der äußeren Hülle zur Verbesserung der Auflösung im Kern abzuziehen, ohne daß es zur beschriebenen Leuchtkraftinstabilität kommt.

Letztere Bedingung ist leicht erfüllbar. Die Konsistenzbedingung reduziert sich auf:

$$\delta r_j^3 = 3\,\overline{r_j^2}\,\delta r_j \tag{6.15}$$

wobei $\overline{r_j^2}$ ein zeitliches Mittel zur Approximation des r^2-Faktors im Advektionsterm darstellt. Daraus folgt den Advektionsterm folgendermaßen zu diskretisieren:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(Jr^2 u_{rel}\right) \longrightarrow \Delta_{DC}\left(J_j^n \frac{(r_j^n)^2 + (r_j^{n+1})^2 + r_j^n r_j^{n+1}}{3} u_{rel\,j}\right) \qquad (6.16)$$

Das so gewählte zeitliche Mittel von r^2 garantiert die korrekte Advektion eines räumlich konstanten Profils in J! Das gleiche Problem betrifft ebenfalls die Kontinuitätsgleichung, die aufgrund des Fehlens von Quell– und Sentermen im Grenzwert verschwindenter Materiegeschwingigkeiten (gute Näherung im Kern) genau die betrachtete Form hat, da allerdings Profile räumlich annähernd konstanter Dichte nur im Kern auftreten, in dem schon eine physikalische Störungsquelle (Kappamechanismus) sitzt, führten sie bisher zu keinen Problemen. Es stellt sich aber die Frage ob die Antwort des Kernes auf diese Störungen nicht durch Advektionsfehler solcher Art beeinflußt wird. Allerdings ist die Dichte im Kern nicht in einem solchen Maß konstant, wie dies für die Strahlungsenergiedichte in der äußeren Hülle zutrifft. Die spezifische innere Energie e, die außen ebenso wie J räumlich nur geringfügig variiert, ist von dieser Art Fehler nicht betroffen, da im Gegensatz zum Strahlungsfeld e nicht selbst Erhaltungsgröße ist, sondern $e\rho$; die Konsistenzbedingung reduziert sich in diesem Fall auf die diskretisierte Kontinuitätsgleichung, die natürlich erfüllt ist.

Es stellt sich nun die Frage, wo diese Änderung der Advektionsterme vorzunehmen ist. Naheliegend wäre es, dies nur in der nullten Momentengleichung zu tun, da nur dort die Probleme auftreten. Allerdings wird im Bereich höherer optischer Tiefen die Summe aus innerer Energiegleichung und Strahlungsenergiegleichung gelöst, hier wäre es konsistenter, beide Erhaltungsgrößen nach demselben Schema zu advektieren. Da auch in der Kontinuitätsgleichung im Kern ein ähnliches Problem auftreten kann, wurde der Advektionsterm in der Kontinuitätsgleichung geändert. Aufgrund der Verwendung der summierten Kontinuitätsgleichung zur Beschreibung aller anderen Advektionsterme, werden diese dadurch ebenfalls geändert.

Mittels der so veränderten Advektionsbeschreibung wurde die Modellreihe mit denselben Parametern wiederholt. Das Problem der Leuchtkraftoszillationen in der Hülle war daraufhin verschwunden, die Modellreihe konnte wesentlich weiter verfolgt werden. In der anfänglichen Entwicklung unterscheidet sich diese kaum von der Modellreihe mit der alten Advektionsbeschreibung. Erst nach Ausbildung des ersten Kerns laufen die beiden Entwicklungswege auseinander. In beiden Modellreihen kommt es zwar zu Schwingungen dieses Kerns, deren Entwicklung unterscheidet sich aber. Im Falle der alten Advektionsbeschreibung kommt es mehrfach zu Einwärtsbewegungen, die dem Beginn eines zweiten Kollaps entsprechen. Innerhalb der einwärtsbewegten Zonen ist Γ_1 zunächst kleiner als $\frac{4}{3}$, die Temperatur liegt über der Sublimationstemperatur des Staubes, sodaß dort die Opazität um etwa 2 Größenordnungen absinkt. Oberhalb dieser Struktur kommt es zu einer Auswärtsbewegung, in deren Folge zu einer Dichteinversion. Diese Dichteinversion führt, da die Temperatur nur schwach varriert, zu einem auswärtsgerichteten Druckgradienten, der die Einwärtsbewegung unterstützt. Die Welle wird im Zentrum reflektiert und führt zu einer Auswärtsbewegung. Während dieses Prozeßes bleibt in der kollabierenden Region die Opazität niedrig, Γ_1 bleibt unter $\frac{4}{3}$. Treibender Mechanismus ist offenbar die Druckinversion, die erst durch die Reflexion am Zentrum aufgehoben wird. Dieser Mechanismus ist typisch für die Instabilitäten erster Kerne unter Verwendung der alten Advektionsbeschreibung. Charakteristisch sind die Staubzerstörungsfronten mit ihrem fast diskontinuierlichen Abfall in κ. Die massiven Auswärtsbewegungen stammen aus am Zentrum reflektierten Wellen. Im Falle der Rechnung mit 1024 Punkten von M.Balluch in Bal[89] sind gegen Ende der Rechnung mehrere solche Strukturen im Kern vorhanden, hier erfolgte die Reflexion wahrscheinlich an innerhalb der Störung gelegenen Gebieten, in denen die Zustandsgleichung härter ist. Bei Verwendung der neuen Advektionsbeschreibung verlaufen die Kernschwingungen anders. Insbesondere treten anfangs die Opazitätsdiskontinuitäten nicht auf, die Instabilitätsquelle liegt weiter außen im Kern.

Abbildung (6.29) zeigt das Modell 60 Jahre nach Ausbildung des Akkretionsstoßes. Die Kernmasse beträgt zu diesem Zeitpunkt $3.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{M}_\odot$. Man erkennt in der Geschwindigkeitsdarstellung deutlich die angeregten Wellen im Kernmantel bei Radien zwischen 10^{12} cm und dem Stoß. Bei kleineren Radien ist Γ_1 zwar kleiner als $\frac{4}{3}$, es sind aber keine Anzeichen einer dynamischen Instabilität zu erkennen. Der Abfall der Opazität nach innen erfolgt hier über einen weiten Bereich und nicht in einer Staubzerstörungsfront wie im Falle der alten Advektionsbeschreibung. Der κ-Abfall bei einem Radius von $3 \cdot 10^{14}$ cm stammt auch hier vom Absublimieren der Eismäntel um die Staubkörner. In der Leuchtkraftstruktur erkennt man in der Hülle nur einen leichten Anstieg zum Außenrand hin, die Randleuchtkraft beträgt 0.54 Sonnenleuchtkräfte. Die Leuchtkraftstörung in der Hülle im Bereich der H_2-Rotationsanregung und der Eismantelsublimation ist hier nur leicht angedeutet.

Im weiteren Verlauf führen die Schwingungen des Kernmantels zu einer Auswärtsbewegung hinter dem Akkretionsstoß . Die Abb. (6.30) zeigt das Modell 1800, 33 Jahre nach dem Modell 620. Am Stoß bewegt sich die Materie mit einer Machzahl von 1.7 nach außen. Die Zentraldichte hat um einen Faktor 2.6 gegenüber Modell 620 abgenommen. Auch hier sind in dem Opazitätsprofil keine scharfen Flanken vorhanden, man erkennt zwar eine Zone in der der Staub weitgehend zerstört ist, die zu einer einwärtslaufenden Kompressionswelle gehört (Γ_1 ist dort kleiner $\frac{4}{3}$), deren Flanken sind jedoch relativ breit, die relative Breite entspricht etwa der des Opazitätsabfalls durch die Eissublimation in der Hülle. Stromaufwärts des Stoßes erkennt man sowohl im Geschwindigkeitsprofil als auch im Dichteprofil Störungen, die offenbar aus dem Kern in die Hülle gelaufen sind. Im Rah-

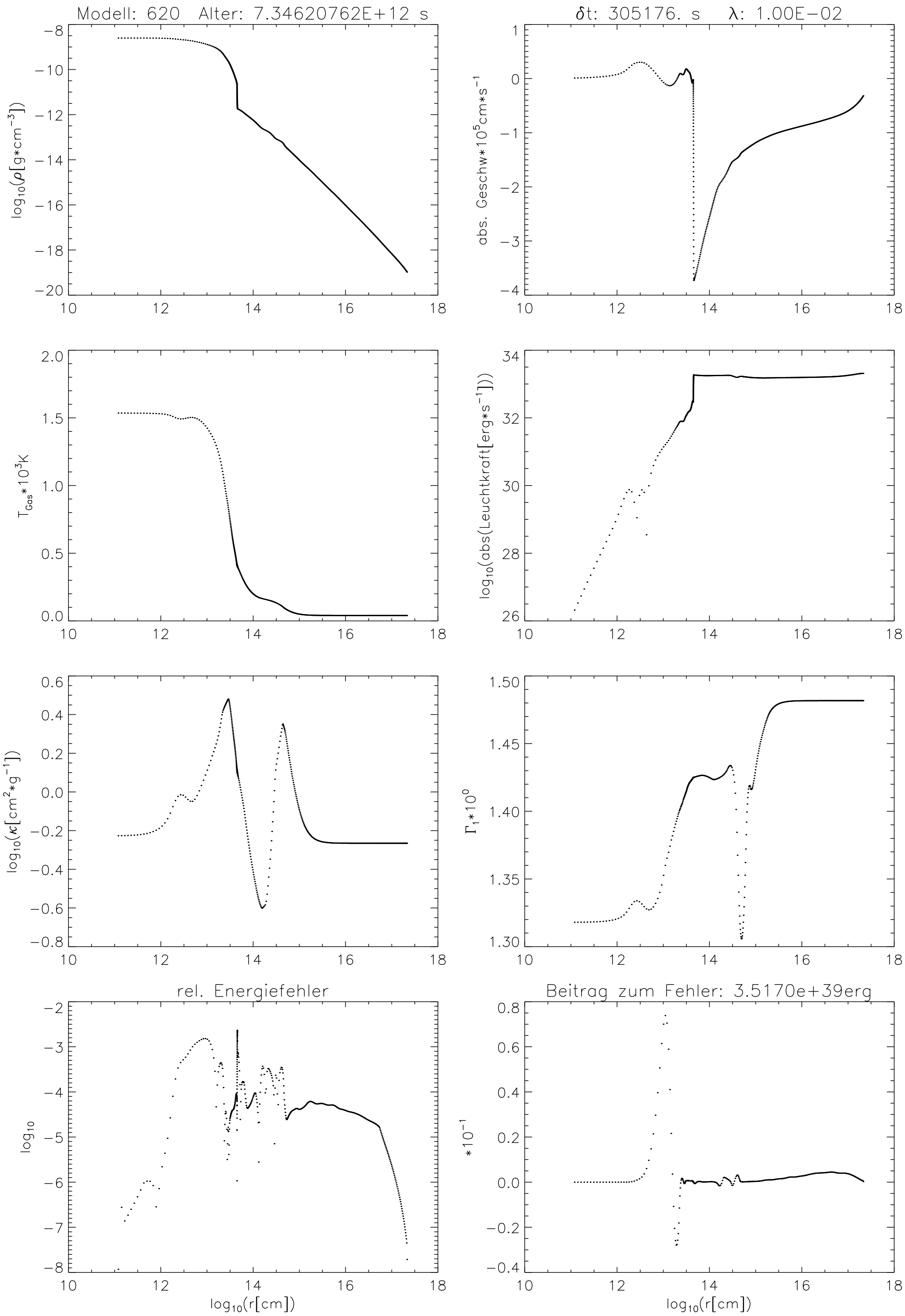


Abbildung 6.29: Modell 620 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, $9M_\odot$ und realistischer Opazität. Der erste Kern beginnt aufgrund des Kappamechanismus zu schwingen.

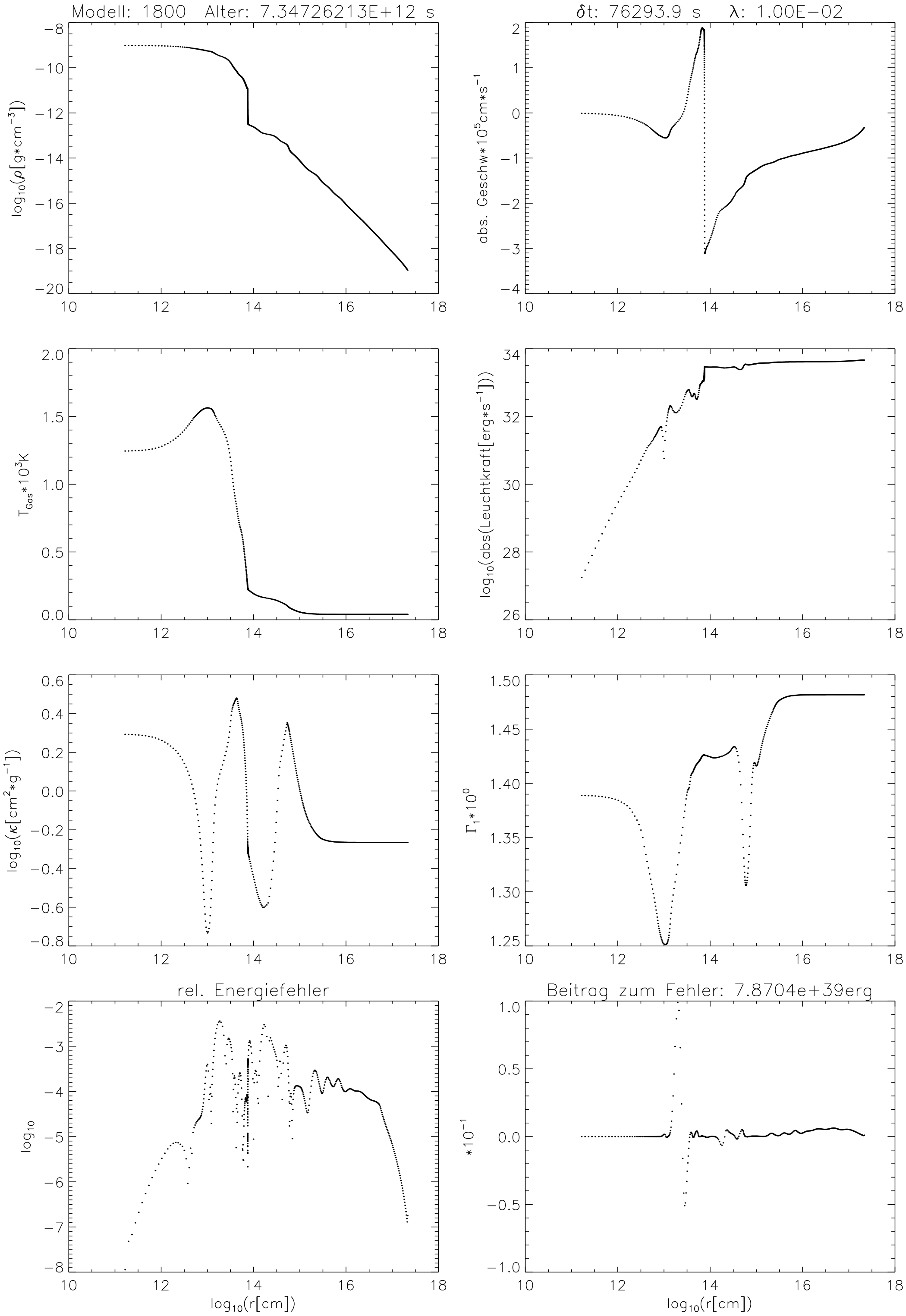


Abbildung 6.30: Modell 1800 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, 9 $M_\odot$ und realistischer Opazität. Der erste Kern expandiert.

men reiner Hydrodynamik würde man erwarten, daß dies unmöglich ist, da die Anströmgeschwindigkeit im Geschwindigkeitsmaximum einer Machzahl von 2.9 entspricht und Information so nur nach innen propagieren kann. Hier liegt allerdings ein *strahlungs*hydrodynamisches Problem vor, die Hülle ist in diesem Bereich noch nicht optisch dünn (die optische Tiefe am Stoß beträgt 46), sodaß akustische und Strahlungsmoden koppeln. Dies ermöglicht eine Ausbreitung mechanischer Störungen auch gegen eine Überschallströmung solange die Materie nicht optisch dünn wird (siehe auch MiM[84]).

Die Auswärtsbewegung führt zu einem Absinken der Zentraldichte auf unter $10^{-12}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Unterstützt wird die Auswärtsbewegung durch nach außen gelaufene Wellen, die innerhalb des Kerns angeregt und verstärkt wurden. Dadurch bildet sich eine Dichteinversion am Kernrand aus und damit verbunden eine Druckinversion. Der nun auswärtsgerichtete Druckgradient führt zu einer einwärtsgerichteten Druckkraft, diese wirkt nun in dieselbe Richtung wie die Gravitationskraft, es kommt zu einer heftigen Einwärtsbewegung. In deren Verlauf rast ein Stoß mit Überschallgeschwindigkeit in Richtung Zentrum, wo er reflektiert wird.

Die Abbildung (6.31) zeigt das Modell während der Reflexion der Stoßwelle am Zentrum. In der Dichtedarstellung erkennt man, daß das Gitter an der innersten Zelle reißt. Diese innerste Zelle ist lagrangesch und enthält 10^{-9} der Gesamtmasse. In den darüberliegenden Zellen ist aber nur jeweils $3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{M_\odot}$ enthalten. Dies führt zu einem Sprung in der Schallaufzeitskala zwischen der zentralen Zelle und den darüberliegenden Zellen um fast 4 Größenordnungen. Der Zeitschritt orientiert sich aber an den kurzen akustischen Zeitskalen von etwa 4000 s der Kugelschalen, die über der zentralen Zelle liegen. Deshalb erfordert die Berechnung der Reflexion des Stoßes etwa 900 Zeitschritte. In den zentralen Regionen ist zu dieser Phase Γ_1 deutlich über $\frac{4}{3}$, nur in der äußeren Mantelzone des Kernes wird dieser Wert in der H_2-Rotationsanregungszone unterschritten.

Das Resultat der Reflexion ist eine auswärtslaufende Stoßwelle. Gleichzeitig kommt es zu einer Einwärtsbewegung der äußeren Kernschichten. Das Resultat 44.5 Jahre nach der Reflexion ist in Abb. (6.32) dargestellt. Zusätzlich zu dem alten Akkretionsstoß sind zwei weitere Stöße innerhalb des Kernes hinzugekommen. Im Gegensatz zu dem früher Gesagten tritt hier eine Staubzerstörungsfront auf. Diese Staubzerstörungsfront fällt aber mit der innersten der 3 Stoßfronten zusammen, die Staubzerstörung ist nur eine Folge der Vorschocktemperatur, die unter der Sublimationstemperatur des Staubes liegt, und der Nachschocktemperatur, die darüber liegt. Der Geschwindigkeitssprung ist über diesen Stoß relativ gering, dies besagt allerdings nur, daß sich dieser Stoß nach außen bewegt, da im Stoßsystem der Einstrom mit Überschallgeschwindigkeit erfolgen muß. In diesem Stoß wird die Materie auch über die Dissoziationstemperatur des Wasserstoffs erhitzt, Γ_1 ist im Zentrum deutlich kleiner als $\frac{4}{3}$. Die Zentraldichte hat mit einem Wert von $1.3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ wieder annähernd das Niveau des ersten Kerns vor der Auswärtsbewegung erreicht. Im Dichteprofil erkennt man eine Schalen-

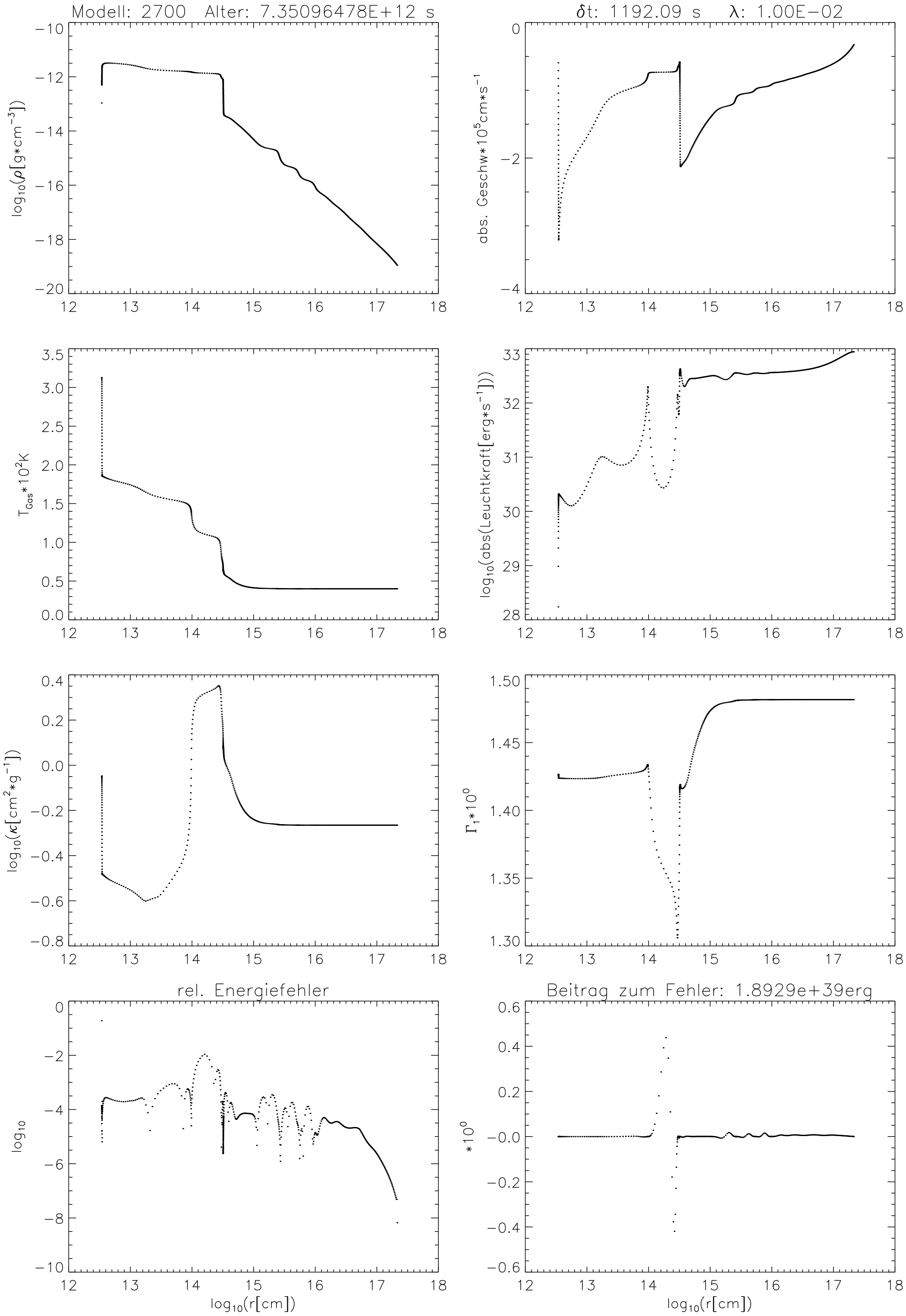


Abbildung 6.31: Modell 2700 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, $9M_\odot$ und realistischer Opazität. Reflexion des einwärtsgelaufenen Stoßes am Zentrum.

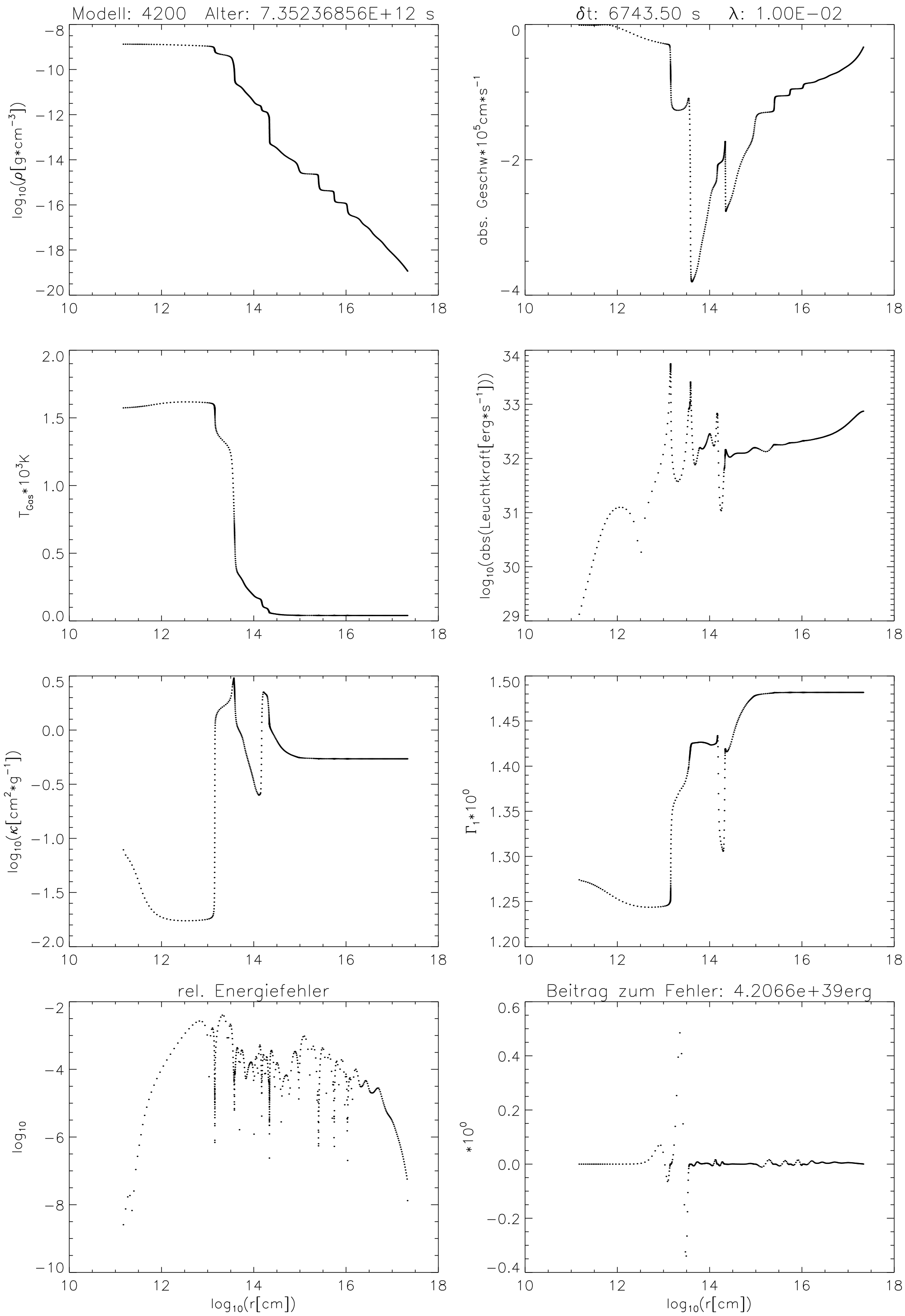


Abbildung 6.32: Modell 4200 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, 9 $M_\odot$ und realistischer Opazität. Das Modell kurz vor Eintreten des Kollapses zur Dichte eines inneren Kernes.

struktur, die nicht nur den Kern betrifft. Auch die in die Hülle gelaufenen Störungen haben sich zu fast diskontinuierlichen Sprüngen in Dichte und Geschwindigkeit aufgesteilt.

Als der auswärtslaufende innerste Stoß den darüberliegenden Stoß erreicht beginnt der Kollaps zu Dichten, die typisch für zweite innere protostellare Kerne sind. Die auswärtslaufende strahlungshydrodynamische Verdünnungswelle trägt die beiden Stöße und dann sukzessive die Schalen in der Hülle ab. Übrig bleibt ein Objekt mit einer relativ einfachen Kern-Hülle-Struktur. Abb. (6.33) zeigt den Protostern zum Zeitpunkt des Abbruchs der Rechnung, 840 Jahre nach der Ausbildung des inneren Akkretionsstoßes. Der Kern enthält zu diesem Zeitpunkt bereits 0.18 $M_\odot$. Die Machzahl der anströmenden Hülle ist im Maximum auf einen Wert von 26 angestiegen. Im Kern erkennt man eine Spitze im Dichteprofil, die Temperatur fällt an derselben Stelle deutlich ab, sodaß der Druck, der hier schon im wesentlichen durch das hydrostatische Gleichgewicht gegeben ist, stetig bleibt. Die Rechnung ist deshalb ohne Berücksichtigung der Konvektion, mit der diese Struktur nicht auftreten würde, nicht weiterzuführen und wurde deshalb abgebrochen. Die Temperatur beträgt im Kern maximal etwa $3 \cdot 10^5$ K, sodaß auch Deuteriumbrennen bald wichtig werden könnte, allerdings ist zu erwarten, daß die Konvektion durch den wesentlich effizienteren Energietransport die Höhe des Temperaturmaximums deutlich reduzieren wird. Innerhalb des Kerns sind die Geschwindigkeiten überall negativ und von der Größenordnung weniger cm s^{-1}. In der Hülle ist die Leuchtkraft räumlich praktisch konstant, die Leuchtkraftentwicklung findet nur noch auf der Akkretionszeitskala statt. Die äußerste Dichtestufe in der Hülle wurde von der strahlungshydrodynamischen Verdünnungswelle noch nicht erreicht. Die optische Tiefe der Hülle beträgt zu diesem Zeitpunkt 42.

Durch den steilen Temperaturabfall mit dem gleichzeitigen Dichteanstieg im Kern wird die Konvergenz des Iterationsverfahrens so verschlechtert, daß der Zeitschritt gegen Ende der Rechnung auf etwa 1 Monat gesunken ist. Bevor diese Struktur im Kern auftrat erreichte er bis zu 16 Jahren, sodaß die ersten Stoßfrontinstabilitäten sichtbar wurden. Über das weitere Schicksal des Kernes, insbesondere seine Stabilität, können so keine sicheren Aussagen getroffen werden. Da für den weitaus größten Teil der Kernmaterie Γ_1 größer als $\frac{4}{3}$ ist sollte er dynamisch stabil sein. Für die Stabilität des Kernes spricht auch, daß er schon eine relativ hohe Masse erreicht hat, in seinem Inneren sind in der Leuchtkraftstruktur zwar noch einige Störungen vorhanden, diese stammen aber größtenteils aus der thermisch nicht ausgeglichenen Temperaturstruktur. Da für ein realistisches Modell eine (für dynamische Phasen zeitabhängige) Konvektionsbehandlung notwendig ist, kann für diesen realistischeren Fall nicht garantiert werden, daß der Kern auch dann stabil bleibt. Da die Konvektion, wenn sie einmal eingesetzt hat, einen effektiveren Energietransportmechanismus darstellt, dürfte die Stabilität vor allem von der des jeweiligen Konvektionskonzepts abhängen und muß separat untersucht werden.

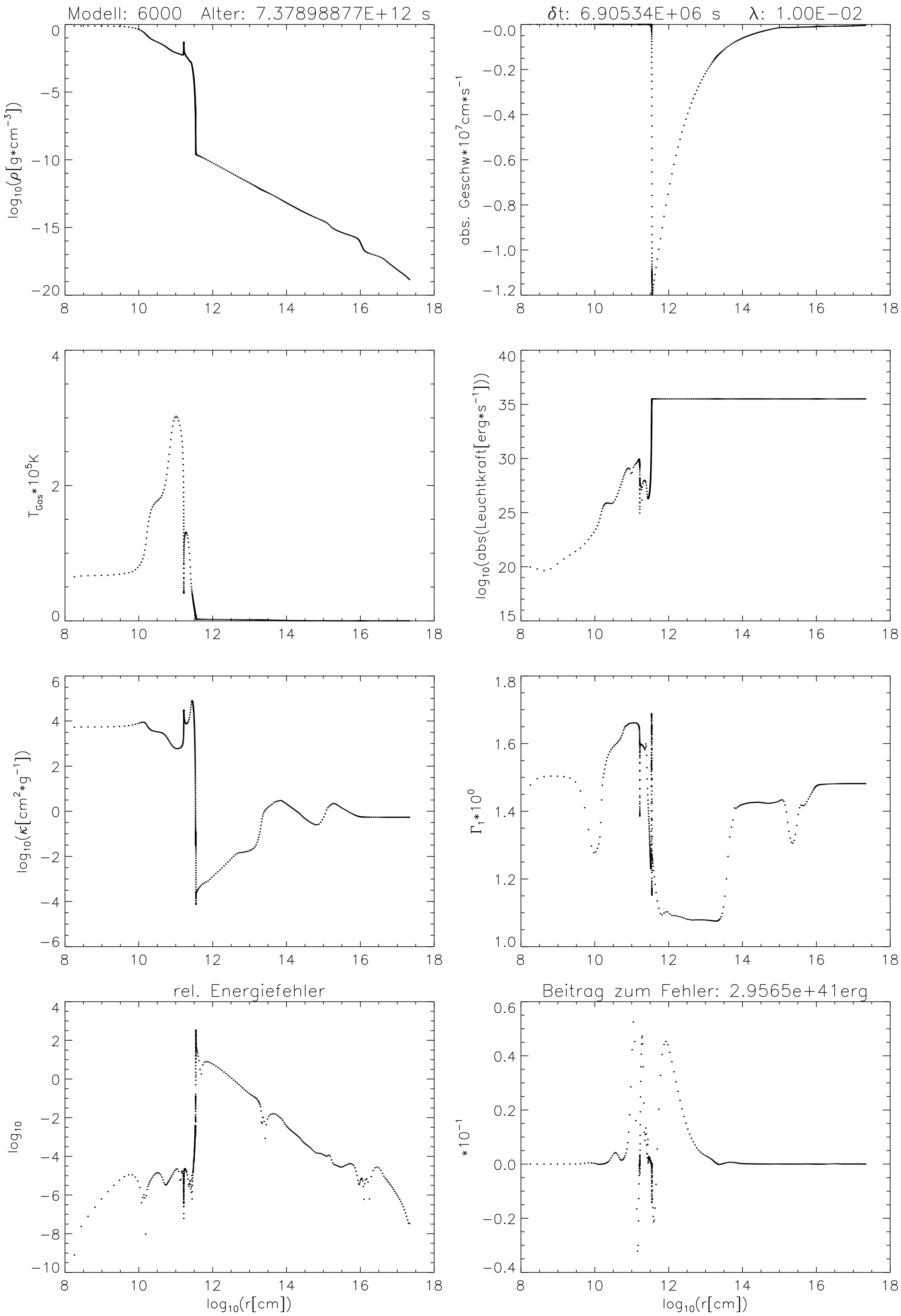


Abbildung 6.33: Modell 6000 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, 9 $M_\odot$ und realistischer Opazität. Die Rechnung wurde zu diesem Zeitpunkt abgebrochen.

6.2.1.3 Das $1\,\mathrm{M}_\odot$-Modell mit 512 Gitterpunkten

Diese Modellreihe sollte dazu dienen, die Totalenergieerhaltung während der Instabilitäten des ersten Kerns zu untersuchen. M. Balluch präsentierte in Bal[89] 2 solche Rechnungen mit 448 und 1024 Gitterpunkten. In beiden Rechnungen entwickelten sich die ersten Kerne sehr ähnlich, im Falle der höheren Auflösung wurde die Rechnung allerdings aus Rechenzeitgründen nicht weit genug verfolgt, um die Frage beantworten zu können, ob es auch hier zu einem Absinken der Zentraldichte um mehrere Größenordnungen kommt. Aus der Ähnlichkeit des Entstehens der Kernschwingungen in beiden Modellreihen sollte man schließen können, daß auch mit 512 Gitterpunkten die Entwicklung gleich verläuft.

Auch hier wurde zunächst die alte Advektionsbeschreibung, die auch in Bal[89] verwendet wurde, benutzt. Die Entwicklung bis zum Einsetzen der Kernschwingungen unterscheidet sich (natürlich) nicht von der in Bal[89] gezeigten Entwicklung. Auch hier kommt es im Kern zu einer Dichteinversion und darauffolgend zu einer Einwärtsbewegung, die am Zentrum reflektiert wird. Durch das Entstehen und Verschwinden von Strukturen im Kern erreicht im Außenbereich der Hülle das Gitter relativ hohe Geschwindigkeiten, die sich in Schwankungen im Leuchtkraftprofil bemerkbar machen. Auch in den Darstellungen von Modellen der beiden Rechnungen in Bal[89] erkennt man am Außenrand in der Leuchtkraft solche Störungen. Während der Reflexion einer Störung am Zentrum des Kerns bricht der Zeitschritt auf deutlich unter 1 s zusammen. Zum gleichen Zeitpunkt hat die Leuchtkraftstörung bereits eine Amplitude von etwa $\frac{2}{3}$ der Leuchtkraft stromabwärts dieser Zone erreicht. Bei diesen kurzen Zeitschritten (teilweise Nanosekunden) ist die Entwicklung nur noch durch die Gittergleichung und die Advektionsfehler gegeben, die physikalische Entwicklung ist praktisch ausgeschaltet! Am Ende der Rechnung ähnelt das Leuchtkraftprofil in der äußeren Hülle einem Sägezahn, dem typischen Aussehen einer numerischen Instabilität mit maximaler Anregung der Mode kürzester Wellenlänge, die auf dem Gitter darstellbar ist. Die Amplitude beträgt am Außenrand das 10^5-fache der Leuchtkraft kurz vor dem Stoß.

Die Tatsache, daß sich diese Rechnung im Gegensatz zu denen in Bal[89] nicht bis zu einer Explosion des Kerns weiterverfolgen läßt zeigt, daß das Problem sehr sensitiv von der Rechengenauigkeit abhängt. So wurden die Rechnungen von M.Balluch auf einer Cray 2 durchgeführt, die hier beschriebene Rechnung auf einer Sun 3; beide Maschinen unterscheiden sich in ihrer internen Zahlendarstellung und damit auch in ihrer numerischen Genauigkeit, dies spielt insbesondere bei der Matrixinversion eine Rolle. Diese extreme Abhängigkeit ist typisch für chaotische Systeme. Das Problem der Abhängigkeit der Resultate von der verwendeten Maschine bei Benutzung dieses numerischen Verfahrens stellte sich auch bei der dynamischen Entwicklung von Protogasplaneten (G.Wuchterl, pers. Mitteilung), erst eine Änderung der Gewichte in der Gittergleichung zur besseren Auflösung der Wellen ermöglichte deren Verfolgung auf der Cray 2, während dies auf einer VAX kein Problem war. In beiden Fällen nimmt man an, daß sich das System chaotisch verhält. Wenn die Entwicklung schon so stark von der Genauigkeit der Matrixinversion abhängt, ist anzunehmen, daß sie mindestens ebenso stark von der Diskretisierung abhängt. Dies zeigte auch der zweite Versuch, ein Modell mit diesem Parametersatz zu rechnen, diesmal unter Verwendung der im vorherigen Abschnitt beschriebenen modifizierten Advektionsbeschreibung, die zur Fortsetzung der Rechnung aufgrund der Leuchtkraftinstabilität unbedingt notwendig ist.

Die anfängliche Entwicklung dieser Modellreihe verläuft bis zur Entstehung des ersten Kerns sehr ähnlich den schon dargestellten Modellreihen. Die Abbildung (6.34) zeigt das Modell kurz nach Ausbildung des ersten Kerns, zu einem Zeitpunkt zu dem $1.17 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{M}_{\odot}$ in diesem enthalten sind. Das Alter dieses Modells beträgt $1.1487\,t_{ff\ Anfang}$, das bedeutet im Vergleich zur Modellreihe mit nur 150 Gitterpunkten wird dieselbe Kernmasse ebenso wie im Falle konstanter Opazität früher erreicht. Im Vergleich zu dem entsprechenden Modell mit geringerer Auflösung ist sowohl die Zentraltemperatur mit 576 K als auch die Zentraldichte mit $1.56 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ höher. Der Opazitätsverlauf und der Verlauf von Γ_1 der beiden Modellreihen unterschiedlicher Auflösung unterscheiden sich allerdings nur wenig.

Im Gegensatz zu der Rechnung gleicher Auflösung mit der alten Advektionsbeschreibung, aber ähnlich der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten, kommt es hier zu einem zweiten Kollaps. Die durch den Kappamechanismus verursachten Störungen wachsen nicht schnell genug an um die dynamische Instabilität, die zum Kollaps führt, zu verhindern. In der Abb. (6.35) ist das Modell während der Phase des zweiten Kollapses dargestellt. Die Kollapsbewegung ist im Geschwindigkeitsmaximum mit einer Machzahl von 1.16 gerade auf Überschallgeschwingigkeit angewachsen. In der einwärtslaufenden Kompressionswelle erkennt man noch deutlich die Störungen, die durch den Kappamechanismus verursacht wurden. Die Spitze im Geschwindigkeitsprofil, an der Staubzerstörungsfront bei einem Radius von $6.6 \cdot 10^{12}$ cm gelegen, trat auch in der Rechnung mit 150 Gitterpunkten auf. Innerhalb dieses Radius ist Γ_1 kleiner als $\frac{4}{3}$. Bis auf die aufgrund des zeitlich frei beweglichen Gitters deutlich bessere Auflösung der Wellen im kollabierenden Kern entsprechen die Charakteristika des zweiten Kollapses denen der Modellsequenz mit 150 Gitterpunkten.

Nach dem Stoppen des Kernkollapses führt auch hier der Kernbounce zu einer Auswärtsbewegung. Der innere Kern beruhigt sich danach und beginnt die Reste des ersten Kerns zu akkretieren. 1.9 Jahre nach dem Stoppen des Kollapses kommt es wieder zu einer Auswärtsbewegung des inneren Kerns mit Geschwindigkeiten, die allerdings unter denen des Kernbounces liegen. Erst 6.9 Jahre nach der Ausbildung des Akkretionsstoßes kommt es zur eigentlichen, sehr starken Explosion des Kernes. Diese Zeitskala ist mit der Zeitskala bis zu den Explosionen der Modelle mit konstanter Opazität vergleichbar.

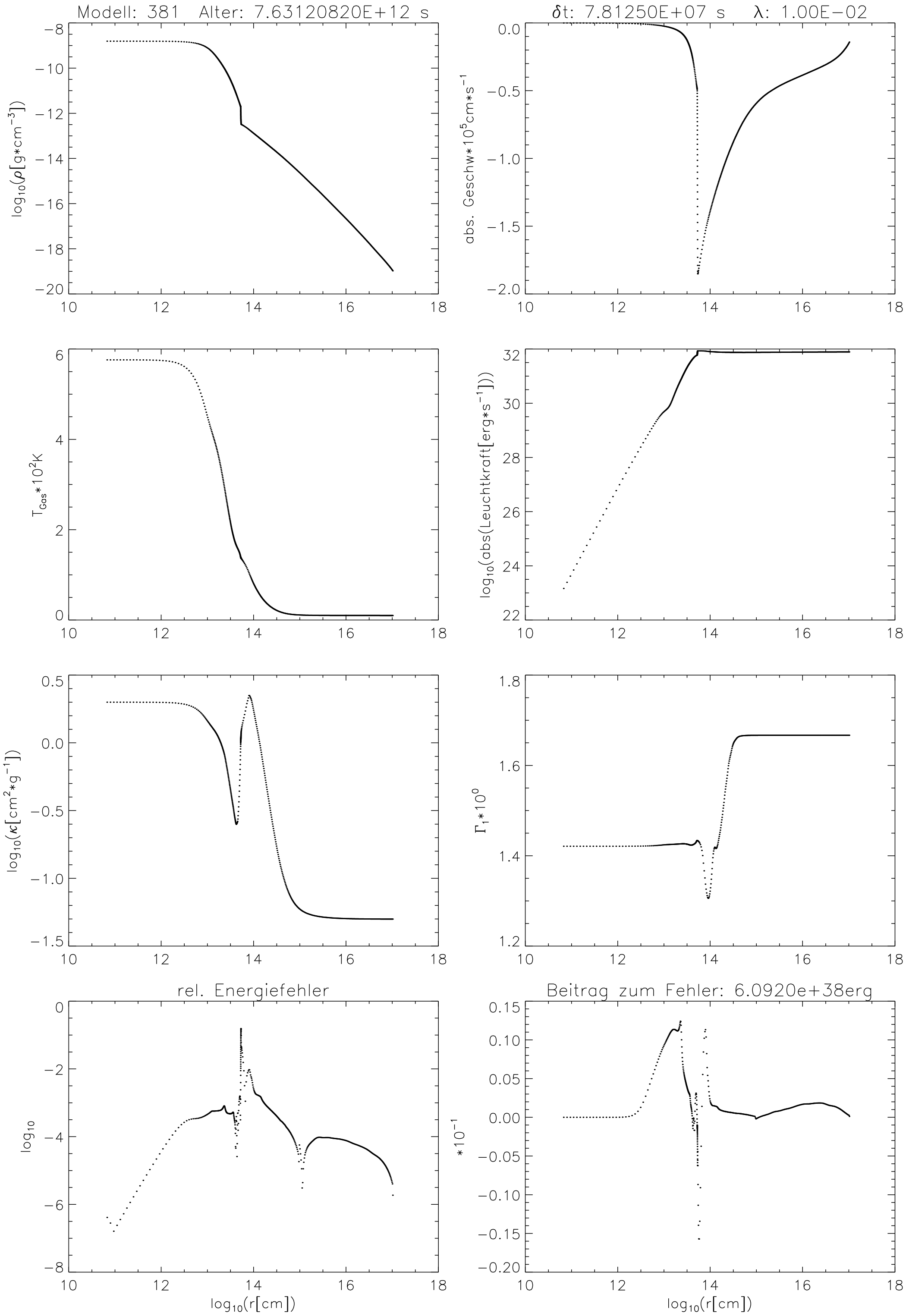


Abbildung 6.34: Modell 381 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Beginn der Akkretion auf den ersten Kern.

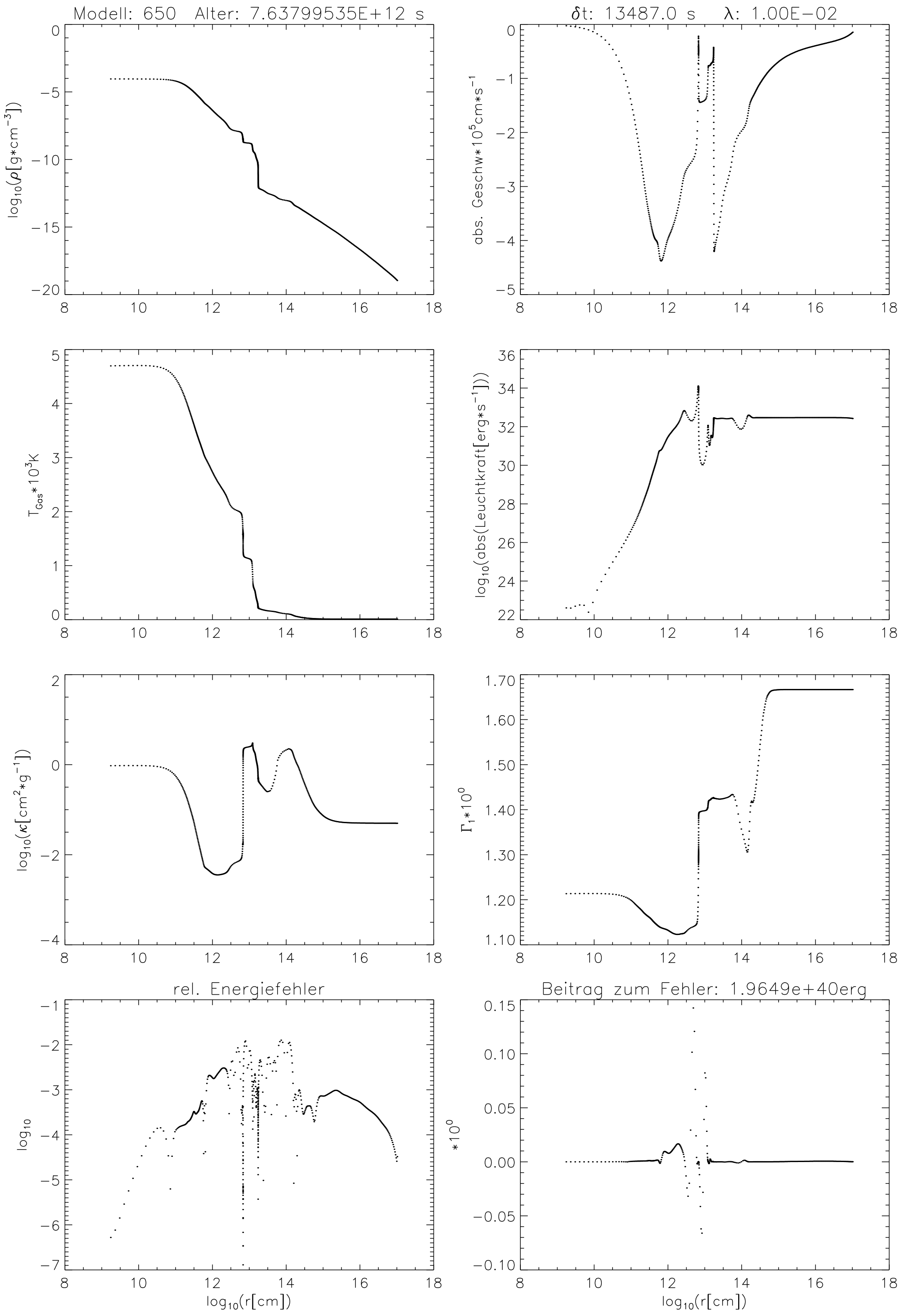


Abbildung 6.35: Modell 650 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Der erste Kern kollabiert aufgrund von H_2-Dissoziation. Die Störungen, die durch den Kappamechanismus verursacht wurden konnten dies nicht verhindern.

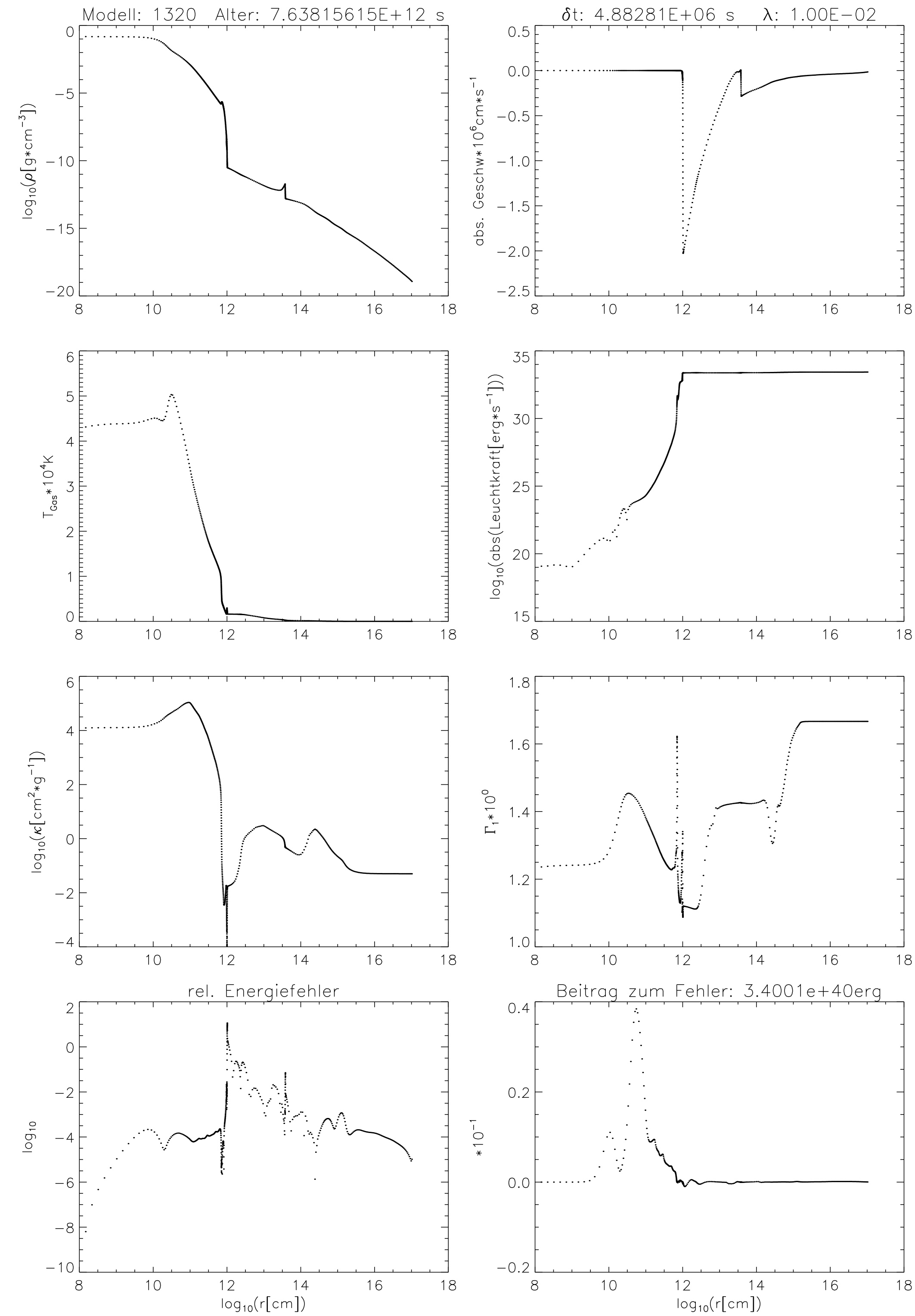


Abbildung 6.36: Modell 1320 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Das Modell kurz vor der Explosion des inneren Kernes.

Die Abbildung (6.36) zeigt das Modell kurz vor der Explosion. Die Kernmasse beträgt zu diesem Zeitpunkt $1.90 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{M}_{\odot}$. Im Gegensatz zu dem Modell gleicher Gitterpunktanzahl und konstanter Opazität vor dessen Explosionen ist hier die Zentraldichte mit $0.15\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$ niedriger, das Temperaturmaximum im Kern ist mit etwa 50000 K signifikant niedriger als bei konstanter Opazität während die Zentraltemperaturen vergleichbar sind. Als Folge ist Γ_1 in der zentralen Region deutlich kleiner als $\frac{4}{3}$, der Kern sollte demnach dynamisch instabiler sein. Am inneren Stoß ist aufgrund der niedrigen optischen Tiefe der Zellen von weniger als 10^{-4} eine Kühlzone aufgelöst. In dieser Kühlzone wird der Staub zerstört und der Wasserstoff dissoziiert, dahinter kommt es wieder zur Assoziation und Staubneubildung (im Rahmen der Staubbeschreibung). Dies erklärt das etwas wilde Verhalten von Γ_1 und κ am Stoß. In der innersten Kernregion bei Radien kleiner als $1.2 \cdot 10^{11}$ cm bewegt sich die Materie leicht auswärts, die Geschwindigkeiten sind allerdings von der Ordnung $\mathrm{mm\,s}^{-1}$.

Auch hier führt die Explosion zur sehr hohen Auswärtsgeschwindigkeit von maximal $1.7 \cdot 10^{6}\ \mathrm{cm\,s}^{-1}$, einem Wert, der vergleichbar mit dem der Modelle mit konstanter Opazität und gleicher Gitterpunktanzahl ist. Die Abb. (6.37) zeigt das Modell während der Expansionsphase. Die Zentraldichte ist mit $9.3 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$ bereits auf einen Wert abgesunken, der kleiner ist als der für erste Kerne typische Wert. Hinter der ersten auswärtslaufenden Stoßwelle, die bereits den äußeren Stoß, der noch vom ersten Kern stammte, überlaufen hat, hat sich eine weitere Störung zu einer Diskontinuität aufgesteilt. Im Zentrum ist die Temperatur schon so weit abgefallen, daß sich der Staub wieder neu gebildet und der Wasserstoff wieder assoziiert hat, wie man aus dem Verlauf von Γ_1 und κ entnehmen kann. In der Zone starker Auswärtsbewegung ist Γ_1 aufgrund von Wasserstoffassoziation noch kleiner als $\frac{4}{3}$. Hinter dem inneren auswärtslaufenden Stoß erkennt man eine Dichteinversion, die mit einer Druckinversion verbunden ist und die weitere Entwicklung in der zentralen Region bestimmt. Da dort die Druckkraft in dieselbe Richtung wirkt wie die Gravitationskraft kommt es zu einer heftigen Einwärtsbewegung, die sich schnell zu einem Stoß aufsteilt. Dieser Stoß wird am Zentrum reflektiert. Im Gegensatz zu der Rechnung mit höherer Masse kann hier die Reflexion nicht verfolgt werden. Der Zeitschritt fällt aufgrund von Konvergenzproblemen auf unter 1 ms. Außerdem reißt das Gitter in der inneren Energie und insbesondere in der Opazität, mit ein Grund für die schlechte Konvergenz, da der Stoß mit einer Staubzerstörungsfront verbunden ist.

In der Entwicklung ist diese Rechnung gut mit denen konstanter Opazität vergleichbar. Bemerkenswert ist allerdings die Tatsache, daß es, im Gegensatz zu früheren Rechnungen mit frei beweglichem Gitter, überhaupt ohne wesentliche Kernschwingungen zu einem zweiten Kollaps kommt. Obwohl das frei bewegliche Gitter den Vorteil hat, neu entstandene Strukturen sofort aufzulösen, hat es beispielsweise gegenüber lokalen Gitterverfeinerungstechniken, bei denen die Fehler durch die Diskretisierung bei Gitteranpassungen

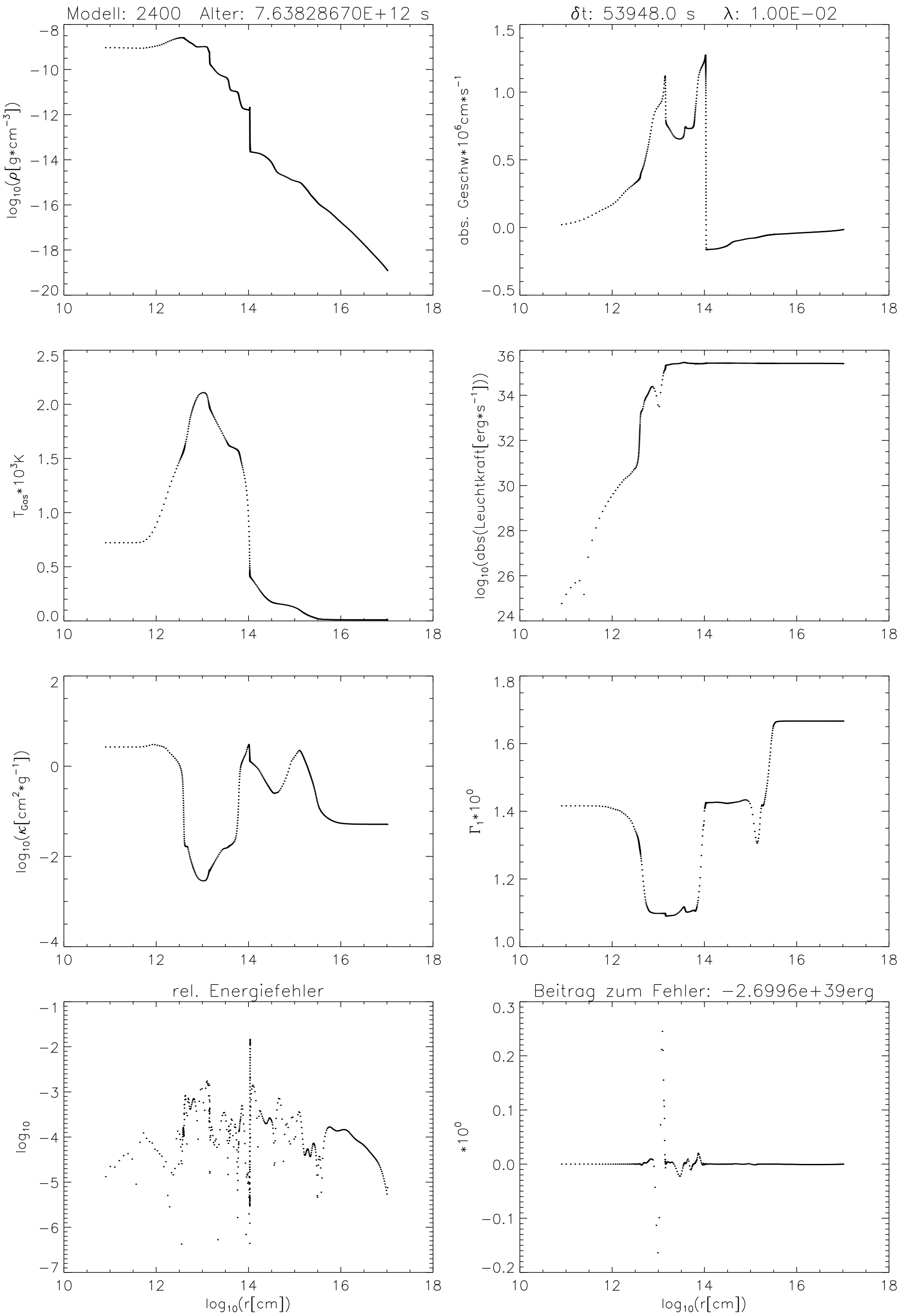


Abbildung 6.37: Modell 2400 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Die Explosion des inneren Kernes führt zu einer Verdünnung jenseits der Dichten, die typisch für erste Kerne sind.

lokalisiert bleiben, den Nachteil, daß die für die lokal erhöhte Auflösung benötigten Punkte teilweise aus entfernten Regionen geholt werden müssen und sich so durch Advektionsfehler Störungen mit beliebig hoher Geschwindigkeit ausbreiten können, wie die Leuchtkraftinstabilität in der Hülle gezeigt hat. Die hier beschriebene Abhilfe durch Änderung des Advektionsschemas ist allerdings nur ein Notbehelf für dieses spezielle Problem. Aus dieser Überlegung wäre zu folgern, daß es für ein zeitlich frei bewegliches Gitter notwendig wäre, ein Advektionsschema höherer Ordnung zu verwenden. Wenn auch ein solches im Bereich von Stößen keine Vorteile mit sich brächte (hier müßte sogar die Ordung reduziert werden, falls man Monotonie fordert), ergäben sich im Bereich stetiger (starker) Lösungen durch die verringerten Advektionsfehler, insbesondere bei Anpassungen des adaptiven Gitters an neuentstandene Strukturen, Vorteile.

6.2.2 Die Totalenergieerhaltung der Modelle mit realer Opazität

6.2.2.1 Globale Totalenergieerhaltung

Die Modellreihen mit realer Opazität wurden denselben Totalenergietests wie die Modellreihen konstanter Opazität unterzogen. Zunächst sollen die Modellreihen mit $1\,\mathrm{M}_\odot$ behandelt werden, insbesondere ist ein Vergleich mit den Modellreihen konstanter Opazität interessant; dann die Modellreihe mit einer Masse von $9\,\mathrm{M}_\odot$.

In der Abbildung (6.38) sind die Toleranzintervalle der $1\mathrm{M}_\odot$-Modellreihen dargestellt. Die Darstellung entspricht der der Modelle konstanter Opazität, auch hier wurde zur Leuchtkraftintegration die Trapezregel benutzt, die Abschätzungen erfolgten mittels Gleichung (5.26). In der Entwicklung ähnelte die Modellreihe mit 512 Gitterpunkten und dem modifizierten Advektionsschema am stärksten den Modellen mit konstanter Opazität. Aber auch die Modellreihe mit 150 Gitterpunkten führte zu einem zweiten Kollaps mit anschließender Explosion, allerdings waren hier die Zeitskalen anders. Entsprechend der Entwicklung hat der Verlauf des Totalenergiefehlers mit der Modellnummer im Falle der Rechnung mit 512 Punkten und modifizierter Advektion die größte Ähnlichkeit mit der Rechnung entsprechender Auflösung und konstanter Opazität. Gegenüber den Modellen konstanter Opazität wurden allerdings noch 2 Dinge zusätzlich verändert: Erstens wurde die Diffusionsnäherung für den Strahlungstransport benutzt und zweitens ist die Advektionsbehandlung anders. Daß die Verwendung der Diffusionsnäherung keinen signifikanten Einfluß auf die Totalenergieerhaltung hat, wurde schon für die Modelle konstanter Opazität gezeigt. Um die Frage zu klären, wie das veränderte Advektionsschema die Totalenergieerhaltung beeinflußt, wurden Rechnungen mit dieser Advektionsbehandlung, konstanter Opazität und 150 sowie 512 Gitterpunkten durchgeführt. Die Entwicklung dieser Modellsequenzen unterscheidet sich kaum von denen

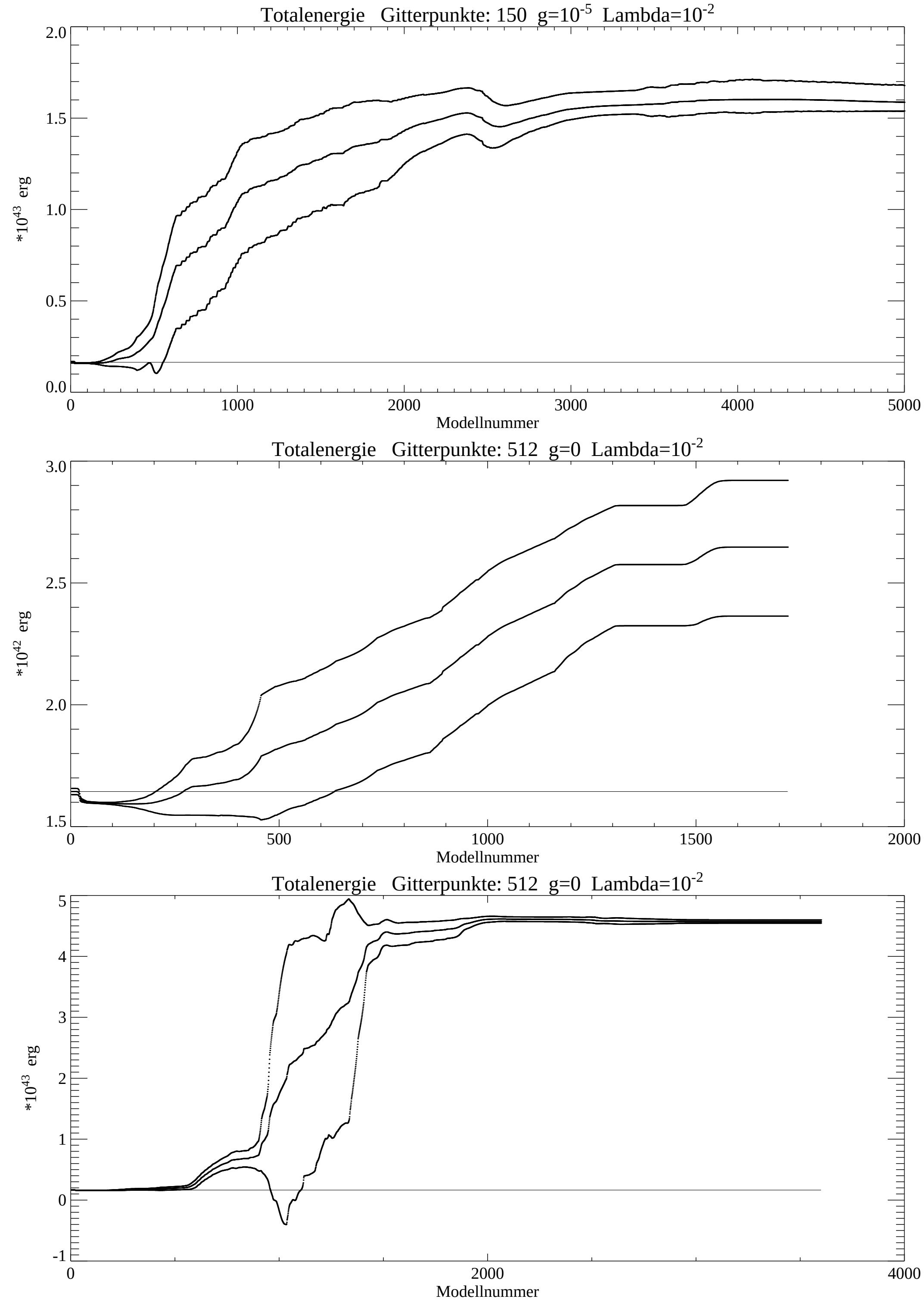


Abbildung 6.38: Zurückintegrierte Totalenergie der Modelle mit realer Opazität und 1 $M_\odot$. Oben: Modellreihe mit 150 Gitterpunkten. Mitte: Modellreihe mit 512 Gitterpunkten, alte Advektion. Unten: Modellreihe mit 512 Gitterpunkten, neue Advektion. In allen Fällen wurde die Trapezregel zur Leuchtkraftintegration benutzt.

mit der alten Advektionsbeschreibung ohne den Zeitmittelwert. In der Modellsequenz mit 150 Gitterpunkten kommt es zu einer Explosion des zweiten Kernes, allerdings erst nach etwa 115 Jahren nach dessen Ausbildung und nachdem die auswärtsgelaufene Verdünnungswelle des zweiten Kollapses den äußeren Stoß des ersten Kernes abgetragen hat. Die Explosion führt hierbei zu mit der Rechnung mit 150 Gitterpunkten unter Verwendung der alten Advektionsbeschreibung vergleichbaren Auswärtsgeschwindigkeiten. In der Totalenergieerhaltung unterscheidet sich diese Rechnung nur wenig von der entsprechenden mit dem alten Advektionsschema. Die zurückintegrierte Totalenergie unter Verwendung der Trapezregel zur Leuchtkraftintegration beträgt nach der Explosion $7.13 \cdot 10^{43}$ erg bei einem Oberflächenterm von $2.78 \cdot 10^{43}$ erg. Dies ist im Vergleich zu dem Wert von $7.52 \cdot 10^{43}$ erg bei einem Oberflächenterm von $2.54 \cdot 10^{43}$ erg der Rechnung mit dem alten Advektionsschema zwar eine leichte Verbesserung, die Abweichung ist aber immer noch sehr groß. Die Modellsequenz mit 512 Gitterpunkten, $g_t = 0$ und $\lambda = 10^{-2}$ entwickelt sich praktisch gleich der entsprechenden mit der alten Advektionsbeschreibung, es kommt nach der Bildung des zweiten Kernes zum Einwärtslaufen des äußeren Stoßes, zur Wechselwirkung mit dem inneren Stoß und anschließend zur Kernexplosion. Die globale Totalenergiebilanz ist allerdings etwas besser: Statt einer zurückintegrierten Totalenergie nach der Explosion von $5.57 \cdot 10^{43}$ erg bei einem integrierten Oberflächenterm von $1.91 \cdot 10^{43}$ erg im Falle des alten Advektionsterms liegt diese mit modifizierter Advektion bei $4.87 \cdot 10^{43}$ erg bei einem Oberflächenterm von $1.56 \cdot 10^{43}$ erg (Trapezregel). In allen Fällen ist die anfängliche Totalenergie gleich und beträgt $1.644 \cdot 10^{42}$ erg.

Vergleicht man nun die zurückintegrierte Totalenergie der 3 Rechnungen mit 512 Gitterpunkten mit konstanter und realer Opazität sowie gleichen Parametern $g_t = 0$ und $\lambda = 10^{-2}$ jeweils nach den Kernexplosionen, zum Zeitpunkt des Abbruchs der Rechnung so ergeben sich die folgenden Werte:

	Tol. Intervall	O. Term
Konstantes κ, alte Adv.	$(5.57 \pm 0.16) \cdot 10^{43}$ erg	$1.91 \cdot 10^{43}$ erg
Konstantes κ, neue Adv.	$(4.87 \pm 0.21) \cdot 10^{43}$ erg	$1.56 \cdot 10^{43}$ erg
Reales κ, neue Adv.	$(4.57 \pm 0.03) \cdot 10^{43}$ erg	$2.68 \cdot 10^{43}$ erg

In beiden Fällen betrug die exakte Anfangsenergie $1.644 \cdot 10^{42}$ erg. Ein direkter Vergleich des Verhältnisses der Totalenergieerzeugung zum Oberflächenterm ist allerdings nicht sinnvoll, da die Rechnung mit realem κ länger in der Expansionsphase verfolgt werden konnte und somit der Oberflächenterm deutlich höher ist, während der Hauptteil der künstlichen Totalenergieerzeugung zur Zeit der Existenz des inneren Kerns auftrat. Im Falle realer Opazität ist allerdings die Totalenergieerzeugung bis zur Kernexplosion geringer. Die geänderte Advektion dürfte nach dem Ergebnis des Vergleiches der beiden Rechnungen konstanter Opazität einen erheblichen Anteil dazu beitragen. Zusätzlich dürfte die Verbesserung auf die geringere Materiekonzentration zum Zentrum hin zurückzuführen sein, während in der Rechnung

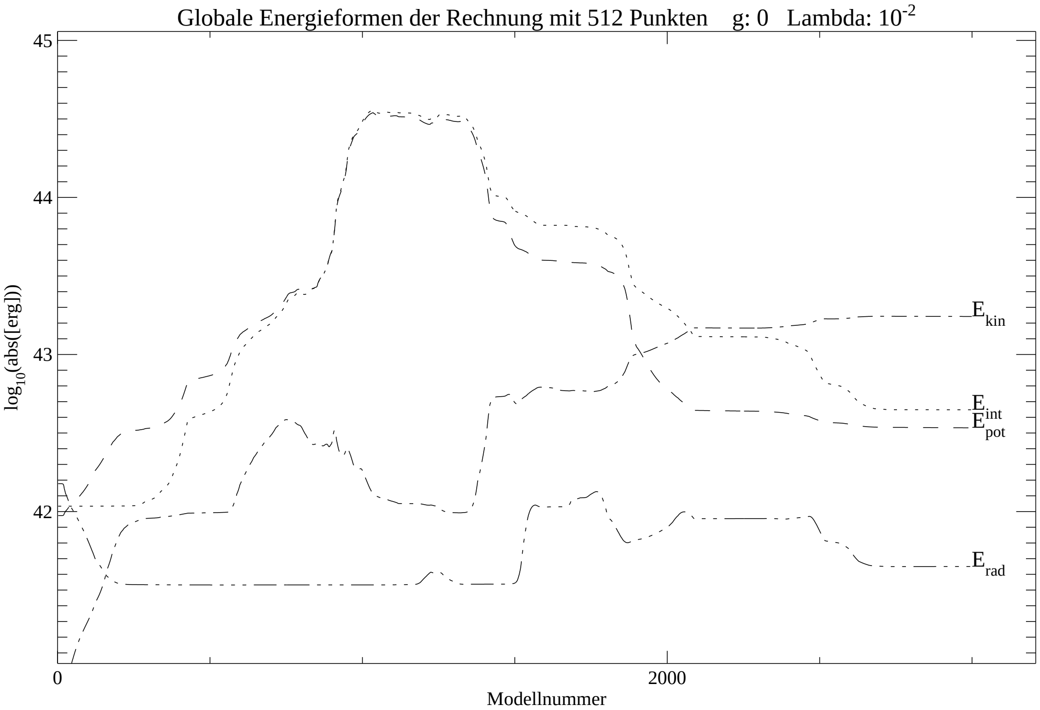


Abbildung 6.39: Darstellung der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Energieformen der Modellreihe mit 512 Gitterpunkten und realistischer Opazität.

mit konstantem κ das Verhältnis von Masse zu Radius im Maximum in der Kernmantelzone kurz vor der Explosion $2.3 \cdot 10^{20}\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ betrug, wird in der Rechnung mit realer Opazität nur ein Wert von $1.6 \cdot 10^{20}\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ erreicht. Dementsprechend ist die Skala der potentiellen Energie niedriger, wodurch geringere absolute Totalenergiefehler erreicht werden.

Der Verlauf der zurückintegrierten Totalenergie beginnt auch hier mit einem, in der Abbildung (6.38) aufgrund der kleineren Skala nicht sichtbaren, Totalenergieentzug zu Beginn des Kollapses. Der Totalenergiefehler wechselt noch in der isothermen Phase das Vorzeichen. Während der erste Kern existiert, befindet sich die Anfangsenergie noch innerhalb der Abschätzung. Erst als es bei der Modellnummer von 560 zum zweiten Kollaps kommt, ergibt sich eine signifikante Abweichung von der Totalenergieerhaltung. Die nach dem Kollaps einsetzende Akkretion auf den Kern führt zu einer deutlichen Aufweitung des Toleranzintervalles aufgrund des starken Anstiegs der potentiellen Energie, sodaß kurzzeitig die anfängliche Totalenergie wieder darin enthalten ist. Wie die Abbildung (6.39) zeigt, bleiben ab dieser Phase die potentielle und die innere Energie etwa konstant, die zurückintegrierte Totalenergie steigt deutlich an. Zu Beginn der Explosion befindet sich die Anfangstotalenergie wieder außerhalb des Toleranzintervalles. Auch hier macht erst die Explosion das Ausmaß der Totalenergieerzeugung deutlich, da das Toleranzintervall durch das Absinken der potentiellen Energie um 2

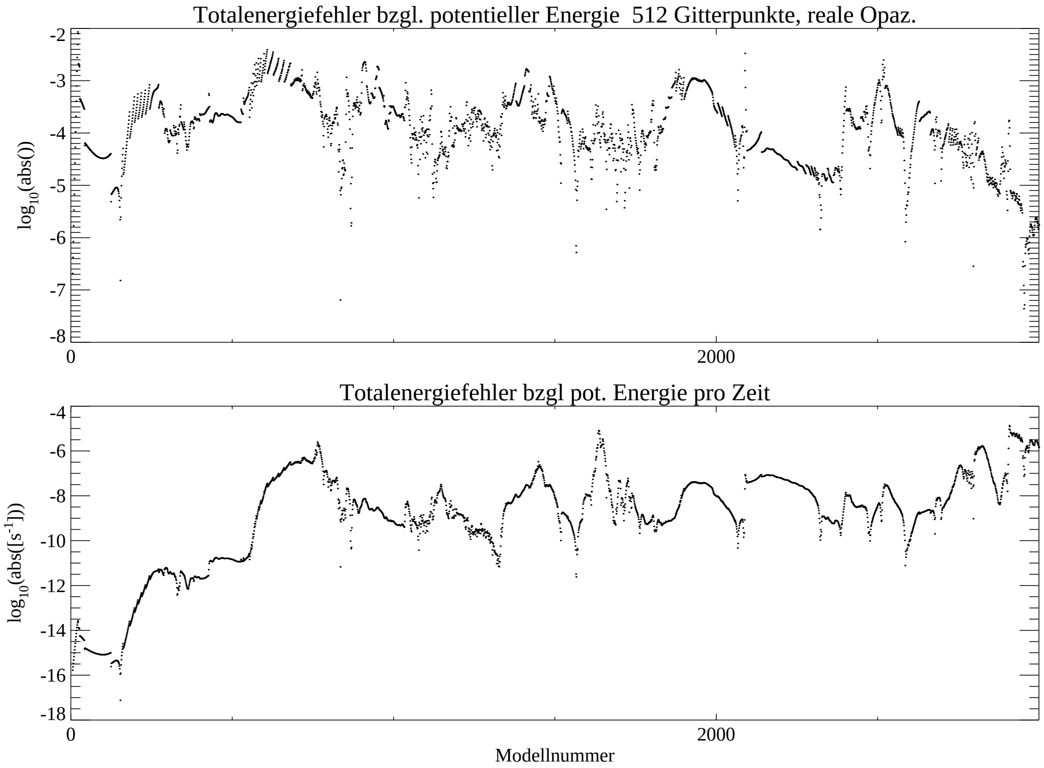


Abbildung 6.40: Totalenergiefehler pro Zeitschritt, 512 Gitterpunkte, realistisches κ. Oben: Relativer Fehler bezüglich der momentanen potentiellen Energie. Unten: Gleiche Größe nur bzgl. der Größe des Zeitschritts.

Zehnerpotenzen ebenfalls schrumpft. Während der Expansionsphase sind die innere Energie und später auch die kinetische Energie betragsmässig größer als die potentielle Energie, auch die momentane Totalenergie ist somit eindeutig positiv, gegen Ende der Rechnung beträgt sie $1.89 \cdot 10^{43}$ erg, während sie während der Phase des ersten Kerns negativ war. Die Strahlungsenergie spielt auch hier, ebenso wie im Fall konstanter Opazität nur zu Beginn der isothermen Phase eine Rolle. Während der Expansionsphase gibt es auch hier eine Phase leichter Totalenergievernichtung.

Die Abbildung (6.40) zeigt den Verlauf des Totalenergiefehlers pro Zeitschritt relativ zur momentanen potentiellen Energie. Der Fehler wurde hier unter Verwendung der Diskretisierung (5.33) für die Volumenterme ermittelt. Es sind nur die Modelle bis zur Nummer 3000 berücksichtigt, da der Zeitschritt danach auf Werte von unter 1 s sank. Auch hier fällt beim Vergleich des Verlaufs des Fehlers mit dem auf 1 s bezogenen Fehler auf, daß dessen Verlauf weitgehend stetig ist, der Fehler pro Zeitschritt ist auch hier proportional zur Größe des Zeitschrittes. Allerdings ist der Verlauf des zeitschrittbereinigten Fehlers hier nicht so glatt wie im Falle konstanter Opazität (vergl. hierzu Abb. (6.18)). Vielmehr gibt es in dieser Modellreihe mehrere

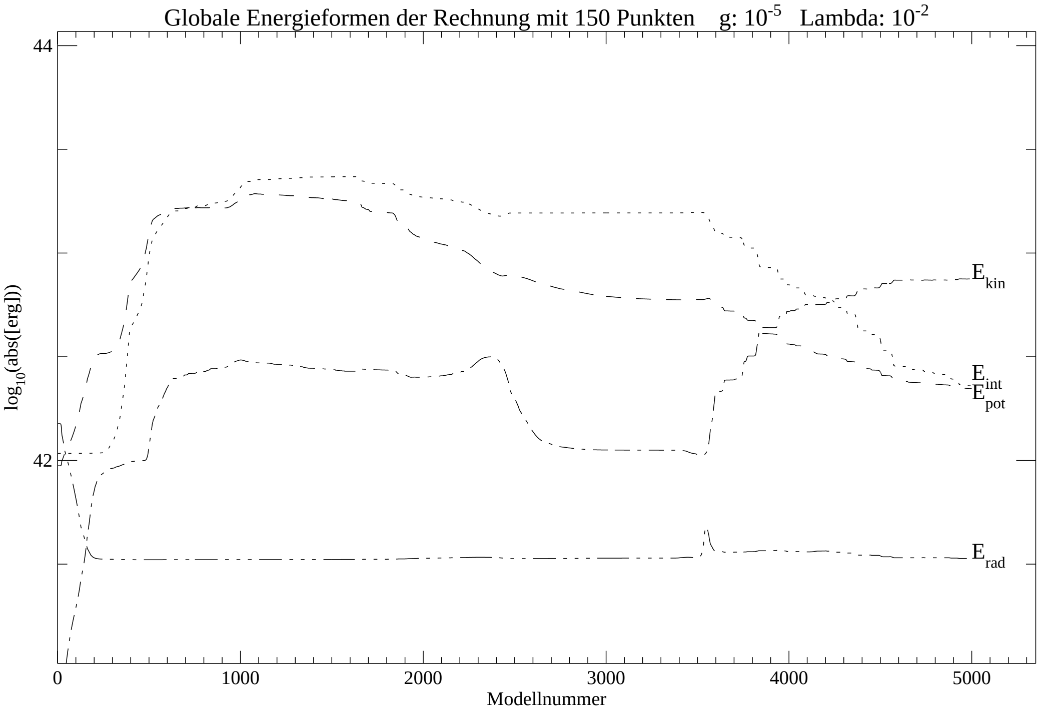


Abbildung 6.41: Darstellung der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Energieformen der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität.

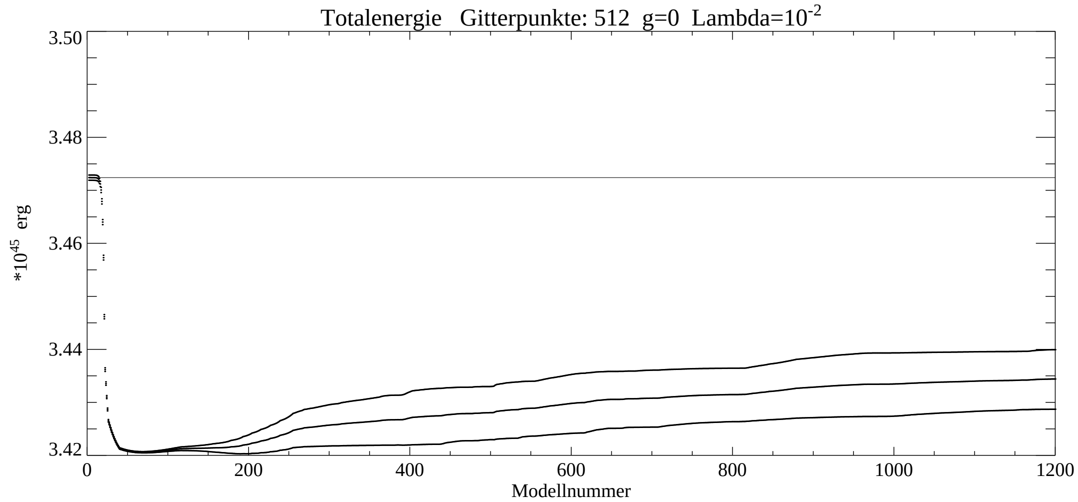
Phasen, in denen sich der zeitschrittbereinigte Fehler eher chaotisch verhält, es sind dies die Modelle um 800, zur Zeit des Kernbounces, zwischen Nummer 1100 und Nummer 1340, der Zeit der ersten Instabilität bis zum Zeitpunkt der Kernexplosion und zwischen den Nummern 1700 und 1800, als der auswärtslaufende Stoß den Stoß des ersten Kernes erreicht. Während der weiteren Expansionsphase ist der Verlauf des zeitschrittbereinigten Fehlers wieder glatt, entsprechend einer linearen Abhängigkeit.

Die globale Totalenergieerhaltung der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, gleichen Parametern und der alten Advektionsbeschreibung, die noch zur Phase des ersten Kerns abbrach, ist im mittleren Diagramm der Abb. (6.38) dargestellt. Auch hier kommt es zu einer künstlichen Totalenergieerzeugung, die Energieskalen sind hier allerdings kleiner. Zum Zeitpunkt des Abbruchs der Rechnung ist die anfängliche Totalenergie zwar nicht mehr im Toleranzintervall enthalten, die Totalenergieerzeugung von $1.01 \cdot 10^{42}$ erg ist verglichen mit dem integrierten Oberflächenterm von zu diesem Zeitpunkt $3.60 \cdot 10^{42}$ erg deutlich kleiner. Auch ist die momentane Totalenergie mit $-9.50 \cdot 10^{41}$ erg noch negativ.

Die Entwicklung des Modells mit 150 Gitterpunkten unterschied sich von der des Modells mit 512 Punkten und modifizierter Advektionsbehandlung durch die wesentlich frühere Explosion. Dies macht sich auch in der Totalenergieerhaltung bemerkbar. Es kommt hier nicht zur Akkretion der

Reste des ersten Kerns, dadurch bleiben die Energieskalen niedriger. Dies wird in Abb. (6.41) deutlich: Vergleicht man dieses Diagramm mit dem entsprechenden Diagramm der Modellreihe mit 512 Punkten, so fehlt hier der steile Anstieg der potentiellen und inneren Energie nach Ausbildung des inneren Kerns um etwa 1 Größenordnung (Modelle 900 – 1000 in Abb. (6.39)). Dies hat zur Folge, daß es zu keiner vergleichbar starken Aufweitung des Toleranzintervalls der zurückintegrierten Totalenergie kommt. Bis zum zweiten Kollaps befindet sich die anfängliche Totalenergie (vom Beginn der isothermen Phase einmal ausgenommen) innerhalb des Toleranzintervalles. Bis weit in die Expansionsphase bleibt der Totalenergiefehler positiv. Allerdings gibt es dann eine Phase (Modellnummern 2375 – 2573), in der es zu einer nennenswerten Totalenergievernichtung kommt. Diese Phase fällt mit dem Maximum der kinetischen Energie (maximale Auswärtsbewegung) in Abb. (6.41) zusammen. Auch in der zweiten Expansionsphase nach Modell 4320 findet eine, allerdings kaum merkliche Totalenergievernichtung statt. Gegen Ende der Rechnung, noch während der zweiten Expansionsphase, beträgt das Toleranzintervall $(1.59 + 0.09 - 0.05) \cdot 10^{43}$ erg, der integrierte Oberflächenterm $7.97 \cdot 10^{42}$ erg. Zu diesem Zeitpunkt liegen sowohl die kinetische als auch die innere Energie betragsmäßig über der potentiellen Energie, das Objekt hat eine positive momentane Gesamtenergie von $7.90 \cdot 10^{42}$ erg.

Die Modellreihe mit 512 Gitterpunkten und einer Masse von 9 $M_\odot$ unterscheidet sich von den bisher beschriebenen Modellreihen insbesondere durch die höhere Anfangstemperatur von 40 K. Dies führt dazu, daß das Anfangsmodell vollkommen strahlungsdominiert ist. Die anfängliche Strahlungsenergie ist betragsmäßig um etwa 2 Größenordnungen größer als die innere beziehungsweise potentielle Energie. Dies hat in der Anfangsphase zur Konsequenz, daß die anfängliche Totalenergieerhaltung, im Gegensatz zu den kälteren Modellen, von der Art der zeitlichen Integration der Leuchtkraft abhängt. Die Abbildung (6.42) zeigt die Toleranzintervalle des Beginns dieser Modellreihe für eine implizite Leuchtkraftintegration und die Verwendung der Trapezregel. Im Falle der Trapezregel ergibt sich eine deutlich stärkere Abweichung von der Totalenergieerhaltung, bei einer expliziten Diskretisierung des Leuchtkraftintegrals ist die Abweichung noch größer. Da die mechanischen Energien und die innere Energie klein gegenüber der Strahlungsenergie sind, reduziert sich die Totalenergiegleichung auf die Erhaltungsgleichung der Strahlungsenergie. In dieser wird aber eine implizite Diskretisierung verwendet, was zu einem besseren Ergebnis der Kontrolle mittels einer impliziten Diskretisierung führt. Auch hier ist anfangs die Leuchtkraft eine monoton steigende Funktion der Zeit, sodaß eine explizite oder teilexplizite Diskretisierung im Vergleich zu einer impliziten Diskretisierung kleinere Werte des Leuchtkraftintegrals liefert, was die kleineren rückintegrierten Totalenergien erklärt. Während der Anfangsphase zur Zeit des maximalen Zeitschritts erreicht die über einen Zeitschritt integrierte Leuchtkraft maximal das 3-fache des Betrages der potentiellen Energie! Die auch mit einer impliziten Leuchtkraftintegration anfangs noch vorhandene



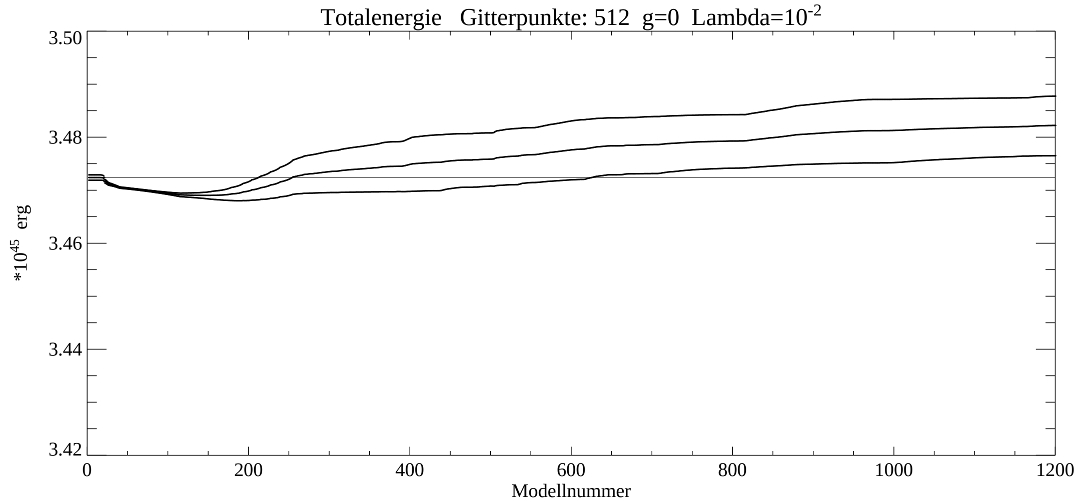


Abbildung 6.42: Vergleich der zurückintegrierten Totalenergie der Modellreihe mit 512 Gitterpunkten, $9\,M_\odot$ und realistischer Opazität für verschiedene Methoden der Leuchtkraftintegration. Toleranzintervalle unter Verwendung der Abschätzung (5.26). Oben: Verwendung der Trapezregel zur Leuchtkraftintegration. Unten: Implizite Leuchtkraftintegration. Die anfängliche Totalenergie beträgt $3.428 \cdot 10^{45}$ erg.

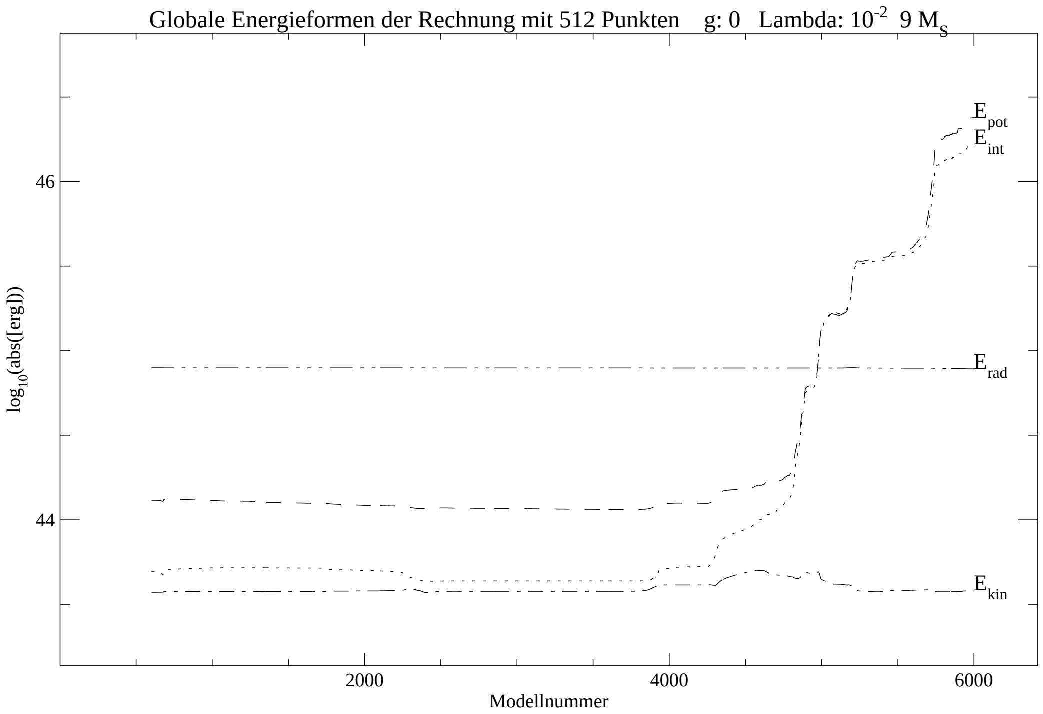


Abbildung 6.43: Darstellung der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Energieformen der Modellreihe mit 512 Gitterpunkten, 9 $M_\odot$ und realistischer Opazität.

Abweichung sollte von dem Druckarbeitsterm stammen. Hier liegt ein ähnliches Problem vor wie das, welches zur Änderung des Advektionsschemas geführt hat. Würde man dieselbe Approximation des geometrisch bedingten r^2-Faktors im Druckgradiententerm in der Bewegungsgleichung und der 1-ten Momentengleichung wie im Advektionsterm machen, so sollte die Abweichung noch geringer sein, falls man die beschriebene Diskretisierung der Druckarbeit in der Totalenergiegleichung verwendet (siehe auch MiM[84]).

In der Abb. (6.43) erkennt man, daß die Dominanz der Strahlungsenergie bis zur Bildung des inneren Kernes anhält. Erst mit dessen Wachstum steigen die innere Energie und der Betrag der potentiellen Energie deutlich über die weitgehend konstante Strahlungsenergie. Die Strahlungsenergie bleibt zeitlich trotz der Aufheizung des Kerns konstant, weil der Kern räumlich im Vergleich mit der gesamten Wolke klein bleibt, sein Radius beträgt nur 10^{-6} des Wolkenradius. Die Totalenergieerhaltung ist bis zur Bildung des inneren Kerns auch bezüglich der gegenüber der Totalenergie betragsmäßig kleineren mechanischen Energie mit einem Fehler von typisch weniger als 10^{-4} der momentanen potentiellen Energie pro Zeitschritt relativ gut. Erst als der Kollaps zum inneren Kern und damit zum betragsmäßigen Ansteigen der für die Skala des Totalenergiefehlers maßgebenden potentiellen Energie führt, erkennt man in Abb. (6.44) einen deutlichen Anstieg in der zurückin-

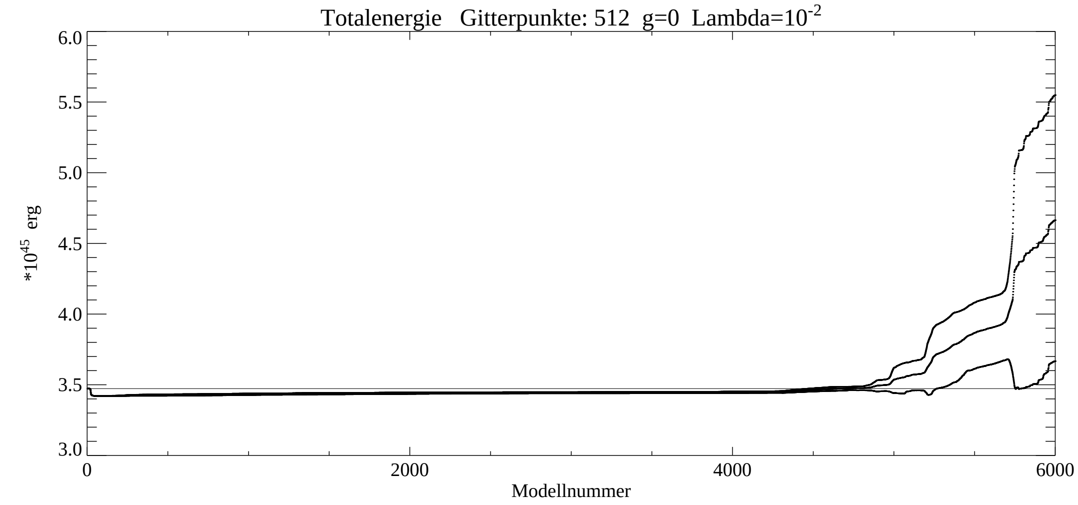


Abbildung 6.44: Zurückintegrierte Totalenergie der Modellreihe mit 512 Gitterpunkten, 9 $M_\odot$ und realistischer Opazität. Verwendung der Trapezregel zur Leuchtkraftintegration.

tegrierten Totalenergie. Die anfängliche Totalenergie hat gegen Ende der Rechnung das Toleranzintervall verlassen, die momentane Totalenergie ist mit $-6.44 \cdot 10^{45}$ erg jedoch noch negativ.

6.2.2.2 Lokale Totalenergieerhaltung

Da die Entwicklung der 1 $M_\odot$-Modelle Ähnlichkeiten mit den Modellen konstanter Opazität aufweist, stellt sich die Frage, ob dies auch für den lokalen Totalenergiefehler gilt. Dazu ist in den Modelldarstellungen ebenso wie bei den Modellen konstanter Opazität der lokale Totalenergiefehler pro Zeitschritt relativ zur lokal maximalen Energieform und absolut pro Zelle aufgetragen. In allen Fällen wurde die einfachere Diskretisierung (5.35) zur Diskretisierung der Volumenterme benutzt. Diese ergibt, wie schon die Untersuchung an den Modellen konstanter Opazität zeigte, im Vergleich zu der bei der globalen Untersuchung verwendeten Volumensdiskretisierung (5.33) nur unwesentlich verschiedene Resultate.

Vergleicht man die Modelle der ersten Kerne der Modelle realistischer Opazität in den Abbildungen (6.23) und (6.34) mit denen konstanter Opazität in den Abbildungen (6.1) und (6.8), so erkennt man eine starke morphologische Ähnlichkeit. Markantester Unterschied der Profile der relativen Totalenergiefehler ist der gleichmäßigere Verlauf im Kernmantel im Falle realistischer Opazität. Der Grund dafür liegt im dortigen Anstieg von κ, der über den $\kappa\rho$-Term in der Gittergleichung dort zu einer höheren Gitterpunktkonzentration führt. Trotzdem fällt in der Kernmantelzone ein höherer Anteil des Gesamtfehlers an. Im Fall der Modellreihen mit 150 Punkten unterscheidet sich dieser um genau den Faktor von 1.4 um den der Zeitschritt im Falle realistischer Opazität größer ist; im Falle von 512 Gitterpunkten ist der Gesamtfehler der Rechnung mit realistischer Opazität bei einem um einen Faktor von 1.4 größeren Zeitschritt um einen Faktor 2.2 höher. Der höhere Anteil des Kerns am Gesamtfehler im Falle realistischer Opazität kann durch die höhere Konzentration der Materie zum Zentrum hin erklärt werden, so ist das Maximum des Verhältnisses Masse zu Radius etwa um einen Faktor 2 höher, ebenso sind die Zentraldichten höher. In allen Fällen gibt es im Stoß eine Zone in der Totalenergievernichtung vorherrscht. Die veränderte Advektionsbehandlung im Falle der Rechnung mit 512 Punkten und realem κ hat in dieser Phase allenfalls in der äußeren Hülle einen leichten Einfluß auf die lokale Totalenergieerhaltung, indem das dortige Maximum (wahrscheinlich verursacht durch die starke Gitterbewegung) etwas reduziert wird.

Vergleicht man die Modelle konstanter und realer Opazität in der Phase des zweiten Kollapses in den Abb. (6.2) und (6.24), so sind die Unterschiede schon größer. Insbesondere führt das adaptive Gitter, das in den Opazitätsflanken eine höhere Auflösung bewirkt, dort zu Minima. Weiterhin sorgt die durch den Kappamechanismus entstandene Störung in der Kompressionswelle für weitere Struktur. Dies ändert allerdings an der Verteilung des absoluten Fehlers im Vergleich zu konstanter Opazität relativ wenig. Der Peak im Beitrag zum Gesamtfehler, der einer Totalenergieerzeugung entspricht, ist im Falle realer Opazität durch eine Zone von Totalenergievernichtung zwischen dem Stoß und der Störung bei einem Radius von $8 \cdot 10^{12}$ cm unterbrochen. Sowohl bei konstanter als auch bei realer Opazität trägt der Stoß weder im relativen noch im absoluten Fehler signifikant bei. Anders ist die Situation im Falle der Rechnung mit 512 Punkten in Abb. (6.35). Hier ergibt sich im Bereich der durch den Kappamechanismus bedingten Störungen im Kern ein relativ chaotisches Bild. Insbesondere existieren Zellen, in denen der Totalenergiefehler mehr als 10% des Gesamtfehlers beträgt, ein Indiz für eine schlechte Auflösung der Strukturen. Auch ist der relative Totalenergiefehler dort relativ hoch (teilweise über 10^{-2} der potentiellen Energie). Der alte Akkretionsstoß spielt auch hier für den Gesamtfehler keine Rolle. Für den Gesamtfehler ist auch die einfallende Hülle zu diesem Zeitpunkt unbedeutend.

Mit den Modellen konstanter Opazität der zweiten Kerne kurz vor den Explosionen ist nur das $1\,\mathrm{M}_\odot$-Modell der Sequenz mit 512 Gitterpunkten direkt vergleichbar. Die Kernmasse ist mit 1.9% der Gesamtmasse zwar kleiner als in den dargestellten Vorexplosionsmodellen konstanter Opazität, die alle eine Kernmasse von $2.35 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{M}_\odot$ aufweisen, von der Struktur her ähnelt das Modell 1320 in Abb. (6.36) dem Modell 688 der Modellreihe konstanter Opazität in Abb. (6.9). Die geringere Kernmasse und die daraus resultierende geringere Konzentration der Materie zum Zentrum hin (das Verhältnis Masse zu Radius beträgt hier maximal nur $1.5 \cdot 10^{20}\ \mathrm{g\,cm}^{-1}$) führen zu einer niedrigeren Energieskala. Der absolute Fehler pro Zeitschritt ist deshalb im Falle realer Opazität trotz des um den Faktor 2.8 größeren Zeitschritts um einen Faktor 1.4 kleiner. Im Fehlerprofil des Modells realer Opazität fällt der im inneren Kern relativ geringe relative Fehler von typisch 10^{-4} pro Zeitschritt der potentiellen Energie auf. Die Verteilung des Fehlers im inneren Kern ist wesentlich gleichmäßiger als im Falle konstanter Opazität. Auch hier dürfte der Kappaanstieg im äußeren Kernmantel für die erhöhte Gitterpunktkonzentration dort und den damit geringeren Fehler verantwortlich sein. Trotz des kleinen relativen Fehlers im Kern ist der innere Kern für den Großteil des Gesamtfehlers verantwortlich. Die im Falle konstanter Opazität einen deutlichen Beitrag zum Gesamtfehler liefernde Frei-Fall-Zone innerhalb des äußeren Stoßes ist hier für den Gesamtfehler unbedeutend. Im Gegensatz zur Rechnung konstanter Opazität wo in dieser Zone durchweg ein positiver Totalenergiefehler vorherrschte gibt es im Falle realen Kappas mehrere Vorzeichenwechsel. In der äußeren Hülle ist hier der Fehler im Vergleich zur Rechnung konstanter Opazität deutlich erhöht. Das Vorexplosionsmodell der Modellreihe mit 150 Gitterpunkten in der Abbildung (6.25) ist nicht direkt mit dargestellten Modellen konstanter Opazität vergleichbar. In der Verteilung des relativen Fehlers fällt zunächst die bis auf den innersten Bereich des Kerns weitgehend gleichmäßige Verteilung auf. Hier ist der Beitrag des neugebildeten Kernes zum Gesamtfehler relativ gering, ein wesentlich größerer Beitrag kommt aus dem Bereich des einfallenden ersten Kernes, die Verteilung des Gesamtfehlers ähnelt noch der der Modelle des zweiten Kollapses. In der Verteilung des Gesamtfehlers fällt auf, daß einige Zellen hinter der Staubzerstörungsfront einen Beitrag zum Gesamtfehler liefern, der jeweils über 30% dessen liegt, obwohl der relative Fehler dort nicht größer ist als in anderen Bereichen der Strömung. In diesem Fall dürfte der Grund dafür vor allem in der räumlichen Größe dieser Zellen zu finden sein, die somit eine große Energiemenge enthalten.

Während der ersten Expansionsphase des Modells mit 150 Gitterpunkten, dargestellt in Abb. (6.26), wird sowohl der relative als auch der absolute Totalenergiefehler durch die Zone zwischen den beiden Stößen dominiert. Ursache dafür ist wahrscheinlich die in diesem Bereich relativ hohe Gittergeschwindigkeit, die zu großen Advektionstermen führt. In dem zu diesem Zeitpunkt aufgrund der zeitlichen Gitterdämpfung relativ schlecht aufgelösten inneren Stoß treten zwar die höchsten relativen Fehler (Totalenergieentzug) auf, für den Gesamtfehler ist der innere Stoß aber unbedeutend. Während der zweiten Expansionsphase, gegen Ende der Rechnung bei Modell 5000 (siehe Abb. (6.28)), wird der absolute Fehler von den äußersten Zellen dominiert, der Fehler pro Zelle ist dort vergleichbar mit dem Gesamtfehler. Die Totalenergie dieser Zellen ist, ebenso wie schon in Modell 2200 positiv! Die Ursache für den großen Beitrag dieser Zellen zum Gesamtfehler ist die gesunkene Energieskala in den inneren Bereichen durch die Expansion. Der relative Fehler hat außen zwar auch ein Maximum, das auch in Modell 2200 vorhanden war, ist dort aber nicht in dem Maß größer wie man aus der Verteilung des Gesamtfehlers zu schließen versucht ist. Dieses Maximum des relativen Fehlers kann mit der Gittergeschwindigkeit erklärt werden: Am

Außenrand ist das Gitter durch die äußere Randbedingung an die Materie gekoppelt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $2.7 \cdot 10^4$ cm s^{-1} einwärts, nur 4 Gitterpunkte weiter wird eine Gittergeschwindigkeit von $1.1 \cdot 10^{10}$ cm s^{-1} erreicht. Das Profil der Gittergeschwindigkeit ist somit sehr schlecht aufgelöst, was große Advektionsfehler zur Folge hat, da die Advektion in diesem Bereich fast vollständig durch die Gittergeschwindigkeit bestimmt wird. Eine Zone in der Totalenergievernichtung vorherrscht, und die ebenfalls signifikant zum Gesamtfehler beiträgt, befindet sich hinter dem auswärtslaufenden Stoß. Das zugehörige Maximum im relativen Fehler ist zwar das niedrigste lokale Maximum der Verteilung, allerdings ist in dieser Zone aufgrund der hohen Materiegeschwindigkeiten viel kinetische Energie enthalten.

In der Expansionsphase des $1\mathrm{M}_\odot$-Modells mit 512 Gitterpunkten in Abb. (6.37) ist der Totalenergiefehler ebenso wie gegen Ende der Rechnung mit 150 Punkten negativ. Dominiert wird der Gesamtfehler von dem inneren Stoß, der aus einer nach außen gelaufenen Störung entstand. Auch hier wird dieser hohe Beitrag durch die hohe kinetische Energie in diesen Zellen verursacht. Der relative Fehler ist im Bereich um diesen Stoß ebenfalls erhöht. Der Verlauf des relativen Fehlers ist bis auf die äußere Hülle relativ chaotisch mit vielen Vorzeichenwechseln, eine Folge der vielen Strukturen, die durch das Gitter aufgelöst werden.

Für die Modellreihe mit $9\ \mathrm{M}_\odot$ gibt es keine Rechnung mit konstanter Opazität als Vergleichsmöglichkeit. Insbesondere kommt es hier zu starken Schwingungen des ersten Kernes. Der Totalenergiefehler zu Beginn dieser Schwingungen, bei Modell 620 in Abb. (6.29), ist stark auf die äußere Kernmantelzone konzentriert. Dort ist nicht nur der absolute Fehler am größten, auch der relative Fehler ist sehr hoch und wird nur noch von den Zellen im Stoß übertroffen. In der Kernmantelzone gibt es sowohl einen Bereich der Totalenergieerzeugung zwischen $9 \cdot 10^{11}$ cm und $1.6 \cdot 10^{13}$ cm sowie einen sich darüber anschließenden Bereich der Totalenergievernichtung bis zu einem Radius von $2.4 \cdot 10^{13}$ cm. Diese beiden Bereiche sind für den Hauptteil des Gesamtfehlers verantwortlich. Die Totalenergievernichtungszone läßt sich mit einer Expansionszone ($\mathrm{div}(u) > 0$) identifizieren, das Fehlermaximum der totalenergieerzeugenden Zone fällt mit einer Kompressionszone zusammen, weiter innen liegt allerdings wieder Expansion vor. Außerhalb des Akkretionsstoßes in der einfallenden Hülle existieren ebenfalls Vorzeichenwechsel des Totalenergiefehlers im Bereich der aus dem Kern herausgelaufenen Störungen. Das Plateau des relativen Fehlers im äußeren Bereich der Hülle ist auch hier vorhanden, auffallend ist der starke Abfall des relativen Fehlers zum Außenrand hin bis auf unter 10^{-7} pro Zeitschritt. Dies kommt dadurch, daß aufgrund der hohen Außentemperatur diese Zonen strahlungsdominiert sind, die lokal größte Energieform ist nicht mehr die potentielle Energie sondern die Strahlungsenergie, die potentielle (und die kinetische) Energie bestimmen aber weiterhin die Skala des absoluten Totalenergiefehlers.

Die Verteilung des absoluten Fehlers während der ersten Expansion in

Abb. (6.30) ähnelt sehr der des Modells 620. Auch hier gibt es innerhalb des Kernes eine Zone der Totalenergieerzeugung, darüber eine Zone der Totalenergievernichtung, beide tragen signifikant zum Gesamtfehler bei. Der Verlauf des relativen Fehlers innerhalb des Kernes ist allerdings wesentlich komplexer geworden. Die einzelnen Zonen lassen sich nicht mehr einfach mit Expansions– beziehungsweise Kompressionszonen identifizieren. Der relative Fehler im Stoß ist im Vergleich zu Modell 620 bezüglich der anderen Strukturen zurückgegangen. In der Hülle haben sich die Strukturen im relativen Fehler zwischen den Radien von 10^{15} cm und 10^{16} cm verstärkt, ihnen entsprechen Störungen in der Gittergeschwindigkeit. Auch hier kommt es zum beschriebenen Abfall des relativen Fehlers zum Außenrand hin.

Auch während der Reflexion ist die Verteilung in Abb. (6.31) des absoluten Fehlers ähnlich wie in den vorhergehenden Modellen. Die Verteilung des relativen Fehlers sieht aber nun anders aus. Zunächst fällt der relativ hohe Fehler am Innenrand auf. Da dort das Gitter in wesentlichen Variablen reißt, und so große Advektionsfehler entstehen, ist der große Totalenergiefehler nicht verwunderlich. Der große Fehler von 19% der inneren Energie pro Zeitschritt tritt hier nicht in der zentralen Zelle sondern in der darüberliegenden Zelle auf, hier beträgt die kinetische Energie noch 8% der inneren Energie. Allgemein fällt der relative Fehler nach innen nicht ab weil in den inneren Bereichen die kinetische Energie, und damit die für den Totalenergiefehler maßgebliche Skala, im Gegensatz zu früheren Modellen, auch in der zentralen Region noch mit der inneren Energie vergleichbar ist. Die Zone größten relativen Totalenergiefehlers, in der auch in einzelnen Zellen absolute Fehler auftreten, die maximal etwa 50% des Gesamtfehlers betragen, befindet sich bei einem Radius von $1.5 \cdot 10^{14}$ cm. Diese Zone entspricht dem äußeren Mantel des Kernes. Über dieser Zone befindet sich eine Zone der Totalenergievernichtung, in der die absoluten Fehler ebenfalls von derselben Größenordnung wie der Gesamtfehler ist. Diese beiden Zonen entsprechen den relativ schlecht aufgelösten Flanken einer Störung in der Gittergeschwindigkeit, die in diesem Bereich von der Größenordnung $10^9\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ ist; die Advektionsgeschwindigkeit ist dort durch die Gittergeschwindigkeit bestimmt. Im äußeren Stoß findet man in dieser Phase keinen signifikant erhöhten relativen Fehler.

Auch nach der Reflexion des einwärtsgelaufenen Stoßes am Zentrum, bei Modell 4200 in Abb. (6.32) wird sowohl der relative als auch der absolute Fehler von der Kernregion dominiert. Die Stöße treten weder im relativen noch im absoluten Fehler signifikant in Erscheinung. Wieder werden im Kern in einigen Zellen absolute Fehler erreicht, die vergleichbar dem Gesamtfehler sind. Der Verlauf des relativen Fehlers macht einen relativ chaotischen Eindruck, es gibt viele Vorzeichenwechsel. In der Abbildung (6.45) ist der Verlauf des relativen Fehlers in der Kernzone, wo er am größten ist, vergrößert dargestellt. Darüber ist zum Vergleich die Relativgeschwindigkeit, die die Advektion bestimmt dargestellt. Die Relativgeschwindigkeit ist von der Ordnung $10^7\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ und somit innerhalb des Kerns wesentlich größer als

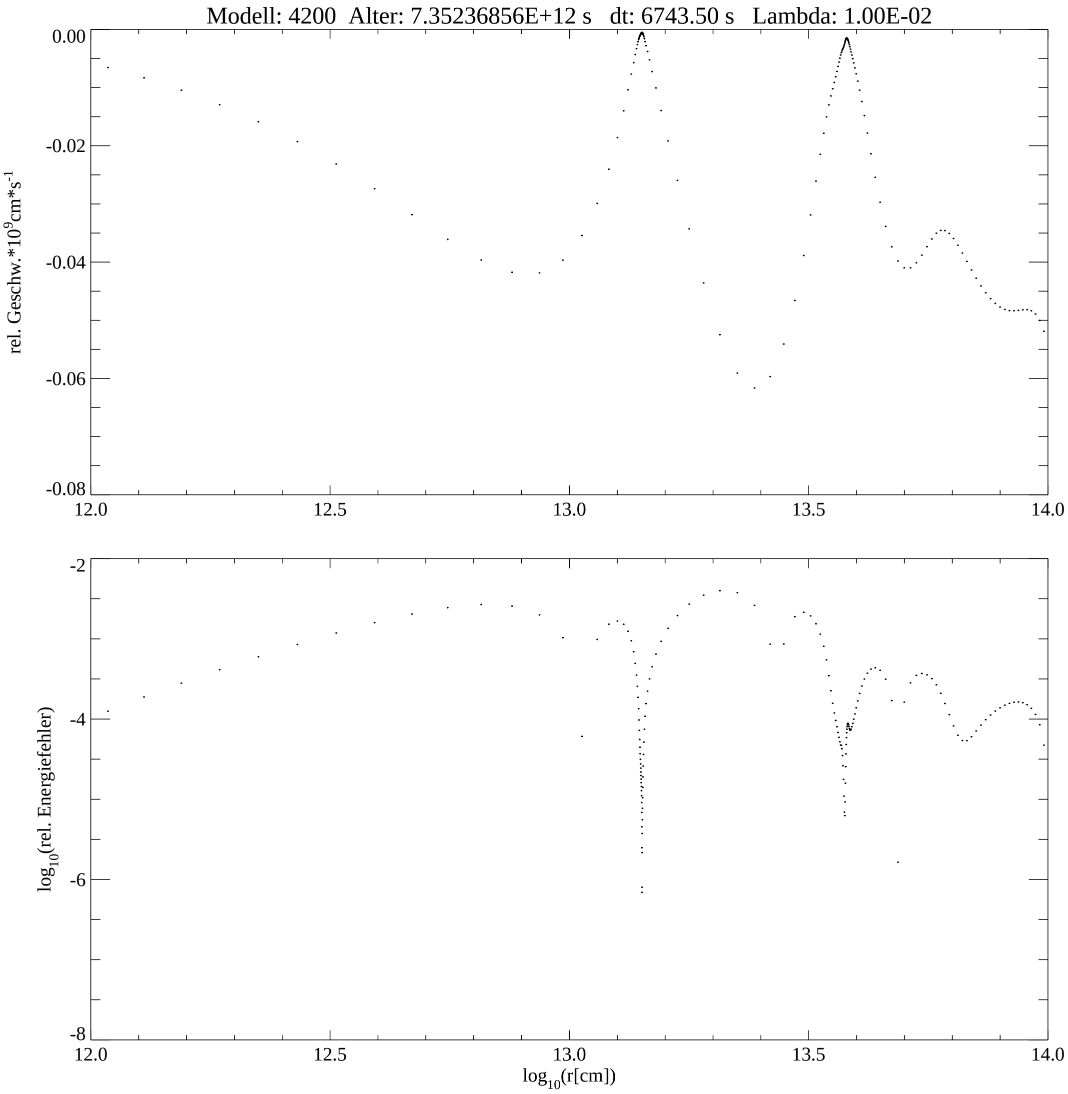


Abbildung 6.45: Vergleich des lokalen Totalenergiefehlers relativ zur lokal größten Energieform mit der Advektionsgeschwindigkeit u_{rel} für das Modell 4200 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, $9\,M_\odot$ und realistischer Opazität. Dargestellt ist der Bereich des Kerns und der inneren beiden Stöße.

die Materiegeschwindigkeit, woraus folgt, daß die Advektion von der Gitterbewegung bestimmt wird. Die starken Minima in u_{rel} entsprechen den beiden Stößen, die vom Gitter „eingefangen" sind. Man erkennt deutlich, daß innerhalb des Kernes die maximalen Fehler in den Flanken des u_{rel}-Verlaufes, relativ nahe der Maxima, erreicht werden. Die Nulldurchgänge des Fehlers sind allerdings gegenüber den Maxima von u_{rel} leicht zu größeren Radien verschoben. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Advektionsflüsse nicht allein durch u_{rel} bestimmt sind, es tritt immer zusätzlich noch der Geometriefaktor r^2 auf. Dieser verschiebt die Maxima von $u_{rel}r^2$ gegenüber denen von u_{rel} zu größeren Radien, sodaß die Nulldurchgänge des Fehlers relativ genau mit den Maxima von $u_{rel}r^2$ übereinstimmen. Gleiches gilt auch außerhalb des Kernes wo die Störungen in der Hülle ebenfalls zu starken räumlichen Schwankungen der Advektionsgeschwindigkeit, die auch dort im wesentlichen durch die Gittergeschwindigkeit gegeben ist, führen. Dies führt wahrscheinlich zu der relativ komplexen Struktur des räumlichen Verlaufs des Fehlers.

Gegen Ende der Rechnung bei Modell 6000 in Abb. (6.33) hat sich mit der Struktur auch der Verlauf des lokalen Totalenergiefehlers vereinfacht. Innerhalb des Kernes ist die Totalenergieerhaltung mit relativen Fehlern von unter $2 \cdot 10^{-5}$ recht gut. Die Gittergeschwindigkeit ist innerhalb des Kernes von der Größenordung der Materiegeschwindigkeit ($O\,(\mathrm{cm\,s^{-1}})$). In der Hülle, insbesondere im Bereich hoher Materiegeschwindigkeiten ist das Gitter weitgehend eulersch, die Advektionsgeschwindigkeit ist hier durch die Materiegeschwindigkeit gegeben. Der relative Totalenergiefehler ist in dieser Zone positiv und sehr hoch, die Totalenergieerzeugung pro Zeitschritt ist insbesondere kurz vor dem Stoß größer als die kinetische bzw. potentielle Energie in der jeweiligen Zelle. Durch die in diesem Bereich hohen Advektionsgeschwindigkeiten im Zusammenhang mit dem relativ großen Zeitschritt dominieren in den Erhaltungsgleichungen die Advektionsterme über die Volumenterme. Die dadurch bedingten großen Advektionsfehler dürften auch die Ursache für den hohen Totalenergiefehler in dieser Zone sein. Weiter außen erkennt man nur noch bei einem Radius von 10^{16} cm im Bereich der äußersten Störung, die noch nicht abgetragen ist, Reste des für die vorherigen Modelle typischen Verlaufs.

6.2.3 Zusammenfassung und Diskussion der Resultate

Die Rechnungen mit realistischer Opazität zeigten auf, daß die Verwendung eines zeitlich ungedämpften Gitters zu erheblichen Problemen führen kann. Erst die Änderung der Advektionsbeschreibung beseitigte die Instabilitäten der Leuchtkraft und machte die beschriebenen Rechnungen erst möglich. Dies zeigt aber auch, daß die Leuchtkraft in der Diffusionsnäherung im äußersten Hüllenbereich genaugenommen keine gut definierte Größe ist. Relative Änderungen in J von 10^{-4} von Zelle zu Zelle erfordern eine hohe Genauigkeit in der Diskretisierung, aber auch in der Abbruchgenauigkeit der Iteration. Wäre die Abbruchgenauigkeit der Iteration in J nur auf dem Niveau des geforderten Wertes von 10^{-6} und nicht durch eine Nachiteration wesentlich besser, so könnte auch dies zu Störungen in der Leuchtkraft führen. Es stellt sich auch die Frage, ob die Unsicherheit in der Hüllenleuchtkraft auch die Totalenergieerhaltung beeinflußt, da diese zur Rückintegration benötigt wird. Die praktisch erreichte Iterationsgenauigkeit, die typisch besser als 10^{-11} ist, sollte zu keinen Problemen führen. Die Frage, ob Advektionsfehler die Randleuchtkraft verfälschen und damit zu Totalenergiefehlern führen, wurde durch den Vergleich der Modellreihen konstanter Opazität mit verschiedenen Advektionsbeschreibungen geklärt. Die modifizierte Advektionsbeschreibung liefert in der äußeren Hülle geringere Advektionsfehler und damit einen relativ ungestörten Verlauf der Leuchtkraft. Trotzdem brachte die Änderung der Diskretisierung der Advektionsterme nur eine geringe Verbesserung der globalen Totalenergieerhaltung. Allerdings war die Verbesserung im Falle von 512 Gitterpunkten — hier war das Gitter zeitlich frei beweglich — größer als im Falle von 150 Gitterpunkten — hier wurde das Gitter zeitlich gedämpft. In beiden Fällen war der Totalenergiegewinn beträchtlich, sodaß das Problem der künstlichen Totalenergieerzeugung bleibt. Auch in den Rechnungen, die die Leuchtkraftinstabilitäten zeigten war die Randleuchtkraft nicht stark von der vor der Instabilitätszone verschieden, obwohl die Leuchtkraft dazwischen um mehrere Größenordnungen variierte. Dies kann dadurch verstanden werden, daß J in der optisch dickeren Vorstoßzone im wesentlichen durch die Gastemperatur bestimmt wird, am Außenrand ist J hauptsächlich durch den Wert von J im Außenraum in der Abstrahlungsbedingung festgelegt, so wird eine „mittlere Leuchtkraft“ festgelegt. Außerdem sind die Advektionsfehler in der äußersten Zelle, deren Wert von J zusammen mit dem der Abstrahlungsbedingung die Randleuchtkraft bestimmt, durch die Randbedingung der Gittergleichung, die außen ein lagrangesches Gitter fordert, relativ klein.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob die im Falle eines frei beweglichen Gitters auftretenden Instabilitäten der ersten protostellaren Kerne real oder numerische Artefakte sind. Die 512 Punkte Rechnungen mit dem modifizierten Advektionsschema zeigten, daß diese Instabilitäten nicht unbedingt auftreten müssen. Während das $9\,\mathrm{M}_\odot$-Modell eine starke Schwingung des ersten Kerns zeigte, die zum Absinken der Zentraldichte um mehr als 3 Größenordnungen führte, kam es bei dem $1\,\mathrm{M}_\odot$-Modell rasch zum zweiten Kollaps. Aber auch im Falle des $9\,\mathrm{M}_\odot$-Modells hat sich der Instabilitätsmechanismus verändert. Es besteht somit die Möglichkeit, daß die in Bal[89] beschriebenen Instabilitäten der ersten Kerne durch ein Zusammenspiel von Advektionsfehlern mit der Gittergleichung entstehen. Insbesondere zeigt sich, daß beim Entstehen der ersten κ-Struktur im Kern die Gitterpunkte durch den $\kappa\rho$-Term in der Gittergleichung von oben aus den darüberliegenden Schichten und dem Akkretionsstoß in die Störung laufen, und oberhalb der entstehenden κ-Flanke entsteht das Dichtemaximum, die die weitere Entwicklung treibt. Eine genauere Untersuchung dieses Instabilitätsmechanismuses und des Einflusses der Gittergleichung konnte aus Zeitgründen nicht durchgeführt werden.

Die Rechnungen der 1 $M_\odot$-Modelle zeigten, daß die im Falle konstanter Opazität aufgetretenen Instabilitäten auch bei Verwendung eines realistischen Opazitätsverlaufes auftreten. Die Verläufe der Explosionen waren bei den beiden gerechneten räumlichen Auflösungen von 150 und 512 Gitterpunkten unterschiedlich. Während die Explosion im Falle von 512 Gitterpunkten denen der Modelle konstanten Kappas entsprechen, explodiert der Kern bei nur 150 Gitterpunkten schon kurz nach seiner Entstehung. Die Explosion verläuft dann in 2 Stufen. Eine erste Explosion bringt den Kern zurück auf das Dichteniveau des ersten Kerns vor dessen Kollaps, die anschließende Explosion dieses Objekts hat Ähnlichkeit mit den von M. Balluch beschriebenen Instabilitäten erster Kerne aufgrund des Kappamechanismus. Eine Erklärung dieses Sachverhaltes muß genaueren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Der unterschiedliche Explosionszeitpunkt wirkt sich auch auf die Totalenergieerhaltung aus. Da die Energieskalen im Fall des später explodierenden Modells mit 512 Gitterpunkten höher sind, ist auch dessen absoluter Totalenergiegewinn größer. Der Verlauf des Toleranzintervalls der zurückintegrierten Totalenergie ähnelt sehr dem der Modelle konstanter Opazität. Im Falle von 150 Gitterpunkten kommt es durch die fehlende Akkretion der Reste des ersten Kerns und der damit verbundenen geringeren potentiellen Energie zu keiner vergleichbaren Aufweitung des Toleranzintervalles. In beiden Rechnungen gab es in den Expansionsphasen zeitweise auch Totalenergievernichtung, diese ist allerdings, wie im Falle konstanter Opazität, in ihrer Stärke nicht mit der Totalenergieerzeugung vergleichbar. Die Verteilung des lokalen Totalenergiefehlers ist bei allen 3 beschriebenen Rechnungen mit realem κ in späteren Phasen deutlich komplexer als im Falle konstanten κ. Dafür ist wahrscheinlich das Gitter, das mehr Strukturen auflösen muß, und dessen Bewegung dadurch komplexer wird, verantwortlich.

Bei der Rechnung mit 9 $M_\odot$ sind die Verhältnisse etwas anders. Hier kommt es zu einer starken Schwingung des ersten Kerns, danach zu dessen Kollaps, sodaß gegen Ende der Rechnung eine einfache Kern–Hülle–Struktur übrigbleibt. Auch bezüglich der globalen Totalenergieerhaltung ergeben sich Unterschiede zu den bisherigen Modellen. Aufgrund der höheren Anfangstemperatur, und der damit verbundenen Dominanz der Strahlungsenergie in den ersten Phasen der Rechnung, ergibt sich im Gegensatz zu den kälteren 1 $M_\odot$-Modellen eine deutliche Abhängigkeit der Totalenergieerhaltung von der Art der zeitlichen Leuchtkraftintegration. Eine explizite oder teilexplizite Leuchtkraftintegration liefert während der isothermen Kollapsphase einen Totalenergieentzug, der wesentlich größer ist als im Falle einer impliziten Diskretisierung. Trotzdem liegt gegen Ende der Rechnung, wenn die nichtradiativen Energien dominieren, die zurückintegrierte Totalenergie über der tatsächlichen. Das Phänomen der künstlichen Totalenergieerzeugung erscheint somit typisch für Kollapsrechnungen. Auch A.Boss berichtet in Bos[89] für sein numerisches Verfahren von künstlicher Totalenergieerzeugung, obwohl sein Verfahren sich deutlich von dem hier verwendeten unterscheidet (z.B. explizite Diskretisierung).

Kapitel 7

Totalenergieerhaltende Modelle

Da die Untersuchung der Totalenergieerhaltung bei allen Modellreihen einen teilweise recht deutlichen Totalenergiegewinn aufgezeigt haben, stellt sich die Frage, ob die Entwicklung bei exakter Lösung der Totalenergiegleichung wesentlich anders verläuft. A. Boss berichtet in Bos[89], daß es bei seinem Code auch mit erzwungener Totalenergieerhaltung zu starken Oszillationen des inneren Kernes kommt. Er erreichte die Totalenergieerhaltung durch Multiplikation der inneren Energie und der Geschwindigkeiten mit einem Faktor, der den Totalenergiefehler kompensiert; durch ein solches Vorgehen gibt man allerdings die globale Erhaltung der inneren Energie und des Impulses auf. Während diese einfache Methode bei dem von Boss verwendeten expliziten Code zu keinen Problemen führt, würde eine solche Multiplikation von Variablen nach jedem Zeitschritt um lokale oder globale Totalenergieerhaltung zu erzwingen bei dem hier verwendeten impliziten Verfahren die Konvergenz des Iterationsverfahrens gefährden. Man würde mit der extrapolierten Lösung eines Gleichungssystems eine Iteration eines, wie die lokale Totalenergiefehleranalyse gezeigt hat, teilweise recht unterschiedlichen Gleichungssystems starten und hoffen, daß diese innerhalb des Konvergenzgebietes des anderen Gleichungssystems liegt. Da, wie die Erfahrung zeigt, die Konvergenzradien in der Praxis oft recht klein sind, wurde dieser Weg nicht weiter verfolgt. Stattdessen wurde die diskretisierte innere Energiegleichung durch eine Diskretisierung der Totalenergiegleichung in Erhaltungsform ersetzt. Dadurch muß die innere Energie aus der Totalenergie berechnet werden Dies führt zu den bereits in Kapitel 4 erwähnten Problemen, vor allem in der Hülle, wo die innere Energie deutlich kleiner als die mechanischen Energien ist. Insbesondere ist die Untersuchung auf erste Kerne beschränkt, da hier die Machzahlen in der Hülle noch relativ klein sind. Trotzdem wird man nicht erwarten können, daß die Temperatur in der Hülle einen realistischen Verlauf zeigt. Damit wird die Bestimmung der Randleuchtkraft und des spektralen Erscheinungsbildes der Wolke erheblich beeinträchtigt. Für die Hydrodynamik wichtiger sind Fehler, die sich aus Verfälschungen des Druckverlaufs ergeben. Allerdings ist der Druckanstieg in der Hülle wesentlich durch den Dichteanstieg zum Stoß hin bestimmt (bei einer Anfangsdichte von $10^{-19}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ und einem ersten Kern etwa 7 Größenordnungen). Falls nun der Fehler in der Temperatur wesentlich kleiner ist, sollte der Fehler im Druckgradienten in der Hülle begrenzt bleiben.

7.1 Die Diskretisierung der Totalenergiegleichung

Die wesentlichen Aspekte der Diskretisierung wurden bereits in Kapitel 5 beschrieben. Freiheiten betreffen noch den Druckarbeits– und den Viskositätsterm.

Die spezifische Totalenergie pro Masse wird wie folgt diskretisiert:

$$e_{tot\,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_j + u_{j+1}}{2}\right)^2 + e_j + \frac{4\pi}{c}\frac{J_j}{\rho_j} - G\frac{M_j + M_{j+1}}{r_j + r_{j+1}} \tag{7.1}$$

Die für die Rechnungen verwendete Diskretisierung der Totalenergiegleichung entspricht der, die für die lokale Totalenergieuntersuchung benutzt wurde.

$$\begin{aligned}
\delta\Big(e_{tot\,j}\,\rho_j\,\widetilde{\Delta V_j}\Big) - \Delta_{DC}\left(e_{tot\,j}\,\delta\xi_j\right) + \delta t\,\Delta\Big(4\pi\,H_j\,r_j^2\Big) &\quad + \\
\delta t\,\Delta\bigg(u_j\,r_j^2\,\bigg[\alpha_j\left(P_{j-1} + \frac{4\pi}{c}\,f_{j-1}\,J_{j-1}\right) &\quad + \\
\bar{\alpha}_j\left(P_j + \frac{4\pi}{c}\,f_j\,J_j\right)\bigg]\bigg) &\quad + \\
\delta t\,\Delta\Big(u_j\,r_j^2\,\big(\beta_j\,Q_{j-1} + \bar{\beta}_j\,Q_j\big)\Big) &\quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{7.2}$$

wobei

$$Q_j = \lambda^2\,\frac{(r_j + r_{j+1})^2}{4}\,\rho_j\,\frac{\Delta(u_j\,r_j^2)}{\widetilde{\Delta V_j}}\left(\frac{\Delta u_j}{\Delta r_j} - \frac{\Delta(u_j\,r_j^2)}{3\,\widetilde{\Delta V_j}}\right) \tag{7.3}$$

Q_j approximiert hier den viskosen Druck. Für die Advektion wird in diesem Kapitel wieder die alte, voll implizite, Advektionsbeschreibung verwendet. α und β sind hier Parameter, die es erlauben, die Diskretisierung des Drucktermes und des Viskositätstermes zu variieren. Die Konsistenz mit der Differentialgleichung fordert, daß $\alpha_j + \bar{\alpha}_j = 1 \quad \forall \quad j = 1 \ldots N$. In der lokalen Totalenergieuntersuchung wurde $\alpha_j = \bar{\alpha}_j = \frac{1}{2}$ gewählt. Eine andere Möglichkeit, die ebenfalls geprüft wurde, wäre die einer Upwind-Diskretisierung auf einem eulerschen Gitter entsprechende Wahl:

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u_j < 0 \\ 0 & \text{falls} \quad u_j \geq 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

Für β_j und $\bar{\beta}_j$ existiert folgende Konsistenzforderung: In Expansionsgebieten sollten β und $\bar{\beta}$ auf 0 gesetzt werden um die künstliche Viskosität dort abzuschalten. In Kompressionsgebieten sollte analog dem Druckterm $\beta_j + \bar{\beta}_j = 1$

gelten, beim Übergang von Expansion zu Kompression und umgekehrt läßt sich allerdings keine Vorschrift eindeutig ableiten. Bei den Modellrechnungen wurden diese beiden Parameter genauso gewählt wie bei der lokalen Totalenergieuntersuchung:

$$\bar{\beta}_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls} \quad \Delta\Big(u_{j+1}r_{j+1}^2\Big) \leq 0 \vee \Delta\Big(u_j r_j^2\Big) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.5}$$

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls} \quad \Delta\Big(u_j r_j^2\Big) \leq 0 \vee \Delta\Big(u_{j-1}r_{j-1}^2\Big) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.6}$$

Da am Außenrand die Relativgeschwindigkeit u_{rel} und damit auch der Advektionsterm verschwindet, muß keine spezifische Totalenergie im Außenraum vorgegeben werden. Um viskosen Transport über den Außenrand zu verhindern wird dort $\beta_1 = 0$ gesetzt. Da im Zentrum bei $r_N = 0$ sowohl u als auch u_{rel} verschwinden, verschwinden die inneren Randterme der Zelle $N-1$.

Im Gegensatz zu den anderen Gleichungen koppelt die Totalenergiegleichung nicht nur die Variablen an jeweils 3 Gitterpunkten, sondern aufgrund der Advektion von potentieller und kinetischer Energie sowie des Viskositätstermes an 4 Gitterpunkten. Dies machte eine Änderung des Matrixlösers notwendig.

Da die hier verwendete Diskretisierung dieselbe wie in der lokalen Totalenergieuntersuchung ist, kann man schon Schlüsse auf die Fehler, die nun in der Erhaltung der inneren Energie aufteten werden, ziehen. Der Fehler, der sich in der Überprüfung der lokalen Totalenergieerhaltung zeigte, geht nun mit geändertem Vorzeichen in die Erhaltung der inneren Energie ein. Dies wird insbesondere in der einfallenden Hülle, die typischerweise einen positiven Totalenergiefehler aufwies, im Falle der exakten Erhaltung zu einer künstlichen Kühlung führen. Im Stoß ergab sich typischerweise ein negativer Totalenergiefehler, sodaß man im Falle der Lösung der Totalenergiegleichung dort mit einer künstlichen Heizung zu rechnen hat.

7.2 Die numerischen Ergebnisse

Zunächst wurde als Testfall eine Rechnung eines 1 $M_\odot$-Modells mit einer konstanten Opazität von $\kappa = 1\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}$ durchgeführt. Die Anzahl der Gitterpunkte betrug 150, der zeitliche Gittersteifeparameter $g_t = 10^{-5}$ und die Viskositätslängenskala $\lambda = 10^{-2}$. Man erwartet auch hier die schon beschriebene, für solche Modellreihen typische Entwicklung, falls die Diskretisierung stabil ist. Tatsächlich entwickelt sich diese Modellreihe ähnlich den Modellreihen konstanter Opazität, die unter Verwendung der inneren Energiegleichung gerechnet wurden. Etwa 325 Jahre nach Ausbildung des ersten Kerns kommt es zum zweiten Kollaps, ohne daß in einer Variablen Störungen sichtbar geworden wären, die im Falle der Rechnung mit der inneren Energiegleichung nicht auftraten. Kurz nach Ausbildung des inneren

Akkretionsstoßes mußte die Rechnung abgebrochen werden, der Zeitschritt blieb auf einem Niveau von wenigen Sekunden. Der Grund dafür sind zwei Zonen in denen die Materie aufgrund von Fehlern in der Erhaltung der inneren Energie künstlich gekühlt wird. Eine dieser Zonen liegt in der äußeren Hülle, dort wird die Materie bis auf unter 1 K gekühlt, dementsprechend erreicht die Machzahl einen Wert von 10. Die andere Zone liegt hinter dem äußeren Stoß, dort wird von einer Temperatur von 230 K auf 25 K gekühlt. Durch das äußere Temperaturminimum kehrt die Leuchtkraft am Außenrand ihr Vorzeichen um, es kommt zur Einstrahlung in die Wolke. Aus den vorherigen Überlegungen war dieses Verhalten der Lösung zu erwarten.

Nachdem dieser Test gezeigt hat, daß es möglich ist, mit dieser Diskretisierung Modelle erster Kerne zu rechnen, sollen jetzt Rechnungen mit realistischen Materialfunktionen beschrieben werden. Die Rechnungen wurden mit einer Gesamtmasse von 1 $M_\odot$ und räumlichen Auflösungen von 150 und 512 Gitterpunkten durchgeführt. Die Anfangsdichte betrug in allen Fällen $10^{-19}\,\mathrm{gcm}^{-3}$, die Anfangstemperatur 10K. Als äußere Randbedingung wurde wie in allen bisher beschriebenen Rechnungen ein zeitlich konstanter Außendruck angenommen.

7.2.1 Die Rechnung mit 150 Gitterpunkten

Die Parameter dieser Modellsequenz entsprechen denen der Modellreihe gleicher Gitterpunktanzahl, die unter Verwendung der inneren Energiegleichung gerechnet wurde ($g_t = 10^{-5}$, $\lambda = 10^{-2}$), ebenso denen der Rechnung gleicher Auflösung mit konstantem κ. Während der isothermen Phase entwickelt sich das Wolkenfragment sehr ähnlich dem der Rechnung mit innerer Energieerhaltung. Nach 1.150 $\tau_{ff\ Anfang}$ bildet sich der Stoß um den ersten Kern aus. Zum Zeitpunkt des Entstehens des ersten Kerns ergeben sich die ersten Unterschiede zur Rechnung mit der inneren Energiegleichung. Auffällig ist, daß im Bereich der äußeren Kernschichten wesentlich mehr und stärkere Wellen im Geschwindigkeitsprofil sichtbar werden. In der Vergleichsrechnung mit konstanter Opazität waren diese nicht vorhanden, sodaß eine künstliche Anregung durch die Diskretisierung unwahrscheinlich ist. Mit der Annäherung des Kernes an das hydrostatische Gleichgewicht nehmen diese Störungen ab. Die Ursache dieser Störungen ist wahrscheinlich im Kappamechanismus zu sehen. Die Störungen befinden sich in einem Bereich, in dem die Opazität mit der Temperatur aufgrund des Eisfeatures ansteigt, ein Bereich in dem nach Wuc[89] der Kappamechanismus wirken sollte. Mit steigender Temperatur im Kern wandert dieses Eisfeature aus dem Kern heraus, die äußeren Kernschichten werden wieder vibrationell stabil, dies erklärt das Verschwinden der Wellen.

In der äußeren Hülle kommt es zu einem Absinken der Temperatur, die auch zu einer Einstrahlung vom Außenraum führt, erkennbar im Vorzeichenwechsel der Leuchtkraft in Abb. (7.1) bei einem Radius von $6 \cdot 10^{15}$ cm. Erst als die Leuchtkrafterzeugung im Kern und im Stoß ansteigt, wird diese

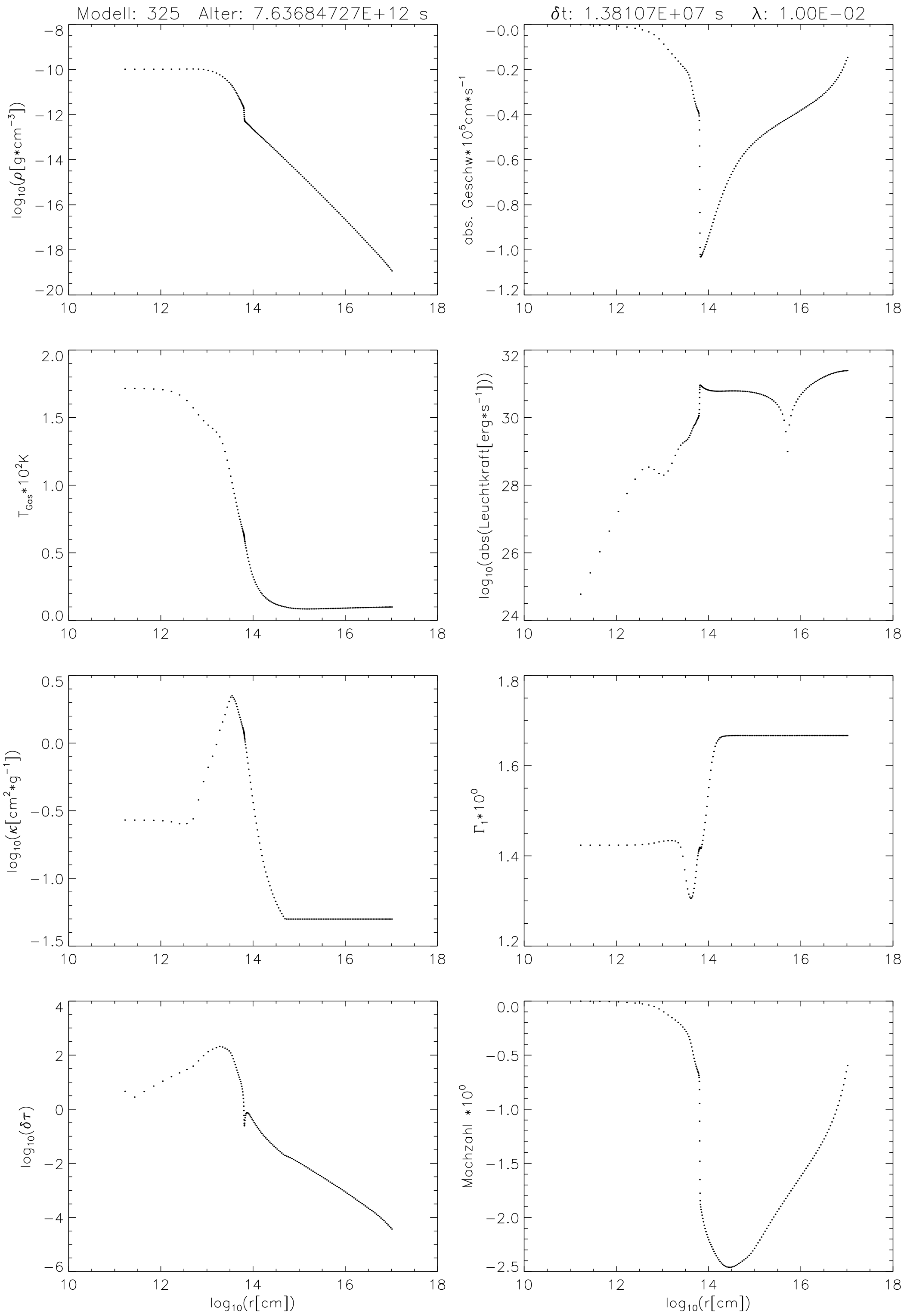


Abbildung 7.1: Modell 325 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Kurz nach Ausbildung des ersten Kerns. Bei einem Radius von $6 \cdot 10^{15}$ cm wechselt die Leuchtkraft ihr Vorzeichen.

Struktur zerstört. Die Ursache hierfür dürfte in der Verwendung der Totalenergiegleichung liegen, da ein solches Phänomen bei Benutzung der inneren Energiegleichung nie auftrat. Auch gibt es keinen einsichtigen physikalischen Grund für das Absinken der Temperatur in diesem Bereich.

In der Abbildung (7.2) ist das Modell 455 dargestellt, die Kernmasse beträgt $1.17 \cdot 10^{-2}$ $M_\odot$. Im Opazitätsverlauf erkennt man, daß der Opazitätsanstieg durch das Eisfeature bereits außerhalb des Kernes liegt; im Geschwindigkeitsprofil sind die Störungen innerhalb des Kernes, die in Abb. (7.1) noch deutlich sichtbar waren nicht mehr vorhanden. Allerdings befindet sich der Kern thermodynamisch schon im nächsten Bereich, der vibrationsinstabil ist, verursacht durch die Silikatopazität. Bei gleicher Kernmasse ist der Kern im Falle der Verwendung der Totalenergiegleichung wärmer (die Zentraltemperatur beträgt 626 K gegenüber 467 K bei Modell 343 der Rechnung mit der inneren Energiegl.) und dichter ($\rho_c = 3.1 \cdot 10^{-9}$ g cm^{-3} gegenüber $9.0 \cdot 10^{-10}$ g cm^{-3}). Im Verlauf der Materialfunktionen sind zu diesem Zeitpunkt keine Unterschiede zu dem Modell 343 mit innerer Energieerhaltung in Abb. (6.23) zu erkennen.

Im Gegensatz zu der Rechnung mit der inneren Energiegleichung kommt es hier nicht zum zweiten Kollaps. Hinter dem Stoß werden Störungen angeregt, die zur Auswärtsbewegung der Materie führen. Die Geschwindigkeitsamplituden dieser Schwingungen bleiben relativ klein, sie sind von der Ordnung einiger 10^4 cm s^{-1}. Der Zeitschritt beträgt während dieser Phase nur einige Stunden bis wenige Tage.

Die Abbildung (7.3) zeigt das Modell 3000, die Rechnung wurde zu diesem Zeitpunkt aus Zeitgründen abgebrochen. Hinter dem Stoß erkennt man die Störungen im Geschwindigkeitsprofil. Diese befinden sich innerhalb des Bereiches, in dem die Opazität mit der Temperatur ansteigt, dieses Silikatfeature ist nach Wuc[89] ein Gebiet, das vibrationsinstabil ist. Weiter im Inneren des Kernes kommt es zu einem Abfall der Opazität aufgrund der beginnenden Staubzerstörung. Im Opazitätsverlauf erkennt man auch, daß eine Kühlzone am Stoß angedeutet ist, in der Darstellung des Temperaturverlaufs ist diese allerdings kaum sichtbar, die Temperatur steigt dort von einem Vorstoßwert von 170 K auf etwa 190 K. Die beginnende Auflösung der Kühlzone ist auch aufgrund der optischen Tiefe der Zellen $\Delta\tau$ im Stoß zu erwarten, die 10^{-2} beträgt. Innerhalb des Kernes ist Γ_1 überall größer als der für dynamische Stabilität kritische Wert von $\frac{4}{3}$, mit einem zweiten Kollaps ist somit noch nicht zu rechnen. In der Hülle beginnt wieder die Leuchkraft abzusinken, Ursache ist wie in der Anfangsphase die künstliche Kühlung. Die Temperatur sinkt von ihrem Anfangswert von 10 K auf 2.4 K im Minimum. Am deutlichsten ist dieser Temperaturabfall in der Machzahl zu erkennen, das Maximum der Machzahl bei einem Radius von $2 \cdot 10^{15}$ cm ist vollkommen durch diese Kühlung bedingt. Dadurch sind bei einer Fortsetzung der Rechnung Probleme zu erwarten: Das Absinken der inneren Energie in der Hülle gegenüber den mechanischen Energien erschwert die genaue Berechnung der inneren Energie aus der Totalenergie, wodurch wahrscheinlich die

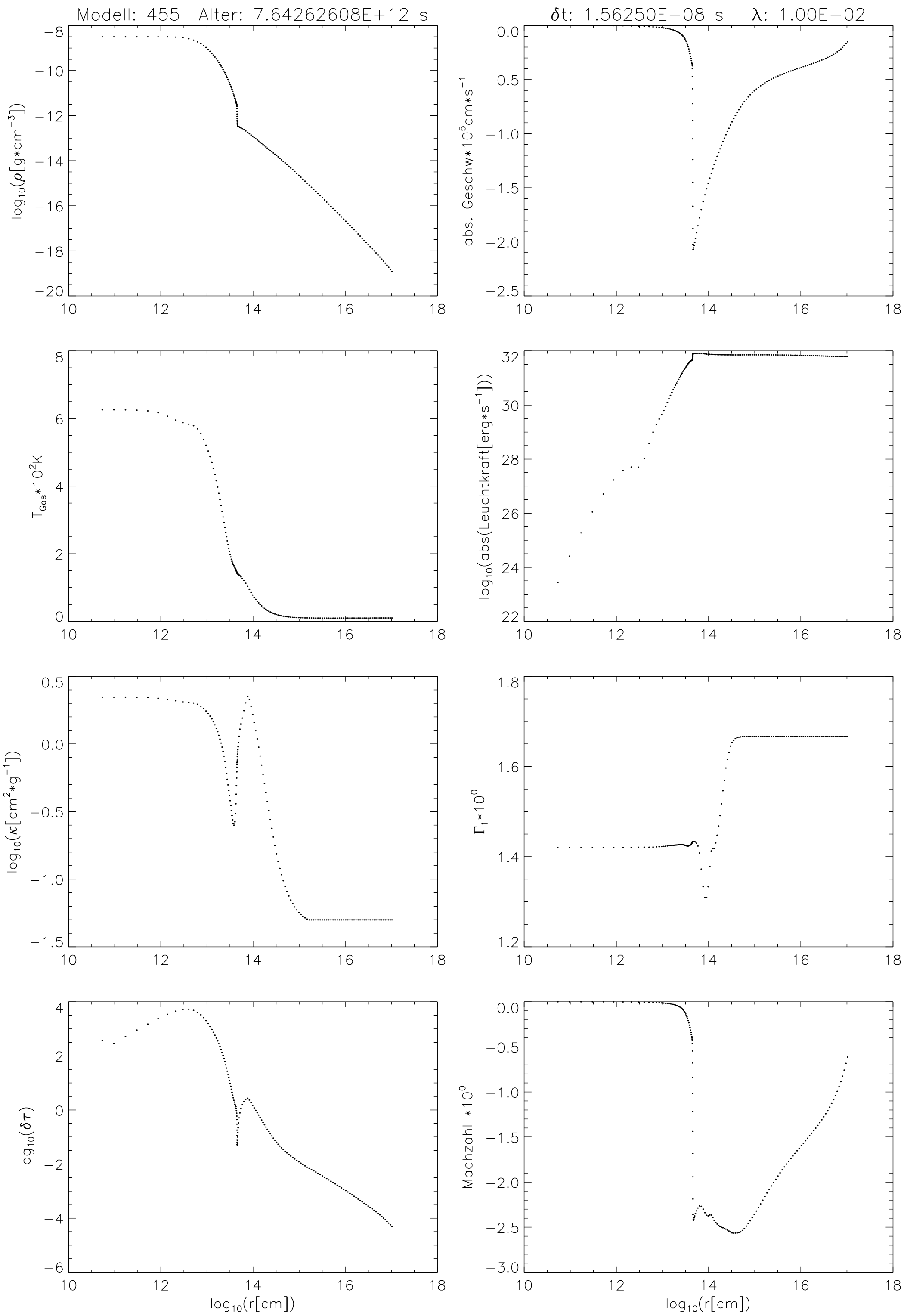


Abbildung 7.2: Modell 455 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Akkretion auf den ersten Kern.

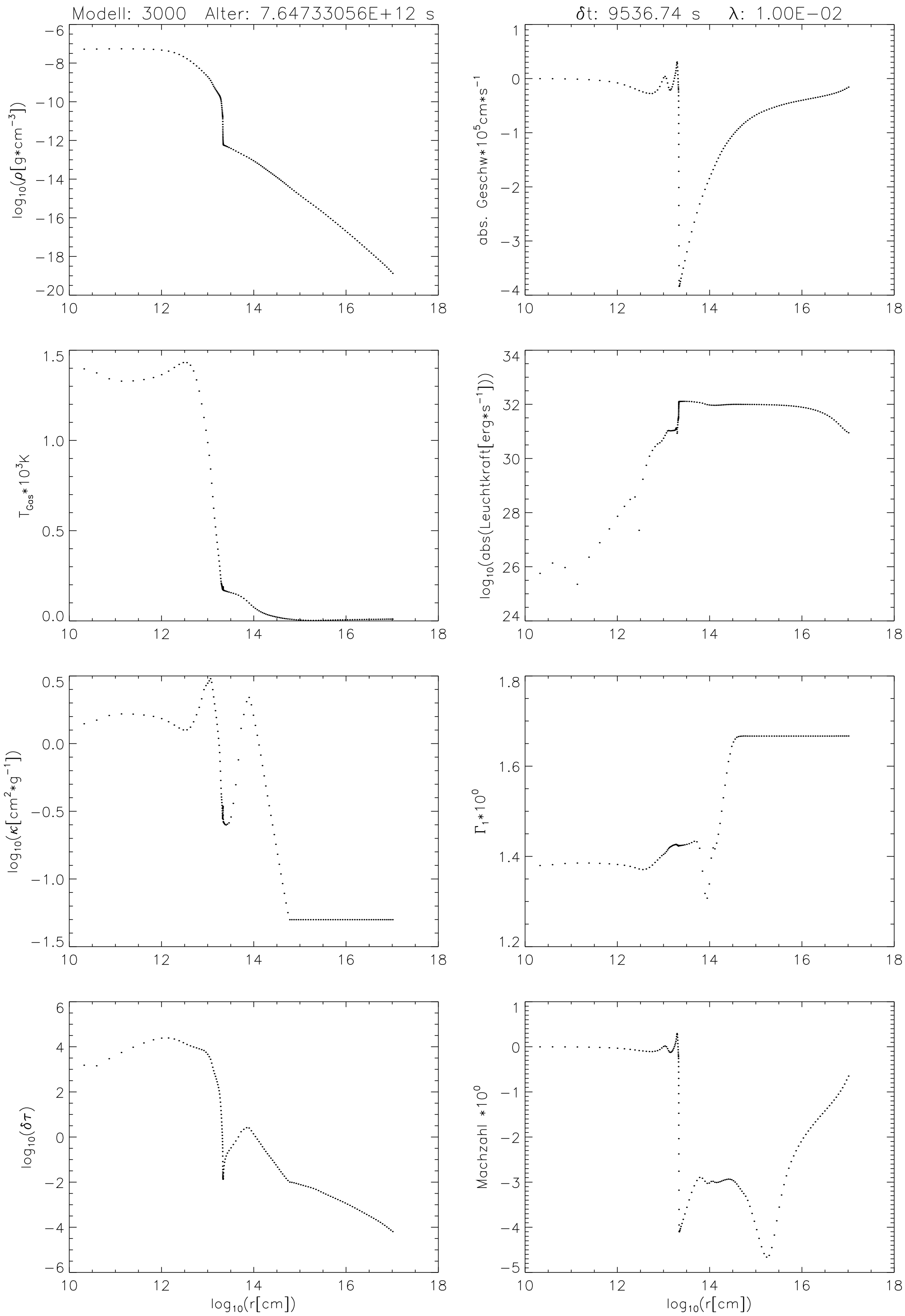


Abbildung 7.3: Modell 3000 der Rechnung mit 150 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Der erste Kern schwingt aufgrund des Kappamechanismus.

Fehler in der Erhaltung der inneren Energie ansteigen. Bleibt die Systematik des Fehlers erhalten, so ist die Rechnung spätestens dann nicht mehr weiterzuführen, falls negative innere Energien notwendig würden, das Gleichungssystem zu lösen. Am Stoß erkennt man ebenfalls ein leichtes Absinken der Leuchtkraft, auch hinter der Kühlzone im Stoß wurde zeitweise künstlich innere Energie abgezogen. Durch die Auswärtsbewegungen des Kernes wurde diese Zone mehrfach wieder zerstört, sie entstand jeweils wieder neu.

Diese Rechnung mit 150 Gitterpunkten hat gezeigt, daß auch die Verwendung der Totalenergiegleichung zu Schwingungen des ersten Kerns führt. Die Schwingungen aufgrund des Kappamechanismus erscheinen sogar noch deutlicher als im Falle der Verwendung der inneren Energiegleichung. Allerdings führen sie kaum zu einem Absinken der Zentraldichte, die Auswärtsgeschwindigkeiten bleiben relativ klein. Ob die Schwingungen durch die Wahl von $g_t = 10^{-5}$, das zu einer Zeitkonstanten des Gitters während der Kernschwingungen von etwa 100 s führt, signifikant gedämpft werden, soll eine Rechnung mit zeitlich frei beweglichem Gitter zeigen. Bei der Verwendung der Totalenergiegleichung ergeben sich aber Probleme mit künstlicher Kühlung, vor allem in der Hülle, aber auch am Stoß.

7.2.2 Die Rechnung mit 512 Gitterpunkten

Die Rechnung mit 512 Gitterpunkten wurde mit einem zeitlich frei beweglichen Gitter durchgeführt, damit die Wellen, die durch den Kappamechanismus angeregt werden, optimal verfolgt werden können. Die restlichen Parameter entsprechen denen der Rechnung mit 150 Punkten.

Die anfängliche Entwicklung der Rechnung mit 512 Gitterpunkten unterscheidet sich kaum von der mit 150 Gitterpunkten. Auch hier kommt es nach der Bildung des ersten Kerns zur deutlichen Anregung von Wellen in der äußeren Kernzone. Diese Wellen waren hier schon in der Rechnung gleicher Auflösung mit der inneren Energiegleichung sichtbar, allerdings schwächer ausgeprägt. In der Hülle ergibt sich wieder das Problem der künstlichen Kühlung, auch hier kommt es zeitweise zu einer Einstrahlung am Außenrand. Nach dem Verschwinden der Wellen beginnt derselbe Instabilitätsmechanismus wie in den Modellen vergleichbarer Auflösung, die mit der inneren Energiegleichung und dem alten Advektionsschema gerechnet wurden, zu wirken. Es kommt zu einer Einwärtsbewegung und oberhalb dieser zu einer Dichte– und Druckinversion.

Die Abb. (7.4) zeigt das Modell 800, während der Phase der Einwärtsbewegung im Inneren des Kernes. Im Geschwindigkeitsprofil erkennt man die Störung bei einem Radius von 10^{11} cm. Diese ist mit einer Dichteinversion verbunden, die aufgrund der logarithmischen Darstellung und des großen überdeckten Dichtebereiches nur schwach sichtbar ist. Innerhalb der einwärtsbewegten Zone steigt die Temperatur über die Sublimationstemperatur des Staubes, sodaß die Opazität dort um etwa 2 Größenordnungen absinkt, Γ_1 ist dort aufgrund der gerade beginnenden H_2-Dissoziation ge-

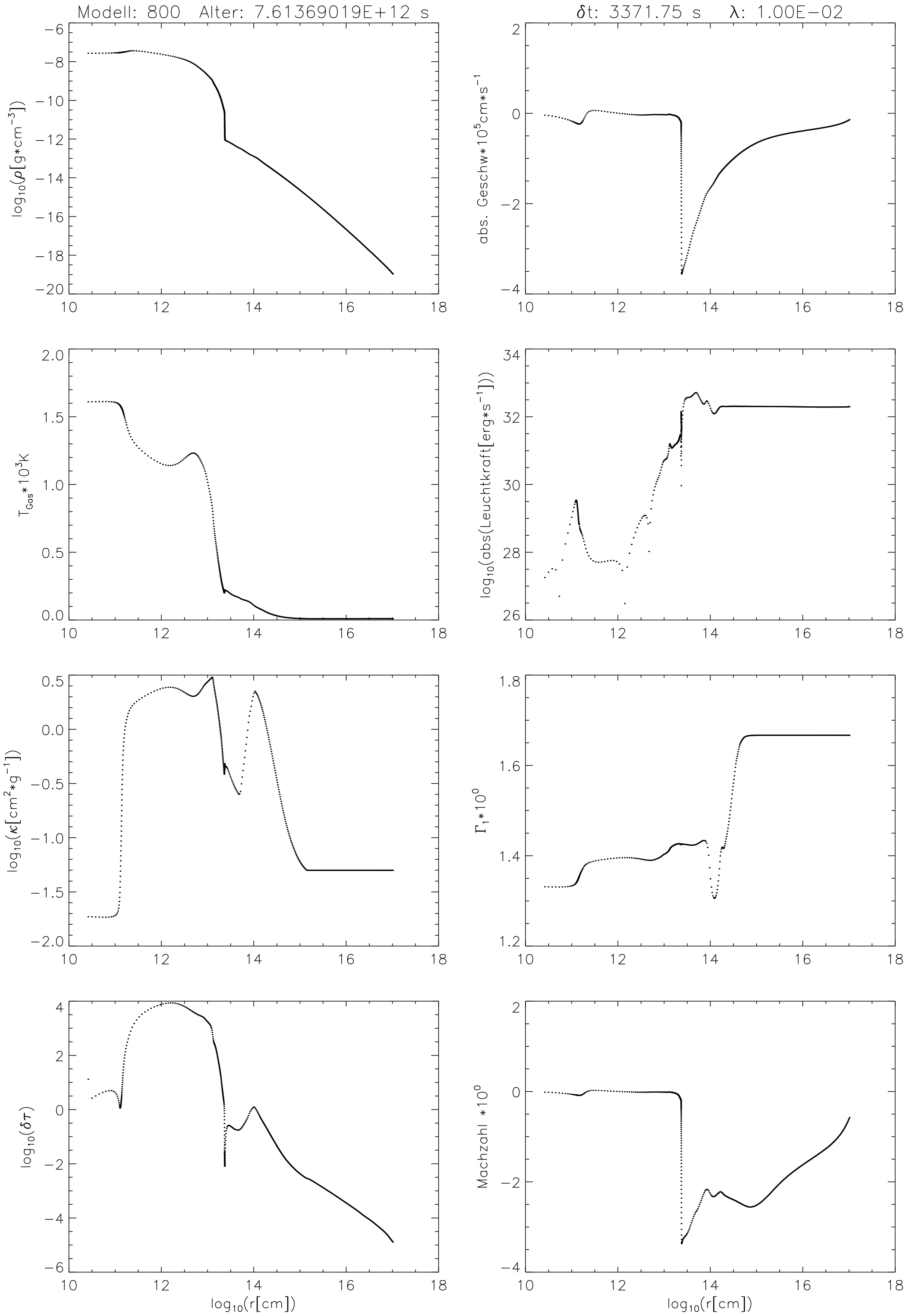


Abbildung 7.4: Modell 800 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Im ersten Kern beginnt der Kappamechanismus zu wirken.

ringfügig kleiner als $\frac{4}{3}$. In dem Verlauf der Opazität erkennt man auch ein Absinken am Stoß, verursacht durch einen Temperaturabfall hinter der nur schwach angedeuteten Kühlzone. Dieses Temperaturminimum führt zu einem Absinken der Nachstoßtemperatur unter die Vorstoßtemperatur, was physikalisch in der Eddingtonnäherung nicht möglich ist (dies wäre erst im Falle $f < \frac{1}{3}$ möglich, vergl. Bal[89]). Dieses Absinken der Materietemperatur wirkt sich, da diese Zone hinter dem Stoß im Gegensatz zu diesem schon wieder optisch dick wird, auch auf die Strahlungstemperatur aus, sodaß es zu einer Einstrahlung in diese Zone kommt. Auch in der Hülle gibt es ein Minimum der Materietemperatur, das sich allerdings aufgrund der dortigen geringen optischen Tiefen ($\tau \approx 4 \cdot 10^{-2}$) und des noch geringen Temperaturabfalls auf 9.3 K bisher nicht signifikant auf das Strahlungsfeld auswirkt. Auch in der Machzahl ergeben sich noch keine Konsequenzen aufgrund dieses Problems.

Die Einwärtsbewegung der inneren Kernteile wird am Zentrum reflektiert und führt zu einer auswärtslaufenden Welle. Diese führt, als sie den Stoß erreicht, zusammen mit den kurz hinter dem Stoß in der κ-Flanke angeregten Störungen zu einer erheblichen Auswärtsbewegung. Die Auswärtsgeschwindigkeiten bleiben jedoch im Unterschallbereich. In der Abb. (7.5) erkennt man, daß sich die Materie hinter dem Stoß mit $7 \cdot 10^4$ cm s^{-1} nach außen bewegt. Die Auswärtsgeschwindigkeiten sind somit etwas höher als in der Rechnung mit 150 Gitterpunkten. Hinter dem Geschwindigkeitsmaximum am Stoß kommt es wieder zu einer Einwärtsbewegung. In dieser Kompressionswelle entstehen zwei neue Störungen, die der Störung, die zur Auswärtsbewegung geführt hat, ähneln. Beide sind mit Dichte– und Druckinversionen verbunden, ebenso fällt in beiden Störungen die Opazität bedingt durch Staubzerstörung ab. Durch die Expansion sind die Temperaturen im Kern soweit abgefallen, daß Γ_1 dort wieder überall größer als $\frac{4}{3}$ ist. Hinter dem Stoß existiert weiterhin das künstliche Temperaturminimum, in dessen äußerer Flanke sitzt die relativ schlecht aufgelöste Kühlzone. Auch in der einfallenden Hülle gibt es weiterhin das zweite künstliche Temperaturminimum, die Temperatur fällt dort auf 6.7 K. Die Leuchtkraft wird durch die dortige Entkopplung von Materie– und Strahlungstemperatur noch nicht wesentlich beeinflußt. In der Machzahl ist der Einfluß dieses Temperaturminimums bei einem Radius von $2 \cdot 10^{15}$ cm schon erkennbar.

Die innerste Störung führt über eine Reflexion am Zentrum wieder zu einer Auswärtsbewegung. Diese Welle erreicht aber nur die darüberliegende Störung, im innersten Kernbereich kommt es wieder zu einer Einwärtsbewegung. Die neuerlich entstandene einwärtslaufende Kompressionswelle wird am Zentrum reflektiert, die Rechnung ist zu diesem Zeitpunkt aufgrund von Konvergenzproblemen nicht mehr weiterzuführen. Die Ursache liegt aber *nicht* in den Problemen, die durch die Verwendung der Totalenergiegleichung bedingt sind, sondern in den schon bekannten Problemen mit der Leuchtkraft in der äußeren Hülle, wo die Advektion dominiert.

Die Schwingung des Kerns führt nur zu einer Abnahme der Zentral-

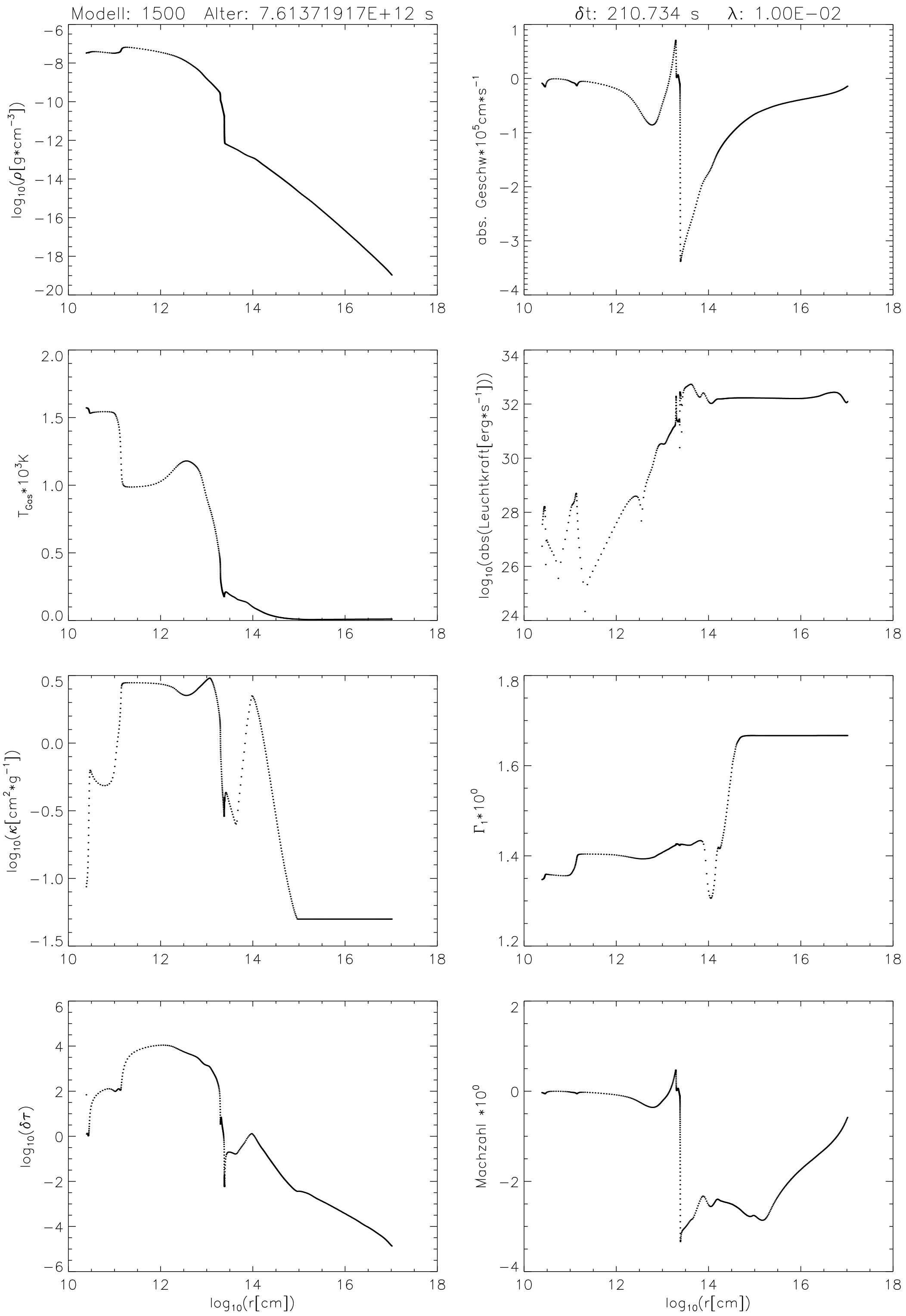


Abbildung 7.5: Modell 1500 der Rechnung mit 512 Gitterpunkten und realistischer Opazität. Nachdem die am Zentrum reflektierte Welle zu Auswärtsgeschwindigkeiten am Stoß geführt hat, kommt es wieder zu Einwärtsgeschwindigkeiten.

dichte um einen Faktor 2.5. Sie ist damit in ihrer Amplitude wesentlich schwächer als die in Bal[89] beschriebenen Schwingungen. Allerdings konnte die Rechnung mit der Totalenergiegleichung nicht weit genug verfolgt werden, um größere Amplituden ausschließen zu können. Insbesondere wird die zum Zeitpunkt des Abbruchs der Rechnung gerade in der Phase der Reflexion am Zentrum befindliche Welle zu einer neuerlichen Auswärtsbewegung führen, sodaß es möglicherweise zu einer stärkeren Abnahme der Zentraldichte kommt.

Es stellt sich weiterhin die Frage, ob das Absinken der Temperatur im Stoß durch die Formulierung der künstlichen Viskosität verursacht wird. Dazu wurde die Rechnung mit einer Viskositätslängenskala von $\lambda = 10^{-3}$ wiederholt, dadurch ist die Kühlzone um den Faktor 10 schmaler. Auch hier kam es hinter der Kühlzone zu einem Absinken der Temperatur unter die Vorstoßtemperatur. Die Breite dieser Zone hatte sich im Gegensatz zur Breite der Kühlzone nicht verändert, sodaß die künstliche Viskosität kaum die Ursache sein kann. Auch eine Verwendung der Upwinddiskretisierung (Gl. (7.4)) für den Druckterm in der Totalenergiegleichung brachte bezüglich der Zonen künstlicher Kühlung keine Verbesserung.

Bei der Verwendung des modifizierten Advektionsschemas (in allen Erhaltungsgleichungen) kommt es im Gegensatz zur Rechnung mit der inneren Energiegleichung nicht zu einem zweiten Kollaps. Der erste Kern beginnt wie im Falle der alten Advektionsbeschreibung zu schwingen, der genaue Instabilitätsmechanismus unterscheidet sich wie schon im Falle der Rechnungen mit der inneren Energiegleichung. Die dabei erreichten Auswärtsgeschwindigkeiten der Materie sind von derselben Größenordnung wie bei Verwendung des alten Advektionsschemas. Die Rechnung läßt sich aufgrund von Konvergenzproblemen nicht weit genug verfolgen um die Frage zu klären, ob es zu einer Abnahme der Zentraldichte um mehrere Größenordnungen kommt.

7.3 Zusammenfassung und Diskussion der Resultate

Alle Rechnungen mit der Totalenergiegleichung haben gezeigt, daß es im Falle der Verwendung einer realistischen Opazität zu Schwingungen des ersten protostellaren Kerns kommt. Diese Schwingungen treten schon bei einer Auflösung von nur 150 Gitterpunkten auf, bei Verwendung der inneren Energiegleichung kam es bei Rechnungen mit dieser Gitterpunktanzahl immer zum zweiten Kollaps noch bevor die durch den Kappamechanismus angeregten Störungen zu signifikanten Auswärtsbewegungen führen konnten. Der Vergleich mit der Rechnung, die mit der Totalenergiegleichung und konstanter Opazität durchgeführt wurde und bei der es ohne Schwingungen des ersten Kerns zum zweiten Kollaps kam, läßt eine künstliche Anregung durch die Diskretisierung der Totalenergiegleichung unwahrscheinlich erscheinen. Die Variation in der Zentraldichte ist, soweit die Rechnungen verfolgt werden konnten, deutlich kleiner als in Bal[89] beschrieben. Die Geschwindigkeiten der Auswärtsbewegung sind ebenfalls niedriger. Allerdings war es aufgrund numerischer Probleme nicht möglich, die Rechnungen hinreichend weit zu verfolgen, sodaß größere Amplituden der Schwingungen nicht ausgeschlossen werden können. Hinter der Materie, die sich hinter dem Stoß nach außen bewegt, kommt es in allen Rechnungen allerdings wieder zur Einwärtsbewegung. Diese betrifft die Zone, in der sich bei Verwendung der inneren Energiegleichung ein relativ großer lokaler Energiefehler ergab (vergl. Abb. (6.29)).

Der bei Verwendung der Totalenergiegleichung vorhandene Fehler in der Erhaltung der inneren Energie wirkt sich insbesondere in der Hülle und hinter dem Stoß in der Atmosphäre des Kerns aus; hier kommt es zu einer künstlichen Kühlung. Diese Kühlung erweist sich als unempfindlich gegenüber einer Veränderung der Diskretisierung des Druckterms in der Totalenergiegleichung und der Modifikation des Advektionsschemas. Die künstliche Kühlung in der Hülle führt dazu, daß die berechneten Leuchtkräfte nicht als realistisch betrachtet werden können; es kommt zeitweise zu einem Vorzeichenwechsel der Leuchtkraft in der Hülle und damit zu einer Einstrahlung in die Wolke.

Bei Verwendung eines zeitlich frei beweglichen Gitters ergaben sich für den Instabilitätsmechanismus keine Unterschiede zwischen der Verwendung der Totalenergiegleichung und der inneren Energiegleichung. Im Gegensatz dazu ergibt sich bei der Modifikation des Advektionsschemas eine Veränderung des Instabilitätsmechanismuses, auch bei Verwendung der Totalenergiegleichung. Mit dem Entstehen der Opazitätsflanken durch die Staubsublimation im Kern kommt es bei dem modifizierten Advektionsschema zwar zu einer leichten Dichteinversion im Kern, damit ist allerdings im Gegensatz zur alten Advektionsbeschreibung *keine* Druckinversion verbunden. Für den Instabilitätsmechanismus selbst hat das Advektionsschema eine größere Bedeutung als die Wahl zwischen der Lösung der inneren Energiegleichung oder der Totalenergiegleichung.

Die Diskretisierung der Totalenergiegleichung erwies sich auch mit der bei dem lokalen Totalenergietest verwendeten Mittelung der Zelldrücke zur Berechnung des Drucks an der Zelloberfläche als ausreichend stabil. Im Falle eines eulerschen Gitters wird für diesen Term normalerweise eine Upwind-Diskretisierung verwendet. Daß die hier benutzte zentrierte Differenzenbildung zu einem stabilen Verfahren führt, dürfte auch an der hohen „effektiven Viskosität“ liegen. Das soll heißen, daß durch das adaptive Gitter die Längenskala der künstlichen Viskosität bezogen auf den Gitterindex sehr groß ist (innerhalb des Akkretionsstoßes befinden sich bei einer Gesamtzahl von 512 Gitterpunkten etwa 50 Stützstellen), obwohl die simulierte physikalische Viskosität sehr klein sein kann. Durch dieses Ausschmieren erscheint der Stoß als Funktion des Gitterindexes nicht mehr als Diskontinuität. Verbreitert man in einem nichtmonotonen numerischen Verfahren Diskontinuitäten durch Hinzufügen einer hinreichend hohen künstlichen Viskosität über eine vergleichbare Gitterpunktanzahl, so sind die numerisch bedingten Oszillationen in den Zustandsgrößen im Regelfall sehr klein, allerdings ist die physikalische Viskosität, die dadurch simuliert wird, für viele Problemstellungen zu hoch.

Bei Verwendung der Totalenergiegleichung im Falle einer konstanten Opazität und der Zustandsgleichung eines idealen Gases ergibt sich bei Verwendung von 512 Gitterpunkten eine andere Entwicklung als man physikalisch erwartet. Noch in der isothermen Phase kommt es zur Ausbildung eines mit Überschallgeschwindigkeit einwärtslaufenden Stoßes. Ursache ist eine Druckinversion, die sich aufgrund eines kleinen Maximums der inneren Energie (die rel. Änderung von e beträgt weniger als 1%) nahe dem Außenrand ausbildet. Bei einer Verwendung von nur 150 Gitterpunkten trat dieses Problem nicht auf. Ebenso kam es bei 512 Gitterpunkten nicht zu diesem Stoß falls man die zeitliche Gitterdämpfung erhöht (in der Praxis war die Wahl von $g_t = 0.05$ ausreichend). Warum dieses Phänomen bei der Verwendung der realistischen Zustandsgleichung nicht auftritt, konnte nicht geklärt werden. Bei Verwendung des modifizierten Advektionsschemas trat dieser Stoß ebenfalls nicht auf, auch bei Verwendung von 512 Gitterpunkten und eines zeitlich frei beweglichen Gitters ergaben sich keine Probleme. Möglicherweise wird das Temperaturmaximum durch die Advektionsfehler beim Reagieren des Gitters darauf verstärkt, eine genauere Untersuchung war aus Zeitgründen nicht möglich.

Ein Vergleich mit dem von A. Boss erhaltenen Resultat (Bos[89]) bei erzwungener Totalenergieerhaltung ist leider nicht möglich, da es sich gezeigt hat, daß bei dem hier verwendeten Verfahren die Rechnung nicht wesentlich über den zweiten Kollaps hinaus verfolgt werden kann.

Kapitel 8

Vollständig konservative Schemata

In diesem Kapitel soll es um die Möglichkeit der Konstruktion eines Differenzenschemas gehen, das außer den bisher verwendeten Erhaltungsgleichungen zusätzlich die Totalenergiegleichung in Erhaltungsform approximiert. Dies würde die systematischen Fehler der Totalenergieerhaltung beseitigen. Außerdem würde durch die dann vorgegebene Diskretisierung der Totalenergie diese numerisch eindeutig festgelegt. Ausgehend von den bekannten Lösungen (KPo[80], KMM[80], MiM[84]) stellt sich die Frage ob es möglich ist, eine Lösung auch für ein bewegtes Gitter in sphärischer Symmetrie zu finden.

Ein Unterschied zwischen den Lösungen der sowjetischen Mathematiker und der hier gesuchten Lösung ist, daß deren Schemata nur reine Hydrodynamik behandeln, während hier zusätzlich Erhaltungsgleichungen für das Strahlungsfeld mitgelöst werden müssen. Hier stellt sich zunächst die Frage ob dieser Unterschied das Problem wesentlich kompliziert. Zur Vereinfachung soll im folgenden die Eddingtonapproximation verwendet werden. Betrachtet man die Herleitung der Totalenergiegleichung, so stellt man zunächst fest, daß diese nur dann exakt mit den anderen Erhaltungsgleichungen konsistent ist falls man in der 1-te Momentengleichung die Diffusionsnäherung verwendet:

$$\frac{\partial(fJ)}{\partial r} + \kappa\rho H = 0 \tag{8.1}$$

Die restlichen Terme sind in der Energiebilanz von der Ordnung $\left(\frac{u}{c}\right)^2$ und müssen deshalb vernachlässigt werden (In der 0-ten Momentengleichung sind Terme dieser Ordnung ebenfalls vernachlässigt). Wie die Rechnungen zeigten, ist die Inkonsitenz, falls man die zeitabhängige 1-te Momentengleichung löst, bei den im Kollapsproblem auftretenden Geschwindigkeiten nicht wesentlich. Der Term $\left[\frac{4\pi}{c}\right]\kappa\rho H$ beschreibt in der 1-ten Momentengleichung den Impulsaustausch zwischen Gas und Strahlung und tritt mit umgekehrtem Vorzeichen in der Eulergleichung auf, sodaß er bei Bildung der Totalenergiegleichung herausfällt. Hieraus ergibt sich die Forderung diesen Term sowohl in der 1-ten Momentengleichung, als auch in der Eulergleichung gleich zu diskretisieren. Gleiches gilt auch für den Energieaustauschterm $\left[\frac{4\pi}{c}\right]\kappa\rho(S-J)$ in der 0-ten Momentengleichung und der inneren Energiegleichung. Beide Forderungen sind schon im bisherigen Code erfüllt, sodaß von diesen Termen der Totalenergiefehler sicher nicht stammt. Sind beide Forderungen erfüllt, so sind die Gas– und Strahlungsimpulsgleichungen (beziehungsweise die Energiegleichungen) auch in ihrer diskretisierten Form zur Gesamtimpulsgleichung (bzw Gesamt-Interneenergiegleichung) summierbar. Die beiden einzigen Strahlungsterme, die bei der weiteren Umformung noch berücksichtigt werden müssen sind die Strahlungsdruckterme:

$$u\frac{\partial(fJ)}{\partial r} + fJ\,\mathrm{div}(u) \Longleftrightarrow \mathrm{div}(fJu) \tag{8.2}$$

Diese Terme sind aber von derselben Form wie die des Gasdrucks. Kann man diese Terme des Gasdrucks in diskretisierter Form ineinander überführen, so wird dies auf dieselbe Art auch mit den Strahlungsdrucktermen möglich sein. Die Berücksichtigung der Erhaltungsgleichungen des Strahlungsfeldes stellt somit keine wesentliche Erschwerung dar. Deshalb werden im folgenden auch nur die reinen Hydrodynamikgleichungen betrachtet. Weiterhin wurde in den sowjetischen Arbeiten die Zustandsgleichung eines idealen Gases angenommen. Die hier verwendete tabellierte Zustandsgleichung enthält leichte Inkonsistenzen, die zwar minimiert aber nicht zum Verschwinden gebracht werden können (siehe Wuc[89]). Allerdings hat diese Tatsache keine Auswirkungen auf die Totalenergieerhaltung, da nirgendwo in der Transformation thermodynamische Beziehungen benötigt werden. Anders wäre dies, falls man auch die Approximation der Entropiegleichung in Erhaltungsform fordern würde, dies wäre nur mit einer konsistenten Definition der Entropie aus der Zustandsgleichung möglich.

Die hydrodynamischen Gleichungen lauten in konservativer Form in einem bewegten Koordinatensystem $r = r(s,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial s} - \frac{4\pi}{3}\rho\frac{\partial r^3}{\partial s} &= 0 && (8.3)\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\rho r^2 u_{rel}\right) &= 0 && (8.4)\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\rho u r^2 u_{rel}\right) + r^2\frac{\partial P}{\partial s} + G\frac{M\rho}{r^2}\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s} &= 0 && (8.5)\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\rho e r^2 u_{rel}\right) + P\frac{\partial}{\partial s}\left(r^2 u\right) &= 0 && (8.6)\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e_t\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\rho e_t r^2 u_{rel}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(r^2 u P\right) &= 0 && (8.7)
\end{aligned}$$

mit

$$u_{rel} = u - \frac{\partial r}{\partial t} \quad (8.8)$$

$$e_t = e + \frac{1}{2}u^2 - G\frac{M}{r} \quad (8.9)$$

Diskretisiert werden sollen diese Gleichungen auf einem äquidistanten Gitter in der Hilfsvariablen s. Da zunächst nur 2-Niveau Schemata betrachtet werden sollen, die nur 2 Zeitniveaus miteinander koppeln, braucht die Variabilität des Zeitschrittes nicht berücksichtigt werden. Auf das Problem der künstlichen Viskosität wird später eingegangen.

Das Hauptproblem bei der Transformation der Gleichungen ist, die mit u multiplizierte Bewegungsgleichung (8.5) in eine konservative Form zu bringen. Ziel ist es, die zu dieser Transformation notwendigen Schritte mit den diskretisierten Gleichungen nachzuvollziehen. Es soll die folgende Notation verwendet werden:

$$\begin{array}{ll} f_j = f^n(s_j) & f_j^* = f^{n-1}(s_j) \\ D_t(f_j) = \frac{f_j - f_j^*}{\delta t} & S_t(f_j) = \frac{f_j + f_j^*}{2} \\ D_s^+(f_j) = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta s} & S_s^+(f_j) = \frac{f_{j+1} + f_j}{2} \\ D_s^-(f_j) = \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta s} & S_s^-(f_j) = \frac{f_j + f_{j-1}}{2} \end{array}$$

D und S sind hierbei lineare Differenzen– beziehungsweise Mittelungsoperatoren. Für die Differenzenoperatoren D gelten folgende Analoga zur Produktregel der Differentialrechnung:

$$D_t(f_j g_j) = f_j D_t(g_j) + g_j^* D_t(f_j) \quad (8.10)$$

$$D_t(f_j g_j) = S_t(f_j) D_t(g_j) + S_t(g_j) D_t(f_j) \quad (8.11)$$

$$D_s^{\pm}(f_j g_j) = f_{j\pm1} D_s^{\pm}(g_j) + g_j D_s^{\pm}(f_j) \quad (8.12)$$

$$D_s^{\pm}(f_j g_j) = S_s^{\pm}(f_j) D_s^{\pm}(g_j) + S_s^{\pm}(g_j) D_s^{\pm}(f_j) \quad (8.13)$$

Weiterhin gilt folgendes Analogon zur zeitlichen Ableitung von $\frac{1}{f}$:

$$D_t\left(\frac{1}{f_j}\right) = -\frac{1}{f_j f_j^*} D_t(f_j) \quad (8.14)$$

Für die Existenz eines vollständig konservativen Schemas ist es eine notwendige Bedingung, daß ein solches für das Problem ohne Gravitation ($G \equiv 0$) existiert. Dadurch kann das Problem der Transformation in 2 Schritte aufgeteilt werden. Zuerst ist ein Schema für den Fall $G \equiv 0$ zu konstruieren, dieses muß sich durch Hinzufügen von Approximationen der Gravitationsterme zu dem gesuchten Schema erweitern lassen, falls es ein solches gibt. Dies bedeutet eine wesentliche Vereinfachung: Erstens ist durch eine Lösung im gravitationslosen Fall die Approximation des Faktors u

an die Bewegungsgleichung festgelegt, zweitens wird die Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung festgelegt. Für den ersten Schritt ist folgende Transformation der wesentliche Schritt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\rho\frac{u^2}{2}r^2u_{rel}\right)\Longleftrightarrow\\
&\qquad u\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\rho u r^2u_{rel}\right)\right)\\
&-\quad\frac{u^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\rho r^2u_{rel}\right)\right)
\end{aligned}\tag{8.15}
$$

Der letzte Term verschwindet aufgrund der Kontinuitätsgleichung. Ist man in der Lage diese Transformation mit der diskretisierten Totalenergie– und Bewegungsgleichung durchzuführen, legt das diskrete Analogon zu diesem letzten Term die Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung fest. Betrachtet man diese Umformung, so stellt man fest, daß sie unabhängig von der konkreten Form des Massenflusses $\rho u_{rel}r^2$ und der differentiellen Masse $\rho\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}$ ist. Deshalb werden die folgenden Abkürzungen eingeführt: $\mathcal{B}=\rho\frac{1}{3}\frac{\partial r^3}{\partial s}$ und $\mathcal{C}=\rho u_{rel}r^2$. Die Transformation erfolgt in folgender Weise:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\mathcal{B}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}u^2\mathcal{C}\right) = \tag{8.16}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(u(u\mathcal{B})\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(u(\mathcal{C})\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left((u^2)(\mathcal{B})\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left((u^2)(\mathcal{C})\right) = \tag{8.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}u\mathcal{B}}^{1}+u\frac{\partial u\mathcal{B}}{\partial t}+\overbrace{\frac{\partial u}{\partial s}u\mathcal{C}}^{2}+u\frac{\partial u\mathcal{C}}{\partial s}-\\
&\underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{B}\frac{\partial u^2}{\partial t}}_{1}-\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t}-\underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{C}\frac{\partial u^2}{\partial s}}_{2}-\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial s} =
\end{aligned}\tag{8.18}
$$

$$
u\left(\frac{\partial}{\partial t}(u\mathcal{B})+\frac{\partial}{\partial s}(u\mathcal{C})\right)-\frac{1}{2}u^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B}+\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{C}\right)\tag{8.19}
$$

Wie man sieht ist diese Transformation symmetrisch bezüglich Vertauschung von $t\leftrightarrow s$ und $\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{C}$. Deshalb sollen zunächst die Terme, die Zeitableitungen enthalten, behandelt werden. Es seien die Differentialquotienten durch lineare Differenzenoperatoren ersetzt. Der erste Transformationsschritt ((8.16) $\rightarrow$ (8.17)) ist aufgrund der Linearitätsforderung immer möglich. Bei der Anwendung eines Produktregelanalogons ist es entscheidend, daß die Terme, die den mit „1“ markierten Termen entsprechen, sich aufheben. Sei folgende Approximation gegeben:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\mathcal{B}\right)\Longrightarrow\frac{1}{2}D_t\left(O_1(u_j)O_2(u_j)B_j\right)\tag{8.20}
$$

O_1 und O_2 sind hierbei (nicht notwendigerweise lineare) Mittelungsoperatoren. Verwendet man als Produktregel die symmetrische Form (8.11) so ergibt sich folgende Bedingung:

$$S_t\left(O_2(u_j)B_j\right)D_t\left(O_1(u_j)\right)=\frac{1}{2}S_t\left(B_j\right)D_t\left(O_1(u_j)O_2(u_j)\right) \tag{8.21}$$

Dies ist aber nur dann möglich falls $B_j = B_j^*$, was ein lagrangesches Gitter bedeutet (B_j hat die Bedeutung der Masse in der Zelle j). Dann lautet die weitere Bedingung $O_1 = O_2$. Da bei einem lagrangeschen Gitter $u_{rel} \equiv 0$ gilt, ist der Rest der Transformation der kinetischen Energie trivial. Verwendet man die asymmetrische Form der Produktregel (8.10) so lautet die Bedingung:

$$O_2\left(u_j^*\right)B_j^*D_t\left(O_1(u_j)\right)=\frac{1}{2}B_j^*D_t\left(O_1(u_j)O_2(u_j)\right) \tag{8.22}$$

beziehungsweise

$$O_2\left(u_j\right)B_jD_t\left(O_1(u_j)\right)=\frac{1}{2}B_jD_t\left(O_1(u_j)O_2(u_j)\right) \tag{8.23}$$

Wollte man eine diese Bedingungen erfüllen so müssten O_1 und O_2 zeitlich mitteln, was aufgrund des Ansatzes und der Beschränkung auf 2 Niveau Schemata nicht möglich ist.

Diese Überlegungen sind zwar kein Beweis, daß es keine vollständig konservativen 2-Niveau Schemata gibt, (beispielsweise wurden Prediktor-Korrektor-Verfahren nicht berücksichtigt), sie schließen allerdings eine weite Klasse von Verfahren aus. Übrig bleiben die lagrangeschen Lösungen. Die Transformation des Gravitationstermes ist aufgrund der Regel (8.14) kein Problem. Die Druckterme können mittels der Regeln (8.12) und (8.13) behandelt werden, da sie nur die einmalige Anwendung der Produktregel beinhalten:

$$ur^2\frac{\partial P}{\partial s}+P\frac{\partial}{\partial s}\left(ur^2\right)\Longleftrightarrow\frac{\partial}{\partial s}\left(Pur^2\right) \tag{8.24}$$

Ein solches lagrangesches Schema hat dann die folgende Form:

$$\begin{aligned}
S_t\left(u_j\right)-D_t\left(r_j\right) &= 0 && (8.25)\\
D_t\left(u_j\right)+r_j^2\frac{P_{j+1}-P_j}{\Delta M_j}+G\frac{M_j}{r_jr_j^*} &= 0 && (8.26)\\
D_t\left(e_j\right)+P_{j+1}\frac{S_t\left(u_{j+1}\right)r_{j+1}^2-S_t\left(u_j\right)r_j^2}{\Delta M_j} &= 0 && (8.27)\\
D_t\left(\frac{1}{2}u_j^2+e_j-G\frac{M_j}{r_j}\right) &+ \\
\frac{P_{j+1}S_t\left(u_{j+1}\right)r_{j+1}^2-P_jS_t\left(u_j\right)r_j^2}{\Delta M_j} &= 0 && (8.28)
\end{aligned}$$

ΔM_j ist hierbei die (nicht notwendigerweise räumlich konstante) Massenschrittweite. Die Diskretisierung der Druckterme ist hierbei nicht eindeutig festgelegt, hier wurde die asymmetrische Regel (8.12) zugrunde gelegt.

Bisher wurden nur die nichtviskosen Gleichungen betrachtet. Die Verwendung einer künstlichen Viskosität bringt in der Regel bei der Transformation zusätzliche nichtkonservative Terme. Dieses Problem kann vermieden werden, falls man die Tensorviskosität durch einen skalaren viskosen Druck ersetzt, der einfach zu dem Gasdruck addiert werden kann. Ein Ansatz dafür findet sich in MiM[84] (Gl. (59.106)):

$$P_Q = -(\lambda r)^2 \rho \operatorname{div}(u) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{3} \operatorname{div}(u) \right) \tag{8.29}$$

Bei der Diskretisierung von P_Q sind bezüglich der Totalenergieerhaltung keine Einschränkungen notwendig. Allerdings sind bisher keine Erfahrungen mit dieser Viskositätsbeschreibung verfügbar. Zusätzlich hätte ein solches lagrangesches Schema den Nachteil, daß um eine mit den Rechnungen mit adaptivem Gitter vergleichbare Auflösung in allen Bereichen der Strömung zu erreichen mindestens 10^6 Gitterpunkte notwendig wären.

In ebener Geometrie brachte die Erweiterung auf 3 Niveau Schemata eine Familie von vollständig konservativen Schemata (KMM[80]). Dieses lässt sich auch auf den sphärisch symmetrischen Fall ohne Gravitation verallgemeinern.

$$\begin{aligned}
D_t(\mathcal{M}) + D_s(\mathcal{F}) &= 0 && (8.30)\\
D_t(\mathcal{M} S_t(u_j)) + D_s^+\left(\mathcal{F} S_s^-(u_j^*)\right) + r_j^{*2} D_s^+\left(S_s^-(\mathcal{P})\right) &= 0 && (8.31)\\
D_t(\mathcal{M} S_t(e_j)) + D_s^+\left(\mathcal{F} S_s^-(e_j^*)\right) + S_s^+(\mathcal{P}) D_s^+\left(u_j^* r_j^{*2}\right) &= 0 && (8.32)\\
D_t\left(\mathcal{M}\left(\frac{u_j u_j^*}{2} + S_t(e_j)\right)\right) &+ \\
D_s^+\left(\mathcal{F}\left(\frac{u_j^* u_{j-1}^*}{2} + S_s^-(e_j^*)\right)\right) + D_s^+\left(r_j^{*2} u_j^* S_s^-(\mathcal{P})\right) &= 0 && (8.33)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \alpha_{\mathcal{M}}(\rho_j\,\Delta V_j) + (1-\alpha_{\mathcal{M}})\left(\rho_j^*\,\Delta V_j^*\right) && (8.34)\\
\mathcal{F} &= \alpha_{\mathcal{F}}\left(\rho_j u_{rel\,j} r_j^2\right) + \beta_{\mathcal{F}}\left(\rho_j^* u_{rel\,j}^* r_j^{*2}\right)\\
&+ (1-\alpha_{\mathcal{F}}-\beta_{\mathcal{F}})\left(\rho_j^{**} u_{rel\,j}^{**} r_j^{**2}\right) && (8.35)\\
\mathcal{P} &= \alpha_{\mathcal{P}} P_j + \beta_{\mathcal{P}} P_j^* + (1-\alpha_{\mathcal{P}}-\beta_{\mathcal{P}}) P_j^{**} && (8.36)
\end{aligned}$$

Der Faktor u an die Bewegungsgleichung zur Bildung der kinetischen Energiegleichung ist hier durch u_j^* festgelegt. Die Zeitmittelungsfaktoren α, β : $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ sind hier im Gegensatz zu KMM[80] nicht festgelegt, da hier keine Invarianz unter Transformationen zu nichtkonservativen Formen der Gleichungen gefordert wird. Das Advektionschema koppelt immer den Gitterpunkt j sowohl mit seinem linken als auch seinem rechten Nachbarn, deshalb kann es nicht die Transporteigenschaft besitzen. Informationen können bei diesem Schema auch im Fall einer Überschallströmung gegen die Strömung propagieren! Aufgrung schlechter Erfahrungen mit Differenzenschemata von diesem Typ ist kaum anzunehmen, daß es sich zur Berechnung des protostellaren Kollapses eignet. Ein weiteres Problem ist die Veränderlichkeit des Zeitschrittes. Bei obigen Formeln wurde implizit $\delta t = \delta t^*$ angenommen. Diese Wahl ist aber für das Kollapsproblem nicht praktikabel aufgrund der Veränderung der relevanten Zeitskalen während der Rechnung. So verkürzt sich die zentrale Freifallzeitskala bei einem typischen Anstieg von ρ_c um 18 Zehnerpotenzen um einen Faktor von 10^9! Für die Konsistenz des Differenzenschemas mit der Differentialgleichung ist die Wahl von $\delta t = \delta t^*$ allerdings zwingend notwendig. Es bestünde zwar die Möglichkeit des Halbierens oder Verdoppelns des Zeitschrittes durch Einfügen oder Entfernens zusätzlicher Zeitniveaus (Auflösen nach f^* bei $t^{n-1} = \frac{1}{2}(t^n + t^{n-2})$ falls f und f^{**} bekannt), dies würde allerdings wegen der Definition der kinetischen Energie durch Mittelung zweier Zeitniveaus die Erhaltung der Totalenergie verletzen. Die momentane kinetische Energie wird so eine Funktion des Zeitschrittes. Aufgrund dieser Mittelung ist die kinetische Energie auch keine positiv definite Größe mehr, falls an einem Gitterpunkt u zeitlich das Vorzeichen wechselt wird diese negativ. Die Erweiterung des vollständig konservativen Schemas durch Berücksichtigung der Eigengravitation ist bisher nicht gelungen.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

9.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es die Totalenergieerhaltung bei der numerischen Simulation des protostellaren Kollapses zu untersuchen. Es war bekannt, daß das für die Simulation benutzte numerische Verfahren destruktive Instabilitäten erster und zweiter protostellarer Kerne aufzeigt. Es besteht die Vermutung, daß diese Kernexplosionen, oder zumindest ihre Stärke, durch eine künstliche Totalenergieerzeugung aufgrund der Diskretisierung der verwendeten Erhaltungsgleichungen modifiziert werden. Die Totalenergieerhaltung wurde global und lokal überprüft. Zur globalen Überprüfung wurde die momentane Totalenergie zum Startzeitpunkt zurückintegriert, zusätzlich wurde eine Abschätzung der Unsicherheit in der potentiellen und der kinetischen Energie aufgrund verschiedener Möglichkeiten der Diskretisierung benutzt. Der lokale Test erfolgte durch Vergleich der gerechneten Modelle mit einer Diskretisierung der Totalenergiegleichung in Erhaltungsform. Zur Überprüfung der Totalenergieerhaltung wurde zunächst eine Sequenz von Modellrechnungen unterschiedlicher räumlicher Auflösungen mit konstanter Opazität durchgeführt, was aufgrund der dann gleichen Entwicklung den Vergleich unterschiedlicher Gitterpunktanzahlen ermöglichte. Danach wurde die Übertragbarkeit der erhaltenen Ergebnisse auf Modelle mit realistischen Materialfunktionen überprüft. Im Laufe der Untersuchung ergab sich zusätzlich die Fragestellung, wie sich eine Modifikation des Advektionsschemas, die sich als geeignet erwies, die in einigen Rechnungen auftretenden Leuchtkraftinstabilitäten im optisch dünnen äußeren Hüllenbereich zu verhindern, auf die numerischen Resultate auswirkt. Weiterhin wurden Modelle erster protostellarer Kerne unter Verwendung der Totalenergiegleichung gerechnet.

Die Modellreihen mit konstanter Opazität zeigten bis auf die Rechnung mit der höchsten Gitterpunktanzahl eine ähnliche Entwicklung. Es kam zur

Bildung eines zweiten Kernes, dieser explodierte einige Jahre nach seiner Entstehung. Nur im Falle der höchsten Gitterpunktanzahl (1200 Punkte) kam es nicht zur Explosion des inneren Kerns. Die Überprüfung der globalen Totalenergieerhaltung ergab, daß alle Modellreihen, die explodierten, eine signifikante künstliche Totalenergieerzeugung aufweisen. Der Totalenergiegewinn nach der Explosion des Kernes beträgt das 2.8 bis 3 fache der bis zu diesem Zeitpunkt integrierten Leuchtkraft, kann also nicht durch deren Unsicherheit aufgrund der numerischen Integration erklärt werden. Es zeigte sich, daß der Totalenergiefehler schwächer als linear mit einer Erhöhung der Anzahl der Gitterpunkte zurückgeht. Der globale Totalenergiefehler erwies sich als proportional zur Größe des Zeitschrittes. Allerdings wird dieser künstliche Totalenergiegewinn erst nach der Explosion eindeutig erkennbar, während der Phase der Existenz des inneren Kernes ist aufgrund der großen Unsicherheit insbesondere in der potentiellen Energie keine eindeutige Aussage bezüglich der Totalenergieerhaltung möglich. Die relativ große Abweichung stellt das berechnete Objekt, das aus der Explosion resultiert, allerdings in Frage. Weiterhin zeigte sich, daß der Phase des Totalenergiegewinns bis zur Explosion eine Phase künstlicher Totalenergievernichtung während der Expansionsphase folgt. Der Energieverlust ist, verglichen mit dem vorher erfolgten Energiegewinn, klein. Die Abhängigkeit des Totalenergiefehlers von der Viskositätslängenskala erwies sich als gering. Im Akkretionsstoß ergab sich in der Regel ein künstlicher Totalenergieentzug. Die Untersuchung des lokalen Totalenergiefehlers ergab, daß die räumliche Variation des Fehlers relativ zur lokal größten Energieform nicht ausreicht, um die räumliche Variation der spezifischen Energien zu kompensieren. Die Folge ist, daß der Hauptteil des Fehlers dort anfällt, wo die spezifischen Energien maximal sind, während der Phase des größten Anstieges der zurückintegrierten Totalenergie ist dies die Mantelzone des inneren Kerns. Die Rechnung mit 1200 Gitterpunkten, bei der es nicht zur Kernexplosion kommt, weist ebenfalls eine künstliche Totalenergieerzeugung auf, hier ist diese allerdings aufgrund der großen Unsicherheit in der momentanen Totalenergie nicht als signifikant zu bezeichnen.

Die Rechnungen mit realistischer Opazität und einer Gesamtmasse von 1 $M_\odot$ zeigten, daß die Entwicklung auch hier zu einer Explosion des inneren Kernes führt. Allerdings war es bei Verwendung eines zeitlich frei beweglichen Gitters notwendig, die Diskretisierung der Advektionsterme so zu ändern, daß das annähernd konstante J-Profil in der äußeren Hülle korrekt advektiert wird. Ohne diese Modifikation kam es in der äußeren Hülle aufgrund von Advektionsfehlern bei einer Bewegung des Gitters zu Leuchtkraftschwankungen um mehrere Größenordnungen. Da die Modifikation der Advektionsterme in allen Erhaltungsgleichungen durchgeführt wurde, war es möglich, ihren Einfluß auf die Entwicklung der Kernschwingungen zu überprüfen. Es zeigte sich, daß die Schwingungen des ersten Kerns durch die Änderung des Advektionsschemas beeinflußt werden. So konnten bei der Verwendung des modifizierten Advektionsschemas in einer Rechnung mit

512 Gitterpunkten und einem zeitlich frei beweglichen Gitter die durch den Kappamechanismus angeregten Wellen im ersten Kern den zweiten Kollaps nicht verhindern. Durch die Verwendung des modifizierten Advektionsschemas verbesserte sich die globale Totalenergieerhaltung leicht, wie mit konstanter Opazität durchgeführte Rechnungen zeigten, in diesen gab es aber immer noch eine signifikante Totalenergieerzeugung. In der Entwicklung unterschieden sich die beiden $1M_{\odot}$ Rechnungen mit 150 und 512 Gitterpunkten bezüglich des Zeitpunktes der Explosion des inneren Kerns, im Falle von 512 Gitterpunkten erfolgt die Explosion auf derselben Zeitskala wie bei konstanter Opazität (6.9 Jahre nach Ausbildung des Kerns), bei nur 150 Gitterpunkten findet die Explosion schon auf der Zeitskala einiger Stunden nach der Entstehung des Kernes statt. Dementsprechend unterscheiden sich auch die Resultate der Untersuchung der globalen Totalenergieerhaltung. Durch die größere Skala der potentiellen Energie im Falle der Rechnung mit 512 Gitterpunkten, in der es zur Akkretion der Reste des ersten Kerns kommt, ist auch die künstliche Totalenergieerzeugung höher. Der lokale Totalenergiefehler zeigte in allen Modellen mit realistischer Opazität einen recht komplexen Verlauf. Ursache ist wahrscheinlich die Bewegung des Gitters, mit der es auf die komplexen entstehenden Strukturen in der Strömung reagiert.

Eine weiterhin durchgeführte Rechnung mit 512 Gitterpunkten und einer Gesamtmasse von $9M_{\odot}$ zeigte eine starke Schwingung des ersten Kerns. Nach der Reflexion eines einwärtsgelaufenen Stoßes am Zentrum kommt es zum zweiten Kollaps. In dem entstandenen hydrostatischen inneren Kern entwickelt sich ein lokal ein Dichtepeak, der wegen des hydrostatischen Gleichgewichts mit einem Temperaturminimum verbunden ist. Erst die Berücksichtigung von Konvektion würde in diesem Fall die Fortsetzung der Rechnung erlauben. Durch die höhere Anfangstemperatur ist dieses Modell bis zum Beginn der Akkretion auf den inneren Kern vollkommen strahlungsdominiert. Deshalb spielt die Art der zeitlichen Leuchtkraftintegration, die bei den kälteren Modellen nicht entscheident war, für die Frage der globalen Totalenergieerhaltung eine Rolle, solange die Strahlungsenergie deutlich über den mechanischen Energien liegt. Wenn nach der Ausbildung des inneren Kerns die potentielle Energie die Strahlungsenergie überwiegt, setzt auch hier unabhängig von der Art der Leuchtkraftintegration ein künstlicher Totalenergiegewinn ein. Da es in dieser Rechnung nicht zur Explosion des Kerns kommt, ist dieser Gewinn aufgrund der großen Unsicherheit in der momentanen Totalenergie an der Grenze zur Signifikanz.

Die durchgeführten Rechnungen mit der Totalenergiegleichung haben gezeigt, daß es auch bei exakter Totalenergieerhaltung, aber bei nichterhaltener innerer Energie, zu Schwingungen erster protostellarer Kerne kommt. Die dabei auftretenden Variationen der Zentraldichte sind deutlich kleiner als in Bal[89] beschrieben. Auch mit einer Gitterpunktanzahl von 150 verhindern die durch den Kappamechanismus angeregten Wellen den zweiten Kollaps. Alle Rechnungen mit der Totalenergiegleichung konnten allerdings aufgrund von numerischen Problemen nicht hinreichend weit verfolgt werden, um Dichteschwankungen um mehrere Größenordnungen ausschließen zu können. Der Instabilitätsmechanismus ist derselbe wie bei Verwendung der inneren Energiegleichung. Verwendet man das modifizierte Advektionsschema, so ändert sich zwar der genaue Instabilitätsmechanismus, zum zweiten Kollaps kommt es aber, solange die Rechnung verfolgt werden konnte, ebenfalls nicht. Bei allen Rechnungen mit der Totalenergiegleichung kam es zu Problemen mit künstlicher Kühlung aufgrund der Nichterhaltung der inneren Energie. Dies äußerte sich in Temperaturminima in der Atmosphäre des Kerns direkt hinter dem Stoß und in der einfallenden Hülle.

9.2 Schlußfolgerungen

Die in allen Rechnungen, bei denen es zur Explosion kam, signifikant zu hohe Energie der expandierten Modelle läßt Zweifel an der berechneten Variation der Zentraldichte aufkommen. Da es weiterhin bei der Modellreihe mit konstanter Opazität und 1200 Gitterpunkten im Gegensatz zu den anderen Rechnungen mit konstanter Opazität nicht zur Explosion des inneren Kernes kam, stellt sich die Frage, ob die Explosionen physikalisch oder numerisch bedingt sind. Eine Verbesserung der Totalenergieerhaltung durch einfaches Erhöhen der Gitterpunktanzahl ist aufgrund der schwachen Abhängigkeit des Totalenergiefehlers sehr schwierig und wird bei dem hier verwendeten impliziten Verfahren wahrscheinlich an der dann schlechter werdenden Genauigkeit der Matrixinversion in der Newton-Raphson-Iteration scheitern. Ob die maximale hier verwendete Anzahl von 1200 Gitterpunkten wirklich ausreicht, die physikalischen Prozesse adäquat aufzulösen, kann nicht mit Sicherheit behauptet werden. Bei Modellen mit realistischer Opazität sollte die notwendige Gitterpunktanzahl wegen der vielfältigen Strukturen, die vom Gitter aufgelöst werden müssen, noch höher liegen. Um eine gute Totalenergieerhaltung zu erreichen, ist es notwendig, insbesondere das Maximum der potentiellen Energie in der Mantelzone der Kerne gut aufzulösen und möglichst fehlerfrei bei Gitterbewegungen zu advektieren, da dieses Maximum aber nicht stark lokalisiert ist, ist eine möglichst *gleichmäßige* und hohe Auflösung der Kernmantelzonen erforderlich. In einer höchstaufgelösten Rechnung mit realistischen Materialfunktionen sollte dies durch einen zusätzlichen Term in der Gittergleichung sichergestellt werden. Kommt es allerdings zur Explosion, so ist aufgrund der starken zeitlichen Variation der Energieskalen nicht damit zu rechnen, daß ein Verfahren, das die Totalenergie nicht exakt erhält, den maximal expandierten Zustand bezüglich dessen Energie korrekt bestimmt. Kommt es nicht zur Explosion, so ist, wie das gerechnete Modell mit 1200 Gitterpunkten gezeigt hat, die Totalenergieerhaltung des verwendeten Verfahrens aufgrund der großen Unsicherheit der Totalenergie akzeptabel. Wichtig ist somit die Frage, ob die Explosionen real sind. Sind sie nicht real, so kann das bestehende Verfahren mit einer mäßigen Erhöhung der Gitterpunktanzahl und kleineren Verbesserungen (Advektion, zusätzliche Terme in der Gittergleichung) weiterverwendet werden. Die Frage, ob die Explosionen real sind, läßt sich ohne numerische Simulation allerdings nicht klären. So bleibt in der Praxis das Problem, auch bei einem starken Absinken der Energieskalen die Totalenergie des Endzustandes exakt bestimmen zu müssen.

Die Verwendung eines vollständig konservativen Differenzenschemas wäre für die Berechnung des protostellaren Kollapses vorteilhaft. Wie diese Untersuchung gezeigt hat, ist ein solches Schema, das zusätzlich noch weitere, für die Berechnung dieses Problems notwendige Eigenschaften wie beispielsweise die Monotonie besitzt, sehr schwer zu finden. Eine Verwendung des lagrangeschen vollständig konservativen Schemas erfordert, um eine mit dem adaptiven Gitter vergleichbare Auflösung in lokalisierten Strukturen wie dem Stoß zu erreichen, eine für die praktische Rechnung zu hohe Gitterpunktanzahl, bei der aufgrund der impliziten Natur des Verfahrens Probleme mit dem notwendigen Iterationsverfahren zu erwarten sind.

Die Rechnungen mit dem modifizierten Advektionsschema haben gezeigt, daß insbesondere die ersten Kerne eine andere Entwicklung zeigen. Deshalb wäre es sinnvoll, die Instabilitäten mit einem Code zu untersuchen, der ein Advektionsschema höherer Ordnung verwendet. Außerdem wäre eine Untersuchung des Advektionsfehlers der hier verwendeten Advektionsschemata bei einer Gitterbewegung im Kern nützlich, um zu überprüfen, wie die Anregung der Wellen durch das adaptive Gitter beeinflußt wird, dies konnte aus Zeitgründen leider nicht durchgeführt werden. Da sich bei der Modifikation des Advektionsschemas auch die Totalenergieerhaltung leicht verbessert hat, besteht die Möglichkeit, daß ein Verfahren höherer Ordnung die Totalenergie besser erhält. Dies sollte unbedingt überprüft werden.

Aus den durchgeführten Rechnungen unter Verwendung der Totalenergiegleichung ist zu schließen, daß die Existenz von Schwingungen der ersten Kerne kein Artefakt der Nichterhaltung der Totalenergie ist. Die Amplituden der Schwingungen erscheinen aber deutlich kleiner im Falle der Verwendung der Totalenergiegleichung. Aufgrund der aufgetretenen Probleme, besonders der künstlichen Kühlung in der Hülle, die es unmöglich macht, das Aussehen des Objekts für einen Beobachter zu bestimmen, ist die Verwendung der Totalenergiegleichung keine Alternative zur inneren Energiegleichung. Weiterhin ist die Verwendung der Totalenergiegleichung auf das sphärisch symmetrische Problem begrenzt, da sich nur bei dieser Einschränkung die Totalenergiegleichung als lokale Erhaltungsgleichung formulieren läßt.

Literaturverzeichnis

Balluch, Martin 1988. Bal[88]
„Protostellar Evolution. I. The Behaviour of the Eddington Factor and the Accretion Shock".
Astron. and Astrophys. **200**, 58-74.

Balluch, Martin 1989. Bal[89]
„Stabilität protostellarer Akkretionsströmungen".
Dissertation, Universität Heidelberg 1989.

Boss, Alan P. und Tscharnuter, Werner M. 1989. BoT[89]
„Protostellar Core Instabilities: Verification of Dynamical Hiccups".
Preprint. Nicht veröffentlicht.

Boss, Alan P. 1989. Bos[89]
„Protostellar Formation in rotating interstellar Clouds: VIII. Inner Core Formation".
Astrophys. Journ. **346**, 336.

Castor, John I. 1972. Cas[72]
„Radiative Transfer in Spherically Symmetric Flows".
Astrophys. Journ. **178**, 779.

Courant, R. und Friedrichs, K. O. 1948. CoF[48]
Supersonic Flow and Shock Waves.
Interscience Publishers, New York, 1948.

Courant, R., Friedrichs, K. O. und Lewy, H. 1928. CFL[28]
„Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik".
Math. Annalen **100**, 32.

Cox, Arthur N. und Stewart, J. N. 1969. CoS[69]
Academia Nauk, Scientific Information **15**, 1.

Dorfi, Ernst Anton und Drury, L. O'C. 1987. DoD[87]
„Simple Adaptive Grids for 1-D Initial Value Problems".
Journ. Comp. Phys. **69**, 175-195.

Harten, A., Hyman, J. M. und Lax, P. D. 1976. HHL[76]
„On Finite Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks".
Comm. Pure Appl. Math. **29**, 297.

Kosovichev, A. G. und Popov Yu. P. 1980. KPo[80]
„The Computation of 1-dimensional nonstationary Problems of gravitational Gasdynamics".
U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. **19**, 168.

Krügel, E. 1971. Krü[71]
„Der Rosselandsche Mittelwert bei tiefen Temperaturen".
Diplomarbeit, Göttingen 1971.

Kuzmin, A. V., Makarov, V. L. und Meladze, G. V. 1980. KMM[80]
„A completely conservative Difference Scheme for Gasdynamic Equations in Eulerian Variables".
U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. **20**, 187.

Mihalas, Dimitri und Weibel Mihalas, Barbara 1984. MiM[84]
Foundations of Radiation Hydrodynamics.
Oxford Univ. Press, Oxford.

Morfill, G., Tscharnuter, W. und Völk, H. J. 1985. MTV[85]
„Dynamical and Chemical Evolution of the Protoplanetary Nebula".
In *Protostars and Planets II* (D. C. Black and M. S. Matthews, Eds.).
Univ. of Arizona Press, Tucson.

Popov, Yu. P. und Samarskii, A. A. 1969. PoS[69]
„Completely conservative Difference Schemes".
U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. **9**.

Popov, Yu. P. und Samarskii, A. A. 1970. PoS[70]
„Completely conservative Difference Schemes for the Equations of Gasdynamics in Euler's Variables".
U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. **10**, 265.

Richtmyer, R. D. und Morton, K. W. 1957. RiM[57]
Difference Methods for Initial-Value Problems.
Interscience, New York.

Roache, P. J. 1976. Roa[76]
Computational Fluid Dynamics.
Hermosa, Albuquerque.

Shu, F. 1977. Shu[77]
„Self-similar Collapse of isothermal Spheres and Star Formation".
Astrophys. Journ. **214**, 488.

Sod, G. A. 1985. Sod[85]
Numerical Methods in Fluid Dynamics.
Cambridge University Press, Cambridge.

Späth, H. 1983. Spä[83]
Spline Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen.
Oldenburg, München.

Stahler, S. W., Shu F. H. und Taam R. E. 1980. SST[80]
„The Evolution of Protostars. I. Global Formulation and Results".
Astrophys. Journ. **241**, 637.

Tscharnuter, Werner M. 1987a. Tsc[87a]
„Models of Star Formation".
In *Lecture Notes in Physics: Physical Processes in Comets, Stars and Active Galaxies*, (E. Meyer-Hofmeister, H. C. Thomas and W. Hillebrandt, Eds.)
Springer, Berlin.

Tscharnuter, Werner M. 1987b. Tsc[87b]
„A Collapse Model of the Turbulent Presolar Nebula".
Astron. and Astrophys. **188**, 55.

Tscharnuter, Werner M. 1989. Tsc[89]
„Collapse Calculations".
In *Low Mass Star Formation and Pre-Main Sequence Objects*, (B. Reipurth, Ed.)
ESO Proceedings **33**, 75–87.

Tscharnuter, W. M. und Winkler, K.-H. A. 1979. TsW[79]
„A Method for Computing Selfgravitating Gas Flows with Radiation".
Computer Physics Communications **18**, 171.

Winkler, Karl-Heinz A. 1976. Win[76]
„Über ein numerisches Verfahren zur Berechnung instationärer spärischer Stoßfronten mit Strahlung".
Dissertation, Universität Göttingen 1976.

Winkler, Karl-Heinz A. und Newman, Michael J. 1980a. WiN[80a]
„Formation of Solar–Type Stars in Spherical Symmetry. I. The Key Role of the Accretion Shock".
Astrophys. Journal **236**, 201-211.

Winkler, Karl-Heinz A. und Newman, Michael J. 1980b. WiN[80b]
„Formation of Solar–Type Stars in Spherical Symmetry. II. Effects of Detailed Constitutive Relations".
Astrophys. Journal **238**, 311-325.

Winkler, K.-H. A. und Norman, M. L. 1986. WiN[86]
„WH80s: Numerical Radiation Hydrodynamics".
In *Astrophysical Radiation Hydrodynamics* (K.-H. A. Winkler und M. L. Norman, Eds.)

NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences Vol. **188**.
D. Reidel, Dordrecht.

Wuchterl, Günther 1989. Wuc[89]
„Zur Entstehung der Gasplaneten. Kugelsymmetrische Gasströmungen auf Protoplaneten".
Dissertation, Universität Wien 1989

Yorke, H. W. 1979. Yor[79]
„The Evolution of Protostellar Envelopes of Masses $3\,M_\odot$ and $10\,M_\odot$. I. Structure and Hydrodynamic Evolution".
Astron. and Astrophys. **80**, 308-316.

Yorke, H. W. 1980a. Yor[80a]
„The Evolution of Protostellar Envelopes of Masses $3\,M_\odot$ and $10\,M_\odot$. II. Radiation Transfer and Spectral Appearance".
Astron. and Astrophys. **85**, 215.

Yorke, H. W. 1980b. Yor[80b]
„Numerical Solution of the Equation of Radiation Transfer in Spherical Geometry".
Astron. and Astrophys. **86**, 286-294.

Danksagung

Bedanken möchte ich mich zunächst bei Prof. Dr. W. M. Tscharnuter für die Bereitstellung und die Betreuung dieser Diplomarbeit.
Mein Dank gilt insbesondere Dr. Günther Wuchterl für die Hilfestellung während der Anfangsphase, für viele nützliche Hinweise und Ratschläge sowie das kritische Korrekturlesen dieser Arbeit.
Weiterhin möchte ich mich bei Dr. Wolfgang Duschl, Hanno Sponholz, Michael Däther, Matthias Götz und Ahmad Hujeirat für die freundschaftliche Atmosphäre in unserer Arbeitsgruppe sowie für interessante Diskussionen bedanken.
Bedanken möchte ich mich auch bei Dr. Olaf Heinrich für die Erlaubnis auf seiner IBM 32H Workstation Modellsequenzen rechnen zu dürfen, was in der Endphase dieser Arbeit aufgrund der wesentlich höheren Rechengeschwindigkeit gegenüber der vorher benutzten Sun 3/60 eine große Erleichterung darstellte.
Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des SFB 328 während der Durchführung dieser Arbeit.
Schließlich möchte ich mich noch bei meinen Eltern für die finanzielle Unterstützung während des Studiums bedanken.