Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Kandidat Erik Meinköhn
aus Berlin

1997

Strahlungstransport in bewegten, sphärisch-symmetrischen Atmosphären

Die Diplomarbeit wurde von Erik Meinköhn ausgeführt am
Institut für Theoretische Astrophysik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Dr. Rainer Wehrse

In dieser Arbeit wird eine analytische Lösung der grauen, relativistischen, sphärisch-symmetrischen Strahlungstransportgleichung für expandierende und kollabierende Konfigurationen hergeleitet. Trotz der numerischen Behandlung des Strahlungstransports und dessen Fortschritt in den letzten 30 bis 40 Jahren ist es wichtig, analytische Lösungen für dieses Problem zu erhalten, da numerische Algorithmen große Schwierigkeiten haben, z.B. den gesamten Strahlungsfluß einer bewegten Atmosphäre mit vielen Spektrallinien zu bestimmen. Wir erhalten eine Lösung, indem wir die ersten beiden Momentengleichungen der Strahlungstransportgleichung näherungsweise durch einen anisotropen Ansatz schließen. Dabei wird das Strahlungsfeld in einen isotropen und einen auswärts gerichteten (anisotropen) Beitrag aufgespalten. Unsere Ausdrücke sind bis zur ersten Ordnung in v/c korrekt und können somit auf eine ganze Reihe von Objekte (z.B. Supernovae, Novae und die Zentralregionen aktiver galaktischer Kerne) angewendet werden. Der Verlauf der Extinktion ist zunächst willkürlich. Wir untersuchen jedoch Lösungen, wobei für die Extinktion ein Potenzgesetz angenommen wird. Die in der Literatur bereits bekannte Beziehung für statische, sphärisch-symmetrische Medien ist als Spezialfall enthalten.

Radiative transfer in moving spherical atmospheres. Analytical expressions for the frequency-integrated mean intensity and the total flux are obtained for expanding and collapsing spherical gray configurations in radiative equilibrium. Such radiation fields (and the corresponding temperature distribution) could up to a few years ago only be obtained by means of purely numerical work. Our formulae are based on the first two moment equations of the radiative transfer equation and a closure relation that decomposes the radiation field into an isotropic and an outward-peaked contribution and that assures consistency of the definitions of the moments and the corresponding transfer equation. The expressions are exact to first order in v/c and are therefor applicable to a wide variety of objects. The depth dependence of the opacity may be arbitrary, but is considered in detail by a power law and found to result in formulae that can easily be handled. The previously known relation for static spherical media is contained as a special case.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Strahlungstransport in sphärischen Konfigurationen 1
1.1.1 Phänomenologische Herleitung 1
1.1.2 Gültigkeit der Strahlungstransportgleichung 4
1.1.3 Stand der Forschung 5
1.2 Ziel dieser Arbeit und Motivation 6

2 Sphärisch expandierende Konfigurationen **10**
2.1 Beispiele 10
2.2 Warum sind SNe für die Astronomie interessant? 11
2.3 Warum ist die Modellierung von SNe II wichtig? 12

3 Relativistische Strahlungstransportgleichung **14**
3.1 Herleitung 14
3.2 Erläuterungen zum "Comoving Frame" 16

4 Vereinfachte Strahlungstransportgleichung **18**
4.1 Wichtigste Annahmen 18
4.2 Die Momentengleichungen 18

5 Strahlungsmomente im bewegten Fall **23**
5.1 Lösen der statischen Momentengleichungen 23
5.2 Näherungslösung 25
5.3 Störungslösung 26
5.4 Lösung für ein Potenzgesetz 30

6 Ergebnisse **34**
6.1 Statischer Fall 35
6.2 Bewegter Fall 37
6.2.1 Einschränkungen 37
6.2.2 Untersuchung der Strukturstabilität 38
6.3 Vergleich mit numerischen Arbeiten 56

7 Die intrinsische Leuchtkraft **63**
7.1 Relativistische Effekte 63
7.2 Energieaustausch zwischen Strahlungs- und Materiefeld 65

8 Zusammenfassung und Diskussion **68**

1 Einleitung

1.1 Strahlungstransport in sphärischen Konfigurationen

1.1.1 Phänomenologische Herleitung

In dieser Arbeit soll der Strahlungstransport in sphärisch expandierenden und kollabierenden Konfigurationen behandelt werden, wobei der statische sphärische Strahlungstransport einen wichtigen Spezialfall darstellt.

Der Strahlungstransport wird beschrieben durch eine Strahlungstransportgleichung, die sich als mathematische Konsequenz aus der Forderung der Photonenzahlerhaltung ergibt. Sie stellt die Photonenbilanz für einen kollimierten Photonenstrahl dar und hat die Form einer Kontinuitätsgleichung mit Quellen- und Senkentermen. Die spezifische Intensität I liefert eine vollständige makroskopische Beschreibung des Strahlungsfeldes. Sie ist proportional zu der Photonenzahldichte, multipliziert mit der Energie der Photonen und ergibt sich im Übergang von der mikroskopischen zur makroskopischen Beschreibumg des Strahlungsfeldes. Dazu betrachtet man ein Materieelement der Länge $ds = c \cdot dt$ (c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit) und der Fläche dS im Laborsystem und berechnet die Änderung der Energie des Strahlungsfeldes im Frequenzintervall $d\nu$ mit der Zeit dt, wobei das Feld beim Durchlaufen der Materie im festen Raumwinkel $d\omega$ entlang der Normalen $\vec{n}$ von dS läuft. Die Normale $\vec{n}$ gibt die Strahlrichtung an (siehe Abbildung 1).

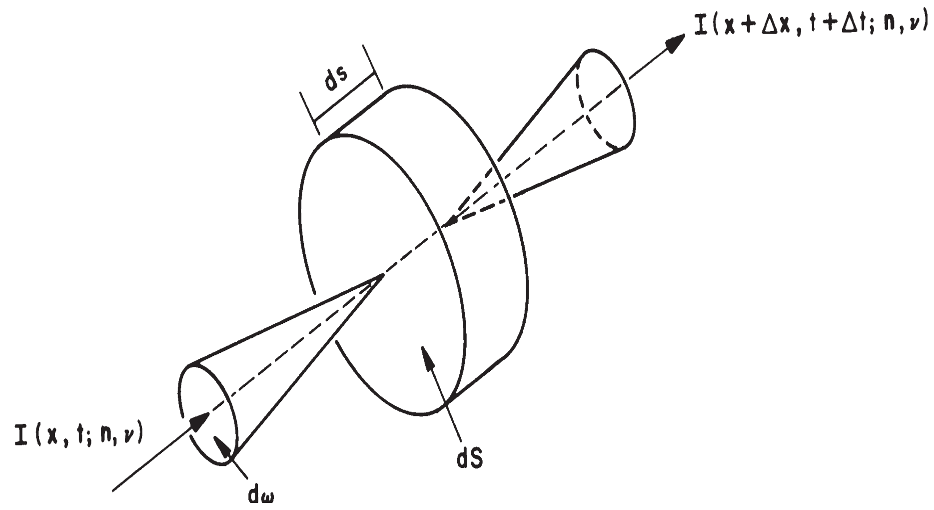


Abbildung 1: *Strahlungsdurchgang durch Materie*

Die Differenz zwischen dem, was betragsmäßig an Energie am Punkt $\vec{x} + \Delta\vec{x} = \vec{x} + ds \cdot \vec{n}$ zur Zeit $t + \Delta t$ aus dem Materieelement austritt und dem, was am Punkt $\vec{x}$ zur Zeit t eintritt, muß gleich der Differenz der Beträge sein, welche durch Emission erzeugt und durch Absorption vernichtet werden. Somit erhält man, nach der Einführung der Weglänge s entlang des Strahlrichtung $\vec{n}$, die (nicht-relativistische) *Strahlungstransportgleichung*:

$$\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right] I(\vec{x},t;\vec{n},\nu)=\eta(\vec{x},t;\vec{n},\nu)-\chi(\vec{x},t;\vec{n},\nu)I(\vec{x},t;\vec{n},\nu) \qquad (1)$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit, I die spezifische Intensität, η der Emissions- und χ der Absorptionskoeffizient.

Da s eine koordinatenunabhängige Weglänge ist, findet Gleichung (1) in beliebigen Koordinatensystemen Anwendung, vorausgesetzt man verwendet einen geeigneten Ausdruck für $(\partial/\partial s)$, der die Geometrie des Problems korrekt berücksichtigt. So erhält man beispielsweise in kartesischen Koordinaten als Richtungsableitung von I:

$$\frac{\partial I}{\partial s}=\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\right) I \qquad , \qquad (2)$$

wobei $\vec{\nabla}=(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$ der Nabla-Operator und $\vec{n}$ der Einheitsvektor entlang der Ausbreitungsrichtung ist.

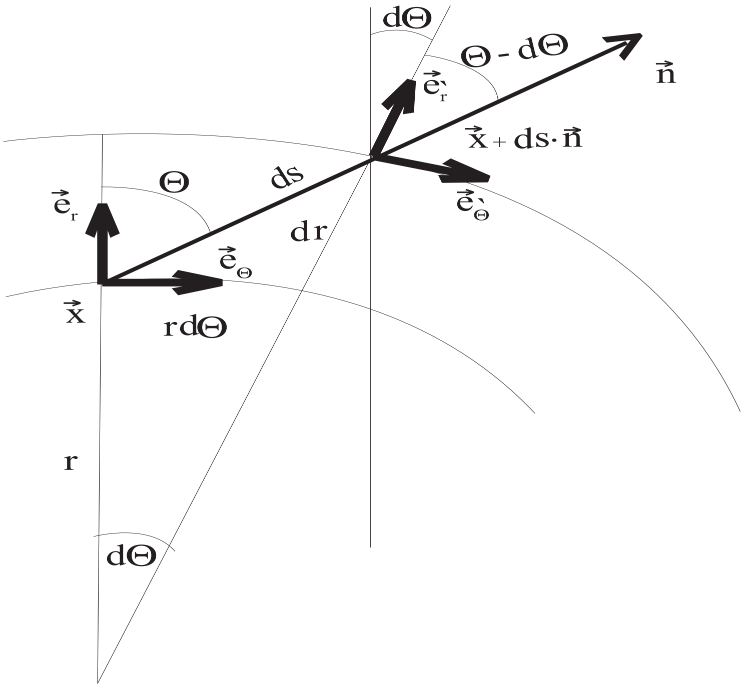


Abbildung 2: *Drehung der Basisvektoren in Kugelkoordinaten*

In krummlinigen Koordinaten rotieren die Koordinatenbasisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\Theta$ bei Verschiebung des Aufpunktes $\vec{x}$ entlang des Weges $\Delta s\cdot\vec{n}$, welcher durch den Ausbreitungsvektor $\vec{n}$ festgelegt ist. Die Komponenten von $\vec{n}$ entlang dieser Basisvektoren ändern sich somit und $\partial/\partial s$ nimmt die Form

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} + \left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{n}} \tag{3}$$

an, wobei $\vec{\nabla}_{\vec{n}}$ die Ableitung bezüglich des Richtungskosinus von $\vec{n}$ darstellt. Die Abbildung 2 zeigt den Ausbreitungswinkel Θ der Photonen und die Drehung der Basisvektoren in Kugelkoordinaten. Aus dieser Abbildung erkennt man, daß $dr = \cos\Theta\, ds = \mu ds$ und $rd\Theta = -\sin\Theta\, ds = -(1-\mu^2)^{1/2}\, ds$ gilt. Wenn man die sphärische Symmetrie ausnutzt, erhält man die *sphärisch-symmetrische Strahlungstransportgleichung* (siehe [30]):

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial I(r,t;\mu,\nu)}{\partial t} + \mu\frac{\partial I(r,t;\mu,\nu)}{\partial r} + \frac{(1-\mu^2)}{r}\frac{\partial I(r,t;\mu.\nu)}{\partial \mu}& \\ = \eta(r,t;\mu,\nu) - \chi(r,t;\mu,\nu)I(r,t;\mu,\nu) \quad .& \qquad (4)\end{aligned}$$

Dabei sind r die radiale Koordinate und μ der Kosinus des Winkels zwischen der Strahlrichtung und der Richtung der Normalen zur Oberfläche. Man beachte, daß diese scheinbar einfache Gleichung eine Reihe von Schwierigkeiten aufweist. So ist die Gleichung (4) eine partielle Differentialgleichung, selbst wenn der $(\partial/\partial t)$-Term wegfällt. Falls man Streuung miteinbezieht, erscheint auf der rechten Seite von Gleichung (4) ein Integral über alle Winkel μ und gegebenfalls ein Integral über die Frequenz ν, was auf eine Integro-Differentialgleichung führt.

Da in dieser Arbeit expandierende und kollabierende Konfigurationen betrachtet werden, kommen aufgrund der Bewegung relativ zu einem ruhenden Beobachter noch Ableitungen bezüglich der Frequenz ν und speziell-relativistische Terme in Gleichung (4) hinzu. Die *zeitabhängige sphärisch-symmetrische Strahlungstransportgleichung* im Lagrange-System, die in Kapitel 3 hergeleitet wird, lautet dann:

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{c}(1+\beta\mu_0)\frac{\partial I_0}{\partial t} + \gamma(\mu_0+\beta)\frac{\partial I_0}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \mu_0}\left\{\gamma(1-\mu_0^2)\left[\frac{(1+\beta\mu_0)}{r} - \gamma^2(\mu_0+\beta)\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{c}(1+\beta\mu_0)\frac{\partial\beta}{\partial t}\right] I_0\right\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \nu_0}\left\{\gamma\nu_0\left[\frac{\beta(1-\mu_0^2)}{r} + \gamma^2\mu_0(\mu_0+\beta)\frac{\partial\beta}{\partial r} + \frac{\gamma^2}{c}\mu_0(1+\beta\mu_0)\frac{\partial\beta}{\partial t}\right] I_0\right\} \qquad (5) \\ &\quad + \gamma\left\{\frac{2\mu_0+\beta(3-\mu_0^2)}{r} + \gamma^2(1+\mu_0^2+2\beta\mu_0)\frac{\partial\beta}{\partial r} + \frac{\gamma^2}{c}\left[2\mu_0+\beta(1+\mu_0^2)\right]\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\} I_0 \\ &= \quad \eta_0 - \chi_0 I_0 \quad .\end{aligned}$$

Die Definition der einzelnen Größen in Gleichung (5) erfolgt ebenfalls in Kapitel 3 . Diese Gleichung (5) gilt für alle Geschwindigkeitsbereiche und kann somit zur Beschreibung von expandierenden und kollabierenden Konfigurationen herangezogen werden.

1.1.2 Gültigkeit der Strahlungstransportgleichung

Es ist ein natürliches Bedürfnis festzustellen, welche Näherungen an die unterliegende Physik in Gleichung (4) bzw. (5) gemacht werden. Generell können die Näherungen in zwei Klassen eingeteilt werden (siehe z.B. Pomraning [32]): Zum einen gibt es grundsätzliche Modellannahmen, die man machen muß, um Gleichungen nach Art von (4) bzw. (5) zu erhalten. Solche Annahmen liegen jeder kontinuumstheoretischen Photonentransportgleichung zu grunde. Zum anderen gibt es Näherungen, die auf besonders einfache Formen der Gleichung (4) bzw. (5) führen. Es sei betont, daß die Frage der Gültigkeit der Transportgleichung noch nicht umfassend geklärt ist und immer noch Gegenstand aktiver Forschung darstellt. Es scheint daher angebracht, einige qualitative Bemerkungen zu machen.

Eine primäre Modellannahme für die Gleichung (4) bzw. (5) besteht darin, die Photonen als klassische Punktteilchen aufzufassen. Photonen besitzen jedoch einen ausgeprägten Wellencharakter und müssen somit durch ein Wellenpaket beschrieben werden. Um das Wellenpaket als ein Punktteilchen behandeln zu können, muß die Ausdehnung dieses Pakets sowohl im Orts- als auch im Impulsraum klein sein. Damit ist gemeint, daß die Ausdehnung klein sein muß im Vergleich zu der uns interessierenden Auflösung der Raum- (r) und Impulsvariablen (repräsentiert durch μ und ν). In diesem Fall reicht es aus, mit den Phasenraumkoordinaten r, μ und ν das Zentrum des Wellenpakets zu beschreiben und seine Form und Ausdehnung zu vernachlässigen. Die Dichte der Photonen entspricht folglich der Dichte der Wellenpakete und ist durch die spezifische Intensität I als Funktion von r, μ und ν gegeben. Der Photonentransport wird somit durch eine Kontinuumstheorie beschrieben, d.h., nicht *einzelne* diskrete Photonen, sondern deren *Dichte* erscheint als stetig verteilte Variable. Aufgrund der Unschärferelation, die besagt, daß die Abweichung von Ort und Impuls nicht beliebig klein sein kann, ergeben diese Betrachtungen ein Minimum in der Raum- und Impulsauflösung. Desweiteren sind die Moden der Wellenpakete statistisch verteilt, so daß in Gleichung (4) bzw. (5) keine Interferenz berücksichtigt wird. Schließlich kann man noch sagen, daß eine Transportgleichung für Photonen nicht in der Lage ist, den ausgeprägten Wellencharakter zu beschreiben, der sich in der Diffraktion und Reflexion manifestiert.

Die obigen Annahmen sind in jeder Photonentransportgleichung enthalten. Die zweite Klasse von Annahmen, welche die Form der Gleichung (4) bzw. (5) bestimmen, können abgeschwächt und vollständig beseitigt werden, was zu einer Berücksichtigung der entsprechenden physikalischen Effekte in einer verallgemeinerten Transportgleichung führt. Als erstes soll erwähnt werden, daß die beiden Gleichungen (4) und (5) die zwei Polarisationszustände der Photonen nicht mitberücksichtigen. Es werden vier Parameter benötigt, um den Polarisationszustand eines Lichtstrahls zu beschreiben. Desweiteren ändert sich im allgemeinen der Polarisationszustand und somit diese vier Parameter, wenn ein Photon gestreut wird. Damit ist klar, daß für eine korrekte Beschreibung der Polarisationseffekte beim Photonentransport vier Gleichungen benötigt werden,die im allgemeinen gekoppelt sind. Ein weiteres Merkmal der Gleichung (4) bzw. (5) ist, daß Effekte vernachlässigt werden, die auf Refraktion und Dispersion zurückzuführen sind. Es ist wohlbekannt, daß sich ein Photon mit einer kleineren Geschwindigkeit als der Vakuumlichtgeschwindigkeit fortbewegt, falls das Medium einen Brechungsindex größer eins hat. Falls der Brechungsindex eine Funktion des Ortes ist, "strömt" das Photon nicht auf geraden Linien zwischen den Stößen, sondern unterzieht sich einer (kontinuierlichen) Refraktion. Da wir eine Kontinuumstheorie zur Beschreibung des Photonentransportes verwenden, "strömt" die Photonendichte auf einer gekrümmten Bahn. Wenn der Brechungsindex zusätzlich noch zeitabhängig ist, verändert das Photon zwischen den Stößen kontinuierlich seine Frequenz.

Wie man aus diesen Betrachtungen ersehen kann, gibt es durchaus noch Möglichkeiten zur Verallgemeinerung. Solche Verallgemeinerungen zu erzielen und Transportgleichungen zu finden, die die oben beschriebenen Phänomene miteinbeziehen, macht dieses Thema jetzt und in Zukunft zu einem aufregenden Forschungsgebiet.

1.1.3 Stand der Forschung

Seit Schuster (1905) erstmals eine allgemeine Gleichung aufstellte, die den Transport von Strahlung durch ein Medium beschreibt und dabei Absorptions- und Emissionseffekte mitberücksichtigt, steht die Strahlungstransportgleichung und die damit verbundene quantitative Interpretation kosmischer Objekte und deren Modellierung im Mittelpunkt astronomischen Interesses. Bis in die sechziger Jahre hinein spielten vor allem analytische Aspekte eine zentrale Rolle bei der Erforschung dieser Gleichung (siehe [11]). Erst der rasante Fortschritt in der Computerentwicklung gestattete eine umfangreiche numerische Behandlung des Problems. Bis zum heutigen Tag wurden eine ganze Reihe von numerischen Verfahren entwickelt bzw. alte Algorithmen verfeinert (siehe [27], [21]), so daß einer detaillierten numerischen Untersuchung der statischen sphärisch-symmetrischen oder plan-parallelen Strahlungstransportgleichung nichts im Wege steht.

Seit einigen Jahren jedoch geraten analytische Lösungen wieder ins Blickfeld zahlreicher Forscher, da sich herausgestellt hat, daß numerische Berechnungen alleine nicht ausreichen, um etwa die spezifische Intensität in einem Medium, z.B. mit stochastischer Dichteverteilung, auszuwerten. Weiterhin haben die aktuellen Algorithmen große Schwierigkeiten, den gesamten Strahlungsfluß einer *bewegten* Atmosphäre mit vielen Spektrallinien zu bestimmen. Es ist wohlbekannt , daß Spektrallinien die wellenlängenintegrierten Größen strahlender Medien sehr stark beeinflussen. Falls man statische Konfigurationen modelliert, gibt es eine Reihe von Methoden , viele Linien bequem miteinzubeziehen (siehe [27]). Wenn sich das Medium jedoch bewegt, verhindern die starken Wellenlängen- und Winkelkopplungen eine Verallgemeinerung dieser Näherungen. Andererseits können recht einfach vollständige Lösungen der stationären Transportgleichung und eine mäßige Anzahl von Linien für einen begrenzten Teil des Spektrums erhalten werden [19]. Selbst für die besten Maschinen ist es bislang bei weitem zu zeitaufwendig, nicht-stationäre Situationen unter Einbeziehung des gesamten Spektrums zu rechnen. Deshalb werden in aktuellen Berechnungen z.B. Rosseland-Mittelwerte verwendet. Diese Vereinfachungen liefern jedoch in bewegten Medien Ergebnisse, die eine zu geringe Genauigkeit aufweisen. Somit wurde erstmals eine analytische Lösung des grauen (d.h. frequenzunabhängigen), relativistischen, sphärisch-symmetrischen Falles (jedoch nur bis zur ersten Ordnung in v/c) von Baschek et al. (1995) [3] vorgelegt. Dieser ersten Veröffentlichung folgten weitere, die insbesonders analytische Ausdrücke für eine differentiell bewegte Schicht liefern [5]. Eine weitere Veröffentlichung enthält die analytische Lösung für den voll relativistischen Fall, der alle Ordnungen v/c umfaßt [4].

1.2 Ziel dieser Arbeit und Motivation

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine analytische Lösung der grauen, relativistischen, sphärisch-symmetrischen Strahlungstransportgleichung für expandierende und kollabierende Konfigurationen herzuleiten. Die Lösung soll in Abhängigkeit der Veränderlichen r (radiale Koordinate) und der Parameter dargestellt werden. Gleichzeitig soll die Stetigkeit der Lösungen an den Stellen auftretender "Scheinsingularitäten" nachgewiesen werden. Diese "Scheinsingularitäten" sind auf die Parametrisierung zurückzuführen. Daran anschließen soll ein Vergleich mit Ergebnissen aus numerischen Arbeiten für den Temperaturverlauf durch eine Supernova-Hülle. Desweiteren wird ganz allgemein für expandierende und kollabierende Konfigurationen untersucht, ob das Strahlungsfeld Energie aufnimmt oder an die zu durchdringende Schicht abgibt. Es soll gezeigt werden, welche Bedeutung Strahlungsgleichgewicht im Lagrange-System hat und welche Effekte einem ruhenden Beobachter vorgetäuscht werden, wenn er nicht weiß, daß sich das zu betrachtende Objekt bewegt.

Zur Motivation ist bereits im vorangegangenen Abschnitt einiges erwähnt worden. An dieser Stelle sollen noch einige grundlegende Bemerkungen über die numerische und analytische Behandlung von Modellgleichungen und weiteren Grundkonzepten in der Physik folgen. Ganz allgemein kann man sagen, daß die Physik Naturphänomene mit Hilfe von Hypothesen beschreibt. Diese Hypothesen ergeben ein Modell und führen auf ein System von Modellgleichungen, der mathematischen Formulierung des Problems. Als Beispiel einer "Modellannahme" kann man für unser "Modell" der kontinuumstheoretischen Beschreibung des Photonentransportes das "Strömen" der Photonen bzw. der Photonendichte nehmen. In der Transporttheorie folgen die Teilchen in der Regel einem Gradienten, z.B. einem Konzentrationsgradienten bei der molekularen Diffusion. Aufgrund der Streuprozesse gilt dies nicht ohne weiteres für den Strahlungstransport, sondern muß durch eine "Modellannahme" gefordert werden, wie sie beispielsweise für das Rosseland-Modell der Photonendiffusion charakteristisch ist [11]. Ein Modell hat sowohl eine spezielle als auch eine allgemeine Bedeutung: Im Speziellen ist es eine Zusammenfassung vieler Einzelbeobachtungen bzw. Messungen, die Vorhersagen durch Interpolation bzw. Extrapolation erlauben (Beispiel: Snelliussches Brechungsgesetz). (b) Im allgemeineren Sinn erlauben die Hypothesen überprüfbare Vorhersagen (Beispiel: Kontinuumshypothese).

Nach diesen grundsätzlichen Bemerkungen kann man sich nun mit den Vor- und Nachteilen der numerischen bzw. analytischen Behandlung von Modellgleichungen befassen, d.h. dem Vergleich und dem Test der Modelle bzw. Hypothesen: Numerische Verfahren liefern Zahlenwerte für physikalische Variablen, so daß ein Vergleich der Modellaussagen mit Messungen bzw. Beobachtungen möglich ist. Die analytischen Verfahren liefern ebenfalls Zahlenwerte (Beispiel: die Untersuchung der Symmetrieeigenschaften von Modellgleichungen liefert etwa die *Zahl* der gestörten Atomniveaus, die durch Aufspaltung aus entarteten Niveaus hervorgehen), die man mit Beobachtungen vergleichen kann. Jedoch ist die analytische Behandlung der Probleme für die Physik von größerer Bedeutung als die numerische, da sie eine systematische Untersuchung der strukturellen Stabilität bzw. Instabilität der Modelle bzw. Hypothesen erlaubt. *Die strukturelle Stabilität der Modellgleichungen entspricht der für die Physik essentiellen Notwendigkeit der* ***Reproduzierbarkeit***. Modellgleichungen, welche mathematisch korrekt gestellt sind, haben per definitionem die Eigenschaft der Strukturstabilität.

Wir gehen von folgendem allgemeinen Gesichtspunkt aus [13]: Bei der Stellung eines Problems der mathematischen Physik, wobei eine gewisse Lösung aus vorgegebenen Daten bestimmt werden soll, sind drei Forderungen Naturgemäß.

1. Die Lösung des Problems muß existieren.

2. Die Lösung muß eindeutig bestimmt sein.

3. Die Lösung muß stetig von den "Daten" des Problems, wie etwa den Anfangs- und Randbedingungen oder der Geometrie des Systems, abhängen.

Die erste Forderung ist mathematisch selbstverständlich; es dürfen nicht "zu viele", d.h. sich widersprechende, Eigenschaften von der Lösung verlangt werden. Die zweite Forderung drückt aus, daß das Problem in einer *vollständigen* Weise gestellt sein muß; die Problemstellung darf für die Lösung keinen unzulässigen Spielraum mehr lassen. Die dritte Forderung ist vom Standpunkt der grundsätzlichen Anwendbarkeit unseres analytischen Problems auf Naturvorgänge gerechtfertigt und bildet einen besonders einschneidenden, nicht mehr trivialen Gesichtspunkt.

Es ist physikalisch nicht möglich, bei der Wiederholung einer Messung (zum Nachweis der Reproduzierbarkeit) mit absoluter Präzision die gleichen "Daten" einzustellen. Rand- und Anfangswerte lassen sich etwa nur innerhalb einer gewissen Toleranz einstellen. Weiterhin läßt sich das System nicht absolut und vollständig von seiner Umgebung isolieren, über deren "Zustand" man nicht verfügt, so daß Umgebungseinflüsse zwar klein, aber eben stochastisch, also nicht präzisierbar sind. Deshalb hat Reproduzierbarkeit eine physikalische Definition: *Für gering verschiedene "Daten" müssen sich gering verschiedene Meßwerte bzw. Beobachtungen ergeben.* Mathematisch bedeutet dies, daß die Meßwerte (d.h. Lösungen der Modellgleichungen) *stetig* von den "Daten" abhängen müssen. Genau diese Stetigkeit ist eine Grenzwerteigenschaft, die sich nur durch die Untersuchung einer unendlichen Folge ableiten läßt. So etwas ist mit Hilfe endlich vieler Ergebnisse aus numerischen Verfahren gerade nicht zu leisten. drei Forderungen erfüllt sind, ist das Modell strukturstabil. Somit entspricht die Reproduzierbarkeitseigenschaft der Strukturstabilität (Ein Differentialgleichungsproblem, welches unseren Forderungen genügt, wird nach Courant/Hilbert [13] ein *sachgemäßes Problem* genannt).

Es ist durchaus lohnenswert, noch ein paaar Bemerkungen über strukturelle Instabilität und Katastrophentheorie zu machen: Reproduzierbarkeit schließt **nicht** aus, daß es isoliert liegende Instabilitäten gibt (ohne Häufungspunkt), an denen das System "Sprünge" macht (Beispiel: Phasenübergänge). Darum ist folgende Verallgemeinerung notwendig: Damit die Reproduzierbarkeit erhalten bleibt, müssen strukturelle Instabilitäten selber reproduzierbar sein. Dies ist eine wichtige Forderung an mathematisch schlecht gestellte Modelle (nach Courant/Hilbert [13]: *nicht sachgemäße Probleme*), wenn sie physikalische Bedeutung haben sollen. Es gilt sogar, daß strukturelle Instabilität von besonderem physikalischen Interesse ist, da eine sprunghafte Änderung einer qualitativen Änderung entspricht (Beispiel: Übergang von einem Aggregatzustand in einen anderen). Es interssiert also, daß es Wasser als Dampf und als Flüssigkeit gibt. Es ist physikalisch nicht so interessant, wie sich die Eigenschaft von Wasser ändert, wenn man die Temperatur von 310 auf 311 ^oC erhöht.

Die meisten klassischen Verfahren der Numerik sind a-priori für die Untersuchung qualitativer Änderungen von physikalischen Systemen nicht geeignet (Ausnahme: Intervallarithmetik). Für den numerischen Nachweis eines Sprunges müßten die "Daten" ihre "kritischen" Werte mit absoluter Präzission einnehmen. Da man jedoch a-priori diese "kritischen" Werte nicht kennt, ist ein "zufälliges" Treffen dieser kritischen Daten höchst unwahrscheinlich. Nur analytische Verfahren erlauben die systematische Bestimmung bzw. Auffindung und Klassifizierung (= Katastrophentheorie) der Modellsingularitäten, die den kritischen Modellzuständen (also den Stellen struktureller Instabilität) entsprechen.

Abschließend sei betont, daß sich numerische und analytische Verfahren ergänzen. Der Einsatz numerischer Verfahren ist häufig unumgänglich, wenn es um das letztendliche "Ausrechnen" von Lösungen geht, die mit Hilfe analytischer Verfahren bestimmt wurden.

2 Sphärisch expandierende Konfigurationen

2.1 Beispiele

In den vergangenen 20-30 Jahren bestand ein großes astronomisches Interesse am Strahlungstransport in (sphärisch) expandierenden Konfigurationen (siehe [27], [30], [21], [22]). Zum einen schenkte man dem Massenverlust von beinahe allen Sternen, so wie z.B. der Wolf-Rayet-Sterne, große Aufmerksamkeit. Die Oberflächentemperaturen der Wolf-Rayet-Sterne liegen zwischen 25 000 und 50 000 K, die Leuchtkräfte zwischen 10^5 und 10^6 Sonnenleuchtkräften ($L_\odot$) und die Massen zwischen 10 und 50 Sonnenmassen ($M_\odot$). Die sehr hohen Leuchtkräfte erzeugen einen Strahlungsdruck, der starke Sternwinde antreibt und so zu einem Massenverlust von etwa 3 $M_\odot$ in einer Million Jahren führt. Viele Zentralsterne von planetarischen Nebeln sind Wolf-Rayet-Sterne, was darauf hinweist, daß noch höhere Massenverlustraten auftreten können (dies jedoch wahrscheinlich unmittelbar vor der Wolf-Rayet-Entwicklungsphase). Zum anderen lösten in den letzten 1-2 Jahrzehnten eine Reihe spektakulärer Novae- und Supernovaeausbrüche ein reges Interesse an sphärischen Medien aus, die mit großen Geschwindigkeiten expandieren (siehe z.B. [14] und [24]). In den Hüllen der expandierenden Novae und Supernovae erfolgt der Energietransport durch Strahlung, der durch die Gleichung (5) in allen Ordnungen v/c beschrieben wird.

Novae treten nach heutiger Auffassung in kataklysmischen Doppelsternsystemen auf, in denen auf einen Primärstern vom Typ eines Weißen Zwergs (WD) Masse von einem Sekundärstern übergeht. Dieser Sekundärstern ist meist ein roter Stern, der so seine Roche-Fläche auffüllt. Die auf dem WD aufgesammelte, wasserstoffreiche Materie kann thermonuklear instabil werden: Die auf den WD akkretierte Schicht wächst mit der Zeit an und die Materie wird teilweise mit der Materie des Kerns des WD vermischt. Dabei steigt die Temperatur am "Boden" der wasserstoffreichen Schicht so stark an, bis die Zündtemperatur des Wasserstoffbrennens (H-Brennen) überschritten wird. Die weitere Entwicklung des nuklearen Brennens hängt dann von der Masse und der Leuchtkraft des WD, der Akkretionsrate und der chemischen Zusammensetzung der brennenden Schicht ab ([38],[39],[36],[40], [37]). Ein thermonuklearer "Runaway" tritt auf, wenn das H-Brennen in einer Schicht einsetzt, in der die Elektronen Fermi-Dirac entartet sind. Dabei steigen die Temperaturen in der brennenden Schicht auf mehr als 10^9 K an und die während des CNO-Brennens erzeugten β^+-instabilen Kerne bestimmen den weiteren Verlauf der Nova-Explosion.

Ein weiteres interessantes Beispiel ist der Strahlungstransport in sphärisch expandierenden Supernovahüllen. Im folgenden werden wir Supernova mit SN bzw. Supernovae mit SNe abkürzen. SNe II (eine Klassifikation der SNe und Charakterisierung der einzelnen Typen findet man in [15]) entstehen nach heutiger Ansicht als Endprodukt der Entwicklung massiver Sterne ([45],[12], [26]): Am Ende der Entwicklung eines Sterns mit ca. $8 - 50$ $M_\odot$ Anfangsmasse hat sich ein massiver "Eisenkern" aus Elementen der Eisengruppe gebildet. Um den Kern befinden sich Schalen mit der "Asche" der vorangegangenen Brennphasen. Man findet als äußerste Schicht noch Materie derselben Zusammensetzung wie bei der Bildung des Sterns. Weitere Brennprozesse sind nicht möglich und somit kann die Gravitation nicht mehr durch den Strahlungsdruck kompensiert werden. Der Stern wird instabil gegen Elektroneneinfang, Photodesintegration und Paarerzeugung und kollabiert. Beim Kollaps kann eine Stoßwelle einen Teil der äußeren Schichten des Sterns über die Fluchtgeschwindigkeit beschleunigen und dabei aufheizen. Die abgestoßene Hülle expandiert innerhalb des ersten Monats nach der Explosion frei in den interstellaren Raum. Man bezeichnet dieses Stadium der Entwicklung einer SN als Phase der freien Expansion oder "Coasting Phase". Später holt die im Verlauf der Expansion sehr stark verdünnte Hülle die in den früheren Entwicklungsphasen des Elternsterns als Wind abgegebene Materie ein, wobei durch Wechselwirkung Röntgenstrahlung erzeugt wird. Im weiteren Verlauf der Entwicklung des "SN-Remnants" (SNR) wird dann die abgestoßene Materie als Nebel im Optischen sichtbar, und schließlich nimmt die Materiedichte so stark ab, daß keine Unterscheidung zur Interstellaren Materie mehr möglich ist, womit das Ereignis SN endet.

2.2 Warum sind SNe für die Astronomie interessant?

SNe sind vor allem unter zwei Gesichtspunkten für die Astronomie von Interesse: Zum einen bildet die durch SNe freigesetzte Materie die wohl stärkste Quelle prozessierter, d.h. durch mindestens einen Brennzyklus gelaufener Materie für das Interstellare Medium (ISM) der jeweiligen Elterngalaxie [1]. Dabei sind weniger SN Ia interessant, da sie hauptsächlich Elemente der Fe-Gruppe freisetzen. Hier findet in den Gebieten der Population II (Halo von Spiralgalaxien, elliptische Galaxien) mangels interstellarer Materie keine Sternentstehung mehr statt. Im Gegensatz zu SN Ia stellen die SNe II (sowie SN Ib, SN Ic) Vertreter der Population I dar, welche die interstellare Materie in den Armen von Spiralgalaxien durch vornehmlich intermediäre Elemente (CNO-Gruppe, Si, S, Ca und Mg) anreichern (während die Elemente der Eisen-Gruppe vermutlich zum größten Teil im Neutronenstern "gebunden" sind). Zum anderen gibt die expandierende Hülle neben prozessierter Materie auch Strahlungs- und kinetische Energie an das ISM ab. Dies führt zu Sternentstehung in der Umgebung der SNe, wobei die prozessierte Materie in die neu entstehenden Sterne "miteingebaut" wird. SNe II sollten also wegen der Freisetzung neu gebildeter Elemente und durch die Aufheizung wegen der kinetischen Energie die chemische Entwicklung ihrer Elterngalaxien maßgeblich mitbestimmen.

2.3 Warum ist die Modellierung von SNe II wichtig?

Aussagen über die die SN II-Atmosphären charakterisierenden Parameter und damit Aufschlüsse über deren chemische Zusammensetzung und die Leuchtkraft, sowie über die jeweilige Entfernung erhofft man sich, indem man versucht Modellspektren (-Sequenzen) zu berechnen.

Bei der Modellierung von SNe II-Spektren gibt es derzeit zwei "Grundströmungen", nämlich die hydrodynamische und die empirische Modellierung: Bei der *hydrodynamischen* Modellierung (vgl. [44], [2]) werden vereinfachte Modelle der ausgedehnten Hüllen von Roten Riesen (mit Radien von ca. 10^{13} cm bis 10^{14} cm) und eine Punktexplosion (bei der ca. 10^{51} erg als kin. Energie für die nach außen gerichtete Stoßwelle angesetzt werden) angenommen. Somit können insbesondere die Lichtkurven von SNe II-P gut reproduziert werden. Bei diesen Modellen liegt der Schwerpunkt auf der Modellierung der hydrodynamischen Aspekte (z.B. Expansionsgeschwindigkeit), der Art und dem Ausmaß der neu synthetisierten Elemente, sowie dem Verlauf der Lichtkurve (Heizung durch den Zerfall bei der Explosion neu gebildeter radioaktiver Elemente). Leider ist dieses Modell als Konzept noch nicht vollständig geschlossen, so geht z.B. die Explosionsenergie im wesentlichen als frei zu wählender Parameter in die Modelle ein.

Im Gegensatz dazu verfolgt das *empirische* Modellieren von (SN II-) Spektren die genau entgegengesetzte Richtung: Während bei der hydrodynamischen Modellierung der Schwerpunkt auf der Vorgabe einer Anfangskonfiguration (Hüllenmasse und Explosionsenergie) und der daraus resultierenden zeitlichen Entwicklung liegt (Lichtkurve und Heizung der Atmosphäre durch die bei der SN II-Explosion neu gebildeten radioaktiven Elemente), steht bei der empirischen Modellierung das Anpassen (Fitten) eines synthetischen Spektrums durch Variieren der Modellparameter an ein zu einem bestimmten Zeitpunkt beobachtetes Spektrum im Vordergrund.

Diese Vorgehensweise entspricht im Prinzip dem Modellieren von Sternen im hydrostatischen Gleichgewicht; allerdings gibt es dabei einen wesentlichen Unterschied: eine SN II ist kein hydrostatisches Objekt, d.h. die auftretenden hydrodynamischen Effekte (z.B. die Expansionsgeschwindigkeit) müssen jeweils individuell an den Zeitpunkt der Beobachtung angepaßt werden. Man hält also die expandierende SN II-Hülle zu einem bestimmten Zeitpunkt "fest", modelliert dann explizit die für den Moment festgehaltene bzw. "eingefrorene" Hydrodynamik unter der Bedingung, daß dieser Momentzustand bezüglich des Strahlungsfeldes stationär sei. Dies führt natürlich, im Vergleich zum Modellieren von hydrostatischen Objekten, zu einer größeren Anzahl von benötigten *Modellparametern* (bzw. Freiheitsgraden).

Allerdings ist dieser Ansatz nur in den frühen Stadien der SN II-Entwicklung gerechtfertigt. Während dieser Zeit kann die SN II noch als eine "aufgeblähte Version" des Vorgängersterns betrachtet werden und zwar im Verlauf einer Phase der freien Expansion ("Coasting Phase"). Im übrigen zeigt ein Vergleich, daß die hydrodynamische Zeitskala wesentlich größer ist als die radiative. Somit befindet sich das System für jede hydrodynamische Momentaufnahme praktisch im (Strahlungs-) Gleichgewicht. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich die bei der SN II-Explosion neu gebildeten radioaktiven Elemente noch in zu großen optischen Tiefen, als daß sie durch ihren Zerfall die Photosphäre heizen und damit aus dem Strahlungsgleichgewicht bringen könnten. Dieser Umstand erleichtert das Modellieren ganz erheblich. Hinzu kommt die Möglichkeit, die chemische Zusammensetzung zu bestimmen, die der SN II-Elternstern zum Zeitpunkt der Explosion hatte. Da seine äußere (Wasserstoff-) Hülle nicht durch den Brennkreislauf des Elternsterns gelaufen ist, stimmt ihre chemische Zusammensetzung mit der Wolke überein, aus der sich die Prä-SN einst gebildet hat. Diese "ursprünglichen" Häufigkeiten sollten zusammen mit der Anreicherung von einzelnen Elementen, die in früheren hydrostatischen Brennphasen des Elternsterns gebildet wurden und in die äußere Schicht bereits vorgedrungen sind, Hinweise auf die Natur und den Entwicklungsweg (z.B. Massenverlust durch Sternwinde) einer Prä-SN und damit auch zur chemischen Entwicklung von Galaxien liefern.

3 Relativistische Strahlungstransportgleichung

In diesem Kapitel soll eine relativistische Strahlungstransportgleichung im Lagrange-System bezüglich eines mitbewegten Beobachters ("Comoving Frame") abgeleitet werden, in dem *alle* physikalischen Größen, sowohl für Strahlung als auch für Materie, im "Comoving Frame" ausgedrückt werden.

3.1 Herleitung

Es existieren zwei mögliche Wege, auf denen die relativistische Strahlungstransportgleichung hergeleitet werden kann, wobei jeder für sich Vorteile besitzt:
(a) Der erste Weg benutzt die spezielle Relativitätstheorie (SRT) in einer inertialen Raumzeit, um eine Gleichung abzuleiten, die in allen Ordnungen v/c korrekt ist. Daraufhin kann man das Ergebnis auf die erste Ordnung in v/c reduzieren. In dieser Approximation kann man beruhigt Galilei-Relativität verwenden, da alle Terme erster Ordnung in v/c berücksichtigt worden sind und alle vernachlässigten SRT-Terme der Ordnung v^2/c^2 und höher sind. Somit kann eine komplette Lagrange-Formulierung konstruiert werden, und zwar durch eine geeignete Anordnung der Termen, die auf eine Lagrangesche Zeitableitung D/Dt führt.

Wenn man die relativistischen Gleichungen der Hydrodynamik herleitet (siehe [30]), kann man den Energie-Spannungs-Tensor der Materie in Abhängigkeit von Eigengrößen ausdrücken und die Ableitung in einer inertialen Raumzeit berechnen. Falls man Strahlung behandeln möchte, kann man den gleichen Weg beschreiten, wobei man eine Transportgleichung erhält, deren Intensitäten, Materieeigenschaften, Winkel und Frequenzen im "Comoving Frame" ausgedrückt sind; die Geschwindigkeit und die radiale Koordinate können im Laborsystem geschrieben werden.

Die Transportgleichung (4) für expandierende und kollabierende sphärisch-symmetrische Konfiguratione im Inertialsystem lautet [30]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\hat{I}(r,t;\mu,\nu)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\hat{I}(r,t;\mu,\nu)}{\partial r}+\frac{(1-\mu^2)}{r}\frac{\partial\hat{I}(r,t;\mu.\nu)}{\partial\mu}$$
$$=\hat{\eta}(r,t;\nu)-\hat{\chi}(r,t;\nu)\hat{I}(r,t;\mu,\nu)\quad . \tag{6}$$

Dabei sind r die radiale Koordinate, μ der Kosinus des Winkels zwischen der Strahlrichtung und der Normalen zur Oberfläche und ν die Frequenz. $\hat{I}=\hat{I}(r,t;\mu,\nu)$[1] bezeichnet die spezifische Intensität beim Radius r und der Frequenz ν in Richtung $\arccos\mu$. Der Emissionskoeffizient $\hat{\eta}=\hat{\eta}(r,t;\nu)$ beschreibt die Strahlungsquellen in der Materie und $\hat{\chi}=\hat{\chi}(r,t;\nu)$ ist der Extinktionskoeffizient.[2]

[1] $\hat{I}$ entspricht der spezifischen Intensität aus Kapitel 1

[2] Die "Comoving Frame"-Größen bekommen zur Unterscheidung einen Index "0"

Indem man die Transformationsgesetze

$$\begin{aligned}\hat{I}(r,\mu,\nu) &= \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3 \hat{I}_0(r,\mu_0,\nu_0) \qquad , \\ \hat{\eta}(r,\nu) &= \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \hat{\eta}_0(r,\nu_0) \qquad \text{und} \\ \hat{\chi}(r,\nu) &= \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right) \hat{\chi}_0(r,\nu_0)\end{aligned} \tag{7}$$

zwischen den Intensitäten und den Materieeigenschaften im Laborsystem und im "Comoving Frame" verwendet, erhält man nach einigen Umformungen und einer Reihe von Ableitungen die zeitabhängige, relativistische Strahlungstransportgleichung in sphärischer Symmetrie im "Comoving Frame" [30]:

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{c}(1+\beta\mu_0)\frac{\partial \hat{I}_0}{\partial t} + \gamma(\mu_0+\beta)\frac{\partial \hat{I}_0}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \mu_0}\left\{\gamma(1-\mu_0^2)\left[\frac{(1+\beta\mu_0)}{r} - \gamma^2(\mu_0+\beta)\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{c}(1+\beta\mu_0)\frac{\partial\beta}{\partial t}\right]\hat{I}_0\right\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \nu_0}\left\{\gamma\nu_0\left[\frac{\beta(1-\mu_0^2)}{r} + \gamma^2\mu_0(\mu_0+\beta)\frac{\partial\beta}{\partial r} + \frac{\gamma^2}{c}\mu_0(1+\beta\mu_0)\frac{\partial\beta}{\partial t}\right]\hat{I}_0\right\} \\ &\quad + \gamma\left\{\frac{2\mu_0+\beta(3-\mu_0^2)}{r} + \gamma^2(1+\mu_0^2+2\beta\mu_0)\frac{\partial\beta}{\partial r} + \frac{\gamma^2}{c}\left[2\mu_0+\beta(1+\mu_0^2)\right]\frac{\partial\beta}{\partial t}\right\}\hat{I}_0 \\ &= \hat{\eta}_0 - \hat{\chi}_0\hat{I}_0 \ .\end{aligned} \tag{8}$$

Die Expansionsgeschwindigkeit $v(r)$ wird in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c gemessen: $\beta(r) = v(r)/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Die Gleichung (8) gilt für alle Geschwindigkeitsbereiche und kann somit z.B. zur Beschreibung des Strahlungstransports in der kosmischen Expansion herangezogen werden. Jedoch gilt für viele Ströme $v/c \ll 1$ und es genügt, nur mit erster Ordnung in v/c zu arbeiten.

Einen ähnlichen Weg beschreitet eine Gruppe aus Heidelberg [4] , jedoch mit dem entscheidenden Vorteil, daß nicht, wie oben erwähnt, zuerst die Strahlungstransportgleichung transformiert und erst danach versucht wird, eine Lösung zu finden. Sondern man sucht als erstes die Lösung, was für den nicht-relativistischen Fall wesentlich einfacher ist, und transformiert anschließend diese Lösung. Dies beinhaltet, daß es nicht mehr notwendig ist, die Strahlungstransportgleichung für sehr schnell expandierende (oder kollabierende) sphärische Konfigurationen hinzuschreiben. Die Lösung kann sehr leicht durch eine Punkttransformation (z.B. eine Lorentz-Transformation) erhalten werden! Die Lösung von Baschek et al. [4] im "Comoving Frame" lautet:

$$
\begin{aligned}
I(r,\mu_0,\lambda_0) &= I(R,\mu_0,\lambda_0) \\
&\quad \times \exp\left(-\int_R^r \frac{\lambda_0\chi_0(r',g(r',\mu_0,\lambda_0))}{g(r',\mu_0,\lambda_0)} \frac{r'dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2h^2(r',\mu_0)}}\right) \\
&\quad + \int_R^r \exp\left(-\int_{r'}^r \frac{\lambda_0\chi_0(r',g(r'',\mu_0,\lambda_0))}{g(r'',\mu_0,\lambda_0)} \frac{r''dr''}{\sqrt{r''^2 - r^2h^2(r'',\mu_0)}}\right) \\
&\quad \times \frac{\lambda_0\tilde{\eta}_0(r',g(r',\mu_0,\lambda_0))}{g(r',\mu_0,\lambda_0)} \frac{r'dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2h^2(r',\mu_0)}} \quad , \qquad (9)
\end{aligned}
$$

mit den Funktionen

$$
h(r,\mu_0) = \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{\gamma(1+\mu_0\beta} \; , \qquad (10)
$$

$$
g(r,\mu_0,\lambda_0) = \gamma(1+\beta\mu_0)\lambda_0 \; . \qquad (11)
$$

R ist der Radius der Sphäre, r die radiale Koordinate, $\tilde{\eta}_0 = \lambda_0^5\eta$ der Emissions- und χ_0 der Extinktionskoeffizient und λ_0 die Wellenlänge im "Comoving Frame".
(b)Alternativ kann man die Strahlungstransportgleichung von Anfang an in einem nicht-inertialen Lagrange-System herleiten, indem man die Techniken der Allgemeinen Relativitätstheorie verwendet [30]. Hierbei erhalten wir Ergebnisse, die bis zur ersten Ordnung v/c genau sind, welche jedoch einen besseren Überblick über die innewohnende Physik und einen tieferen Einblick in die geometrischen Aspekte des Problems liefern.

3.2 Erläuterungen zum "Comoving Frame"

In der Strahlungshydrodynamik enthält der "Comoving Frame" eines Flüssigkeitspakets einen Satz von Bezugssystemen, wobei jedes eine Geschwindigkeit hat, die mit der des Pakets übereinstimmt. Es ist klar, daß dieses System mit dem Lagrange-System der dynamischen Flüssigkeiten (bezüglich eines mitbewegten Beobachters) identisch ist. Hinzu kommt, daß es das System ist, in welchem die mikroskopische Beschreibung der Materieeigenschaften duch die Thermodynamik und die statistische Mechanik Anwendung findet. Außerdem ist es das System, in welchem Details der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie (z.B. die partielle Wiederverteilung durch Streuung) am einfachsten behandelt werden können [28]. Weiterhin bietet es Vorteile bei der Berechnung, da hier die Materieeigenschaften isotrop sind und die Frequenzgitter (-punkte) üblicherweise Taylor entwickelt werden können, um das Absorptionsspektrum der Materie korrekt zu beschreiben. Der letzte Punkt ist besonders wichtig für die Probleme der Linienbildung [29]. Somit ist der "Comoving Frame" das natürliche System für eindimensionale Fluß-Probleme, wie der radialen Pulsation, und es ist das System, das immer (sowohl explizit als auch implizit) für Sternentwicklungsberechnungen benutzt wird, die die Diffusionslösung der Transportgleichung verwenden. Da das Geschwindigkeitsfeld eines Flußes im allgemeinen eine Funktion sowohl der Position als auch der Zeit ist, ist der "Comoving Frame", verbunden mit irgendeinem speziellen Flüssigkeitselement, ein Nicht-Inertialsystem. Somit sind die Photonen-Trajektorien im "Comoving Frame" keine euklidisch geraden Linien, sondern Geodäten, deren Form durch die Metrik der gekrümmten (d.h. Nicht-Minkowski'schen) Raumzeit bestimmt ist, durch welche sich die Photonen bewegen. Hinzugefügt sei, daß die Photonfrequenzen in diser Raumzeit nicht konstant sind. Daraus folgt, daß die Transportgleichung im "Comoving Frame" wesentlich komplizierter ist, als die Gleichung im Laborsystem und Ableitungen bezüglich Winkel und Frequenz, zusätzlich zur Raumkoordinate und Zeit, enthält.

4 Vereinfachte Strahlungstransportgleichung

4.1 Wichtigste Annahmen

Wir betrachten hier Modellatmosphären für expandierende und kollabierende sphärisch-symmetrische Konfigurationen. Die wichtigsten Annahmen, die zum Lösen der Strahlungstransportgleichung gemacht werden, lauten:

- Die Ausdehnung bzw. der Kollaps der Konfiguration erfolgt sphärisch-symmetrisch.
- Man geht davon aus, daß in der Sphäre Strahlungsgleichgewicht herrscht, d.h., daß keine Dissipation mechanischer Energie und keine Heizung durch radioaktive Kerne stattfindet.
- Da die hydrodynamische Zeitskala wesentlich größer ist als die radiative, kann man davon ausgehen, daß sich das System für jede hydrodynamische Momentaufnahme im (Strahlungs-) Gleichgewicht befindet und so nimmt man zum Lösen der Strahlungstransportgleichung an, daß das Strahlungsfeld stationär ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) sei. Dies führt uns hauptsächlich zu einer "rein" spektroskopischen Analyse, d.h. der Modellierung einer Augenblicksaufnahme der bewegten Atmosphäre.
- Weiterhin nimmt man $\beta = v/c \ll 1$ an. D.h., es werden nur Terme erster Ordnung in β in der Strahlungstransportgleichung berücksichtigt, so daß die Advcektions- und Aberrationsterme vernachlässigt werden können. Es ist durchaus möglich die Ergebnisse dieser Arbeit bis zu $\beta \approx 0.2$ anzuwenden und gleichzeitig eine angemessene Genauigkeit zu erzielen, so daß insbesondere expandierende SN-Atmosphären, mit Expansionsgeschwindigkeiten bis zu 40 000km/s, miteinbezogen werden können.
- Es soll ein lineares Geschwindigkeitsgesetz gelten, d.h., die Geschwindigkeit β soll linear von der radialen Koordinate r abhängen.
- Hinzu kommt noch, daß man die Strahlungstransportgleichung für den "grauen" Fall löst. Das bedeutet, daß der Extinktionskoeffizient χ frequenzunabhängig ist. Daraus folgt, daß man nun mit einer frequenz-integrierten Intensität und frequenz-integrierten Strahlungsgrößen weiterarbeiten kann.

4.2 Die Momentengleichungen

Die *zeitunabhängige*, relativistische Strahlungstransportgleichung in sphärischer Symmetrie im "Comoving Frame" lautet:

$$\hat{e}\frac{\partial \hat{I}_0}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu_0}(\hat{f}\hat{I}_0) - g\frac{\partial}{\partial \nu_0}(\nu_0 \hat{I}_0) + \hat{h}\hat{I}_0 = \hat{\eta}_0 - \hat{\chi}_0 \hat{I}_0 \ , \tag{12}$$

mit den Hilfsfunktionen:

$$\hat{e}(r,\mu_0) = \gamma(\mu_0+\beta), \tag{13}$$

$$\hat{f}(r,\mu_0) = \gamma(1-\mu_0^2)\left[\frac{1+\beta\mu_0}{r} - \gamma^2(\mu_0+\beta)\frac{\partial\beta}{\partial r}\right], \tag{14}$$

$$\hat{g}(r,\mu_0) = \gamma\left[\frac{\beta(1-\mu_0^2)}{r} + \gamma^2\mu_0(\mu_0+\beta)\frac{\partial\beta}{\partial r}\right], \tag{15}$$

$$\hat{h}(r,\mu_0) = \gamma\left[\frac{2\mu_0+\beta(3-\mu_0^2)}{r} + \gamma^2(1+\mu_0^2+2\beta\mu_0)\frac{\partial\beta}{\partial r}\right]. \tag{16}$$

Die Form der Quellen und Senken auf der rechten Seite von Gleichung (12) ist im allgemeinen folgendermaßen festgelegt: Der Emissionsterm $\hat{\eta}_0$ ist durch die Summe der thermischen Emission $(\kappa_0^c+\kappa_0^l)B_\lambda(T)r^2$, der Kontinuums- und Linien-NLTE-Emission η_0^N und der Streuterme σJ_0 gegeben, wobei man im letzten Term isotrope und kohärente Streuung im "Comoving Frame" annimmt. κ_0^c und κ_0^l sind jeweils der Kontinuums- und der Linien-LTE-Absorptionskoeffizient. $J_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_0 d\mu$ ist die mittlere Intensität. Die Extinktion ist dann durch $\hat{\chi}_0 = \kappa_0^c + \kappa_0^l + \kappa_c^N + \kappa_l^N + \sigma$ gegeben.

Man beachte, daß in dieser Arbeit zum Lösen der Strahlungstransportgleichung nur Kontinuums-LTE-Absorption bzw. geeignete Mittelwerte berücksichtigt werden. D.h., es werden weder explizit Linienabsorption, noch NLTE- oder Streuterme miteinbezogen. Damit reduziert sich der hier verwendete Extinktionskoeffizient auf $\hat{\chi}_0 = \kappa_0^c$ bzw. einen geeigneten Mittelwert. Nun können wir weiter ausnutzen, daß es ausreicht, die Strahlungstransportgleichung in erster Ordnung in β zu schreiben:

$$e\frac{\partial\hat{I}_0}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\mu_0}(f\hat{I}_0) - g\frac{\partial}{\partial\nu_0}(\nu_0\hat{I}_0) + h\hat{I}_0 = \hat{\eta}_0 - \hat{\chi}_0\hat{I}_0\ . \tag{17}$$

Zwar verändert sich die Struktur der Gleichung nicht wesentlich, jedoch vereinfachen sich die Hilfsfunktionen erheblich und reduzieren sich auf:

$$e(r,\mu_0) = (\mu_0+\beta)\ , \tag{18}$$

$$f(r,\mu_0) = (1-\mu_0^2)\left[\frac{1}{r} + \mu_0\left(\frac{\beta}{r} - \frac{\partial\beta}{\partial r}\right)\right]\ , \tag{19}$$

$$g(r,\mu_0) = \frac{\beta(1-\mu_0^2)}{r} + \mu_0^2\frac{\partial\beta}{\partial r}\ , \tag{20}$$

$$h(r,\mu_0) = \frac{2\mu_0+\beta(3-\mu_0^2)}{r} + (1+\mu_0^2)\frac{\partial\beta}{\partial r}\ . \tag{21}$$

Die Terme in Gleichung (17) sind in einer konservativen Form angeordnet (siehe [30]).

Integriert man nun in Gleichung (17) über alle Winkel im "Comoving Frame" und definiert die *vier Strahlungsmomente*

$$\left\{\hat{J}_0, \hat{H}_0, \hat{K}_0, \hat{Q}_0\right\} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu_0^{\{0,1,2,3\}} \hat{I}_0(r, \mu_0.\nu_0) d\mu_0 \tag{22}$$

($\hat{J}_0$ ... mittlere Intensität, $\hat{H}_0$ ... Eddington-Fluß), so erhält man die frequenzabhängigen Momentengleichungen. Um uns die physikalische Bedeutung der Momentengleichungen klarzumachen, integrieren wir zunächst einerseits die Gleichung (17) über μ_0 und erhalten somit die *zeitunabhängige monochromatische Strahlungsenergiegleichung*:

$$\begin{aligned} v\frac{\partial \hat{E}_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \hat{F}_0\right) + \frac{v}{r}\left(3\hat{E}_0 - \hat{P}_0\right) & \\ +\frac{\partial v}{\partial r}\left(\hat{E}_0 + \hat{P}_0\right) & \\ -\frac{\partial}{\partial \nu_0}\left[\nu_0\left(\frac{v}{r}(\hat{E}_0 - \hat{P}_0) + \frac{\partial v}{\partial r}\hat{P}_0\right)\right] & \\ = \; 4\pi\hat{\eta}_0 - c\hat{\chi}_0\hat{E}_0 \; . & \end{aligned} \tag{23}$$

Andererseits erhalten wir die *zeitunabhängige monochromatische Strahlungsimpulsgleichung*, indem wir Gleichung (17) mit μ_0 multiplizieren und anschließend über μ_0 integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{v}{c^2}\frac{\partial \hat{F}_0}{\partial r} + \frac{\partial \hat{P}_0}{\partial r} + \frac{3\hat{P}_0 - \hat{E}_0}{r} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right)\hat{F}_0 & \\ -\frac{\partial}{\partial \nu_0}\left\{\nu_0\left[\frac{v}{c^2 r}(\hat{F}_0 - \hat{Q}_0) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial v}{\partial r}\hat{Q}_0\right]\right\} & \\ = \; -\frac{1}{c}\hat{\chi}_0\hat{F}_0 \; . & \end{aligned} \tag{24}$$

Hierbei wird die Strahlungsenergie $\hat{E}_0$, der Strahlungsfluß $\hat{F}_0$, der Strahlungsdruck $\hat{P}_0$ und das vierte Moment wie folgt definiert:

$$\hat{E}_0(r,\nu_0) = \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1} \hat{I}_0(r,\mu_0,\nu_0) d\mu_0 \; , \tag{25}$$

$$\hat{F}_0(r,\nu_0) = 2\pi\int_{-1}^{1} \mu_0\hat{I}_0(r,\mu_0,\nu_0) d\mu_0 \; , \tag{26}$$

$$\hat{P}_0(r,\nu_0) = \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1} \mu_0^2\hat{I}_0(r,\mu_0,\nu_0) d\mu_0 \; , \tag{27}$$

$$\hat{Q}_0(r,\nu_0) = 2\pi\int_{-1}^{1} \mu_0^3\hat{I}_0(r,\mu_0,\nu_0) d\mu_0 \; . \tag{28}$$

Integriert man nun die Gleichung (23) und (24) über die Frquenzen im "Comoving Frame", so erhält man zum einen die *Strahlungsenergiegleichung*

$$v\frac{\partial E_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_0\right) + \frac{v}{r}\left(3E_0 - P_0\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\left(E_0 + P_0\right) = \int_0^\infty \left(4\pi\hat{\eta}_0 - c\hat{\chi}_0\hat{E}_0\right) d\nu_0 \ , \tag{29}$$

zum anderen die *Strahlungsimpulsgleichung*

$$\frac{v}{c^2}\frac{\partial F_0}{\partial r} + \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{3P_0 - E_0}{r} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) F_0 = -\frac{1}{c}\int_0^\infty \hat{\chi}_0\hat{F}_0 d\nu_0 \ . \tag{30}$$

Die Größen ohne "ˆ" sind somit die frequenzintegrierten Gegenstücke.

Einer der Gründe, weshalb man nicht die eine Strahlungstransportgleichung löst, sondern zwei Momentengleichungen behandelt, liegt darin, daß in der Strahlungsenergie- und Strahlungsimpulsgleichung die Verknüpfung zwischen dem Strahlungsfeld und den physikalischen Größen (Energie und Druck) deutlicher hervortritt. Die Beziehung zwischen den Strahlungsmomenten J_0, H_0 und K_0 und den physikalischen Größen Energie, Fluß und Druck kann man sich mit Hilfe der Gleichungen (22) und (25) klarmachen:

$$E_0 = \frac{4\pi}{c} J_0 \ , \tag{31}$$

$$F_0 = 4\pi H_0 \ , \tag{32}$$

$$P_0 = \frac{4\pi}{c} K_0 \ . \tag{33}$$

Wenn man jetzt noch den Spezialfall einer "grauen" Atmosphäre mitberücksichtigt, erhält man folgende Momentengleichungen:

$$\beta\frac{\partial J_0}{\partial r} + \frac{2}{r}H_0 + \frac{\partial H_0}{\partial r} + \frac{\beta}{r}(3J_0 - K_0) + \frac{\partial \beta}{\partial r}(J_0 + K_0) = -\chi_0(J_0 - S_0) \tag{34}$$

($S_0 = \eta_0/\chi_0$ ... Quellfunktion) und

$$\beta\frac{\partial H_0}{\partial r} + \frac{\partial K_0}{\partial r} + \frac{1}{r}(3K_0 - J_0) + 2(\frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\beta}{r})H_0 = -\chi_0 H_0 \ . \tag{35}$$

Allerdings haben diese beiden Gleichungen noch nicht die für unsere Arbeit endgültige Form. Man hat zusätzlich die Freiheit, eine Längenskala der radialen Koordinate einzuführen und diese, durch die Definition des *äußeren* Radius bei $r_a = 1$, zu fixieren. Desweiteren soll für jedes Volumenelement Strahlungsgleichgewicht im "Comoving Frame" gelten:

$$S_0 = J_0 \ . \tag{36}$$

Für sphärisch-symmetrische Strahlungsproblemen ist es geschickter, eine "r^2-Version" der Stahlungsmomente einzuführen (vgl [19]), welche die geometrische Verdünnung der Strahlung mitberücksichtigt:

$$\mathcal{I}_0 = r^2\, I_0 \ , \quad \mathcal{J}_0 = r^2\, J_0 \ , \quad \mathcal{H}_0 = r^2\, H_0 \ , \quad \mathcal{K}_0 = r^2\, K_0 \ . \tag{37}$$

Die (für unsere Arbeit) endgültige Form der Momentengleichungen lautet somit

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial r} + \beta \frac{\partial \mathcal{J}_0}{\partial r} - \frac{\beta}{r}(\mathcal{K}_0 - \mathcal{J}_0) + \frac{\partial \beta}{\partial r}(\mathcal{K}_0 + \mathcal{J}_0) = 0 \; , \tag{38}$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial r} + \beta \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial r} + \frac{1}{r}(\mathcal{K}_0 - \mathcal{J}_0) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathcal{H}_0 = -\chi_0 \mathcal{H}_0 \; . \tag{39}$$

5 Strahlungsmomente im bewegten Fall

5.1 Lösen der statischen Momentengleichungen

Für den statischen Fall (der nachfolgend mit dem Index "stat" angedeutet wird) wird von Hummer und Rybicki [20] unter der Annahme, daß für den Extinktionskoeffizienten χ_0 ein *Potenzgesetz* der Form

$$\chi_0(r) = \chi_{stat} \cdot r^{-N} \tag{40}$$

gilt, eine *analytische Näherungslösung* für die mittlere Intensität J_{stat} im statischen Fall abgeleitet. Allerdings verwenden Hummer und Rybicki für ihre Betrachtungen andere Einheiten für χ_0 und r. So setzen sie $\chi_{\mathrm{stat}} = 0$ und beziehen die radiale Koordinate r auf den Photosphärenradius und erhalten dann im *statischen* Fall für die mittlere Intensität J_{stat} in Abhängigkeit vom Dichteexponenten N und der optischen Tiefe τ (die mit der radialen Koordinate über die Beziehung $\tau = \int \chi(r)dr$ verbunden ist):

$$J_{stat}(\tau) \simeq 3H_{stat}\left[\left(\frac{N-1}{N+1}\right) \cdot \tau + \frac{1}{3}\right] \ , \tag{41}$$

wobei H_0 der beobachtete Eddington-Fluß, der mit der gemessenen Leuchtkraft L_0 über die Beziehung $H_0 = L_0 \cdot (4\pi)^{-2}$ verknüpft ist.

Um nun Gleichung (41) mit unseren, in diesem Kapitel vorgestellten Lösungen vergleichen zu können, skizzieren wir hier kurz die Herleitung der Formel (41) nach Hummer und Rybicki: Im statischen Fall vereinfacht sich nämlich die Struktur der Momentengleichungen (siehe auch Kapitel 5.3) durch $\beta = 0$ derart, daß sich (38) und (39) entkoppeln. So dient dann die Lösung der ersten Momentengleichung (38) $\partial H_{stat}/\partial r = 0$, nämlich die Konstante H_{stat} als Randbedingung zum Lösen der zweiten Momentengleichung (39). Da aber (39) immer noch zwei Unbekannte J_{stat} und K_{stat} aufweist, behelfen sich Hummer und Rybicki dadurch, daß sie die zweite Momentengleichung für die beiden Grenzfälle $\tau \to 0$ und $\tau \to \infty$ getrennt betrachten und dabei die in den Grenzfällen jeweils gültigen Relationen zwischen J_{stat} und K_{stat} benutzen, um so eine Unbekannte zu eliminieren. Die für die beiden Grenzfälle jeweils erhaltenen Lösungen werden dann zu einer Lösung zusammengesetzt, die auch die "mittleren" τ interpoliert (bzw. interpolieren soll).

Für den ersten Grenzfall $\tau \to 0$, also nahe dem Außenradius $r_a \simeq 1$, kann das Strahlungsfeld als (fast) ausschließlich auswärtsgerichtet betrachtet werden. Zusammen mit den Definitionen für die Strahlungsmomente und der Randbedingung aus der ersten Momentengleichung (38) ergibt sich dann für J_{stat}:

$$J_{stat}(r \simeq 1) \simeq H_{stat}(r \simeq 1) \ . \tag{42}$$

Der andere Grenzfall $\tau \to \infty$ ergibt sich für $r \ll r_a = 1$ und man erhält ein isotropes Strahlungsfeld. Somit kommen die μ_0-Gewichte der Strahlungsmomente zum Tragen. Der *Eddington-Faktor* $f(r)$ und die *Eddington-Randbedingung* $g(r)$, die definiert sind durch

$$f(r) \equiv \frac{K_{stat}(r)}{J_{stat}(r)} \quad \text{und} \tag{43}$$

$$g(r) \equiv \frac{H_{stat}(r)}{J_{stat}(r)} \quad , \tag{44}$$

gehen in ihre jeweiligen “isotropen Grenzfälle” $f(r) \to 1/3$ und $g(r) \to 0$ über. Diese beiden Relationen werden von Hummer und Rybicki jeweils als Konstanten in die zweite Momentengleichung, in der dann nur noch J_{stat} eine Unbekannte ist, eingesetzt. Anschließend wird die zweite Momentengleichung vom Außenradius $r_a = 1$ nach Innen integriert, und man erhält , mit der Randbedingung, daß die “isotrope” Lösung für $r \simeq 1$ verschwinden muß (vgl Gleichung (42)):

$$J_{stat}(r) = \frac{3\chi_{stat}}{N+1} \cdot \left(r^{-N+1} - 1\right) H_{stat} \ . \tag{45}$$

Durch überlagern der beiden Grenzfälle konstruieren wir nun wie Hummer und Rybicki eine Lösung für alle τ:

$$J_{stat}(r) \approx \left\{1 + \frac{3\chi_{stat}}{N+1} \cdot \left(r^{-N+1} - 1\right)\right\} H_{stat} \ . \tag{46}$$

Der in Gleichung (46) gegebene Ausdruck läßt sich mit Hilfe der Relation für die optische Tiefe

$$\begin{aligned} \tau &= -\int_1^r \chi_0(t)dt = \frac{\chi_{stat}}{N-1} \cdot \left[t^{-N+1}\right]_1^r \\ &= \frac{\chi_{stat}}{N-1} \cdot \left(r^{-N+1} - 1\right) \end{aligned} \tag{47}$$

zu der von Hummer und Rybicki benutzten Version (41) umschreiben. Allerdings weist diese analytische Lösung eine Inkonsistenz auf, da in der zweiten Momentengleichung (39) $f(r) = 1/3$ für alle r gesetzt wird, was für $r \simeq r_a$ jedoch nicht zutrifft (siehe den von Hummer und Rybicki zugrundegelegten Ansatz für $\tau \to 0$).

Die Näherungsformel von Hummer und Rybicki wurde schon wenig später von Cassinelli und Hummer [8] numerisch nachgeprüft, wobei sich nur geringfügige Abweichungen der Näherungsformel von der numerischen Lösung ergaben. Diesem Umstand und der Tatsache, daß die Computerentwicklung seit Anfang der siebziger Jahre einen starken Aufschwung nahm und somit die direkte numerische Lösung der Strahlungstransportgleichung im größeren Stil ermöglichte, ist es wohl zuzuschreiben, daß über zwei Jahrzehnte keine konsistente analytische Lösung veröffentlicht wurde. Erst seit 1994 gibt es eine

Arbeit von Baschek et al. [3], die eine konsistente analytische Lösung dieses Problems enthält. Erwähnenswert ist auf jeden Fall die jüngste Arbeit von Baschek et al. [4], die eine exakte analytische Lösung der zeitunabhängigen, relativistischen Strahlungstransportgleichung für differentiell bewegte plan-parallele oder sphärisch-symmetrische Konfigurationen enthält (eine Lösung des allgemeinen dreidimensionalen Falles mit willkürlicher Geschwindigkeit liegt ebenfalls vor).

5.2 Näherungslösung

Für den bewegten Fall müssen aus den Momentengleichungen (38) und (39), die jetzt nicht mehr entkoppeln, drei Unbekannte, nämlich die Strahlungsmomente $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{K}_0$ bestimmt werden. Die hier auftauchende Schwierigkeit der Bestimmung dreier Unbekannter aus nur zwei Gleichungen wird in der Fachliteratur als "Closure Problem" bezeichnet. Man kann dieses Problem nach Baschek et al. [3] näherungsweise "schließen" (und zwar für alle r), indem man den folgenden *anisotropen Ansatz* für $\mathcal{J}_0$ macht und damit die betreffenden Strahlungsmomente für alle r interpoliert:

$$\mathcal{I}_0(r, \mu_0) = g(r, \mu_0)\mathcal{J}_0(r) \; . \tag{48}$$

Hierbei ist $g(r, \mu_0)$ eine Gewichtsfunktion, die auf

$$\tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(r, \mu_0) d\mu_0 = 1 \tag{49}$$

normiert ist. Das "Closure Problem" wird dadurch gelöst, daß wir g als die Summe eines isotropen Anteils g^o plus einem "flußtransportierenden", auswärtsgerichteten Anteil g^* annähern. g^o beschreibt das Strahlungsfeld in sehr tief liegenden Schichten, wohingegen g^* den anisotropen Anteil in ausgedehnten sphärischen Konfigurationen beschreibt. Im Grenzfall einer unendlich weit ausgedehnten Atmosphäre wird g^* zu einer Deltafunktion um die Auswärtsrichtung $\mu_0 = 1$. Indem wir den *anisotropen Faktor* $\alpha(r)$ einführen, der den Bruchteil von g^* am gesamten g angibt, erhalten wir für die Gewichtsfunktion

$$g(r, \mu_0) = (1 - \alpha(r))\, g^o(\mu_0) + \alpha(r) g^*(\mu_0) \; , \tag{50}$$

mit

$$g^o(\mu_0) = 1, \quad g^*(\mu_0) = 4\,\delta(1 - \mu_0) \tag{51}$$

und der Normierung

$$\tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} g^o(r, \mu_0)\, d\mu_0 = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} g^*(r, \mu_0)\, d\mu_0 = 1 \, . \tag{52}$$

Wenn man den anisotropen Ansatz in die Definitionsgleichung der Strahlungsmomente (22) einsetzt, erhält man folgende Beziehungen:

$$\mathcal{H}_0 = \alpha\, \mathcal{J}_0, \quad \mathcal{K}_0 = \tfrac{1}{3}(1 + 2\,\alpha)\, \mathcal{J}_0 \, . \tag{53}$$

Vergleicht man nun dieses Ergebnis mit den Relationen, die die Strahlungsmomente miteinander verknüpfen

$$\mathcal{J}_0(r) = u(r) \cdot \mathcal{H}_0(r) \tag{54}$$

und

$$\mathcal{K}_0(r) = f(r) \cdot \mathcal{J}_0(r) = f(r)u(r) \cdot \mathcal{H}_0 \ , \tag{55}$$

so erhalten wir für die Funktion $u(r)$ und den variablen Eddington-Faktor $f(r)$:

$$u(r) = \frac{1}{\alpha(r)}\,, \quad f(r) = f(u) = \frac{1}{3}(1+\frac{2}{u}) \ . \tag{56}$$

Draus ergibt sich $\mathcal{J}_0 = u\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{K}_0 = (u+2)\mathcal{H}_0/3$.

Somit ist der variable Eddington-Faktor durch den anisotropen Ansatz in Abhängigkeit von u oder α festgelegt. Diese müssen jedoch zusammen mit $\mathcal{H}_0$ aus den zwei Momentengleichungen

$$(1+\beta\, u)\,\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial r} + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{3r} - \frac{2}{3r}\right)\mathcal{H}_0 + \frac{2}{3}\frac{\partial \beta}{\partial r}\,(2u+1)\,\mathcal{H}_0 \quad = \quad 0 \tag{57}$$

und

$$(u+2+3\beta)\,\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial r} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r} + \frac{2}{r} + 3\,\chi + 6\frac{\partial \beta}{\partial r}\right)\mathcal{H}_0 \quad = \quad 0 \tag{58}$$

bestimmt werden. Hierbei handelt es sich um ein System zweier gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung, die jeweils eine Randbedingung an den radialen Punkten r_{bc}^{u} und $r_{bc}^{\mathcal{H}_0}$ erfüllen müssen. Zusätzlich nehmen wir in dieser Arbeit noch an, daß $r_{bc}^{u} = r_{bc}^{\mathcal{H}_0} = 1$ ist. D.h., daß die beiden Randbedingungen am äußeren Radius $r_a = 1$ fixiert werden und sich somit folgende Relationen ergeben:

$$u|_{r_a} = \eta\,, \quad \mathcal{H}_0|_{r_a} = \mathcal{H}_{stat} \ . \tag{59}$$

Der zusätzliche Parameter $\eta \geq 1$ (Eddington-Randfaktor) wurde eingeführt, um den Grad der Anisotropie des Strahlungsfeldes zu beschreiben und dessen Einfluß, z.B. auf den Temperaturverlauf, zu untersuchen. Der Extremfall $\eta = 1$ liefert $\mathcal{J}_0 = \mathcal{H}_0 = \mathcal{K}_0 = 1$ (siehe Hummer und Rybicki [20] bzw. vergleiche Kapitel 5.1). Natürlich ist jede Lösung $u(r)$ korrekt, sofern in den tiefen Atmosphärenschichten $\alpha(r \to 0) = 1/u(r \to 0) \to 0$ gilt.

5.3 Störungslösung

In diesem Abschnitt möchten wir eine Störungslösung für eine graue, bewegte Atmosphäre herleiten.

Da die Momentengleichungen (57) und (58) nur bis zu erster Ordnung in β gelten, ist es zweckmäßig, ein *lineares* Geschwindigkeitsgesetz anzunehmen:

$$\beta(r) = \hat{\beta} \cdot r + \tilde{\beta} \,. \tag{60}$$

$\hat{\beta}$ und $\tilde{\beta}$ sind Konstanten, wobei erstere mit einem Gradienten und letzterer mit einer Geschwindigkeit zu identifizieren sind. Somit erhalten wir

$$\left[1 + \hat{\beta}\, r u + \tilde{\beta}\, u\right] \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial r} + \left[\hat{\beta}(r \frac{\partial u}{\partial r} + 2u) + \tilde{\beta}(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{3r} - \frac{2}{3r})\right] \mathcal{H}_0 = 0 \,, \tag{61}$$

$$\left[u + 2 + 3\hat{\beta}\, r + 3\tilde{\beta}\right] \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial r} + \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r} + \frac{2}{r} + 3\,\chi_0 + 6\hat{\beta}\right] \mathcal{H}_0 = 0 \,. \tag{62}$$

Das lineare Geschwindigkeitsgesetz ist hinreichend flexibel, um es auf eine ganze Reihe von Beispielen für expandierende oder kollabierende sphärische Hüllen anzuwenden. Der homologe Fall $\tilde{\beta} = 0$, der z.B. für expandierende Supernovahüllen gültig ist, ist ebenfalls enthalten.

Die beiden Momentengleichungen können zu einer *nicht-linearen* Differentialgleichung für u kombiniert werden, jedoch ziehen wir es in dieser Arbeit vor, das obige System zweier gekoppelter Gleichungen zu behandeln.

Um dieses System nun zu lösen, entwickeln wir die Funktionen u und $\mathcal{H}_0$ in Termen der Geschwindigkeitskoeffizienten $\hat{\beta}$ und $\tilde{\beta}$ mittels eines Störungsansatzes. D.h., wir vernachlässigen alle Terme der Ordnung $\hat{\beta}^2$, $\tilde{\beta}^2$, $\hat{\beta}\tilde{\beta}$ und höher, so daß gilt:

$$\begin{aligned} u(r) &= u_{stat}(r) + \hat{\beta} \cdot \hat{u}_1(r) + \tilde{\beta} \cdot \tilde{u}_1(r) \,, &(63)\\ \mathcal{H}_0(r) &= \left\{h_{stat}(r) + \hat{\beta} \cdot \hat{h}_1(r) + \tilde{\beta} \cdot \tilde{h}_1(r)\right\} \cdot \mathcal{H}_{stat} \,. &(64) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten dann

$$u_{stat}|_{r^u_{\rm bc}} = \eta \,, \qquad \hat{u}_1|_{r^u_{\rm bc}} = \tilde{u}_1|_{r^u_{\rm bc}} = 0 \,, \tag{65}$$

$$h_{stat}|_{r^{\mathcal{H}_0}_{\rm bc}} = 1 \,, \qquad \hat{h}_1|_{r^{\mathcal{H}_0}_{\rm bc}} = \tilde{h}_1|_{r^{\mathcal{H}_0}_{\rm bc}} = 0 \,. \tag{66}$$

Indem wir die Momentengleichungen nach Termen nullter und erster Ordnung ordnen, nur Terme nullter Ordnung berücksichtigen und die Beziehung (56) verwenden, entdecken wir die Gleichungen für den *statischen* Fall:

$$\frac{\partial h_{\rm stat}}{\partial r} = 0 \,, \tag{67}$$

$$\frac{\partial u_{\rm stat}}{\partial r} - \frac{2 u_{\rm stat}}{r} \equiv r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\rm stat}}{r^2}\right) = -\frac{2}{r} - 3\,\chi_0(r) \,. \tag{68}$$

Daraufhin setzen wir die Lösungen des statischen Falles in die Differentialgleichungen für die Störfunktionen $\hat{h}_1$, $\tilde{h}_1$, $\hat{u}_1$ und $\tilde{u}_1$, die wir aus den Termen erster Ordnung erhalten haben, ein und wenden wiederum die Identität

$\partial\phi/\partial r - 2\phi/r \equiv r^2\partial/\partial r\,(\phi/r^2)$ an. Es stellt sich heraus, daß es möglich ist, den kompletten Satz von Differentialgleichungen auf eine Form zu bringen, die es uns erlaubt, direkt zu integrieren:

$$\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial r} = 2 + 3r\,\chi_0(r) - 4u_{\rm stat}\,, \tag{69}$$

$$\frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial r} = \frac{8}{3r} + 3\,\chi_0(r) - \frac{8}{3r}u_{\rm stat}\,, \tag{70}$$

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\hat{u}_1}{r^2}\right) = -10 - 6r\,\chi_0(r) + (6 - 3r\,\chi_0(r))u_{\rm stat} + 4u_{\rm stat}^2\,, \tag{71}$$

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tilde{u}_1}{r^2}\right) = -\frac{16}{3r} - 6\,\chi_0(r) + \left(\frac{8}{3r} - 3\,\chi_0(r)\right)u_{\rm stat} + \frac{8}{3r}u_{\rm stat}^2\,. \tag{72}$$

Die Lösungen für ein bisher noch willkürliches Extinktiongesetz kann man in einer kompakten Form darstellen, indem man die Funktionen

$$X_k(r) = \int r^k\,\chi_0(r)dr \tag{73}$$

einführt. Man beachte, daß man hier und für alle nachfolgenden Formeln *unbestimmte Integrale* verwendet.

Die Lösung des *statischen* Falles lautet dann:

$$h_{\rm stat}(r) = 1\,, \tag{74}$$

$$u_{\rm stat}(r) = 1 + Cr^2 - 3r^2X_{-2}(r)\,, \tag{75}$$

$$\mathcal{J}_{\rm stat}(r) = u_{\rm stat}(r)\,\mathcal{H}_{\rm stat}\,, \tag{76}$$

mit der Integrationskonstanten

$$C = \eta - 1 + 3X_{-2}(1)\,. \tag{77}$$

Hierbei haben wir von unserer Annahme Gebrauch gemacht, daß alle Randbedingungen auf den äußeren Radius $r_a = 1$ festgelegt sind. Da die Differentialgleichungen (69)-(72) linear sind (tatsächlich sind sie auf Integrale reduziert), kann eine andere Wahl der Randbedingungen ganz einfach durch eine geeignete Variation der Lösungen getroffen werden. Eine andere Darstellung der Gleichung (75), analog zu den Lösungen der Terme erster Ordnung weiter unten, wäre

$$\frac{u_{\rm stat}(r)}{r^2} = \eta + [r^{-2} - 1] - 3[X_{-2}(r) - X_{-2}(1)]\,. \tag{78}$$

Die Lösungen der *Größen erster Ordnung* sind :

$$\hat{h}_1(r) = -2[r-1] - \frac{4}{3}C[r^3 - 1] + [\hat{\Phi}(r) - \hat{\Phi}(1)]\,, \tag{79}$$

$$\tilde{h}_1(r) = -\frac{4}{3}C[r^2 - 1] + [\tilde{\Phi}(r) - \tilde{\Phi}(1)]\,, \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{u}_1(r)}{r^2} &= 14C[r-1] + \frac{4}{3}C^2[r^3-1] + [\hat{\Psi}(r) - \hat{\Psi}(1)]\,, && (81)\\
\frac{\tilde{u}_1(r)}{r^2} &= \frac{4}{3}C^2[r^2-1] + 8C\log r + [\tilde{\Psi}(r) - \tilde{\Psi}(1)]\,, && (82)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(r) &= 4r^3 X_{-2}(r) - X_1(r)\,, && (83)\\
\tilde{\Phi}(r) &= 4r^2 X_{-2}(r) - X_0(r)\,, && (84)\\
\hat{\Psi}(r) &= -9X_{-1}(r) - 3CX_1(r) \\
&\quad + 3\int(-14 - 8Cr^2 + 3r\chi_0(r))X_{-2}(r)dr && (85)\\
&\quad + 36\int r^2[X_{-2}(r)]^2 dr\,,\\
\tilde{\Psi}(r) &= -9X_{-2}(r) - 3CX_0(r) \\
&\quad + \int(-24 - 16Cr^2 + 9r\chi_0(r))\frac{X_{-2}(r)}{r}dr && (86)\\
&\quad + 24\int r[X_{-2}(r)]^2 dr\,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Lösungen erhalten wir einen Ausdruck für die mittlere Intensität $\mathcal{J}_0 = u\mathcal{H}_0$, der gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0(r) &= \Big[u_{\text{stat}}(r) + \hat{\beta}\left(u_{\text{stat}}(r)\,\hat{h}_1(r) + \hat{u}_1(r)\right) \\
&\qquad + \tilde{\beta}\left(u_{\text{stat}}(r)\,\tilde{h}_1(r) + \tilde{u}_1(r)\right)\Big] \cdot \mathcal{H}_{\text{stat}} && (87)\\
&= \Big[u_{\text{stat}}(r) + \hat{\beta}\,\hat{j}_1(r) + \tilde{\beta}\,\tilde{j}_1(r)\Big] \cdot \mathcal{H}_{\text{stat}}\,, && (88)
\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\mathcal{J}_0|_{r_a} = \eta\,\mathcal{H}_{\text{stat}}\,, \quad \hat{j}_1|_{r_a} = \tilde{j}_1|_{r_a} = 0\,. \qquad (89)$$

Somit erhalten wir letztendlich, unter ausschließlicher Berücksichtigung der Terme bis zur ersten Ordnung in β und nach dem Einsetzen der jeweiligen Lösungen, die Intensitätsfunktionen

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{j}_1(r)}{r^2} &= \frac{32}{3}C[r-1] - 2[r^{-1}-1] + \left(2 + \frac{4}{3}C\right)[r^{-2}-1] \\
&\quad + [\hat{\Theta}(r) - \hat{\Theta}(1)]\,, && (90)
\end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{j}_1(r)}{r^2} = \frac{4}{3}C[r^{-2}-1] + 8C\,log r + [\tilde{\Theta}(r) - \tilde{\Theta}(1)]\,, \qquad (91)$$

mit

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}(r) &= -\Big(u_{\mathrm{stat}}(r)\,X_1(r)+\hat{\Phi}(1)\Big)\,r^{-2}+\hat{\Psi}(r)-(6+4C\\ &\quad -3\hat{\Phi}(1)-10\,r-8C\,r^3+12\,r^3\,X_{-2}(r)\Big)\,X_{-2}(r)\,,\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(r) &= -\Big(u_{\mathrm{stat}}(r)\,X_0(r)+\tilde{\Phi}(1)\Big)\,r^{-2}+\tilde{\Psi}(r)+(4-4C\\ &\quad +3\tilde{\Phi}(1)+8C\,r^2-12\,r^2\,X_{-2}(r)\Big)\,X_{-2}(r)\,.\end{aligned} \tag{93}$$

5.4 Lösung für ein Potenzgesetz

Wir können den Verlauf der Extinktion durch ein Potenzgesetz der Form

$$\chi_0(r)=\chi_{\mathrm{stat}}\cdot r^{-N} \tag{94}$$

annähern (vergleiche Gleichung (40)), wobei N ein konstanter Dichteexponent ist. Diese Näherung ist schon seit dem Beginn der Analyse des sphärisch-symmetrischen Strahlungstransports (Kosirev [23]; Chandrasekhar [10]) häufig verwendet worden. So z.B. für Anwendungen auf Supernova- [35] und Novaatmosphären [18]. Mit Gleichung (94) wird unser bisher willkürlicher Extinktionsverlauf zu

$$X_k(r) = \frac{N-1}{N-k-1}\,r^k\cdot X_0(r)\,, \tag{95}$$

$$X_0(r) = -\frac{\chi_{\mathrm{stat}}}{N-1}\,r^{-N+1}\,, \tag{96}$$

für $N\neq k+1$. Um u_{stat} aus der Gleichung (75) berechnen zu können, muß insbesondere zuerst X_{-2} ausgewertet werden. Mit Hilfe der Abkürzung

$$A=-3X_{-2}(1)=\frac{3\chi_{\mathrm{stat}}}{N+1}\qquad (N\neq -1) \tag{97}$$

erhalten wir

$$X_{-2}(r)=\begin{cases}-\frac{1}{3}\,A\,r^{-N+1} & (N\neq -1)\\ +\chi_{\mathrm{stat}}\,\log r & (N=-1)\end{cases}\,, \tag{98}$$

und für die Integrationskonstante (77) gilt:

$$C=\begin{cases}\eta-1-A & (N\neq -1)\\ \eta-1 & (N=-1)\end{cases}\,. \tag{99}$$

Im folgenden betrachten wir die Fälle $N\neq -1$ und $N=-1$ getrennt.

$\boxed{N\neq -1:}$

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{stat}}(r) &= 1+Cr^2+Ar^{-N+1}\\ &= \eta+C[r^2-1]+A[r^{-N+1}-1]\,,\end{aligned} \tag{100}$$

oder mit Gleichung (99)

$$\frac{u_{\rm stat}(r)}{r^2} = \eta + [r^{-2} - 1] + A[r^{-N-1} - 1] \tag{101}$$

und

$$\hat\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{N-3}{N-2}\, A\, r^{-N+2} & (N \neq 2) \\ \\ -A\,\log r & (N = 2) \end{cases} \quad , \tag{102}$$

$$\tilde\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{3N-5}{3(N-1)}\, A\, r^{-N+1} & (N \neq 1) \\ \\ -\frac{2}{3}\, A\,\log r & (N = 1) \end{cases} \quad , \tag{103}$$

$$\hat\Psi(r) = \begin{cases} \frac{3N-11}{N}\, A\, r^{-N} + \frac{N-3}{2N-1}\, A^2\, r^{-2N+1} & \\ +\frac{N-7}{N-2}\, A\, C\, r^{-N+2} & (N \neq 0, \frac{1}{2}, 2) \\ \\ 11\, A\,\log r + 3\, A^2\, r + \frac{7}{2}\, A\, C\, r^2 & (N = 0) \\ \\ -19\, A\, r^{-1/2} + \frac{5}{2}\, A^2\,\log r & \\ +\frac{13}{3}\, A\, C\, r^{3/2} & (N = \frac{1}{2}) \\ \\ -\frac{5}{2}\, A\, r^{-2} - \frac{1}{3}\, A^2\, r^{-3} & \\ +5\, A\, C\,\log r & (N = 2) \end{cases} \quad , \tag{104}$$

$$\tilde\Psi(r) = \begin{cases} \frac{3N-5}{N+1}\, A\, r^{-N-1} + \frac{3N-5}{6N}\, A^2\, r^{-2N} & \\ +\frac{1}{3}\,\frac{3N-13}{N-1}\, A\, C\, r^{-N+1} & (N \neq 0, 1) \\ \\ -5\, A\, r^{-1} + \frac{5}{3}\, A^2\,\log r + \frac{13}{3}\, A\, C\, r & (N = 0) \\ \\ -\frac{1}{3}\,(A+3)\, A\, r^{-2} + \frac{10}{3}\, A\, C\,\log r & (N = 1) \end{cases} \quad , \tag{105}$$

$$\hat{\Theta}(r) = \begin{cases} \left(2 + \frac{4}{3}\,C + \frac{N-3}{N-2}\,A\right) A\,r^{-N-1} \\ + \frac{N-3}{N-2}\,A\,r^{-2} - \frac{2(5N-11)}{N(N-2)}\,A\,r^{-N} \\ - \frac{(N+1)(N-3)}{(N-2)(2N-1)}\,A^2\,r^{-2N+1} \\ - \frac{4}{3}\,\frac{N+1}{N-2}\,A\,C\,r^{-N+2} & (N \neq 0, \frac{1}{2}, 2) \\ \\ \frac{3}{2}\,A\,r^{-2} + (2 + \frac{4}{3}\,C + \frac{3}{2}\,A)\,A\,r^{-1} \\ +11\,A\,\log r \\ + \frac{3}{2}\,A^2 r + \frac{2}{3}\,A\,C r^2 & (N = 0) \\ \\ \frac{5}{3}\,A\,r^{-2} + (2 + \frac{4}{3}\,C + \frac{5}{3}\,A)\,A\,r^{-3/2} \\ - \frac{68}{3}\,A\,r^{-1/2} \\ + \frac{5}{2}\,A^2\,\log r + \frac{4}{3}\,A\,C\,r^{3/2} & (N = \frac{1}{2}) \\ \\ (2 + \frac{4}{3}\,C - \frac{1}{3}\,A)\,A\,r^{-3} - \frac{9}{2}\,A\,r^{-2} \\ -A\,r^{-2}\log r - A^2\,r^{-3}\log r \\ +4A\,C\,\log r & (N = 2) \end{cases} , \qquad (106)$$

$$\tilde{\Theta}(r) = \begin{cases} \frac{3N-5}{3(N-1)}\,A\,r^{-2} - \frac{1}{6}\,\frac{(N+1)(3N-5)}{N(N-1)}\,A^2\,r^{-2N} \\ - \frac{4}{3}\,\frac{N+1}{N-1}\,A\,C\,r^{-N+1} \\ + \left(\frac{2}{3}\,\frac{(3N-5)(N-2)}{(N+1)(N-1)} + \frac{4}{3}\,C \right. \\ \left. + \frac{1}{3}\,\frac{(3N-5)}{(N-1)} A\right) A\,r^{-N-1} & (N \neq 0, 1) \\ \\ \frac{5}{3}\,A\,r^{-2} - \frac{20}{3}\,A\,r^{-1} \\ + \frac{1}{3}\,(4C + 5A)\,A\,r^{-1} \\ + \frac{5}{3}\,A^2\,\log r + \frac{4}{3}\,A\,C r & (N = 0) \\ \\ \left(\frac{4}{3}\,C - 1 - \frac{1}{3}\,A\right)\,A\,r^{-2} \\ - \frac{2}{3}\,(A + 1)\,A\,r^{-2}\log r \\ + \frac{8}{3}\,A\,C\,\log r\,. & (N = 1) \end{cases} . \qquad (107)$$

$\boxed{N = -1:}$

Die Speziellen Lösungen für diesen Fall lauten:

$$u_{\rm stat}(r) = 1 + C\,r^2 - 3\chi_{\rm stat} r^2 \log r\,, \tag{108}$$

$$\hat{\Phi}(r) = 4\chi_{\rm stat} r^3 \log r - \tfrac{1}{3}\chi_{\rm stat}\, r^3\,, \tag{109}$$

$$\tilde{\Phi}(r) = 4\chi_{\rm stat} r^2 \log r - \tfrac{1}{2}\chi_{\rm stat}\, r^2\,, \tag{110}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(r) = {} & 33\chi_{\rm stat} r + \tfrac{5}{3}\chi_{\rm stat}\,(\chi_{\rm stat} + C\,)r^3 \\ & -\chi_{\rm stat}(42 + 5\chi_{\rm stat} r^2 + 8C\,r^2) r \log r \\ & +12\chi_{\rm stat}^2\, r^3 (\log r)^2\,,\end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(r) = {} & \tfrac{5}{2}\chi_{\rm stat}(\tfrac{3}{2}\chi_{\rm stat} + C\,)r^2 - 9\chi_{\rm stat} \log r \\ & +12\chi_{\rm stat}(\log r)^2[\chi_{\rm stat}\, r^2 - 1] \\ & -(\tfrac{15}{2}\chi_{\rm stat} + 8C)\,\chi_{\rm stat}\, r^2 \log r\,,\end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}(r) = {} & \tfrac{1}{3}\,\chi_{\rm stat} r^{-2} + \tfrac{98}{3}\,\chi^{\rm stat} r + \tfrac{1}{3}\chi_{\rm stat}\,(5\chi_{\rm stat} + 4C\,)r^3 \\ & -\chi_{\rm stat}(6 + \chi_{\rm stat} + 4C)\,\log r \\ & -4\chi_{\rm stat}(8 + \chi_{\rm stat} r^2)\, r \log r\,,\end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(r) = {} & \tfrac{1}{2}\,\chi_{\rm stat} r^{-2} - \chi_{\rm stat}(5 + \tfrac{3}{2}\chi_{\rm stat} + 4C)\,\log r \\ & +(2\,C + \tfrac{15}{4}\,\chi_{\rm stat} - 6\,\chi_{\rm stat}\,\log r)\chi_{\rm stat} r^2 \\ & -12\,\chi_{\rm stat}\,(\log r)^2\,.\end{aligned} \tag{114}$$

6 Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird ein Teil der Ergebnisse der Arbeit dargestellt. Man sollte sich jedoch vorher nochmals klarmachen, von welchen Parametern die Lösungen abhängen:

abhängige Veränderliche	:	r . . . radiale Koordinate
Parameter	:	N . . . Dichteexponent
		τ . . . optische Tiefe
		η . . . Grad der Anisotropie
		β . . . Geschwindigkeit der Expansion bzw. des Kollaps

Wir betrachten eine radial-symmetrische Hülle bzw. Photosphäre, die an einem inneren Radius r_i beginnt und sich bis zu einem äußeren Radius r_a erstreckt (siehe Abbildung 3).

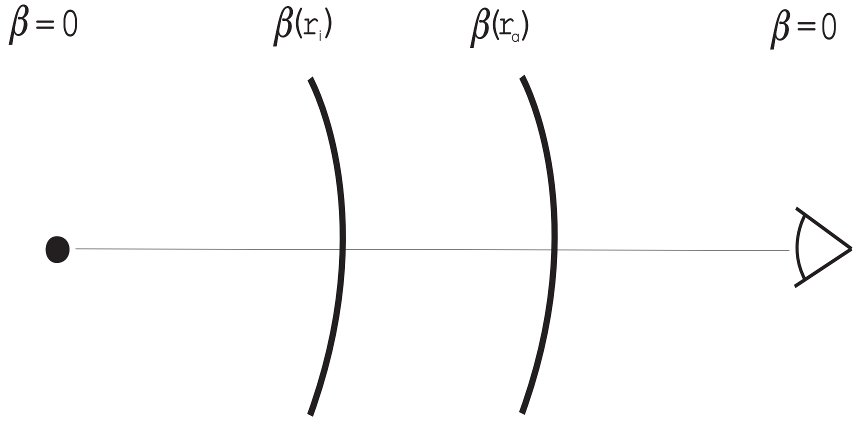


Abbildung 3: *Ein Teil einer radial-symmetrischen Hülle, die sich differenziell bewegt. Das Zentrum der Sphäre und der Beobachter befinden sich im Ruhesystem.*

Der äußere Radius r_a wird auf 1 gesetzt. Den inneren Radius darf man frei wählen, da sich dadurch die Struktur der Lösung nicht wesentlich verändert. Er wird willkürlich auf $r_i = 0.5$ gesetzt. Der Dichteexponent N läuft von -10 bis $+10$. Für die optische Tiefe $\tau = \int_{r_i}^{r_a} \chi(r) dr$ der zu betrachtenden Hülle werden die Werte 0.1, 1 und 10 verwendet (siehe auch Kapitel 6.2). Für den Grad der Anisotropie η setzen wir die Werte $1, 2, 5$ ein und untersuchen dessen Einfluß auf den Verlauf der Lösung (siehe auch Kapitel 6.2). Die Geschwindigkeit $\beta = v/c$ beträgt 0.2.

6.1 Statischer Fall

Mit dem Ansatz aus Kapitel 5.3 kann man eine konsistente analytische Lösung des statischen Falles für die mittlere Intensität $\mathcal{J}_{stat}$ angeben, wenn man (wie Hummer und Rybicki) die Leuchtkraft, also $\mathcal{H}_{stat}|_{r_a} = \mathcal{H}_{stat}$ und das bei $r_a = 1$ vorherrschende Verhältnis $\mathcal{J}_{stat}/\mathcal{H}_{stat}$, also $u_{stat}|_{r_a} = \eta$ als äußere Randbedingung vorgibt, nämlich:

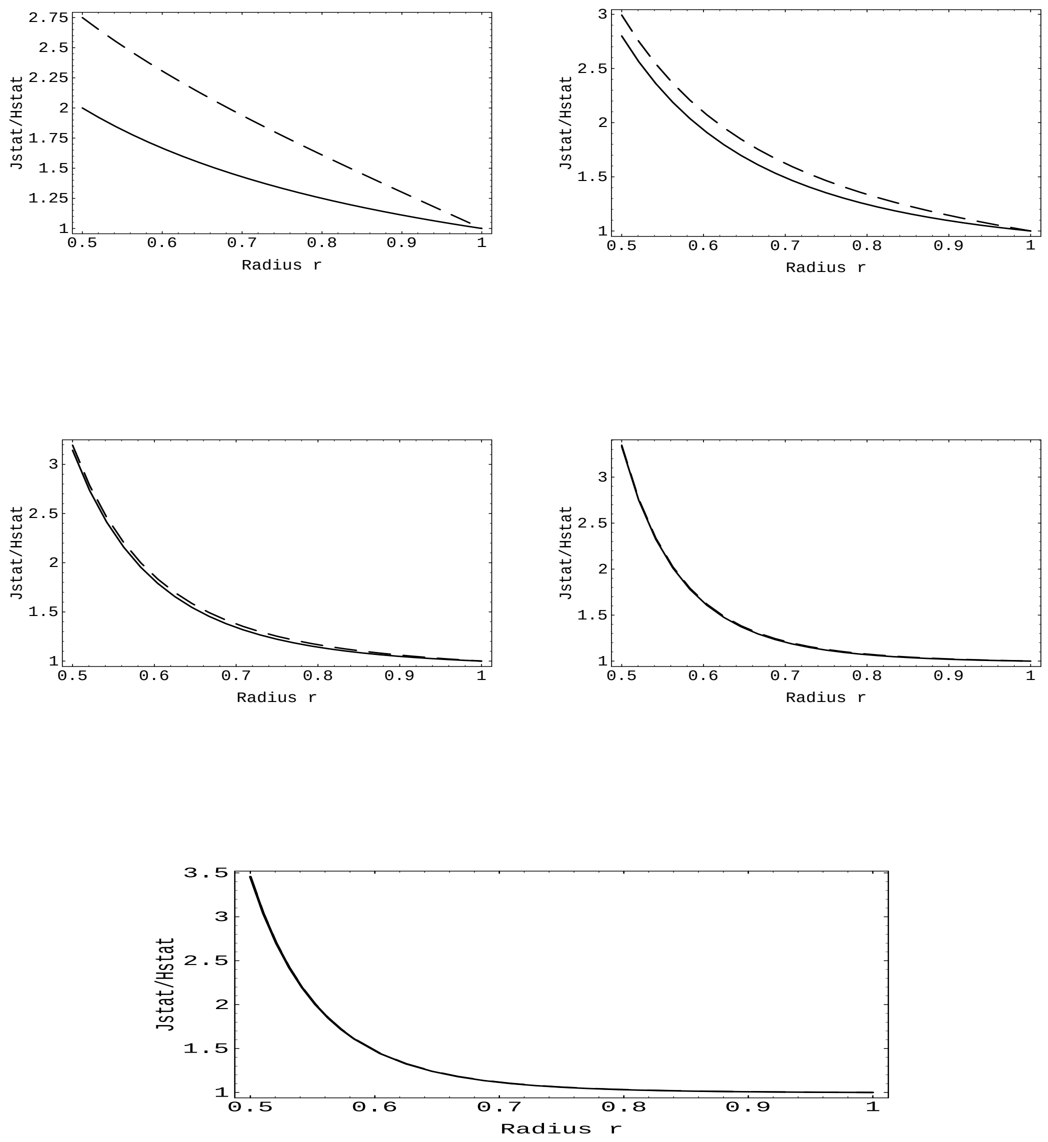
$$\mathcal{J}_{stat} = u_{stat}(r)\,\mathcal{H}_{stat}, \tag{115}$$

mit

$$u_{stat}(r) = \eta + C\left[r^2 - 1\right] + A\left[r^{-N+1} - 1\right], \tag{116}$$

wobei $C = \eta - 1 - A$ und $A = 3\chi_{stat}/(N+1)$ gilt. Diese Formel entspricht im Prinzip derjenigen von Hummer und Rybicki (41) bzw. (46), wenn man $\eta = 1$ (isotrope Strahlung) setzt, nur daß in unserer Lösung ein zusätzlicher Term $C \cdot [r^2 - 1]$ auftaucht, der vor allem für mittlere r und kleine N ins Gewicht fällt. In Abbildung 4 ist ein Vergleich der isotropen, statischen Lösung von Hummer und Rybicki (46) mit unserer Lösung (115) für $N = 2, 4, 6, 8$ und 10 (bei Hummer und Rybicki gilt die Einschränkung $N > 1$) dargestellt. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Verlauf der Lösung von Hummer und Rybicki, die durchgezogene unserer statischen, isotropen Lösung. Die Verläufe sind auf $\mathcal{H}_{stat}$ normiert. Aus den Figuren ist zu ersehen, daß die oben angeführten Bemerkungen zutreffen, d.h. der zusätzliche Term in unserer Lösung (115) sorgt insbesonders für kleine N für ein Abweichen des Verlaufes von Hummer und Rybicki. Für wachsende N gleichen sich jedoch die Verläufe immer stärker an. Die Kurven in den Graphiken werden für kleine r und zunehmende N immer steiler, was auf eine ansteigende Zahl von Photonenwechselwirkungen zurückzuführen ist.

Abbildung 4: *Vergleich der statischen Lösung von Hummer und Rybicki (durchgezogene Linie) mit unserer Lösung (gestrichelte Linie) für* $\tau = 1$. *Der Dichteexponent nimmt in den Graphiken von links nach rechts und oben nach unten die Werte* $N = 2, 4, 6, 8$ *und* 10 *an.*



6.2 Bewegter Fall

6.2.1 Einschränkungen

Bevor man mit der Untersuchung der Strukturstabilität und der Parameteranalyse der Lösungen $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{K}_0$ beginnt, kann man noch den Wertebereich der Parameter β und τ einschränken.

Um den Gültigkeitsbereich der Parameter β und τ näher zu untersuchen, müssen die Abbildungen 5 bis 7 miteinander verglichen werden. Jede Abbildung ist aus fünf Figuren zusammengesetzt, die jeweils von links nach rechts und oben nach unten für τ die Werte $0.1, 2.5, 5.0, 7.5$ und 12.5 annehmen. In den einzelnen Figuren varriiert der Parameter N: für die gestrichelte Kurve gilt $N = 0$, für die durchgezogenen Kurven der Reihe nach $N = 2.5, 5.0, 7.5$ und 10. Die Geschwindigkeit variiert in den einzelnen Abbildungen; und zwar gilt aufeinanderfolgend $\beta = 0.1, 0.2$ und 0.4.[3]

Die Abbildung 5 deutet darauf hin, daß selbst für "kleine" Geschwindigkeiten und große optische Tiefen ($\tau = 12.5$) der Verlauf der Lösung $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ mit ansteigendem N "instabil" wird, da die Kurve nach einem kurzen Anstieg steil abfällt. Für größere Geschwindigkeiten setzt sich dieser Trend in Richtung kleinerer optischer Tiefen fort. In den Abbildungen 6 und 7 wechseln einige Lösungen das Vorzeichen. Der Grund dieser "Instabilität" ist physikalisch nicht zu erklären und liegt vermutlich an der Reduktion unserer Lösungen auf die erste Ordnung β. Falls β größer als ≈ 0.2 wird, gewinnen die nichtlinearen Terme immer mehr an Bedeutung. Da jedoch diese Terme in unseren Lösungen nicht enthalten sind und wir ein lineares Geschwindigkeitsgesetz annehmen, fällt der Verlauf der Lösung in den Abbildungen zunächst nur für kleine r steil ab. Allerdings verschiebt sich diese "Instabilität" für steigende τ und β zu größeren r hin. Es ist nicht sinnvoll, eine Lösung für kleine β zu suchen und dann einen weiteren Parameter (in diesem Fall τ) beliebig groß werden zu lassen. Die nicht-linearen Terme, welche mit τ gewichtet sind, haben nämlich dann mit steigendem τ eine wachsende Bedeutung für die Lösung.

In allen drei Abbildungen ist sehr gut zu erkennen, daß $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ für $\tau = 0.1$ beinahe konstant verläuft, jedoch mit wachsender optischer Tiefe τ und ansteigendem Dichteexponenten N für kleine r steil ansteigt, bevor ein Abfall zu negativen Werten stattfindet. Da mit zunehmendem τ und N auch χ_{stat} anwächst, vergrößert sich somit die Wechselwirkungsfläche der Photonen mit der Materie. Für den weiteren Verlauf der Untersuchung der dynamischen Lösungen nehmen wir aufgrund der obigen Bemerkungen an, realistische Ergebnisse für Geschwindigkeiten bis $\beta \approx 0.2$ und für optische Tiefen bis $\tau \approx 10$

[3] Zur graphischen Darstellung wird das algebraische Programm *Mathematica* [43] verwendet. Aufgrund einer zu geringen Font-Auswahl in *Mathematica* kann die Achsenbeschriftung $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{K}_0$ nicht kalligraphisch erfolgen. Es ist ebenfalls nicht möglich eine Fußnote "0" an die Achsenbeschriftung anzubringen. Die Lösungen sind trotzdem auf $\mathcal{H}_{stat}$ normierte "Comoving Frame"-Größen.

zu erhalten.

6.2.2 Untersuchung der Strukturstabilität

In den Abbildungen 8 bis 42 sind Oberflächengraphiken dargestellt, wobei jeweils $\mathcal{J}_0, \mathcal{H}_0$ und $\mathcal{K}_0$ (vergleiche Kapitel 5.4) normiert auf $\mathcal{H}_{stat}$ über dem Dichteexponenten N und der radialen Koordinate r aufgetragen sind. Es werden sowohl expandierende als auch kollabierende Konfigurationen betrachtet, um einerseits die Strukturstabilität der Lösungen und andererseits den Einfluß der Parameter η und τ auf den Verlauf der Lösung zu untersuchen. Die optische Tiefe τ nimmt die Werte $0.1, 1$ und 10 an (siehe Kapitel 6.2.1); für η werden die Werte 1(isotroper Fall)$, 2$ und 5 eingesetzt.

Bei der Betrachtung sämtlicher Abbildungen sieht man, daß die dargestellten Strukturen durch stetige Deformation auseinander hervorgehen. Die Lösungen verlaufen stetig über die Stellen der auftretenden "Scheinsingularitäten" bei $N = -1, 0, 1/2, 1$ und 2, die auf die Parametrisierung zurückzuführen sind (siehe Lösungen aus Kapitel 5.4). Als "Scheinsingularität" wird eine Singularität bezeichnet, die keine Unstetigkeit im Verlauf der Lösung verursacht. Es treten auch keine wirklichen Singularitäten auf. Desweiteren sieht man, daß die Variation der Parameter die Struktur der Lösungen nur unwesentlich verändert (bis auf die "Instabilität" bei großen τ, was jedoch weiter unten ausführlich diskutiert wird).

Abbildung 5: *Von links nach rechts nimmt τ die Werte* $0.1, 2.5, 5.0, 7.5$ *und* 12.5 *an. In den einzelnen Graphiken wird zusätzlich der Parameter N variiert: für die gestrichelte Kurve gilt $N = 0$, für die durchgezogenen Kurven jeweils $N = 2.5, 5.0, 7.5, 10$. Für alle fünf Graphiken ist $\eta = 2$ und $\beta = v/c = 0.1$.*

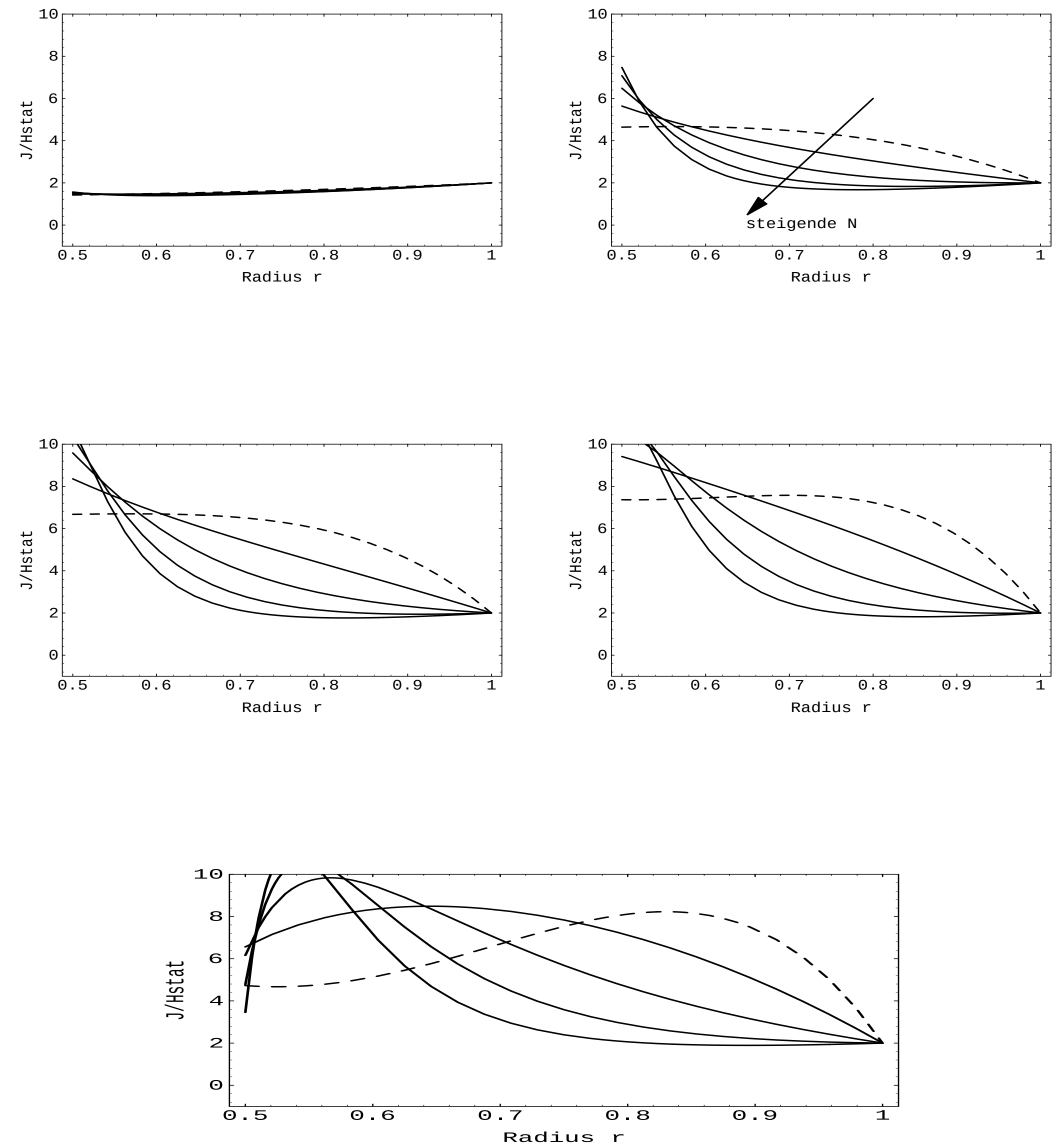


Abbildung 6: *Von links nach rechts nimmt τ die Werte $0.1, 2.5, 5.0, 7.5$ und 12.5 an. In den einzelnen Graphiken wird zusätzlich der Parameter N variiert: für die gestrichelte Kurve gilt $N = 0$, für die durchgezogenen Kurven jeweils $N = 2.5, 5.0, 7.5, 10$. Für alle fünf Graphiken ist $\eta = 2$ und $\beta = v/c = 0.2$.*

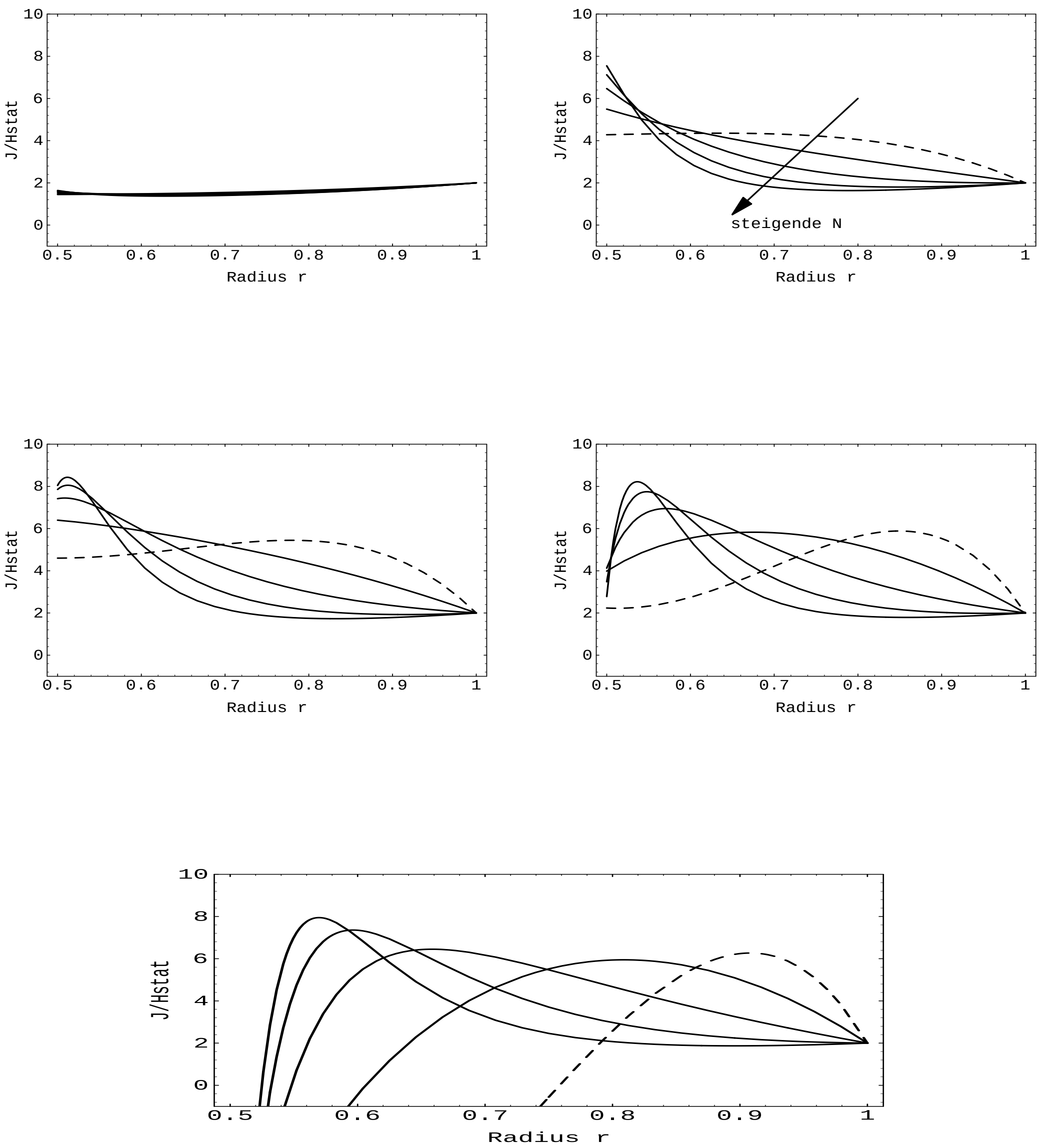
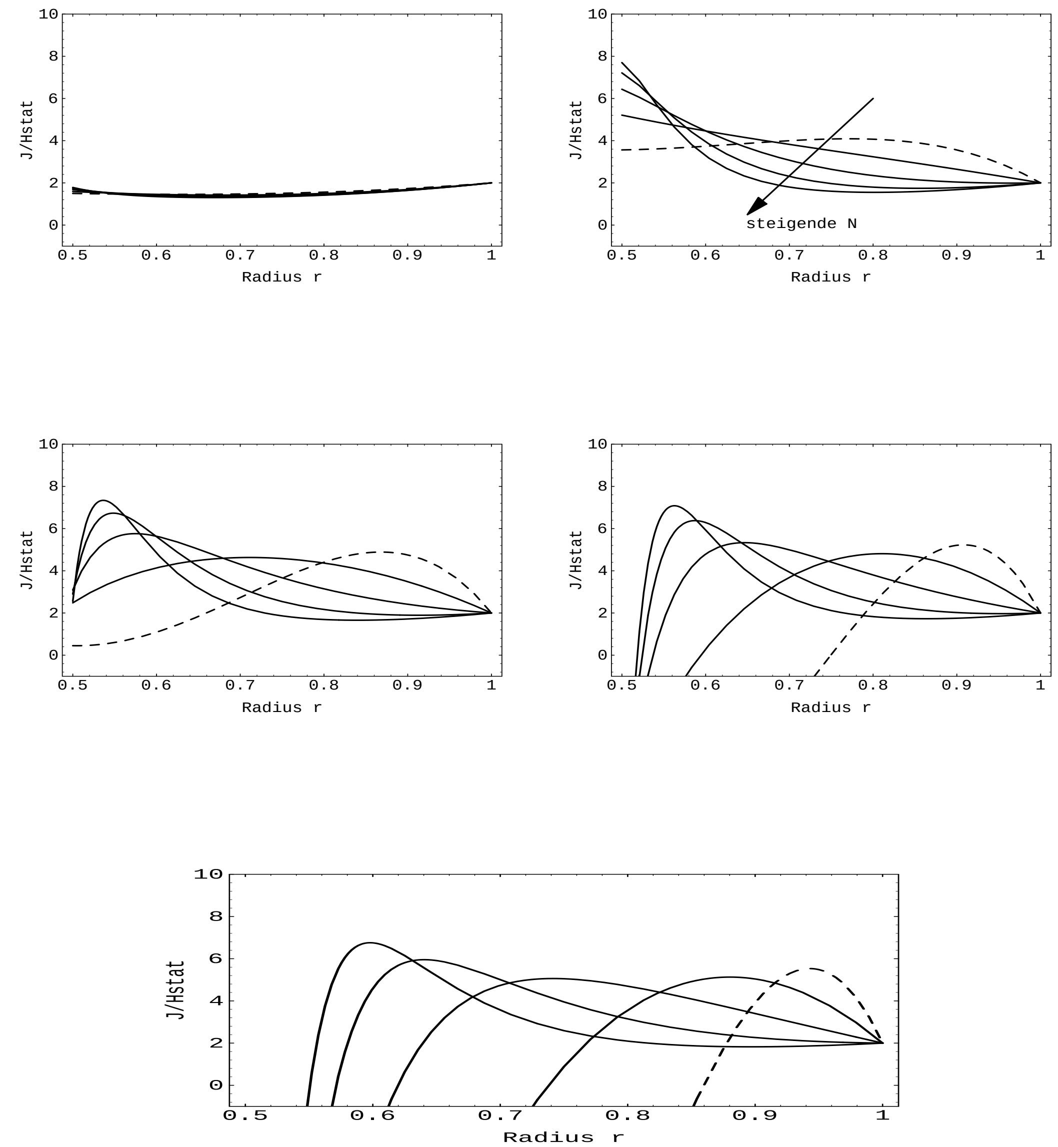


Abbildung 7: *Von links nach rechts nimmt* τ *die Werte* $0.1, 2.5, 5.0, 7.5$ *und* 12.5 *an. In den einzelnen Graphiken wird zusätzlich der Parameter* N *variiert: für die gestrichelte Kurve gilt* $N = 0$*, für die durchgezogenen Kurven jeweils* $N = 2.5, 5.0, 7.5, 10$*. Für alle fünf Graphiken ist* $\eta = 2$ *und* $\beta = v/c = 0.4$*.*



(a) In den Abbildungen 8 bis 19 sind Oberflächengraphiken von $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ aus zwei verschiedenen Beobachtungswinkeln dargestellt, wobei insbesonders für den isotropen Fall ($\eta = 1$) die charakteristische Struktur der Lösung zu erkennen ist. Für große positive N steigt $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ vom äußeren Radius $r_a = 1$ nach innen laufend langsam für kleine Radien steil an. Dies ist, wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, auf die wachsende Zahl von Photonenwechselwirkungen zurückzuführen. Für große negative Dichteexponenten startet die Lösung vom Randwert $\mathcal{J}_0|_{r_a}/\mathcal{H}_{stat} = 1$ aus und steigt zunächst steil an, erreicht einen Umkehrpunkt und fällt für kleiner werdende Radien langsam ab. Dieser Verlauf ist auf das gleiche Phänomen zurückzuführen, wie für große positive N, jedoch ist die Randbedingung $\mathcal{J}_0|_{r_a}/\mathcal{H}_{stat} = \eta$ in diesem Fall nicht realistisch gewählt, da es schwierig ist, diesen Umkehrpunkt physikalisch zu interpretieren. Der Verlauf der Lösung sollte für große negative N nach außen hin auf einen Maximalwert ansteigen, um dann für $r_a = 1$ abrupt abzubrechen. Da wir ein eindimensionales Flußproblem betrachten und da die Anisotropie zum äußeren Rand der Sphäre hin zunimmt, steigt die mittlere Intensität im "Comoving Frame" für größer werdende r an. Jedoch sieht es für steigende η so aus , als ob die hier gewählte Randbedingung die Struktur der Lösung für diese geringe optische Tiefe τ beinahe vollständig verdeckt (siehe Abbildungen 9 und 10). Aus diesem Grund kann man vermuten, daß die Werte für η zu groß gewählt wurden und daß sie zwischen 1 und 2 liegen. Für die Abbildungen 11 bis 13 gilt $\tau = 1$ und die oben besprochene Struktur ist für alle drei Werte von η deutlich zu erkennen. Die Werte der mittleren Intensität steigen mit wachsendem τ an, was auf eine größere Zahl von Photonenwechselwirkungen zurückzuführen ist. Für $\tau = 10$ (siehe Abbildungen 14 bis 16) ist der Verlauf der Lösung insbesondere für große negative N "instabil". Man erkennt dies an den negativen Werten für $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$. Für $N \geq 0$ tritt die charakteristische Struktur wieder deutlich hervor, jedoch fällt die mittlere Intensität für kleine r steil ab. Der Grund dafür ist bereits in Kapitel 6.2.1 diskutiert worden. Die Abbildungen 17 bis 19 beschreiben kollabierende Konfigurationen. Es gilt $\eta = 2$ und nur die optische Tiefe wird variiert, wobei τ aufeinanderfolgend die Werte $0.1, 1$ und 10 annimmt. Wenn man nun diese Abbildungen mit denjenigen für expandierende Konfigurationen und denselben Parameterwerten vergleicht, kann man für $\tau = 0.1$ dieselbe Struktur erahnen. Für $\tau = 1$ und 10 zeigen die zu vergleichenden Abbildungen keinen großen Unterschied. Allerdings wird $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ mit $\tau = 10$ weder für große negative noch positive Dichteexponenten "instabil". Die charakteristische Struktur tritt in Abbildung 19 deutlicher hervor als in der Abbildung für expandierende Konfigurationen (Abbildung 15).

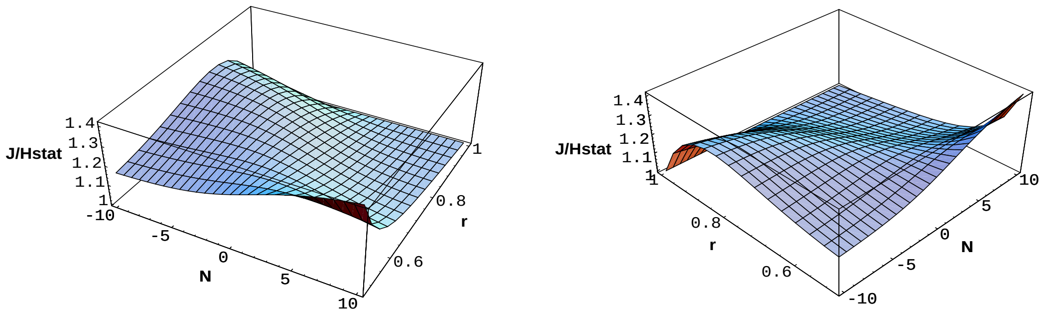


Abbildung 8: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1,\ \eta = 1$

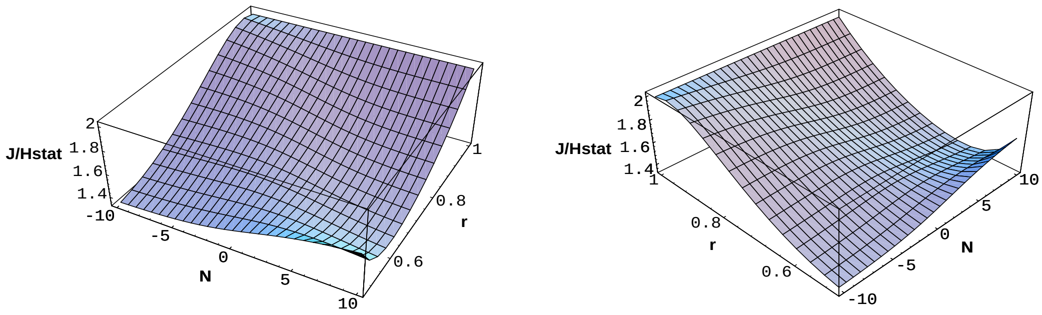


Abbildung 9: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1,\ \eta = 2$

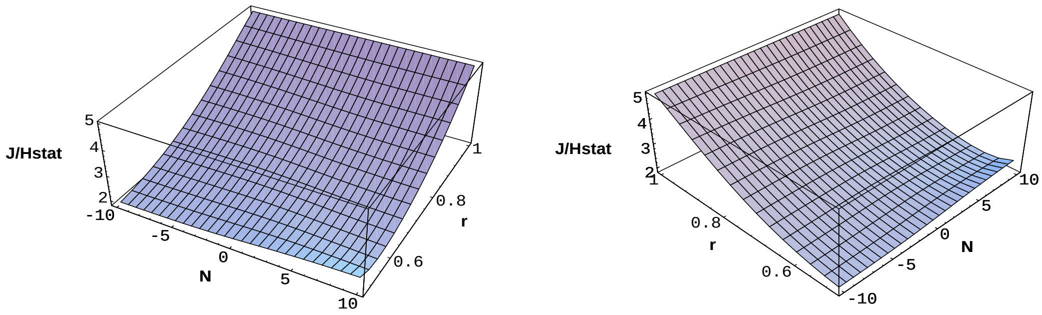


Abbildung 10: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1,\ \eta = 5$

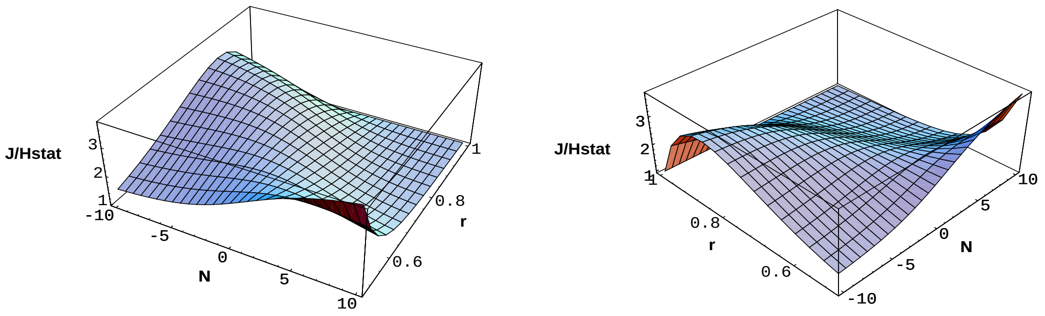


Abbildung 11: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1,\ \eta = 1$

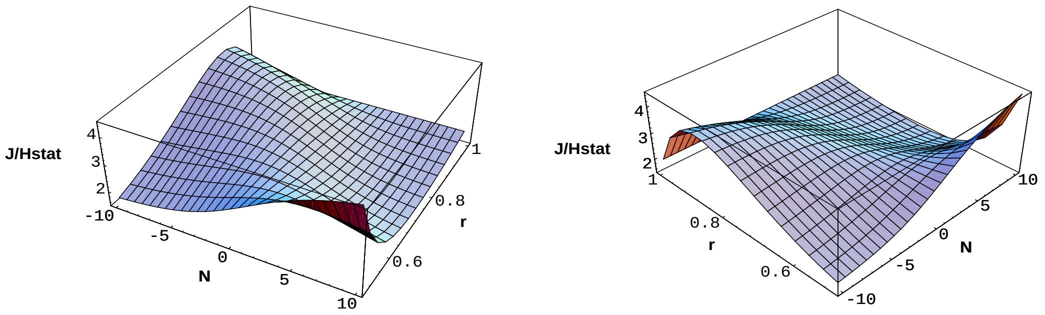


Abbildung 12: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1,\ \eta = 2$

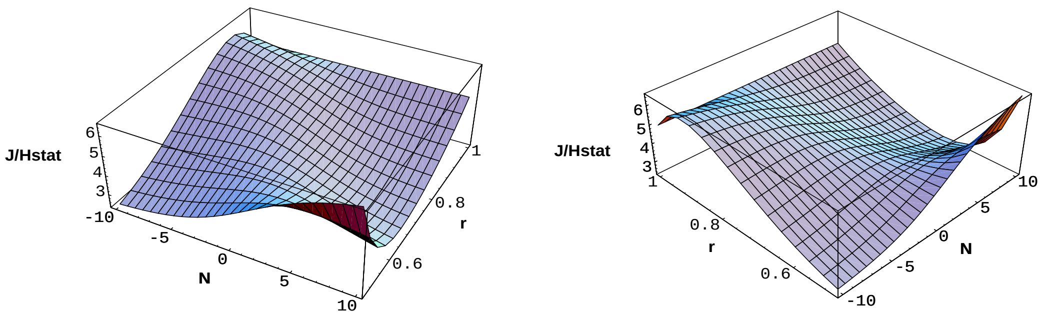


Abbildung 13: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1,\ \eta = 5$

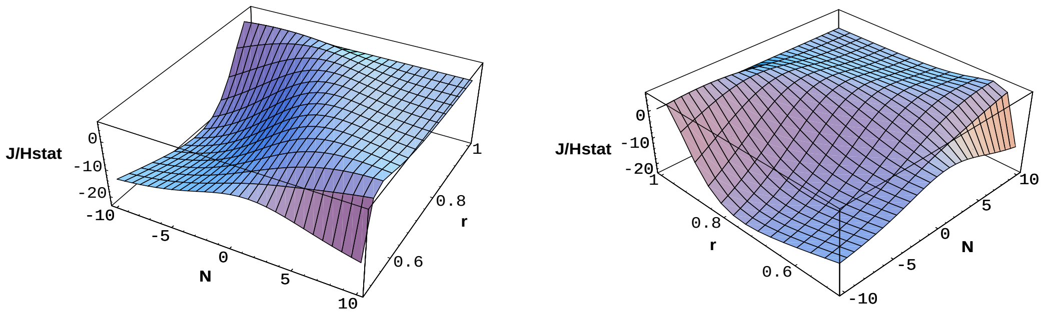


Abbildung 14: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 1$

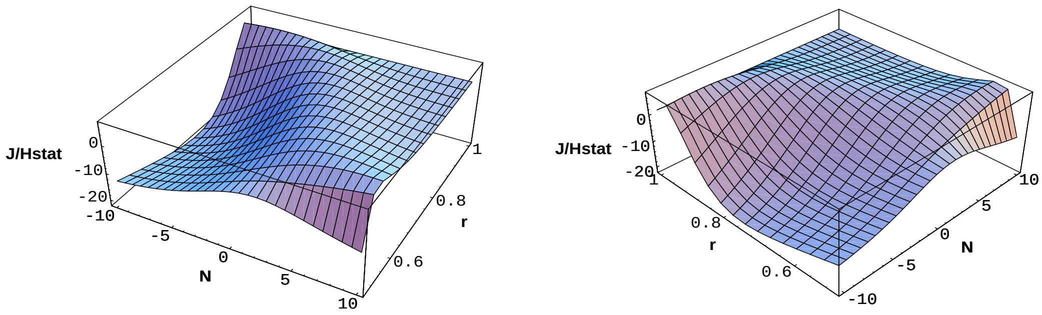


Abbildung 15: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 2$

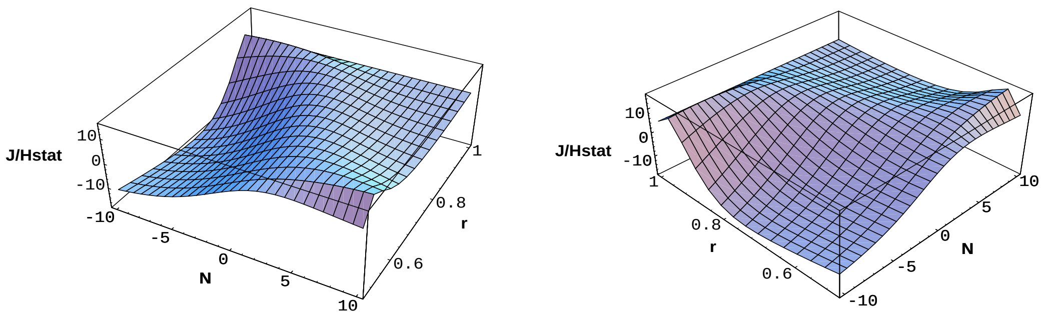


Abbildung 16: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 5$

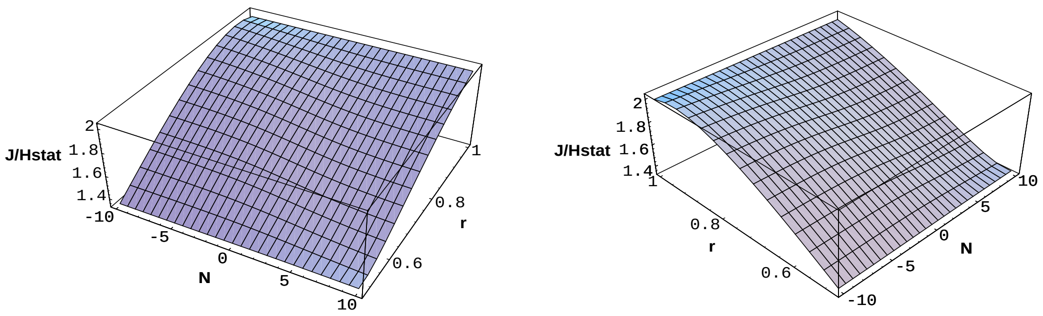


Abbildung 17: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2$, $\tau = 0.1$

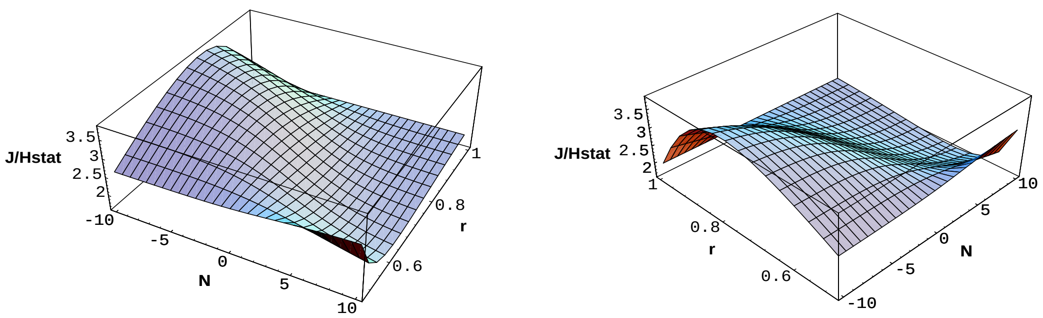


Abbildung 18: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2$, $\tau = 1$

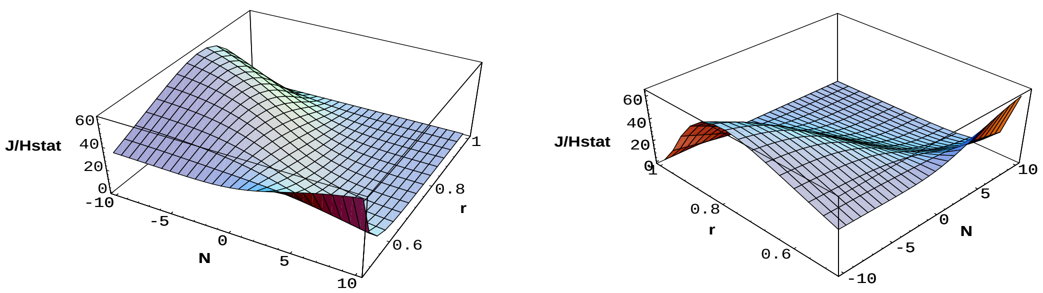


Abbildung 19: $\mathcal{J}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2$, $\tau = 10$

(b) In den Abbildungen 20 bis 30 ist der normierte Eddington-Fluß $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ als Oberflächengraphik über dem Dichteexponenten N und der radialen Koordinate r und als Konturengraphik dargestellt. Die Linien in den Konturengraphiken zeigen Werte gleicher Größe von $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ für unterschiedliche N und r. Da der Eddington-Fluß und damit die Leuchtkraft bzw. die Effektivtemperatur konstant ist, muß der normierte Eddington-Fluß im statischen Fall $\mathcal{H}_0|_{\beta=0}/\mathcal{H}_{stat} = 1$ sein. In den Abbildungen 20 bis 30 sind somit reine "Boosting-Effekte" zu sehen. "Boosting-Effekte" sind Phänomene, die auf das Geschwindigkeitsfeld zurückzuführen sind. In den Abbildungen 20 und 21 nimmt der normierte Eddington-Fluß für alle N vom Randwert bei $r_a = 1$ nach innen zu. Jedoch verändert sich der Verlauf mit steigender optischer Tiefe. So ist in den Abbildungen 22 bis 24 der Verlauf von $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ für große r und positive Dichteexponenten N nahezu konstant bzw. steigt mit wachsendem η leicht an. Für kleine Radien fallen die Werte des normierten Eddington-Flusses steil ab. Mit negativem N fällt $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ vom Randwert ausgehend bis zu einem Tiefpunkt ab und steigt dann für kleine r wieder an. Diese Phänomene sind für große negative und positive Dichteexponenten besonders ausgeprägt, da mit ansteigendem τ und N die freie Photonenweglänge immer kürzer wird. D.h., die Zahl der Photonenwechselwirkungen steigt an. Da wir den Photonentransport durch eine Kontinuumstheorie beschreiben, wird der Fluß kleiner. Es scheint, als ob das Strahlungsfeld das Materiefeld beschleunigt. In den Abbildungen 25 bis 27 wechselt der normierte Eddington-Fluß in bestimmten Parameterbereichen das Vorzeichen. Es scheint, als ob die Photonendichte in diesen Bereichen nicht von innen nach außen "strömt", sondern entgegengesetzt. Dies würde zu einer Abbremsung der Expansion führen (vergleiche dazu Kapitel 7.2). Die Abbildungen 28 bis 30 stellen den Verlauf $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ für kollabierende Konfigurationen dar. Der Gradient des normierten Eddington-Flusses wechselt bei einem Kollaps das Vorzeichen. Der Grund liegt darin, daß reine "Boosting-Effekte" zu sehen sind. Die Photonendichte scheint von innen nach außen zu "strömen", was eine Verzögerung des Kollaps zur Folge hätte (vergleiche Kapitel 7.2).

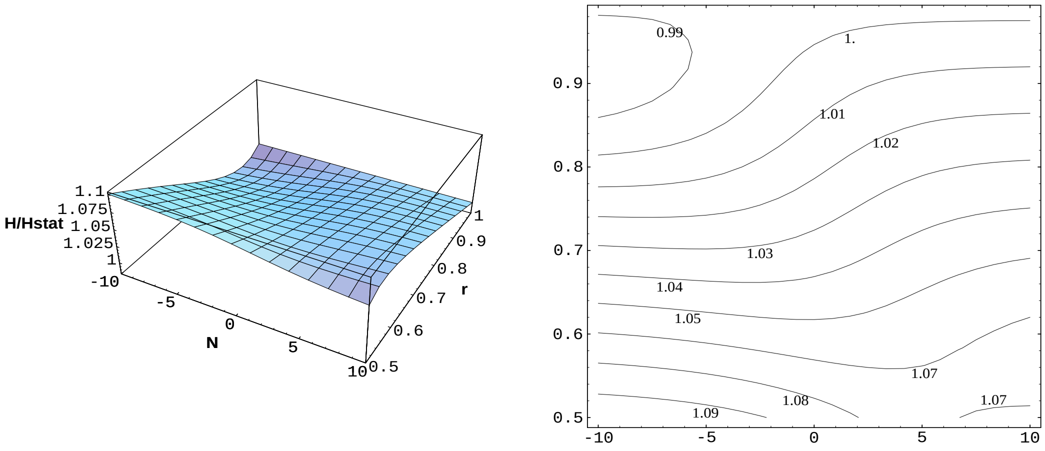


Abbildung 20: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1$, $\eta = 1$

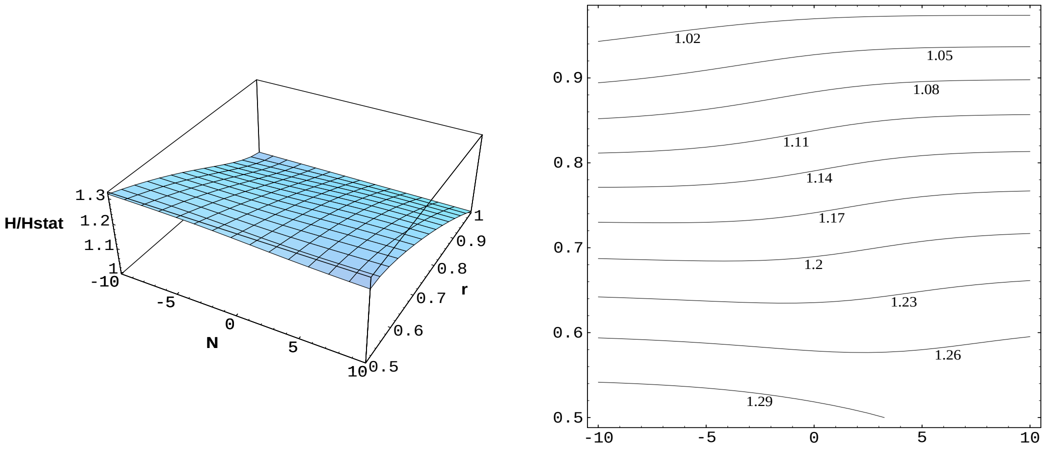


Abbildung 21: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1$, $\eta = 2$

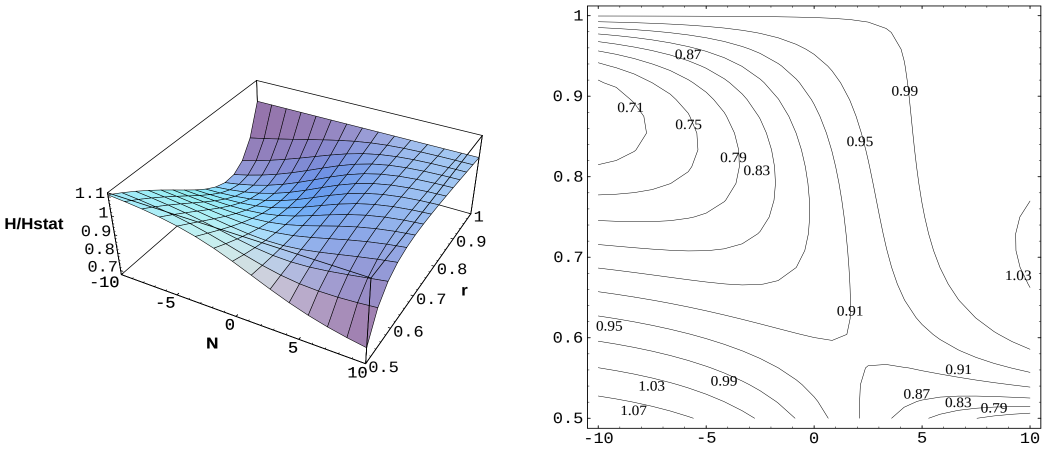


Abbildung 22: $\tau = 1$, $\eta = 1$

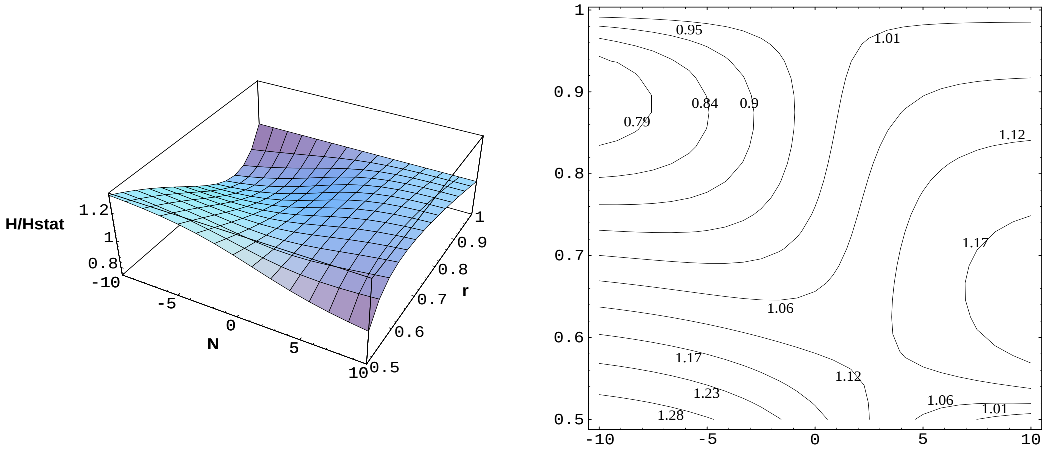


Abbildung 23: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1$, $\eta = 2$

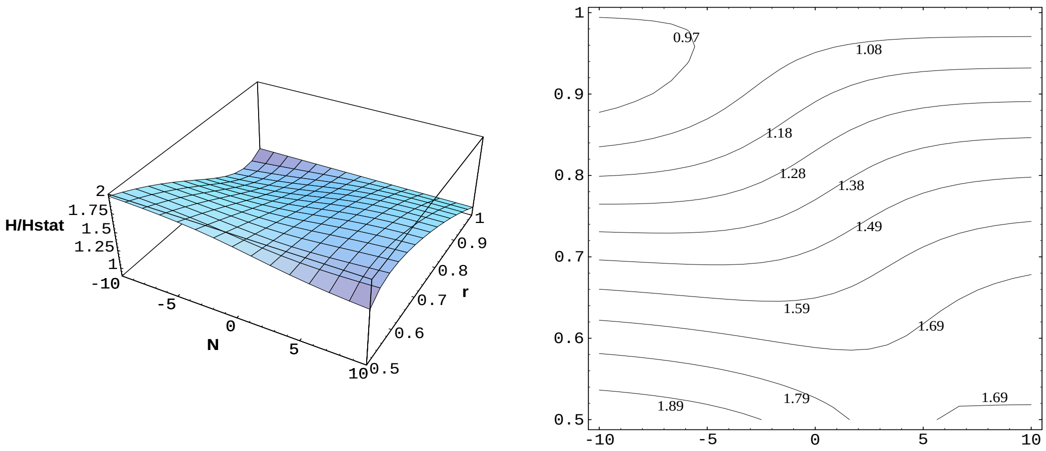


Abbildung 24: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1$, $\eta = 5$

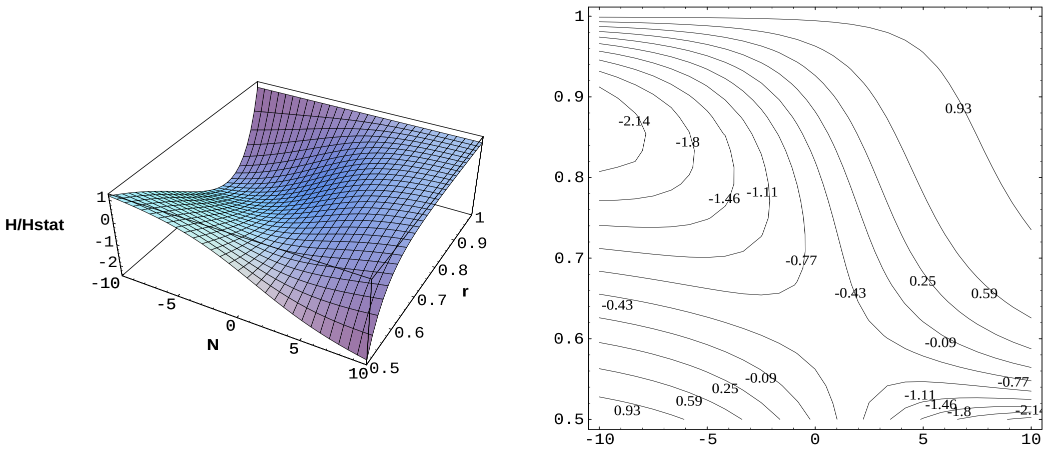


Abbildung 25: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 1$

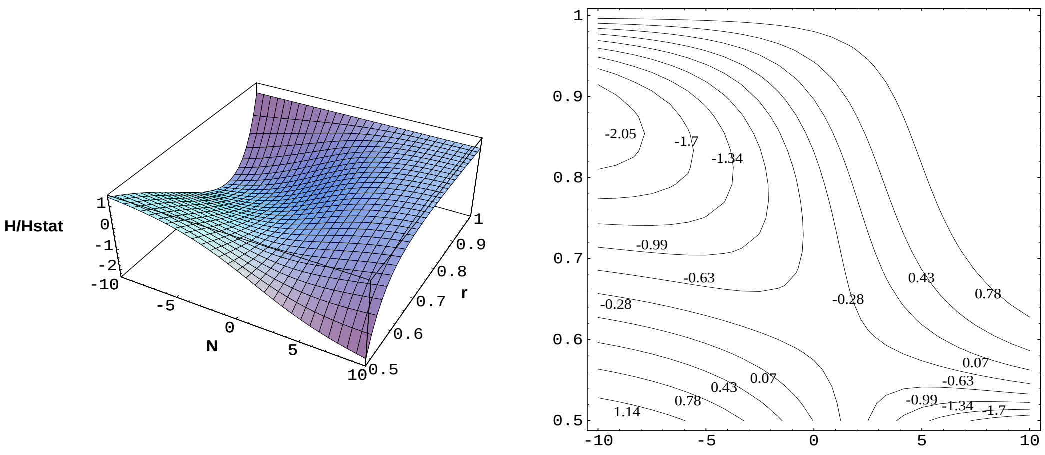


Abbildung 26: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 2$

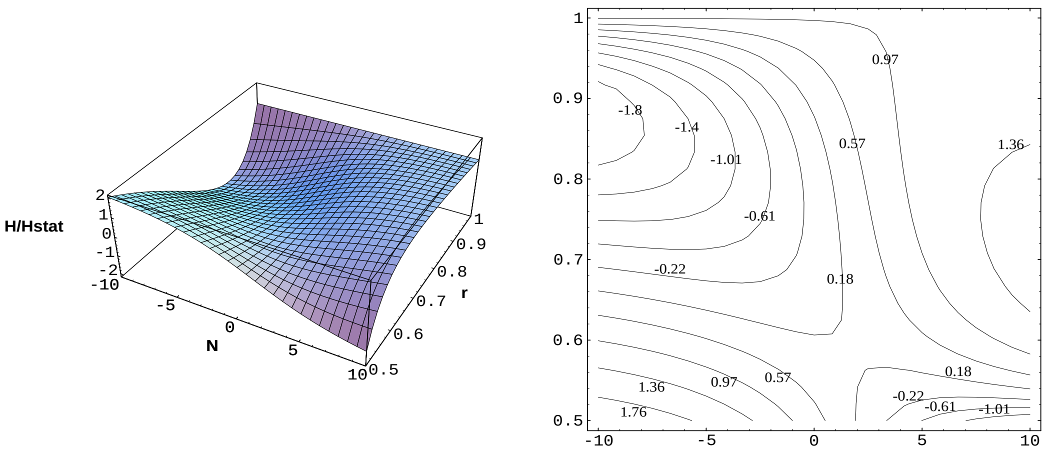


Abbildung 27: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 5$

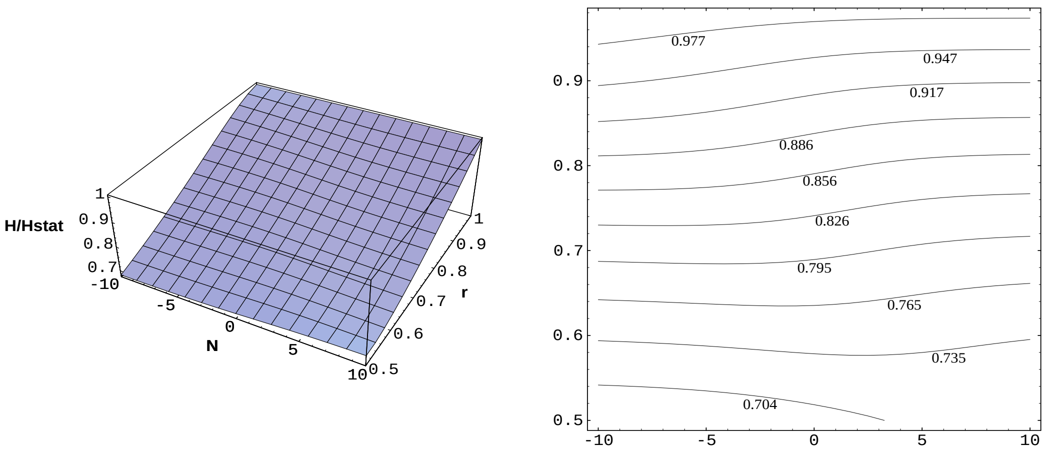


Abbildung 28: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2$, $\tau = 0.1$

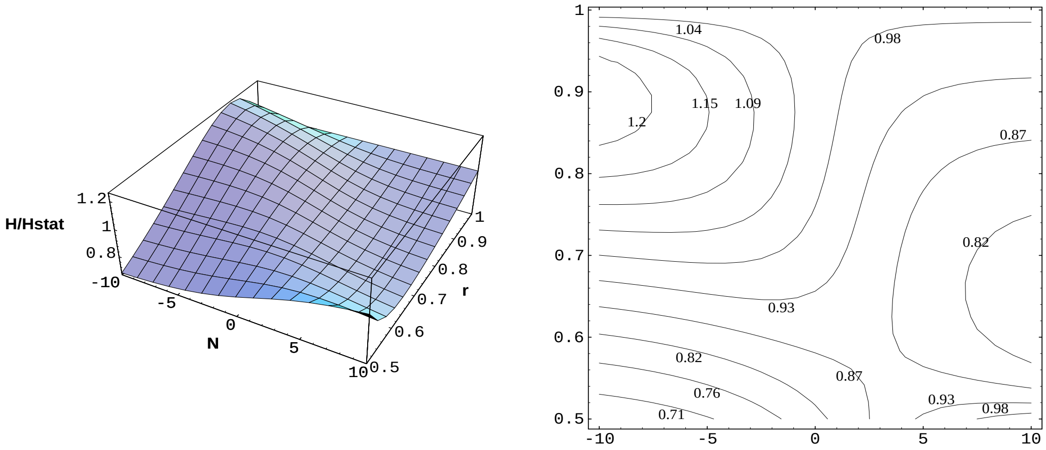


Abbildung 29: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2,\ \tau = 1$

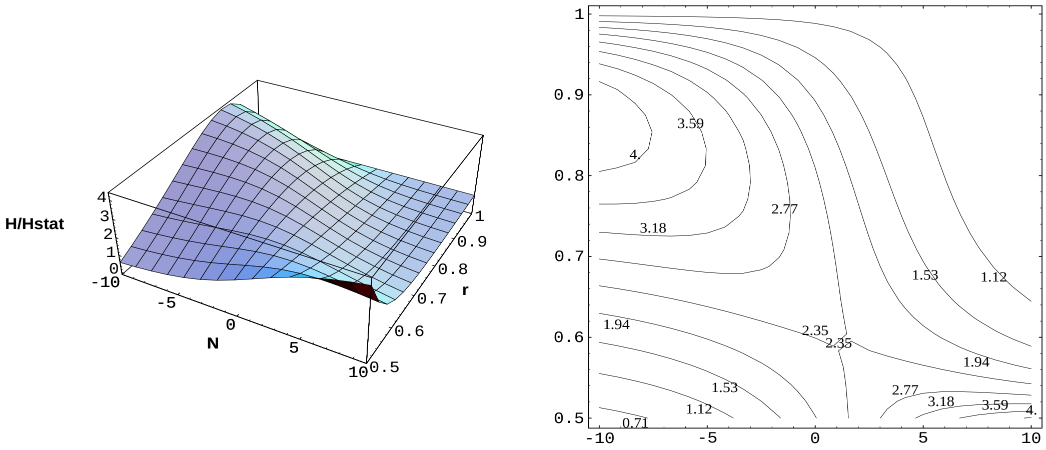


Abbildung 30: $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2,\ \tau = 10$

(c) Die Abbildungen 31 bis 42 zeigen den Verlauf des normierten dritten Strahlungsmoments $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ über N und r aus zwei verschiedenen Blickrichtungen. Die Struktur und der Verlauf der Oberflächengraphiken ähneln stark denen der normierten mittleren Intensität. Sämtliche Bemerkungen über die Variation der Parameter, deren physikalische Interpretation und die "Instabilität" bei großen optischen Tiefen aus (a) gelten auch für $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$. Dies verdeutlicht die enge Kopplung der mittleren Intensität (verknüpft mit der Strahlungsenergiedichte) mit dem dritten Strahlungsmoment (verknüpft mit dem Strahlungsdruck).

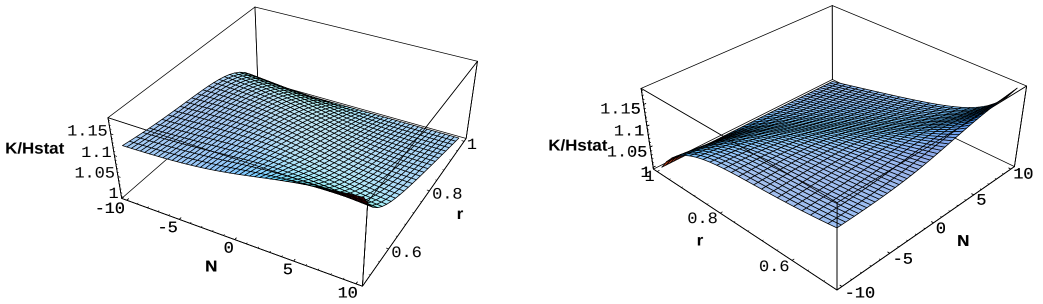


Abbildung 31: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1$, $\eta = 1$

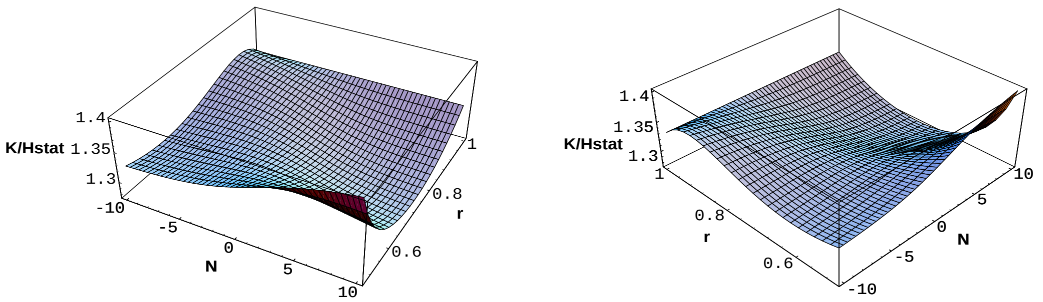


Abbildung 32: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1$, $\eta = 2$

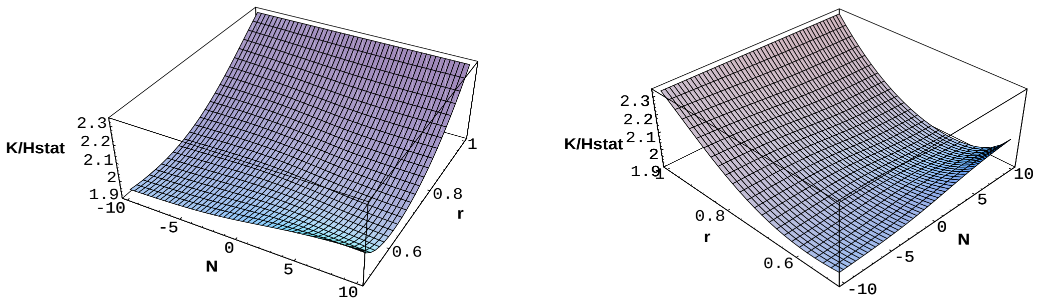


Abbildung 33: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 0.1$, $\eta = 5$

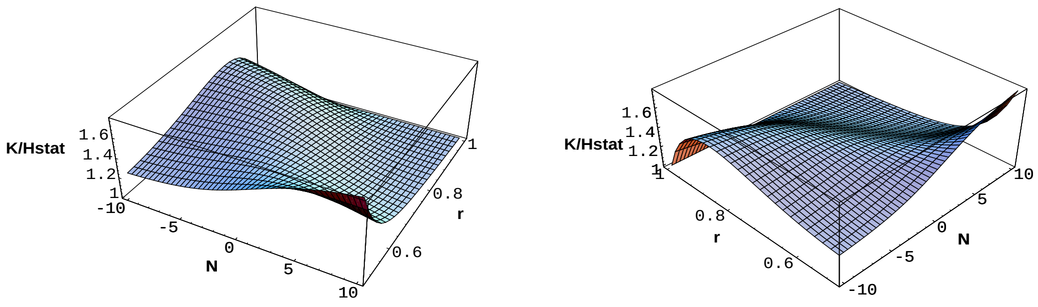


Abbildung 34: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1$, $\eta = 1$

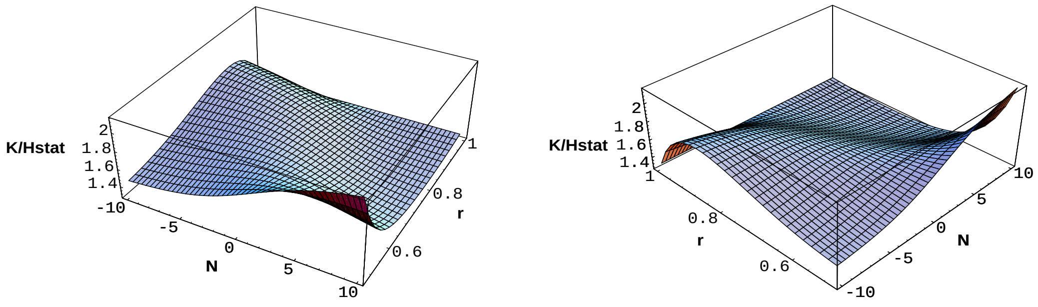


Abbildung 35: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1$, $\eta = 2$

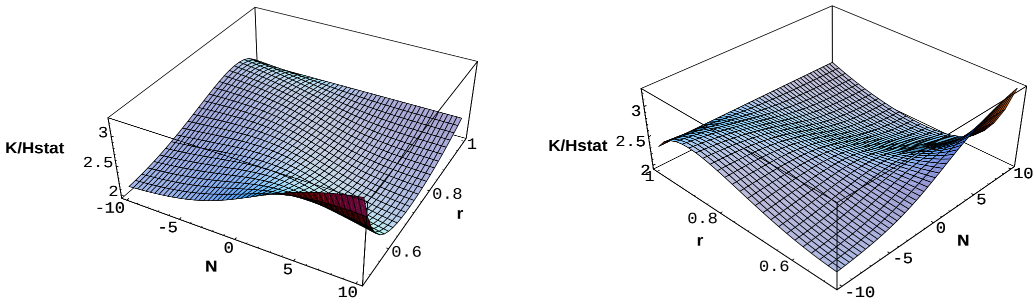


Abbildung 36: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 1$, $\eta = 5$

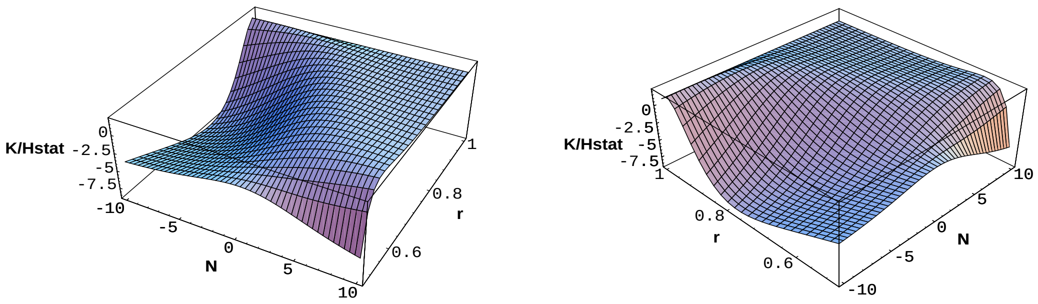


Abbildung 37: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 1$

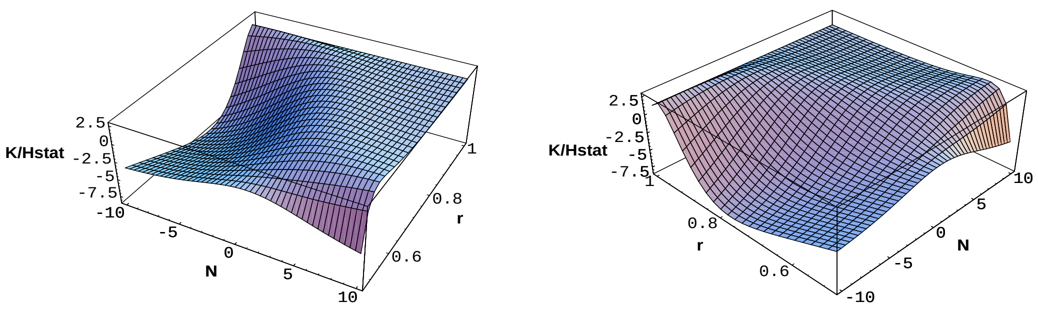


Abbildung 38: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 2$

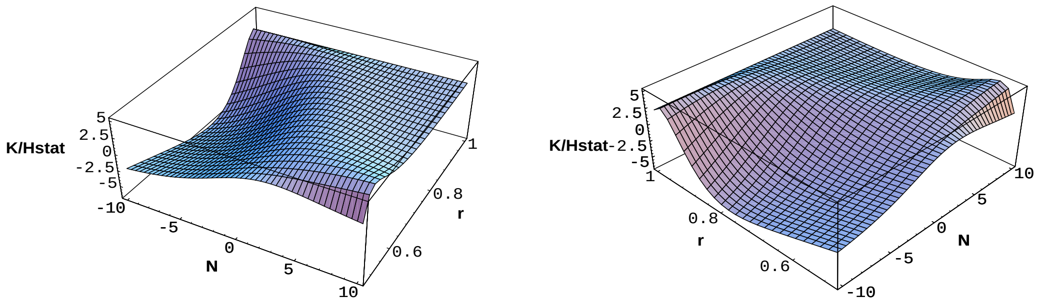


Abbildung 39: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für expandierende Konfigurationen:* $\tau = 10$, $\eta = 5$

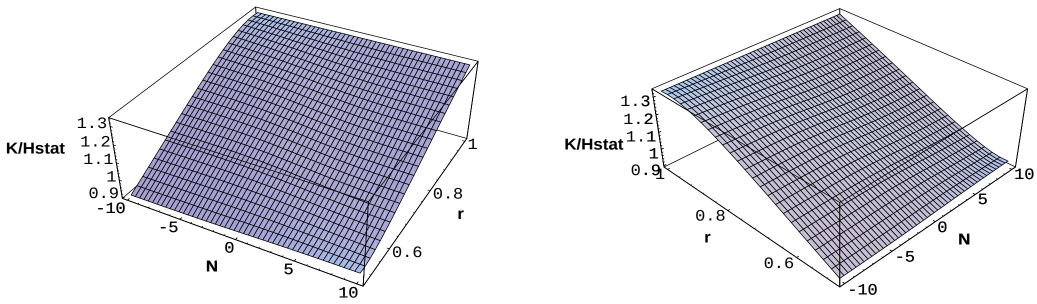


Abbildung 40: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2$, $\tau = 0.1$

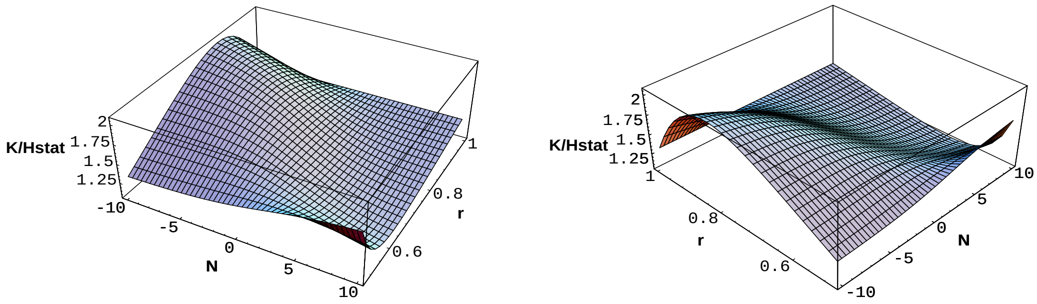


Abbildung 41: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2$, $\tau = 1$

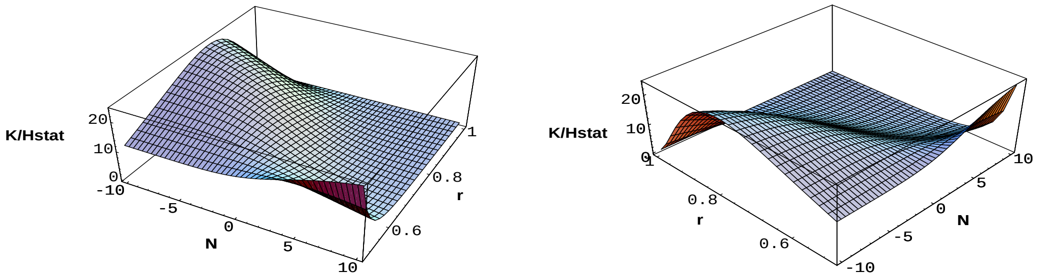


Abbildung 42: $\mathcal{K}_0/\mathcal{H}_{stat}$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\eta = 2$, $\tau = 10$

6.3 Vergleich mit numerischen Arbeiten

Wir kommen zum Vergleich des Temperaturverlaufs unserer analytischen Lösung $T(r) = \sqrt[4]{\pi/\sigma_{SB}\,\mathcal{J}}$ (σ_{SB} ist die Stefan-Boltzmann-Konstante) mit dem aus numerischen Arbeiten von P. Hauschildt (1988) [16] und (1991) [17].

(a) In der Diplomarbeit [16] werden Kontinua für SNe II berechnet. Als Hauptparameter sind die Effektivtemperatur T_{eff}, der Radius r_i der Photoshäre bei $\tau_{std} = 1$ (τ_{std} ist die optische Tiefe der Absorption im Kontinuum bei $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$) und der Dichteexponent N zu betrachten. Diese Hauptparameter werden unabhängig voneinander variiert. Daneben sind weitere Parameter die chemische Zusammensetzung und die Expansionsgeschwindigkeit v_i der Materie bei $\tau_{std} = 1$. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß eine solare Häufigkeitsverteilung der Elemente und eine Expansionsgeschwindigkeit $v_i = 10^4\,km/s$ vorliegen.
Grundlegende physikalische Annahmen zu denen aus Kapitel 4.1 sind:

- Potenzgesetz der Dichte,
- relativistische Effekte sind vernachlässigbar,
- die Besetzungszahlen der Niveaus der Atome und Ionen können nach der Boltzmann-Statistik berechnet werden (LTE).

Um die beiden Modelle miteinander vergleichen zu können, muß man mit Hilfe des bisher nicht berücksichtigten Paramerters $\mathcal{H}_{stat}$ die Effektivtemperatur aus den einzelnen numerischen Arbeiten auf unser analytisches Modell übertragen. Für die Effektivtemperatur und damit verbunden für den Strahlungsfluß, den ein ruhender Beobachter sehen würde, gilt:

$$\sigma_{SB} T_{eff}^4 = \mathcal{F}|_{r_i} = 4\pi \frac{\mathcal{H}|_{r_i}}{r_i^2} = 4\pi H|_{r_i} \; . \tag{117}$$

$H|_{r_i}$ ist der Eddington-Fluß im Laborsystem, der aus der Oberfläche einer Sphäre mit dem Radius r_i innerhalb der Hülle tritt. Um r_i bestimmen zu können, definieren wir die optische Tiefe an der Stelle r_i durch:

$$\tau|_{r_i} = \int_{\infty}^{r_i} \chi(r) dr = 1 \ . \tag{118}$$

Man sollte beachten, daß aufgrund relativistischer Effekte der von einem ruhenden Beobachter gemessenen Fluß zu groß ist (siehe "Boosting" in Kapitel 7). Die Beziehung zwischen $H|_{r_i}$ und $\mathcal{H}_{stat}$ lautet (vergleiche Gleichung (125) in Kapitel 7.2):

$$H|_{r_i} = \frac{1}{r_i^2}\left[\mathcal{H}_0|_{r_i} + r_i\hat{\beta}\left(\mathcal{J}_0|_{r_i} + \mathcal{K}_0|_{r_i}\right)\right] \ . \tag{119}$$

Reduziert auf die erste Ordnung in $\hat{\beta}$ ergibt sich:

$$H|_{r_i} = \frac{\mathcal{H}_{stat}}{r_i^2}\left[1 + 2r_i\hat{\beta}\left(\frac{2}{3}u_0|_{r_i} + 1\right) + \hat{\beta}\hat{h}_1\right] \ . \tag{120}$$

Die hier verwendeten Funktionen werden in den Kapiteln 5.3 und 5.4 definiert. Der mittlere Extinktionskoeffizient χ_{stat} muß für das analytische Modell bestimmt werden:

$$-\int_{r_a}^{r_i} \chi_{stat} r^{-N} dr = \frac{\chi_{stat}}{N-1}\left[r_i^{-N-1} - r_a^{-N-1}\right] = 1 \ . \tag{121}$$

r_a ist der äußere Radius der Hülle bei $\tau_{std} = 10^{-4}$ und r_i der innere Radius bei $\tau_{std} = 1$ (beide Werte entnimmt man der Arbeit von P. Hauschildt [16]). Somit ergibt sich:

$$\chi_{stat} = (N-1) \cdot \left[\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^{-N+1} - 1\right]^{-1} \ . \tag{122}$$

In den Abbildungen 43 bis 50 wird der Vergleich der beiden Temperaturverläufe gezeigt. Die numerischen Daten werden durch kleine Vierecke dargestellt, die miteinander verbunden werden. Die gestrichelte Kurve ist der durch die Variation des Prameters η angepaßte analytische Verlauf. In den Abbildungen 43 bis 48 ist der Dichteexponent N auf 10 gesetzt. Da P. Hauschildt keine relativistischen Effekte berücksichtigt, wird kein "Boosting" miteinbezogen. Für die Abbildungen 43 bis 45 gilt $T_{eff} = 12\,000\,K$ und für die Abbildungen 46 bis 48 $T_{eff} = 10\,500\,K$. Der innere Radius r_i (auf $10^{15} cm$ normiert) ist ein Hauptparameter der numerischen Arbeit, der eine Schwankung des Temperaturverlaufs bis zu $400\,K$ verursacht. Der Temperaturverlauf unserer Lösung wird durch die Variation von r_i nur wenig beeinflußt. Man kann den analytischen Verlauf durch die Variation des Parameters η bei r_a an den der numerischen

Arbeit anpassen. Für $r_i = 0.01$ und $r \to r_a$ (Abbildungen 43 und 46) stimmen beide Kurven gut überein. Für $r \to r_i$ weichen die Verläufe voneinander ab, wobei die numerisch bestimmte Kurve steiler ansteigt. Eine mögliche Erklärung dafür ist, daß in unserer Arbeit ein mittlerer Extinktionskoeffizient verwendt wird, wohingegen P. Hauschildt die Ionisation, die Thomson-Streuung und die kontinuierliche Absorption einiger Elemente einbezieht, was insbesonders bei einer steigenden Zahl von Photonenwechselwirkungen zu einem anderen Temperaturverlauf führen kann. Beim Anpassen der Kurven muß man mit zunehmendem r_i den Parameter η erhöhen, wobei die beiden Verläufe wenig bzw. gar nicht übereinstimmen. [4]

In den Abbildungen 49 und 50 wird das oben erwähnte "Boosting" beim Angleichen der beiden Modelle mittels der Effektivtemperatur mit einbezogen und man erkennt, daß die Temperatur unserer analytischen Lösung dann um etwa $1\,000\,K$ tiefer liegt.

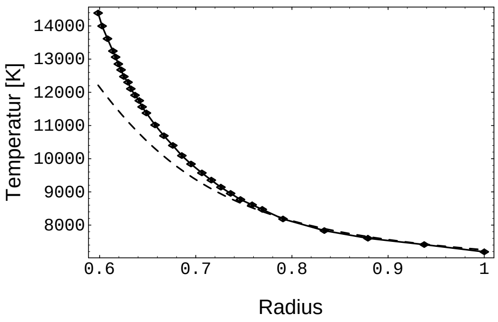


Abbildung 43: $T_{eff} = 12\,000\,K$, $r_i = 0.01$, $N = 10$, $\eta = 1.5$

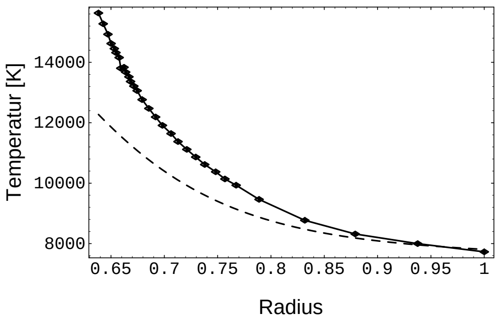


Abbildung 44: $T_{eff} = 12\,000\,K$, $r_i = 0.1$, $N = 10$, $\eta = 1.8$

[4]Die in den Abbildungen auftretenden senk- und waagerechten Linien sind auf das Graphikprogramm zurückzuführen und haben keine Bedeutung.

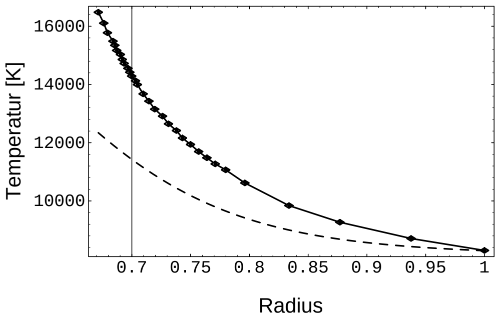


Abbildung 45: $T_{eff} = 12\,000\,K$, $r_i = 0.5$, $N = 10$, $\eta = 2.1$

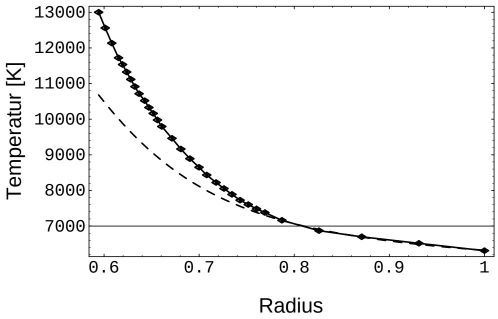


Abbildung 46: $T_{eff} = 10\,500\,K$, $r_i = 0.01$, $N = 10$, $\eta = 1.5$

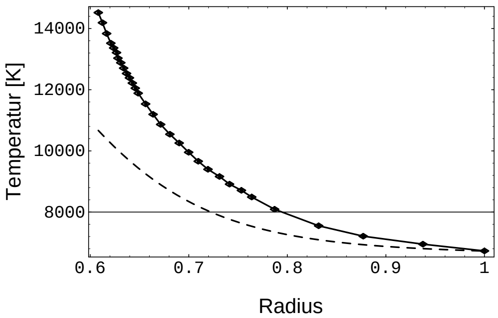


Abbildung 47: $T_{eff} = 10\,500\,K$, $r_i = 0.1$, $N = 10$, $\eta = 2$

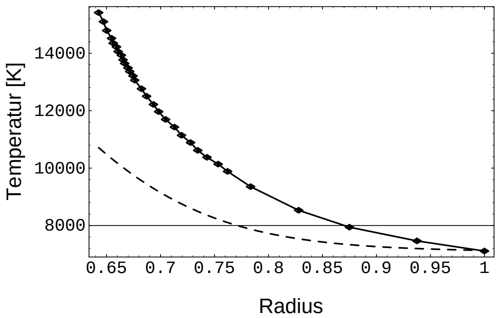


Abbildung 48: $T_{eff} = 10\,500\,K$, $r_i = 0.5$, $N = 10$, $\eta = 2.3$

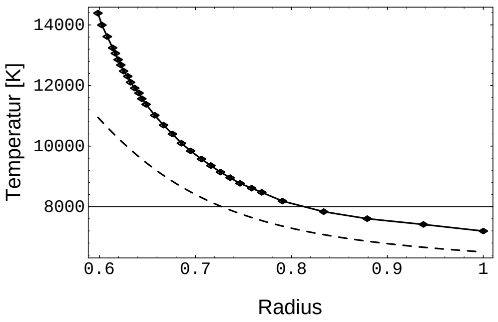


Abbildung 49: *$T_{eff} = 12\,000\,K$, $r_i = 0.01$, $N = 10$, $\eta = 1.5$ (mit "Boosting")*

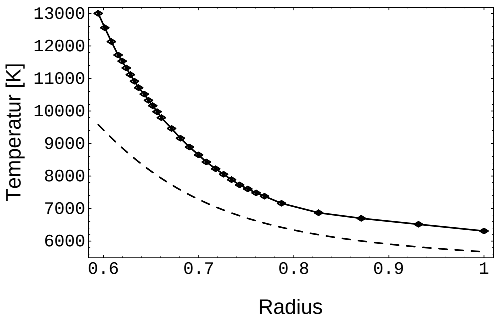


Abbildung 50: $T_{eff} = 10\,500\,K$, $r_i = 0.01$, $N = 10$, $\eta = 1.5$ (mit "Boosting")

(b) In seiner Dissertation stellt Hauschildt (1991) [17] eine Methode zur Berechnung von Non-LTE Modellatmosphären rasch expandierender, sphärisch-symmetrischer Hüllen vor. Dabei werden die nicht-graue, sphärisch-symmetrische, speziell relativistische Strahlungstransportgleichung im "Comoving Frame" zusammen mit den NLTE-Ratengleichungen und der NLTE-Zustandsgleichung selbstkonsistent gelöst. Die Absorption bzw. Streuung von etwa 10^5 UV-Linien wird in den Modellen berücksichtigt. Die große Zahl mittelstarker und schwacher Linien hat einen starken Einfluß auf die Struktur der Atmosphäre, wie es auch bei normalen Sternen der Fall ist. Die Linien kühlen die äußeren Schichten der Photosphäre durch erhöhte Abstrahlung deutlich im Vergleich zu Modellen, in denen lediglich Kontinuumsprozesse berücksichtigt werden. Gleichzeitig erhöhen sie die Temperatur bei mittleren optischen Tiefen, weil in diesen Schichten der Transport der Strahlungsenergie erschwert wird ("back-warming") [27]. Grundlegende physikalische Annahmen sind:

- sphärische Symmetrie,
- Stationarität, d.h. $\partial/\partial t \equiv 0$,
- Dichtegesetz der Form $\rho(r) = \rho_0(r/r_i)^{-N}$ mit $N \approx 10$,
- homologe Expansion, d.h. $v(r) = v_i(r/r_i)$,
- vollständig relativistischer Strahlungstransport im Lagrange-System,
- NLTE-Behandlung von H I, Mg II und Ca II,
- LTE für die restlichen Spezies,

- line-blanketing von etwa 10^5 Metallinien mit LTE-Besetzung der Niveaus, jedoch 95 % Streuanteil in den Linien,
- tiefenunabhängige statistische Geschwindigkeit mit $\xi = 1\,000\ km/s$.

Modell	$T_{eff}\ [K]$	$r_i\ [cm]$	$L\ [ergs^{-1}]$	$v_i\ [km/s]$	N	Bemerkungen
C1	10 000	$2.50 \cdot 10^{14}$	$4.45 \cdot 10^{41}$	$2.0 \cdot 10^{4}$	13	
C1LBC	10 000	$2.50 \cdot 10^{14}$	$4.45 \cdot 10^{41}$	$2.0 \cdot 10^{4}$	13	LTE, Kontinuum

Tabelle 1: *Modelle für SN1987A: Der Präfix "C1" gibt an, daß das Modell die von Catchpole et al. [9] für den ersten Tag nach der Explosion angegebene Leuchtkraft besitzt.*

Die Bestimmung von $\mathcal{F}|_{r_i}$ wird wie in (a) beschrieben vorgenommen. In Abbildung 51 werden zwei Temperaturverläufe gezeigt, die auf Modellrechnungen von P. Hauschildt beruhen: Die Kurve mit den Rauten entspricht dem Modell C1 (NLTE und etwa 70 000 Linien) und der Verlauf mit den Dreiecken dem Modell C1LBC (siehe Tabelle 1). C1LBC entspricht dem Modell C1, jedoch wird kein line blanketing einbezogen und es wird LTE für H I, Mg II und Ca II angenommen. Beide Kurven stammen aus einer Abbildung, so daß noch ein Ablesefehler auftritt. Die durchgezogene Kurve stellt den durch die Variation von η angepaßten Verlauf unserer analytischen Lösung dar ($\eta = 1.5$), wobei kein "Boosting" bei der Bestimmung des Flusses für $\tau = 1$ vorgenommen wird. Das Modell C1LBC läßt sich gut durch die analytische Lösung anpassen. Die Kurve für das Modell C1 liegt um etwa $750\,K$ höher, was mehr auf das line blanketing als auf NLTE-Effekte zurückzuführen ist (siehe [17]). Die Abbildung 52 zeigt wiederum den Temperaturverlauf der Modelle C1 und C1LBC. Beim Angleichen unseres Modells an das von P. Hauschildt wird nun jedoch berücksichtigt, daß die Effektivtemperatur und der daraus resultierende Fluß Laborsystemgrößen sind und in den "Comoving Frame" transformiert werden müssen. Somit liegt der analytische Temperaturverlauf um etwa $1\,000\,K$ tiefer. Es scheint, als ob P. Hauschildt diesen "Boosting"-Effekt in seiner Arbeit [17] nicht mitberücksichtigt hat.

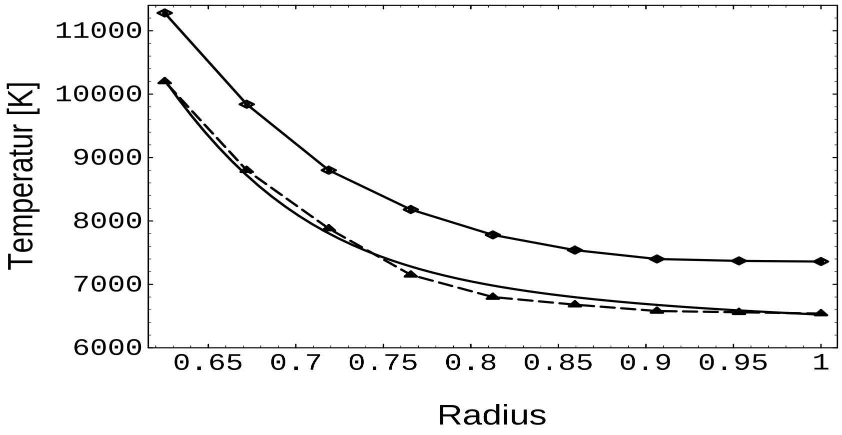


Abbildung 51: *Keine berücksichtigung des "Boosting"-Effekts bei der Bestimmung des Flusses mit Hilfe der Effektivtemperatur*

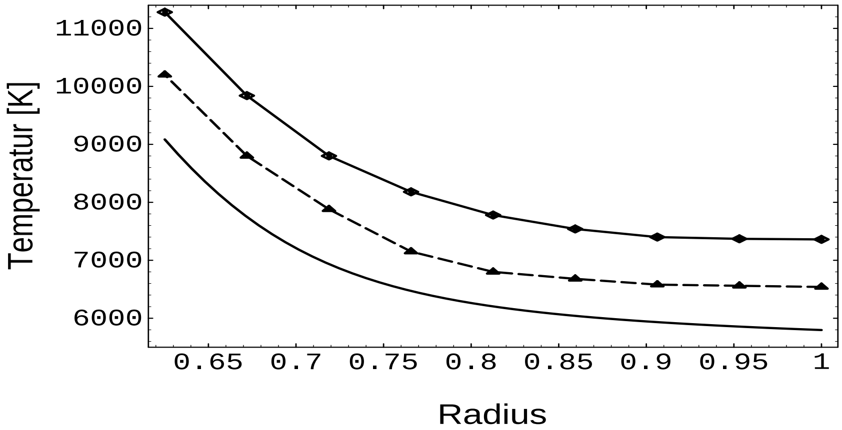


Abbildung 52: *Berücksichtigung des "Boosting"-Effekts bei der Bestimmung des Flusses mit Hilfe der Effektivtemperatur*

7 Die intrinsische Leuchtkraft

Um die Entfernung eines Objektes berechnen zu können, ist es von Bedeutung, die Leuchtkraft möglichst genau zu bestimmen. Andererseits erhebt sich die Frage (z.B. bei der Interpretation der Energieerzeugung im beobachteten Objekt), ob man die intrinsische Leuchtkraft bestimmen kann, auch ohne die Entfernung zu kennen und dem Beobachter nur ein begrenztes Wellenlängenfenster zur Verfügung steht.

Man kann die atmosphärischen Parameter (wie z.B. die intrinsische Leuchtkraft) ganz allgemein durch den Vergleich und das Anpassen von Modellspektren an beobachtete Energieverteilungen festlegen. Im einfachsten Fall, nämlich einer kompakten plan-parallelen Sternatmosphäre, ist es unmöglich, die intrinsische Leuchtkraft ohne zusätzliche Informationen, wie etwa der Entfernung, zu bestimmen, da der Strahlungstransport nur von der optischen Tiefe abhängt. Die Situation ändert sich jedoch für sphärisch ausgedehnte Konfigurationen. In diesem Fall geht nicht nur die optische Tiefe, sondern auch die geometrische Tiefenskala (also die radiale Koordinate r) in die Strahlungstransportgleichung mit ein. Daher legen die tatsächliche geometrische Tiefe und die sphärische Krümmung der emittierenden Schicht mit fest, ob ein Spektralmerkmal in Absorption oder Emission erscheint. Somit kann die Leuchtkraft prinzipiell aus dem Spektrum abgeleitet werden (siehe [33], [34]).

7.1 Relativistische Effekte

Für expandierende und kollabierende (sphärisch-symmetrische) Konfigurationen tauchen weitere Schwierigkeiten auf. Und zwar nicht nur der Art, daß zusätzliche Parameter erforderlich sind, sondern insbesonders wegen der relativistischen Effekte auf das Strahlungsfeld. Zum Beispiel wird die Strahlung, die von irgendeiner Schicht innerhalb der Atmosphäre "gesehen" wird, einem "Boosting" unterzogen sein, was die intrinsische Leuchtkraft ebenso beeinflußt. In Abbildung 53 ist ein Teil einer expandierenden, sphärisch-symmetrischen Hülle, ein Materieelement **A** am Ort r_1 mit der Geschwindigkeit β_1, ein weiteres Materieelement **B** am Ort r_2 mit der Geschwindigkeit β_2 ($\beta_1 < \beta_2$, $r_1 < r_2$) und ein ruhender Beobachter in **C** zu sehen. Nimmt man nun isotrope Strahlung und Strahlungsgleichgewicht im "Comoving Frame" (eine der physikalischen Forderungen aus Kapitel 4.1) an, so kann man sich zunächst fragen, was für Strahlung das Materieelement in **B** von dem aus **A** "sieht". Damit ist gemeint, welche Energie die Photonen aus **A** in **B** haben. Aufgrund des "Boosting" scheint die Energie der Photonen aus **A** in **B** verkleinert. Da nun im Materieelement **B** Strahlungsgleichgewicht herrscht, werden die ankommenden Photonen mit der verminderten Energie absorbiert, um sofort wieder zu einem weiteren Materieelement mit größerer Geschwindigkeit (lineares Geschwindigkeitsgesetz) emittiert zu werden. Dieser Prozeß wiederholt sich bis zum äußeren Radi-

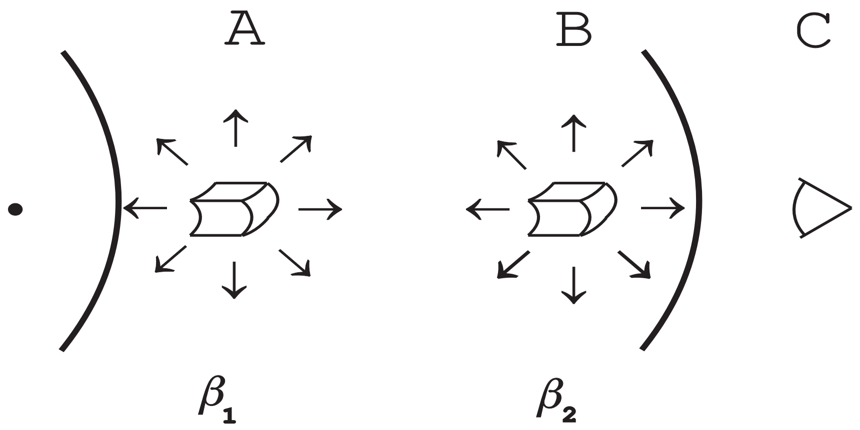


Abbildung 53: *Zwei isotrop strahlende Materieelemente im Strahlungsgleichgewicht mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten β_1 und β_2*

us der Hülle. Somit könnte man annehmen, daß der Verlauf der mittleren Intensität im "Comoving Frame" $\mathcal{J}_0(r)$ (der mit der Strahlungsenergie über die Relation $\mathcal{J}_0 = 4\pi/c\,\mathcal{E}_0$ verknüpft ist) im Vergleich zum statischen Verlauf $\mathcal{J}_{stat}$ abgesenkt wäre. Jedoch muß man zusätzlich berücksichtigen, daß ein Photon, welches von einem bewegten Materieelement emittiert wird, eine höhere Energie hat, als eines von einem ruhenden Materieelement. In Abbildung 54 ist sowohl der isotrope ($\eta = 1$), statische Verlauf der mittleren Intensität (gestrichelte Kurve), als auch der isotrope, dynamische Verlauf (durchgezogene Kurve) dargestellt. Die optische Tiefe beträgt $\tau = 1$ und der Dichteexponent ist willkürlich auf 10 gesetzt. Der Verlauf der dynamischen Lösung liegt über dem statischen,

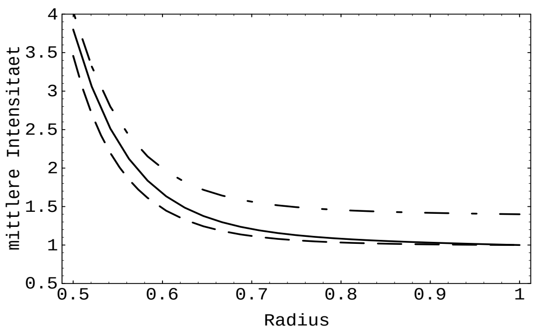


Abbildung 54: *Isotroper Verlauf der mittleren Intensität für den statischen (gestrichelte Kurve), den dynamischen (durchgezogene Kurve) und den ins Laborsystem transformierten dynamischen Fall (strich-punktierte Linie).*

was zur Folge hat, daß der Temperaturverlauf durch die Hülle für den dynamischen Fall ebenfalls höher liegt. Zusammenfassend läßt sich somit sagen, daß der relativistische Effekt einen höheren Temperaturverlauf zur Folge hat.

Es stellt sich noch die Frage, was für eine Temperatur ein ruhender Beobachter wohl sieht, wenn er nicht weiß, daß sich das beobachtete Objekt bewegt. In Abbildung 54 stellt die strich-punktierte Kurve den Verlauf der mitleren Intensität dar, so wie ihn ein ruhender Beobachter in **C** sehen würde. Damit ist gemeint, daß die strich-punktierte Kurve den ins Laborsystem transformierten Verlauf des dynamischen Falles zeigt. Wie zu erwarten ist, führt dieses "Boosting" zu noch höheren Werten der mittleren Intensität bzw. Temperatur.

7.2 Energieaustausch zwischen Strahlungs- und Materiefeld

Nimmt das Strahlungsfeld Energie vom Materiefeld auf oder gibt es Energie an dieses ab?

- **Expansion:** Bei der Strukturuntersuchung der Expansionsbewegung in Kapitel 6.2 ist der Eddington-Fluß in fast allen Parameterbereichen nach außen gerichtet. Somit würde es im Fall der Energieaufnahme durch das Strahlungsfeld zu einer Abbremsung der Expansion kommen. Wenn das Strahlungsfeld Energie abgeben würde, käme es zu einer Beschleunigung der Materie.

- **Kollaps:** Bei der Strukturuntersuchung des Kollaps (siehe Abbildungen 28 bis 30) ist der Eddington-Fluß ebenfalls nach außen gerichtet. Deshalb würde es bei der Energieaufnahme durch das Strahlungsfeld zu einer Verzögerung des Kollaps kommen. Im Fall der Energieabgabe des Strahlungsfeldes an das Materiefeld käme es zu einer Beschleunigumg des Kollaps.

Um diese Fälle zu untersuchen, müssen wir die Differenz der intrinsischen Leuchtkraft $\mathcal{L}_{intrin}$ mit der Leuchtkraft $\mathcal{L}|_{r_a}$ bilden ($r_a = 1$). Die intrinsische Leuchtkraft (im Laborsystem) ist durch

$$\mathcal{L}_{intrin}(r) = 4\pi r^2 F = (4\pi)^2 r^2 H = (4\pi)^2 \mathcal{H} \tag{123}$$

definiert. Die Transformationsgleichungen der physikalischen Größen (Energie E, Fluß F und Druck P) zwischen dem Laborsystem und dem "Comoving Frame" lauten (siehe [30]):

$$\begin{aligned} E &= E_0 + 2\beta c^{-1} F_0 \quad , & (124)\\ F &= F_0 + vE_0 + vP_0 \quad \text{und} & (125)\\ P &= P_0 + 2\beta c^{-1} F_0 \ . & (126) \end{aligned}$$

Die physikalischen Größen sind durch folgende Relationen mit den Strahlungsmomenten verknüpft:

$$F_0 = 4\pi H_0, \quad E_0 = \frac{4\pi}{c} J_0, \quad P_0 = \frac{4\pi}{c} K_0 \ . \tag{127}$$

Mit der Gleichung (125) kann man die Beziehung zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_0$ herstellen:

$$\mathcal{H}(r) = \mathcal{H}_0 + \beta(\mathcal{J}_0 + \mathcal{K}_0) \ . \tag{128}$$

Der Eddington-Fluß $\mathcal{H}|_{r_a}$ im Laborsystem lautet:

$$\mathcal{H}|_{r_a} = \mathcal{H}_0|_{r_a} + \beta(1) \cdot (\mathcal{J}_0|_{r_a} + \mathcal{K}_0|_{r_a}) \ . \tag{129}$$

Wenn wir die Relationen

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(r) &= u(r)\mathcal{H}_0(r) \ , \\ \mathcal{K}_0(r) &= f(r)u(r)\mathcal{H}_0(r) \qquad \text{und} \\ f(r) &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{u(r)}\right) \end{aligned} \tag{130}$$

verwenden (vergleiche Kapitel 5.2) und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u|_{r_a} &= \eta \qquad \text{und} \\ \mathcal{H}_0|_{r_a} &= \mathcal{H}_{stat} \end{aligned} \tag{131}$$

berücksichtigen, erhalten wir:

$$\mathcal{H}|_{r_a} = \mathcal{H}_{stat}\left[1 + \frac{2}{3}\beta(1)\,(2\eta + 1)\right] \ . \tag{132}$$

Die auf $\mathcal{L}|_{r_a}$ normierte Differenz der intrinsischen Leuchtkraft $\mathcal{L}_{intrin}$ mit $\mathcal{L}|_{r_a}$ lautet:

$$\frac{\Delta\mathcal{L}}{\mathcal{L}|_{r_a}} := \frac{\mathcal{L}_{intrin}(r) - \mathcal{L}|_{r_a}}{\mathcal{L}|_{r_a}} = \frac{\mathcal{H}_{stat}}{\mathcal{H}|_{r_a}} \cdot \underbrace{\frac{\mathcal{H}(r) - \mathcal{H}|_{r_a}}{\mathcal{H}_{stat}}}_{\Delta} \ . \tag{133}$$

Nach einer Reihe von Umformungen erhält man mit den Annahmen und Definitionen aus Kapitel 4 und 5:

$$\Delta = \hat{\beta}\left[-X_1(r) + X_1(1)\right] + \tilde{\beta}\left[-X_0(r) + X_0(1)\right] \ , \tag{134}$$

wobei $X_k(r) = \int r^k \chi(r) dr$ und $\chi(r) = \chi_{stat} \cdot r^{-N}$ gilt.

Die Abbildung 55 stellt einen positiven Verlauf von Δ für expandierende Konfigurationen dar. Somit würde das Strahlungsfeld Energie an das Materiefeld abgeben, was zu einer Beschleunigung der Expansion führen würde. In Abbildung 56 ist der Verlauf von Δ negativ, was zu einer Energieaufnahme durch das Strahlungsfeld führen und somit den Kollaps verzögern würde.

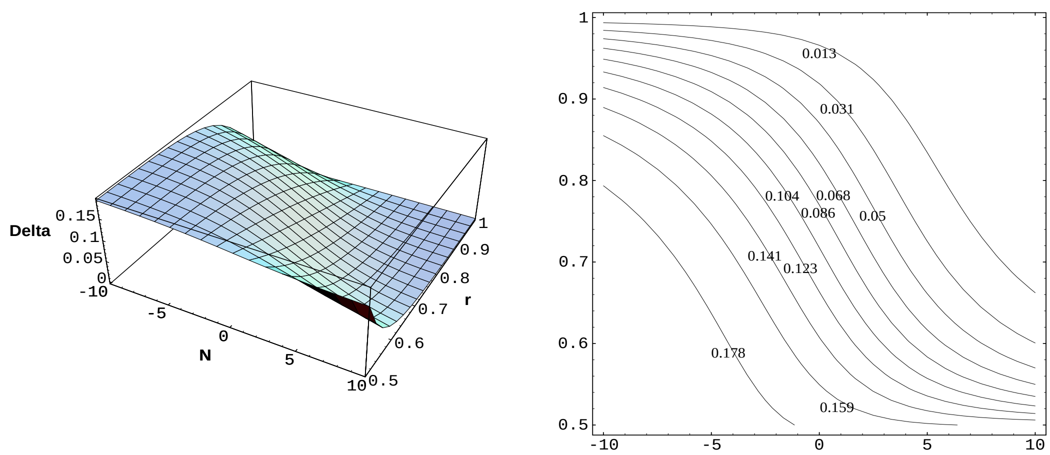


Abbildung 55: $\Delta(r)$ *für expandierende Konfigurationen:* $\hat{\beta} = \tilde{\beta} = 0.1$

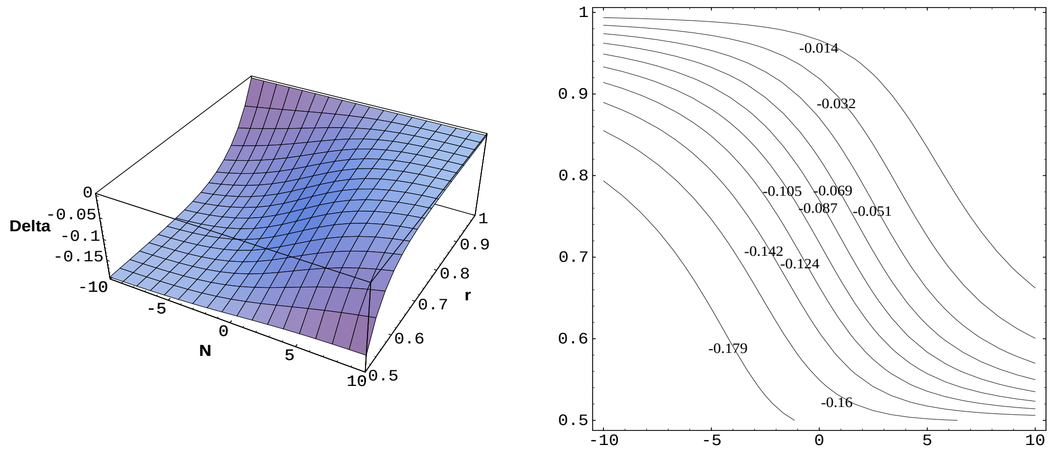


Abbildung 56: $\Delta(r)$ *für kollabierende Konfigurationen:* $\hat{\beta} = \tilde{\beta} = -0.1$

8 Zusammenfassung und Diskussion

Wir haben in dieser Arbeit eine analytische Lösung der grauen, relativistischen, sphärisch-symmetrischen Strahlungstransportgleichung für expandierende und kollabierende Konfigurationen bis zur ersten Ordnung in β hergeleitet. Trotz der numerischen Behandlung des Strahlungstransports und dessen Fortschritt in den letzten 30 bis 40 Jahren ist es wichtig, analytische Lösungen für dieses Problem zu erhalten, da numerische Algorithmen große Schwierigkeiten haben, z.B. den gesamten Strahlungsfluß einer bewegten Atmosphäre mit vielen Spektrallinien zu bestimmen.

Die Grundgleichung des Strahlungstransports (1) wird in zahlreichen Fällen mit großem Erfolg angewendendet und durch eine Kontinuumstheorie gerechtfertigt, wobei eine Reihe von Näherungen eingehen. Es werden beispielsweise keine optische Korrelationsphänomene (z.B. Interferenz) mit einbezogen und es erfolgt auch keine vollständige statistische Beschreibung des optischen Feldes. Der Bereich der Optik, der diese Probleme behandelt, wird als *optische Korrelationstheorie* bezeichnet (siehe [25]). Der große Erfolg der Grundgleichung (1) ist darauf zurückzuführen, daß dieses Modell hauptsächlich in Verbindung mit thermischen Prozessen angewendet wird. Jedoch soll betont werden, daß bei der Behandlung des Energietransports durch Strahlung bis heute keine zufriedenstellende Ableitung der Grundgleichung (1) aus der elektromagnetischen Theorie oder der skalaren Wellentheorie vorliegt.[5]

Wir haben einen Vergleich unser statischen Lösung mit einer statischen Lösung von Hummer und Rybicki [20] für den isotropen Fall durchgeführt, wobei eine gute Übereinstimmung für große Dichteexponenten N erzielt wird. Bei der Untersuchung der Strukturstabilität im bewegten Fall haben wir gesehen, daß unsere Lösungen stetig über die Stellen der durch die Parametrisierung auftretenden "Scheinsingularitäten" verlaufen. Die Parameterstudie liefert eine Einschränkung des Wertebereichs der optischen Tiefe τ und der Geschwindigkeit β. Desweiteren wird gezeigt, daß die charakteristische Struktur der Lösungen durch eine nicht zu große Variation der Parameter erhalten bleibt und daß keine wirklichen Singularitäten auftreten.

Der Vergleich unseres analytisch bestimmten Temperaturverlaufs mit numerisch bestimmten Verläufen aus der Diplomarbeit von P. Hauschildt [16] liefert für geeignete Parameterwerte im äußeren Bereich der Photosphäre eine gute Übereinstimmung, wobei beim Angleichen der beiden Modelle mittels der Effektivtemperatur das "Boosting" vernachlässigt wird. Falls das "Boosting" berücksichtigt wird, ergibt sich ein um etwa $1\,000\,K$ tieferer Temperaturverlauf der analytischen Lösung. In seiner Dissertation [17] löst P. Hauschildt die nichtgraue, sphärisch-symmetrische, speziell relativistische Strahlungstransportgleichung im "Comoving Frame" zusammen mit den NLTE-Ratengleichungen und

[5] Mit Ausnahme weniger Spezialfälle, wenn z.B. die Streuung vernachlässigbar ist und keine Quellen existieren (vergleiche [25]).

der NLTE-Zustandsgleichung selbstkonsistent. Der Vergleich unseres Temperaturverlaufs mit dem Modellverlauf C1LBC (LTE, Kontinuum) liefert eine gute Übereinstimmung durch die gesamte Hülle, wobei kein "Boosting" beim Angleichen der beiden Modelle berücksichtigt wird (vergleiche Abbildung 51). Das Modell C1LBC entspricht also im wesentlichen unserem grauen Fall. Der Temperaturverlauf des Modells C1 (NLTE und etwa 70 000 Linien) liegt wegen der NLTE-Effekte um etwa $750\,K$ höher als der analytisch bestimmte Verlauf. In Abbildung 52 wird beim Angleichen unseres Modells an das aus der Dissertation von Hauschild das "Boosting" bei der Bestimmung des Strahlungsflußes bei $\tau = 1$ über die Effektivtemperatur mit einbezogen, was den Verlauf der analytischen Lösung um etwa $1\,000\,K$ absenkt. Es scheint, als ob das "Boosting" der beobachteten Leuchtkraft bzw. Effektivtemperatur in der Dissertation nicht berücksichtigt wird. Eine Erklärung für die bessere qualitative Übereinstimmung unseres Temperaturverlaufs mit den Modellverläufen aus der Dissertation von Hauschildt gegenüber den Verläufen aus seiner Diplomarbeit wäre, daß in der Dissertation speziell relativistisch gerechnet und die optische Tiefe auf den Extinktionskoeffizienten bezogen wird (wie in dieser Arbeit). In der Diplomarbeit bezieht Hauschildt die optische Tiefe auf den Absorptionskoeffizienten, was beim Angleichen an unser Modell zu einem Fehler führt.

Die Betrachtung des Energieaustausches zwischen Strahlungs- und Materiefeld ergibt für expandierende Konfigurationen, daß das Strahlungsfeld Energie an das Materiefeld abgibt und somit die Expansion beschleunigt (siehe Abbildung 55). Beim Kollaps nimmt das Strahlungsfeld Energie aus dem Materiefeld auf, was zu einer Verzögerung des Kollaps führt (siehe Abbildung 56).

Literatur

[1] Alloin D., Collin-Souffrin S., Joly M., Vigroux L., 1979, *Astron. Astrophys.* **78**, 200

[2] Arnett W.D., Bahcall J.N., Kirshner R.P., Woosley S.E., 1989, *Ann. Rev, Astron. Astrophys.* **27**, 629

[3] Baschek B., Hafner M., Wehrse R., 1994, *Astron. Astrophys.* **301**, 511

[4] Baschek B., Efimov G.V., von Waldenfels W., Wehrse R., 1997, *Astron. Astrophys.* **317**, 630

[5] Baschek B., Grüber C., von Waldenfels W., Wehrse R.,1996, im Druck

[6] Best M., 1993, Dissertation, Universität Heidelberg

[7] Best M., Wehrse R., 1994, *Astron. Astrophys.* **284**, 507

[8] Cassinelli J.P., Hummer D.G., 1971, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **154**, 9

[9] Catchpole R.M., Menzies J.W., Monk A.S., Wargau W.F., Pollaco D., Carter B.S., Whitelock P.A., Marany F., Laney C.D., Balona L.A., Feast M.W., Lloyd Evans T.H.H., Sekiguchi K., Laing J.D., Kilkenny D.M., Spencer Jones J., Roberts G., Cousins A.W.J., van Vuuren G., Winkler H., 1987, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **229**, 15P

[10] Chandrasekhar S., 1934, *MNRAS* **94**, 443

[11] Chandrasekhar S., 1960, *Radiative Transfer.* Dover, New York

[12] Cooperstein J., Baron E.A., 1990, In: Petschek A.G. (ed.) *Supernovae.* Springer-Verlag, Heidelberg, p. 213

[13] Courant R., Hilbert D., 1967, *Methoden der mathematischen Physik II*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin

[14] Drake S. A., 1985, In: Beckman J.E., Crivellari L. (eds.) *Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory.* Reidel, Dordrecht, p. 351

[15] Hafner M., 1994, Dissertation, Universität Heidelberg

[16] Hauschildt P.H., 1988, Diplomarbeit, Universität Heidelberg

[17] Hauschildt P.H., 1991, Dissertation, Universität Heidelberg

[18] Hauschildt P.H., Wehrse R., Starrfield S., Shaviv G., 1992, *ApJ* **393**, 307

[19] Hauschildt P.H., Wehrse R., 1991 *JQSRT* **46**, 81

[20] Hummer D.G., Rybicki G.B., 1971, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **152**, 1

[21] Kalkofen W. (ed.), 1984, *Methods in Radiative Transfer.* Cambridge Univ. Press, Cambridge

[22] Kalkofen W. (ed.), 1987, *Numerical Radiative Transfer.* Cambridge Univ. Press, Cambridge

[23] Kosirev N.A., 1934, *MNRAS* **94**, 430

[24] Kunasz P.B., 1985, In: Beckman J.E., Crivellari L. (eds.) *Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory.* Reidel, Dordrecht, p. 319

[25] Mandel L., Wolf E., 1995, *Optical Coherence and Quantum Optics.* Cambridge Univ. Press, Cambridge

[26] Mayle R.W., 1990, In: Petschek A.G. (ed.) *Supernovae.* Springer-Verlag, Heidelberg, p. 267

[27] Mihalas D., 1978, *Stellar Atmospheres.* Freeman, San Francisco

[28] Mihalas D., Kunasz P.B., Hummer D.G., 1976, *Astrophys. J.* **210**, 419

[29] Mihalas D., Kunasz P.B., Hummer D.G., 1975, *Astrophys. J.* **202**, 465

[30] Mihalas D., Weibel-Mihalas B., 1984, *Foundations of Radiation Hydrodynamics.* Oxford Univ. Press, Oxford

[31] Müller E., Fryxell B., Arnett D., 1991, *Astron. Astophys.* **251**, 505

[32] Pomraning G.C., 1973, *The Equations Of Radiation Hydrodynamics.* Prgamon Press, p. 47

[33] Scholz M., 1985, *Astron. Astrophys.* **145**, 251

[34] Scholz M, Wehrse R., 1981, *MNRAS* **200**, 41

[35] Shaviv G., Wehrse R., Wagoner R.V., 1985, *ApJ* **289**, 198

[36] Sparks W.M., Starrfield S., Truran J.W., 1978, *Astrophys. J. Suppl.* **226**, 186

[37] Starrfield S., 1989, In: Bode M.F., Evans N. (eds) *Classical Novae.* Wiley, New York

[38] Starrfield S., Sparks W.M., Truran J.W., 1974a, *Astrophys. J. Suppl.* **28**, 247

[39] Starrfield S., Sparks W.M., Truran J.W., 1974b, *Astrophys. J.* **192**, 647

[40] Starrfield S., Truran J.W., Sparks W.M., 1978, *Astrophys. J. Suppl.* **226**, 186

[41] Tammann G.A., Leibundgut B., 1990, *Astron. Astrophys.* **253** , 487

[42] Unsöld A., 1968, *Physik der Sternatmosphären*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin

[43] Wolfram Research, 1993, Mathematica 2.2, Wolfram Research Inc.

[44] Woosley S.E., Weaver T.A., 1986, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **24**, 205

[45] Woosley S.E., Weaver T.A., 1986, In: Audouze J., Mathieu N. (eds) *Nucleosynthesis and Its Applications on Nuclear and Particle Physics.* Reidel, Dordrecht, p. 145

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den .... Unterschrift:................