INAUGURAL–DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Physiker Patrick E. Müller

aus Baden–Baden

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Januar 2001

3D-NLTE-Linienbildung

in differentiell bewegten Molekülwolken
mit protostellaren Kernen

und

analytische Untersuchungen zur hydrodynamischen
Struktur axialsymmetrischer Systeme

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Wehrse
Prof. Dr. Joachim Krautter

Zusammenfassung

3D-NLTE-Linienbildung in differentiell bewegten Molekülwolken mit protostellaren Kernen und analytische Untersuchungen zur hydrodynamischen Struktur axialsymmetrischer Systeme

Ziel dieses Projekts ist es, für protostellare Molekülwolken mit verschiedenen Geschwindigkeits- und Dichteverteilungen Linienprofile und -stärken zu berechnen, die unmittelbar mit räumlich und spektral aufgelösten Beobachtungen verglichen werden können. Sie sollen dazu beitragen, die physikalischen Verhältnisse protostellarer Wolkenkerne in den ersten Phasen der Sternentstehung abzuleiten.

Hierbei stehen in dieser Arbeit diagnostisch wichtige Rotationsübergänge des CS-Moleküls im Vordergrund. Da bei abnehmender Dichte NLTE-Effekte immer wichtiger werden, werden die entsprechenden zeitabhängigen Ratengleichungen in selbstkonsistenter Behandlung des Strahlungstransports im kollabierenden Medium gelöst. Die Rechnungen berücksichtigen sowohl *großräumige* (durch Rotation und Akkretion) als auch *kleinskalige* (durch mikroskopische Turbulenzen verursachte) Geschwindigkeitsfelder.

Auf der Basis analytischer Lösungen der 1D-Strahlungstransportgleichung wird ein Verfahren zur Berechnung der lokal emittierten Molekül-Linienintensitäten in einem kollabierenden sphärischen Medium entwickelt. Zur Berechnung der Linienemissionen aus axialsymmetrischen, differentiell rotierenden und kollabierenden Wolken, sowie zum Test der numerischen Resultate für den sphärischen 1D-Fall, wird außerdem die 3D-Strahlungstransportgleichung mittels der Methode der Finiten Differenzen numerisch gelöst. Um den Eingabe-Parameterraum eines rotierenden kollabierenden Systems einzuschränken, werden ferner für den 3D-Fall neue analytische Ausdrücke für die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung einer isothermen Wolke aus den hydrodynamischen Grundgleichungen hergeleitet. Diese Lösungen ergeben sich als Spezialfall aus den ebenfalls abgeleiteten Ausdrücken für entsprechende Sternwinde.

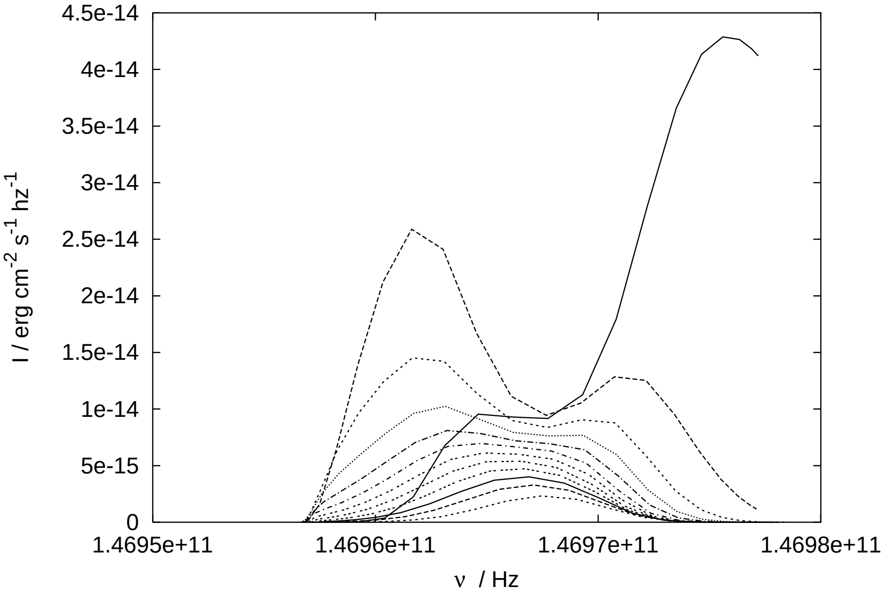
Abstract

3D-NLTE line formation in differentially moving molecular clouds with protostellar cores and analytical investigations of the hydrodynamic structure of axisymmetric systems

The aim of this project is to calculate for protostellar molecular clouds with different velocity and density distributions line profiles and strengths, which can be directly compared with spatially and spectrally resolved observations, in order to derive the physical conditions of protostellar cloud cores in the first stage of star formation.

In the centre of interest is the modeling of diagnostically important rotational transitions of the CS molecule. Since NLTE (i.e. non local thermal equilibrium) effects become more important with decreasing density, the corresponding time-dependent rate equations are solved self-consistently with respect to the radiative transfer in the collapsing medium. The calculations consider both macroscopic (from rotation and accretion) and microscopic (due to turbulences) velocity fields.

Based on analytical solutions of the 1D radiative transfer equation, a method for calculating the spatially resolved molecular line intensities in a collapsing spherical medium is developed. In order to calculate the line emissions from axisymmetric, differentially rotating and collapsing clouds, as well as to test the numerical results of the spherical 1D case, the 3D transfer equation is also solved numerically by using finite differences. In order to reduce the parameter space of rotating collapsing systems in the 3D case, new analytical expressions for the density and velocity field of an isothermal cloud are derived from the basic hydrodynamic equations. One obtains these solutions as special cases of the analytical solutions for a corresponding rotating stellar wind (also derived in this paper).


4.5e-14
4e-14
3.5e-14
3e-14
2.5e-14
2e-14
1.5e-14
1e-14
5e-15
0
I / erg cm^{-2} s^{-1} hz^{-1}
1.4695e+11
1.4696e+11
1.4697e+11
1.4698e+11
ν / Hz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Beobachtung von Molekülwolken . . . 1

1.2 Bisherige Arbeiten zu den frühen Entwicklungsstadien massearmer Sterne . . . 2

1.3 Probleme und Schwierigkeiten . . . 3

1.4 Ziel dieser Arbeit . . . 3

1.5 Gliederung des Hauptteils dieser Arbeit . . . 4

1.6 Ergebnisse und Gliederung dieser Arbeit hinsichtlich des Sternwind-Modells . . . 6

2 Überblick zur Lösung des NLTE-Linientransport-Problems **8**

2.1 Das Gleichungssytem . . . 8

2.2 Die Lösungsmethode und der Algorithmus . . . 9

3 Ratengleichungen **11**

3.1 Herleitung . . . 11

3.2 Geschwindigkeits- und Dichteverteilung einer sphärischen Wolke . . . 13

3.3 Ratenkoeffizienten . . . 14

3.3.1 Radiative Ratenkoeffizienten . . . 14

3.3.2 Kollisionsratenkoeffizienten . . . 15

3.3.3 Gesamte Ratenkoeffizienten . . . 15

4 1D-Strahlungstransport **17**

4.1 Vorgehensweise . . . 17

4.2 Doppler-Verschiebung in der Profilfunktion der Linien-Extinktion . . . 18

4.3 Berechnung der spezifischen Intensität . . . 20

4.3.1 Integrationsrichtung entlang einwärts gerichteter Strahlen mit $\mu_0 \leq 0$ . . . 20

4.3.2 Integrationsrichtung entlang auswärts gerichteter Strahlen mit $\mu_0 > 0$ . . . 22

4.4 Quellfunktion und Extinktionskoeffizient . . . 23

4.5 Zur Wahl des Schalengitters . . . 24

5 3D-Strahlungstransport **25**

5.1 Die 3D-Strahlungstransportgleichung im mitbewegten System für kleine Geschwindigkeiten . . . 25

5.2 Lösung der 3D-Strahlungstransportgleichung . . . 27

5.3 Berechnung der gemittelten Intensität $\overline{J}_{lu}(\vec{r})$ . . . 29

6 Strahlungshydrodynamik eines rotierenden und kollabierenden oder expandierenden Systems 31

6.1 Das Geschwindigkeitsfeld . . . 31

6.2 Hydrodynamische Grundgleichungen . . . 31

6.3 Vereinfachende Annahmen . . . 32

6.4 Vereinfachte hydrodynamische Gleichungen . . . 32

6.5 Lösungen: Die azimutale Geschwindigkeitskomponente und 2D-Wolken- bzw. Winddichte . . . 34

6.6 Die Bewegungsgleichung . . . 35

6.6.1 Der kritische Punkt und die kritischen Lösungen . . . 36

6.6.2 Zur Lösung der Bewegungsgleichung . . . 38

6.6.3 Die Lambert W-Funktion . . . 39

6.7 Die Lösung der Bewegungsgleichung . . . 40

6.8 Anwendung der Hydrodynamik auf eine rotierende und kollabierende Molekülwolke 42

7 Berechnung der Funktion w 47

7.1 Die Funktion w für eine sphärische Wolke . . . 47

7.2 Die Funktion w für eine axialsymmetrische Wolke . . . 47

8 Anwendung der Strahlungstransport-Modelle auf CS-Emissionen 51

8.1 Numerische Ergebnisse zu einer sphärischen kollabierenden Molekülwolke . . . 51

8.1.1 Die Wolken- und Programm-Parameter . . . 51

8.1.2 Die NLTE-Besetzungszahlen . . . 53

8.1.3 Die Profile aus dem 1D- und 3D-Modell . . . 57

8.1.4 Der Vergleich der Profile aus den verschiedenen Modellen . . . 64

8.1.5 Die ortsaufgelösten CS-Linienprofile . . . 72

8.2 Numerische Ergebnisse zu einer axialsymmetrischen, rotierenden und kollabierenden Molekülwolke . . . 79

8.2.1 Die Wolken- und Programm-Parameter . . . 79

8.2.2 Die NLTE-Besetzungszahlen . . . 81

8.2.3 Die ortsaufgelösten CS-Linienprofile . . . 85

9 Vergleich der numerischen Beispiele mit Beobachtungen 98

9.1 Beschreibung beobachteter ortsaufgelöster CS-Linienprofile . . . 98

9.2 Vergleich mit den theoretischen Linienprofilen . . . 101

A 1D-Strahlungstransport im sphärisch bewegten Fall **104**

A.1 Eine weitere Herleitung der implementierbaren Näherungsformel für die spezifische Intensität 104

A.2 Berechnung der gemittelten Intensität $\overline{J}_{lu}(r)$ 108

B Nicht-sphärische strahlungsgetriebene Sternwinde **112**

B.1 Beobachtung von Sternwinden 112

B.2 Bisherige Arbeiten zur Theorie von Sternwinden 112

B.3 Die Stromlinien aus dem Sternwind-Modell 114

B.4 Die Strahlungskraft auf Spektrallinien in strahlungsgetriebenen Winden 115

B.5 Anwendung der Strahlungshydrodynamik auf einen rotierenden Sternwind 119

B.6 Berechnung des vom Polarwinkel abhängigen Linienbeschleunigungsfaktors $g_{1,2}(\theta)$ 123

B.7 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen aus dem Sternwind-Modell 123

C Rotationsspektren zweiatomiger Moleküle **125**

C.1 Reine Rotationsspektren 125

C.2 Näherung: Der starre Rotator 126

C.3 Korrektur: Der nichtstarre Rotator 127

C.4 Korrektur: Der schwingende nichtstarre Rotator 128

D CS-Linienprofile kollabierender Molekülwolken mit hoher Turbulenzgeschwindigkeit **130**

D.1 Numerische Ergebnisse zur sphärischen kollabierenden Wolke 130

D.1.1 Die ortsaufgelösten Linienprofile 130

D.1.2 Die Profile aus dem 1D-Modell 135

D.1.3 Die Profile aus dem 3D-Modell 136

D.1.4 Der Vergleich der Profile aus den verschiedenen Modellen 137

D.2 Numerische Ergebnisse zur axialsymmetrischen, rotierenden und kollabierenden Wolke 143

D.2.1 Die ortsaufgelösten Linienprofile 143

D.2.2 Der Vergleich der Intensitäten aus dem Wolkenzentrum für verschiedene Blickwinkel 150

D.2.3 Der Einfluß der Rotation auf die Intensitätsverteilung 151

1 Einleitung

1.1 Beobachtung von Molekülwolken

Das Problem, wie Sterne aus Molekülwolken entstehen, beginnt mit dem physikalischen Verständnis dieser Objekte und wie einzelne gravitationsinstabile Kerne in diesen Wolken kondensieren. Inhomogene Strukturen wurden schon in den ältesten Karten von Molekülwolken beobachtet (Kutner et al. 1977; Blitz & Thaddeus 1980), die als eine Gruppierung aus diskreten Klumpen beschrieben werden konnten (Blitz & Stark 1986). Diese Klumpen wiederum enthalten selbst dichte Kerne, welche die Orte der Sternentstehung innerhalb der Wolke darstellen (Myers & Benson 1983).

Die Fortschritte in der Millimeterwellen-Empfängertechnologie haben es möglich gemacht, Molekülwolken schnell und mit hoher Empfindlichkeit zu kartographieren. Das Rauschen bei einer Beobachtung ist direkt proportional zur Systemtemperatur, und mit abnehmenden Receiver-Temperaturen ist es möglich geworden gesamte Komplexe – mit einer Winkelausdehnung von mehreren Grad – mit einer Auflösung von Sub-Bogenminuten aufzunehmen. Bis zu vier Empfänger zu verschiedenen Frequenzen gleichzeitig können z.B. am IRAM 30m-Teleskop eingesetzt werden, um die gleiche Position am Himmel zu beobachten. Die Erweiterung der Millimeterwellen-Interferometer des IRAM haben die Abbildungsqualität und Empfindlichkeit der Instrumente drastisch erhöht, und haben hochauflösende Beobachtungen ($< 10''$) der Struktur in Molekülwolken beträchtlich schneller und einfach gemacht.

Der Großteil der Masse der molekularen interstellaren Materie (ISM) befindet sich in Form von riesigen Molekülwolken (GMCs), mit Massen von etwa $10^{5-6} M_\odot$, Durchmessern von ca. 50 pc, und durchschnittlichen Dichten von $n_{\mathrm{H}_2} \approx 10^2$ cm^{-3} (s. z.B. Blitz 1993). Der scharfe Schnitt am oberen Ende der Wolkenmassen-Verteilung bei ca. $6 \times 10^6 M_\odot$ (Williams & McKee 1997) deutet darauf hin, daß die Wolkenmassen durch irgend welche physikalischen Prozesse begrenzt werden; wie z.B. durch das Gezeitenfeld der Galaxie oder die zerstörerische Wirkung massiver Sterne innerhalb diesen.

Der Wolken*kern*, aus welchem sich ein einzelner Stern oder ganze Sternsysteme bilden, ist das letzte Stadium der Wolkenfragmentation. Kerne haben typische durchschnittliche Dichten von $n_{\mathrm{H}_2} \approx 10^5$ cm^{-3} und können in den Linienübergängen (Rotationsübergängen) von Molekülen mit großem Dipolmoment beobachtet werden (Benson & Myers 1989; Fiebig et al., zitiert in Wiesemeyer 1997), oder über Staub-Kontinuumsstrahlung, im Millimeter- und Submillimeter-Wellenlängenbereich (Kramer et al. 1998). Die erste Methode gibt neben der räumlichen aber auch kinematische Informationen über die Wolkenstruktur.

Die schwache Mikrowellenstrahlung, die von den Wolken ausgeht, stammt nicht von molekularem Wasserstoff selbst (dem Hauptbestandteil der Molekülwolken), sondern von anderen, nur in Spuren vorhandenen chemischen Verbindungen wie CO (Kohlenmonoxid) und CS (Kohlenstoffmonosulfid). Molekularer Wasserstoff hat nämlich kein permanentes elektrisches Dipolmoment und emittiert daher (im Grundzustand) keine erlaubten Linien im Radio- oder Millimeterwellenbereich. Aus der kosmischen Häufigkeit der Elemente und den beobachteten Emissionslinien anderer Moleküle, die durch Stöße mit Wasserstoff zustande kommen, kann man jedoch auf das Vorhandensein molekularen Wasserstoffs schließen.

1.2 Bisherige Arbeiten zu den frühen Entwicklungsstadien massearmer Sterne

Die Bildung von Sternen mit geringer Masse vollzieht sich in einer Reihe unterschiedlicher Stadien (Larson 1969, Shu et al. 1987). Das erste Stadium entspricht der Fragmentation einer Molekülwolke in eine Anzahl gravitationsinstabiler *Kerne*, welche anfänglich durch das Zusammenwirken von thermischen, magnetischen und turbulenten Druckkräften gegen die Gravitation gestützt werden (Mouchovias 1991, Shu et al. 1987). Diese *prästellaren Kondensationen* oder Fragmente bilden und entwickeln sich infolge eines noch kaum verstandenen Mechanismus, der sich aus einer ambipolaren Diffusion (Mouchovias 1991), der Dissipation von Turbulenz (Nakamo 1998), und einem äußeren Impuls (Bonnell et al. 1997) zusammensetzen könnte. Wird solch eine Kondensation erst einmal gravitationsinstabil und kollabiert, sind die theoretischen Hauptmerkmale der einsetzenden dynamischen Entwicklung schon seit der Pionierarbeit von Larson (1969) bekannt. Innerhalb einer wahrscheinlich kurzen Anfangsphase wird die frei werdende Gravitationsenergie ungehindert abgestrahlt, und das kollabierende Fragment bleibt im wesentlichen iosotherm. Diese isotherme ("Runaway"-) Kollapsphase tendiert dazu eine starke zentrale Materiekonzentration zu erzeugen, mit einem radialen Dichtegradient, der sich mit $\rho \propto r^{-2}$ zu kleineren Radien annähert, im wesentlichen unabhängig von den Anfangsbedingungen (Whitworth & Summers 1985; Blottiau et al. 1988; Foster & Chevalier 1993). Diese Phase endet mit der Bildung eines undurchsichtigen, hydrostatischen protostellaren Objekts im Zentrum (Larson 1969; Boss & Yorke 1995; Bate 1998). Numerische Simulationen sagen sogar die aufeinanderfolgende Bildung zweier hydrostatischer Objekte, eines vor und eines nach der Dissoziation von molekularem Wasserstoff, voraus (Boss & Yorke 1995). Das System tritt dann in die Hauptakkretionsphase (sog. "Class 0"-Objekte) ein, während welcher das zentrale Objekt seine Masse $M_\star$ von der umgebenen einfallenden Hülle und der Akkretionsscheibe aufbaut, und sich dabei allmählich erwärmt. Das System besteht also jetzt aus dem zentralen Objekt und einer Hülle mit Scheibe, der sog. *akkretierende Protostern*. Die jüngsten akkretierenden Protosterne haben eine Hüllenmasse von $M_{\mathrm{env}} \gg M_\star$ und strahlen mit der Akkretionsleuchtkraft $L_{\mathrm{acc}} \approx GM_\star \dot{M}_{\mathrm{acc}}/R_\star$. In der *Standard*theorie *isolierter* Sternentstehung (Shu et al. 1987, 1993), werden als Anfangsbedingungen für den Kollaps einzelne statische isotherme Spheroide (d.h. abgeplattete Kugeln) angenommen ($\rho \sim (a^2/2\pi G) r^{-2}$, vgl. Li & Shu 1996, 1997), es gibt keine *Runaway*-Kollapsphase, und die Akkretionsrate $\dot{M}_{\mathrm{acc}} \sim a^3 G$ ist zeitlich konstant (mit der effektiven isothermen Schallgeschwindigkeit a).

Beobachungen haben gezeigt, daß die Hauptakkretionsphase immer begleitet wird durch einen starken Ausstoß eines kleinen Bruchteils der akkretierten Materie in Form von markanten bipolaren Jets oder Ausflüssen (Bachiller 1996). Es wird vermutet, daß diese Ausflüsse den überschüssigen Drehimpuls der einfallenden Materie abführen (vgl. z.B. Königl & Pudritz 2000).

Wenn das Objekt im Zentrum den Großteil seiner endgültigen Hauptreihen-Masse ($\gtrsim 90\%$) angesammelt hat, wird es zu einem Vor-Hauptreihenstern, der sich bei etwa gleichbleibender Masse auf der Kelvin-Helmholtz-Kontraktionszeitskala weiter entwickelt (Stahler & Walter 1993).

Das *prästellare* Stadium der Sternentstehung wird von André et al. (2000) definiert als die Phase, in welcher sich ein gravitationsgebundener Kern in einer Molekülwolke gebildet hat, und sich in Richtung höherer Stufen der zentralen Kondensation weiter entwickelt, jedoch noch *kein* zentrales hydrostatisches protostellares Objekt innerhalb des Kerns existiert.

1.3 Probleme und Schwierigkeiten

Die Sternentstehung kann als hydrodynamischer Vorgang modelliert werden, der durch Strahlungsfelder nicht nur quantitativ, sondern u.U. auch in seiner globalen Natur beeinflußt wird (Yorke & Henning 1994). Dabei ist die Interpretation des emittierten Spektrums, d.h. insbesondere der Moleküllinienstärken und -profile im mm und Sub-mm-Bereich (welche Informationen über die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung enthalten) das wichtigste Werkzeug für das Verstehen der Sternentstehung. Die Strahlungstransportgleichung ist daher von unentbehrlicher Bedeutung für die Interpretation beobachteter Spektren, und stellt die Verbindung zwischen theoretischen hydrodynamischen Modellrechnungen und Beobachtungen von protostellaren Wolkenkerne her.

So rasant sich aber die Möglichkeiten der Beobachtungstechniken weiterentwickelt haben, hat die Entwicklung geeigneter Analyseverfahren dem nicht Schritt gehalten. Die Probleme die sich hierbei stellen, sind die mehrdimensionale Struktur protostellarer Wolken, die komplexen Geschwindigkeitsfelder, und der große Bereich optischer Tiefen von $\tau \ll 1$ bis $\gg 1$. Außerdem muß bei den theoretischen Überlegungen berücksichtigt werden, daß bei den niedrigen Dichten und Temperaturen in den Außenschichten von protostellaren Objekten während der frühen Phasen LTE-Besetzungszahlen der Moleküle und Atome nicht erreicht werden. Für diagnostisch wichtige Moleküllinien müssen deshalb die entsprechenden NLTE-Ratengleichungen in selbstkonsistenter Behandlung des Strahlungstransports im kollabierenden Medium gelöst werden.

Als Beispiel sei die Quelle GF9-2 im globularen Filament L1082 (Katalog v. Schneider & Elmegreen 1979) in einer Entfernung von ca. 200 pc erwähnt. Es handelt sich hierbei um massearme Protosterne (Klasse 0) und einen heißen Kern im Zentrum ($T \approx 1000$K, entsprechend ISOCAM-Beobachtungen). Die von Wiesemeyer (1997) beobachteten ortsaufgelösten CS-Linienprofile dieser Quelle (s. Abschn. 9) zeigen keine sphärische Symmetrie zum Wolkenzentrum. Demzufolge sind komplexere Wolkendichte- und Geschwindigkeitsverteilungen als die einer sphärisch kollabierenden Wolke (1D-Verteilung) anzunehmen, z.B. *mindestens* die einer axialsymmetrischen kollabierenden Wolke mit Rotation (2D-Verteilung), auf deren Rotationsachse man außerdem schräg blickt. Dabei sind 3D-NLTE-Strahlungstransport-Berechungen notwendig, um diese beobachteten Linienprofile interpretieren zu können.

1.4 Ziel dieser Arbeit

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines 3D-NLTE-Strahlungstransport-Codes zur Berechnung der lokal emittierten Moleküllinien-Intensitäten aus (z.B.) einem kollabierenden axialsymmetrischen Medium mit differentieller Rotation, um die synthetischen Spektren mit räumlich aufgelösten Linienprofile aus Beobachtungen protostellarer Wolkenkerne vergleichen zu können. Freilich ist es aber nicht Ziel dieser Arbeit, mit diesem Code bestimmte beobachtete protostellare Objekte theoretisch zu modellieren, als vielmehr nur für bestimmte Wolkenmodell-Beispiele die berechneten ortsaufgelösten Linienprofiltypen zu interpretieren und diese dann qualitativ in ihren Grundzügen später mit Beobachtungen zu vergleichen.

Auf der Basis analytischer Lösungen der 1D-Strahlungstransportgleichung wird außerdem ein sehr schnelles Verfahren, d.h. ein 1D-Code zur Berechnung der emittierten Linienintensitäten aus einem nicht-relativistisch bewegten sphärischen Medium (ohne Rotation), entwickelt. Dieser dient u.a. zum Test des 3D-Codes, wobei die 3D-Linientransportrechnungen auf dieselbe sphärische Wolkenverteilung aus dem 1D-Modell angewendet werden.

Um schließlich den 3D-Strahlungstransport-Code zur Berechnung der Linienemissionen aus axialsymmetrischen, differentiell rotierenden und kollabierenden Wolken mit protostellarem Kern erweitern zu können, wurden zur Einschränkung des möglichen Eingabe-Parameterraums neue analytische Ausdrücke für die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung einer isothermen Wolke aus den hydrodynamischen Grundgleichungen hergeleitet. Diese 2D-Lösungen ergeben sich als Spezialfall aus den ebenfalls abgeleiteten Ausdrücken für entsprechende *Sternwinde* unter Vernachlässigung von Strahlungsbeschleunigungen durch Kontinua und Linien. Sie gelten in beiden Fällen sowohl für den Unter- als auch Überschallbereich.

Der nur an den analytischen Lösungen für das 2D-Geschwindigkeitsfeld und die Dichteverteilung eines *nicht*-sphärischen strahlungsgetriebenen Sternwindes interessierte Leser, braucht nur den folgenden Abschnitt 1.6 dieser Einleitung, sowie den Abschnitt 6 und den Anhang B zu lesen und kann die übrigen Abschnitte dieser Arbeit ohne Verständnisprobleme einfach überspringen.

1.5 Gliederung des Hauptteils dieser Arbeit

In Abschnitt 2 wird ein allgemeiner Überblick zur Vorgehensweise der Lösung des NLTE-Linientransportproblems gegeben, mit einer Vorstellung des zu lösenden Gleichungssystems, bestehend aus den zeitabhängigen Ratengleichungen, gekoppelt mit der Strahlungstransportgleichung über die gesamten Ratenkoeffizienten P_{ij}; letztere hängen von der über alle Raumwinkel und Linienfrequenzen gemittelten Strahlungsintensität $\overline{J}_{ij}$ ab. Alle in diesen Gleichungen enthaltenen Größen und deren Berechnung werden kurz beschrieben. Außerdem werden die verwendeten Lösungsmethoden des Gleichungssytems, d.h. der entwickelte Algorithmus der NLTE-Strahlungstransport-Programme und das darin angewandte numerische Verfahren zur Lösung der Ratengleichungen und der Strahlungstransportgleichung im 1D- und 3D-Fall, kurz vorgestellt und beschrieben. Die Wahl dieser Lösungsmethoden wird hierin begründet und die Vorteile gegenüber anderen Methoden geschildert.

Im folgenden Abschnitt 3 erfolgt die Herleitung der hier benutzten zeitabhängigen Ratengleichungen, sowie des verwendeten Geschwindigkeits- und Dichtegesetzes für den Fall einer sphärischen Wolke (wie es letzteres zur Berechnung der Besetzungszahldichten beim Programmstart benötigt wird). Ferner werden die benötigten Formeln zur Berechnung der totalen Ratenkoeffizienten P_{ij} aus den tabellierten Stoßratenkoeffizienten c_{ij} und den Einstein-Koeffizienten B_{ij} (für die Absorption) bzw. A_{ji} (für die spontane Emission) zusammengestellt.

Abschnitt 4 befaßt sich mit der Entwicklung und der detaillierten Beschreibung des Verfahrens zur Berechnung der lokal- und richtungsabhängigen spezifischen Intensitäten in einem nicht-relativistisch bewegten sphärischen Medium ohne Rotation, durch unmittelbare analytische Lösung der Strahlungstransportgleichung im eindimensionalen Fall für Strahlen entlang einer geraden Strecke s mit konstantem Impaktparameter p an den s-Knotenpunkten des Strahls mit dem radialen Gitter bei der Diskretisierung des Ortsraumes in Kugelschalen. Dieses Verfahren entspricht im wesentlichen einer kurzen Charakteristiken-Methode (vgl. z.B. Olson & Kunasz 1987), angewendet auf die formale Lösung der Strahlungstransportgleichung in *bewegten* Medien mit sphärischer Symmetrie auf einem diskreten Schalengitter. Dabei wird ein neuer Ausdruck für die Änderung der optischen Tiefe $\Delta\tau$ zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten (des Strahls mit dem Schalengitter) angegeben, welcher die Doppler-Verschiebung im Linien-Extinktionskoeffizienten an den beiden Gitterpunkten berücksichtigt. Die genaue Bestimmung der gemittelten Intensität $\overline{J}_{ij}$ findet man im Anhang A.2. Im Anhang A.1 wird außerdem eine weitere Herleitung der *gleichen* implementierbaren Näherungsformeln für die spezifische Intensität gezeigt, wie man sie aus einer gegebenen integralen analytischen Darstellung der Lösung der 1D-Strahlungstransportgleichung in sphärischen Koordinaten für relativistisch bewegte Sphären, unter bestimmten vereinfachenden Annahmen bei Unterteilung der Kugel in Schalen, erhält.

In Abschnitt 5 wird die in dieser Arbeit verwendete Form der 3D-Strahlungstransportgleichung im mitbewegten System für nicht-relativistische Geschwindigkeiten unter Vernachlässigung von Aberration und Advektion angegeben, und deren Lösung durch die Finite Differenzen-Methode auf einem dreidimensionalen kartesischen Orts- und eindimensionalen Frequenz-Gitter vorgestellt. Die Intensitätsformeln für die verschiedenen Strahlrichtungen und Vorzeichen der orts- und strahlungsrichtungsabhängigen Funktion w (der Richtungsableitung der Materiegeschwindigkeit in Strahlrichtung) in der Transportgleichung werden hergeleitet.

Im nächsten Abschnitt 6 wird dann die Herleitung einer einheitlichen analytischen 2D-Lösung der Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung eines rotierenden und kollabierenden *oder* expandierenden Systems, d.h. einer entsprechenden isothermen rotierenden nicht-sphärischen Molekülwolke mit kugelförmigem protostellaren Kern bzw. eines strahlungsgetriebenen Windes ausgehend von einem leuchtkräftigen sphärischen Zentralstern, aus den hydrodynamischen Grundgleichungen vorgestellt. Anschließend erfolgt dann die Anwendung dieser analytischen Ausdrücke für das axialsymmetrische Geschwindigkeits- und Dichtefeld auf das Beispiel einer rotierenden und kollabierenden Molekülwolke mit eingebettetem sphärischen Kern. Es werden die verwendeten Wolkenparameter und die nachfolgenden hydrodynamischen Modell-Ergebnisse für zwei unterschiedlich schnell rotierende Kerne beschrieben und physikalisch interpretiert.

Als nächster Schritt ist es nun in Abschnitt 7 möglich, die Funktion w (die den in Strahlrichtung projezierten Geschwindigkeitsgradienten beschreibt) zur Lösung der 3D-Strahlungstransportgleichung für die zuvor hergeleitete axialsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung einer Molekülwolke zu berechnen. Außerdem wird die ebenfalls benötigte Funktion w für eine sphärische Wolke in diesem Abschnitt bestimmt.

Die Anwendung der verschiedenen Strahlungstransport-Methoden auf CS-Linienemissionen aus unterschiedlichen kollabierenden Molekülwolken erfolgt in Abschnitt 8: Die numerischen Ergebnisse zu einer sphärischen kollabierenden Molekülwolke *ohne* Rotation, ähnlich der Wolke von W49A North (in Dickel & Auer 1994) jedoch hier im Gegensatz dazu *ohne leuchtende* eingebettete HII-Kernregion und für eine etwas kühlere Wolke, mit homogenem dichteren Kern aus vorwiegend molekularem Wasserstoff sowie CS-Gas (wie in der übrigen Wolkenhülle), findet man im Teilabschnitt 8.1. Während in Teilabschnitt 8.2 die 3D-Strahlungstransport-Methode auf die axialsymmetrische, *rotierende* und kollabierende Molekülwolke aus dem hydrodynamischen Modell-Beispiel in Abschnitt 6.8 (für die größere Rotationsgeschwindigkeit nahe der Breakup-Geschwindigkeit) angewendet wird, welche ähnlich zum sphärischen Wolkenbeispiel (d.h. wiederum der Wolke W49A North) in Teilabschnitt 8.1 ist, jedoch hier eine *rotierende* Kernregion enthält. Zur Modellierung dieser axialsymmetrischen Wolke finden dabei die zuvor hergeleiteten analytischen Lösungen für das 2D-Geschwindigkeits- und Dichtefeld ihre Anwendung.

In beiden Teilabschnitten 8.1 und 8.2 werden jeweils die numerischen Ergebnisse zu diesen unterschiedlichen Wolkentypen beschrieben und physikalisch interpretiert, d.h. diskutiert: Zum einen die resultierenden ortsabhängigen NLTE-Besetzungszahlen der untersten acht Rotationsniveaus von CS, und zum andern vor allem die theoretischen ortsaufgelösten CS-Linienprofile der erlaubten Übergänge zwischen diesen Niveaus. Die jeweils verwendeten programm- sowie wolkenspezifischen Eingabedaten zur Struktur der unterschiedlich gewählten Wolkentypen sind außerdem im betreffenden Abschnitt tabellarisch aufgelistet. Zur Untersuchung des Einflusses der Wolkenturbulenz auf die Profile sind ferner jeweils alle berechneten Linienprofile aus *denselben* Wolken bei höherer Turbulenzgeschwindigkeit im Anhang D dargestellt. Desweiteren wird speziell für die axialsymmetrische Wolke noch der Einfluß der Wolken-Inklination und Rotation auf die Linienprofile diskutiert. Im Teilabschnitt 8.1 zur sphärischen Wolke werden außerdem die gleichen örtlichen Linienprofile des jeweils selben Übergangs, welche aus den unterschiedlichen Strahlungstransport-Modellen (1D- bzw. 3D) gewonnen wurden, miteinander verglichen. Mögliche Gründe für die höchstens nur schwachen Abweichungen zwischen den unterschiedlich berechneten Profilen werden beschrieben.

In Abschnitt 9 werden schließlich die beobachteten ortsaufgelösten CS(2-1)- und CS(3-2)-Linienprofile aus dem Wolkenkern GF9-2 beschrieben und allgemeine Symmetrieüberlegungen zu den beobachteten Profil*anordnungen* angestellt, um qualitativ die mögliche Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung des beobachteten Wolkenkerns abzuschätzen. Anschließend werden diese Linienprofile aus der Beobachtung mit den theoretischen ortsaufgelösten Linienprofiltypen aus den verschiedenen Wolkenbeispielen in Abschnitt 8 (sphärische und axialsymmetrische Wolke) qualitativ verglichen.

1.6 Ergebnisse und Gliederung dieser Arbeit hinsichtlich des Sternwind-Modells

In Abschnitt 6.7 wird eine axialsymmetrische analytische 2D-Lösung für das Geschwindigkeitsfeld und die Dichteverteilung, beide gültig sowohl im Unter- als auch und Überschallbereich eines rotierenden strahlungsgetriebenen Sternwindes, vorgestellt, die auf einer neu in Abschnitt B.4 hergeleiteten Näherung für die Beschleunigung von optisch dünnen *und* dicken Spektrallinien basiert. Die Herleitung kann völlig analytisch mittels meines Linienbeschleunigungsterms (ohne notwendigerweise vorausgehende Fittings an numerische Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichung) ausgeführt werden, unter Vernachlässigung von (u.a.) der meridionalen Geschwindigkeitskomponente. Der Vorgang, mit welchem man die 2D-Lösung aus den hydrodynamischen Gleichungen gewinnt, wird in den Abschnitten 6.1–6.6 beschrieben.

Es sei darauf hingewiesen, daß dabei mit dem 2D-Windmodell und dem neuen Ausdruck für die Linienbeschleunigung, die Bewegungsgleichungen (“fluid equations“) für die darin enthaltenen 1D-Probleme ebenso gleichzeitig *völlig analytisch*, ohne irgend welche Einschränkungen für die Geschwindigkeitskomponenten, gelöst sind: Das nicht-sphärische 1D-Sternwindmodell von Friend & Abbott (1986) für den Fluß in der Äquatorialebene (wo die meridionale Geschwindigkeit aus symmetrischen Gründen verschwindet), sowie das sphärische 1D-Problem von Castor, Abbott & Klein (1975), wo es überhaupt keine meridionale Komponente gibt.

Im Abschnitt B.6 wird eine einfache Methode angegeben, die notwendigen Beschleunigungsparameter in meinem Linienkraftterm zu bestimmen, welche den aus der Beobachtung bekannten

Wert der Grenzgeschwindigkeit des Windes bewirken; selbst wenn man die verursachenden Spektrallinien *nicht* kennt.

Die expliziten Lösungen werden außerdem in einer allgemeineren Form angegeben, so daß sie auch dazu verwendet werden können, *alle* möglichen Lösungstypen, wie z.B. auch den Akkretionsfluß in einer kollabierenden protostellaren Wolke unter Vernachlässigung der Strahlungskraft, *analytisch* zu beschreiben.

Die Massenverlust-Rate $\dot{M}(\theta)$ (welche Schwankungen mit der Breite θ zuläßt), bzw. die Anfangsdichte $\rho(R)$ am Sternradius R, geht in die Lösungen als *freier* Parameter ein und kann an Beobachtungen angepaßt werden.

Die anschließenden numerischen Beispiele unterstützen die Ansicht, daß der Ort des Schallpunktes nicht notwendigerweise direkt oberhalb der Sternoberfläche liegen muß, wie es in den meisten bisherigen Sternwindmodellen zur Vereinfachung (s. z.B. Bjorkman & Cassinelli 1993) angenommen wird. Man muß genauso den *sub*sonischen Teil des strahlungsgetriebenen Materieflusses berücksichtigen, um die vollständige 2D-Winddichte berechnen zu können.

Die theoretischen Ausdrücke werden sowohl auf einen nicht-sphärischen Sternwind von einem typischen O5–V-Hauptreihenstern im Abschn. B.5, als auch auf die kollabierende protostellare Wolke im Abschn. 6.8, angewendet, welche jeweils beide mit unterschiedlichen (hypothetischen) Geschwindigkeiten rotieren, um den Einfluß der Rotation untersuchen zu können. Die Diskussion der zugehörigen numerischen Ergebnisse erfolgt dann ebenfalls in diesen betreffenden Abschnitten. Was die Dichte des stark strahlungsgetriebenen Sternwindes anbelangt, können die Modellrechnungen eine beträchtliche Materiekonzentration nahe der Äquatorebene bei hohen Rotationsgeschwindigkeiten erklären, (auch) ohne Berücksichtigung irgend einer polaren Geschwindigkeitskomponenten. Hingegen verursacht selbst ein stark rotierender protostellarer Kern in der Molekülwolke von nahe der Breakup-Geschwindigkeit *keine* spürbare Asphärizität der Wolke. Vielmehr erhält man in diesem Fall eine schwache Dichtevergrößerung über dem Pol des protostellaren Kerns.

In Abschnitt B.7 werden schließlich die Ergebnisse aus der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie für einen nicht-sphärischen Sternwind zusammengefaßt und diskutiert.

2 Überblick zur Lösung des NLTE-Linientransport-Problems

2.1 Das Gleichungssytem

Das non-LTE-Problem mit mehreren Energieniveaus ist die selbstkonsistente Lösung der Ratengleichungen nach den Besetzungszahlen n_i *und* der Strahlungstransportgleichung für die totalen Übergangsraten P_{ij}. Dabei bilden die unserem Fall gewählten *zeitabhängigen* Ratengleichungen einen Satz gewöhnlicher *nicht*linearer Differentialgleichungen in den Populationen (Besetzungszahlen) mit einer Kopplung der Raten P_{ij} durch das Strahlungsfeld.

Das zu lösende Gleichungssystem sieht dabei im einzelnen wie folgt aus:

1. Zum einen die zeitabhängigen NLTE–Ratengleichungen

$$\boxed{\frac{dn_i(\vec{r})}{dt} = \sum_{j \neq i} (n_j \, P_{ji} - n_i \, P_{ij}) \, , \qquad i,j = 1,2,\ldots,N_i}$$

mit der Besetzungszahl*dichte* n_i des i-ten Zustands am Ort $\vec{r}$, dem gesamten Ratenkoeffizient für Aufwärts- $(i < j)$ bzw. Abwärtsübergänge $(i > j)$

$$P_{ij}(\vec{r}) = \begin{cases} B_{ij} \, \overline{J}_{ij} + C_{ij} & \{i < j\} \\ \dfrac{g_j}{g_i} \left(\left(\dfrac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} + \overline{J}_{ij} \right) \, B_{ji} + e^{h\nu_{ij}/kT} \, C_{ji} \right) & \{i > j\} \end{cases}$$

worin C_{ij} der Stoßkoeffizient für Aufwärtsübergänge, B_{ij} der Einstein-Koeffizient für die Absorption, ν_{ij} die Frequenz des Linienzentrums des betrachteten Übergangs vom Niveau i nach j, und die über den Raumwinkel Ω_0 und die Frequenzen ν_0 des Übergangs gemittelte Intensität

$$\overline{J}_{ij}\,(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi} \int_{\nu_0} \int_{\Omega_0} \Phi_\nu(\nu_0) \, I_0(\vec{r}, \vec{n_0}, \nu_0) \, d\Omega_0 \, d\nu_0$$

ist; Φ ist hierin das Linienprofil des betreffenden Übergangs, und $I_0(\vec{r}, \vec{n_0}, \nu_0)$ die einfallende spezifische Intensität am Ort $\vec{r}$ in Strahlrichtung $\vec{n_0}$ und Frequenz ν_0 im mitbewegten System. Desweiteren ist g_i das statistische Gewicht des i-ten Zustands (in unserem Fall $2\,J + 1$, mit der Rotationsquantenzahl J), h die Planck-Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit, k die Boltzmann-Konstante, und T die Temperatur.

2. Zum andern lautet die Strahlungstransportgleichung im mitbewegten System für nichtrelativistische Geschwindigkeiten unter Vernachlässigung von Aberrations- und Advektionstermen

$$\boxed{\vec{n_0} \cdot \vec{\nabla} \, I_0 - \vec{n_0} \cdot \vec{\nabla} \, \left(\vec{\beta} \cdot \vec{n_0} \right) \, \frac{\partial I_0}{\partial \xi_0} = -\chi_0 \, I_0 + \chi_0 \, S}$$

mit der Definition $\xi_0 := \ln \nu_0 +$ konst, der durch die Lichtgeschwindigkeit c dividierten Geschwindigkeit $\vec{\beta}(\vec{r})$ der Materie, sowie der Linien-Quellfunktion

$$S(\vec{r}) = \frac{2\,h\,{\nu_{ij}}^3}{c^2} \left(\frac{n_i\,(\vec{r})\,g_j}{n_j\,(\vec{r})\,g_i} - 1 \right)^{-1} \tag{1}$$

und dem Extinktionskoeffizienten des Linienübergangs $i \to j$

$$\chi_0(\vec{r}, \vec{n_0}, \nu_0) = \frac{n_i\,(\vec{r})\,B_{ij}\,h\,\nu_{ij}}{4\,\pi}\left(1 - \frac{n_j\,(\vec{r})\,g_i}{n_i\,(\vec{r})\,g_j}\right)\,\Phi\,\left(\nu_0 - (1 - \vec{n_0}\cdot\vec{\beta})\,\nu_{ij}\right)\,, \qquad (2)$$

(jeweils für $i < j$) wie ihn ein ruhender Beobachter im bewegten System wahrnimmt.[1]

2.2 Die Lösungsmethode und der Algorithmus

Das sehr große System gewöhnlicher Differentialgleichungen der zeitabhängigen Ratengleichungen ($N_i \times N_x \times N_y \times N_z$ Gleichungen, was bei der Berücksichtigung von z.B. $N_i = 8$ Niveaus und $N_x = N_y = N_z = 25$ Ortsgitterpunkten in jeweils jeder Dimension, schon einer Anzahl von 125000 entspricht!) wird für jeden Ortspunkt $\vec{r}$ durch ein Standardverfahren gelöst bis sich ein *statistisches Gleichgewicht* eingestellt hat, bei dem die Anzahl der Moleküle, welche *von* einem betrachteten Niveau i ausgehen die Anzahl derjenigen, welche *zum* Niveau i übergehen, ausgleichen.

Dabei werden für jeden Zeitschritt die Ratengleichungen zu jedem Orts(gitter)punkt in der Wolke nach den Besetzungszahlen gelöst, so bald die mittleren Intensitäten $\overline{J}_{ij}$ durch Lösung der Strahlungstransportgleichung, und damit die Ratenkoeffizienten P_{ij} in der rechten Seite der Gleichungen, bekannt sind. Die Quellfunktionen und Absorptionskoeffizienten, und daraus wiederum die Intensitäten $\overline{J}_{ij}$, lassen sich dann im nächsten Schritt aus diesen Besetzungszahlen ermitteln. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt bis alle Besetzungszahlen an jedem Ort ihren Gleichgewichtswert erreicht haben.

Neben den verschiedenen Methoden zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, wie zum Beispiel das Runge-Kutta- oder das Stoer-Burlisch-Verfahren, wird in unserem Fall zur Lösung der Ratengleichungen die Adams-Methode im DDRIVE2-Paket von Kahaner (1989) benutzt, welches in der Lage ist, dynamisch zwischen dem Extrapolationsverfahren (wenn ein *nicht*-steifes Problem vorliegt) oder der Gear-Methode (bei einem *steifen* Gleichungssystem) umzuschalten. Der Hauptgrund für diese Wahl des Lösers ist aber die gute Schrittweitensteuerung, die wegen der großen Anzahl von Gleichungen besonders wichtig ist.

Die Strahlungstransportgleichung wird zunächst für den eindimensionalen Fall einer sphärisch kollabierenden Molekülwolke mit einer in einem späteren Abschnitt 4 beschriebenen und entwickelten kurzen Charakteristiken-Methode (basierend auf einer analytischen Lösung der Strahlungstransportgl.), und für den dreidimensionalen Fall bei einer axialsymmetrischen (Dichte- und Geschwindigkeits-) Verteilung für eine *rotierende und* kollabierenden Wolke mittels der Methode der Finiten Differenzen gelöst.

Neben diesen Methoden zur Lösung der Transportgleichung gäbe es noch weitere Algorithmen, wie zum Beispiel Monte-Carlo-Methoden, lange Charakteristiken-Verfahren, und die Finite-Elemente-Methode. Der Nachteil beim Charakteristiken-Verfahren im 3D-Fall ist jedoch der langsame Algorithmus, wenn die Geometrie komplex wird und Streuprozesse stark dominieren. In diesen Fällen ist das Finite-Differenzen-Verfahren besser. Das Finite-Elemente-Verfahren mit unstrukturierten Gittern und der adaptiven Verfeinerung durch *a posteriori*-Fehlerschätzer garantiert zwar eine hohe Genauigkeit und optimale Gitter, jedoch ist der Speicherbedarf dieser

[1] Im folgenden werden alle physikalischen Größen im mitbewegten System mit einem Index 0 gekennzeichnet.

Methode sehr groß und der Algorithmus sehr aufwendig. Vor allem sind aber die Rechenzeiten bei all diesen Verfahren gegenüber den von uns gewählten Methoden viel größer.

Die numerische Auswertung der jeweils über die Frequenzen jeden Übergangs $i \to j$ und den Raumwinkel gemittelten Intensitäten $\overline{J}_{ij}$ erfolgt an jedem Ortsgitterpunkt $\vec{r}_k$ mittels der mehrfachen Anwendung der Gauß-Quadraturformeln in den diskreten, fest vorgegebenen Winkeln ϑ_{0m} und φ_{0p} der Intensitätsrichtung $\vec{n_0}$ und Frequenzen ν_{0n} des jeweiligen Übergangs. D.h. die Richtungen und Frequenzen, zu denen die Intensität I_0 bei der Integration ausgewertet werden muß, sind durch die Gauß-Integration und den geforderten Grad der Ordnung und Genauigkeit vorgegeben. Die Gauß-Quadraturformel zur Auswertung des Mehrfachintegrals wurde gewählt, weil deren Ordnung wesentlich höher ist als z.B. bei den Newton-Cotes-Formeln bei gleicher Anzahl von Funktionsauswertungen. Die Quadratur ist dann exakt, wenn die Intensität I_0 durch ein Polynom vom Grad $2\,N_m - 1$, oder darunter, annäherbar ist, bei der Wahl von z.B. N_m Winkeln ϑ_0 der Strahlrichtung für die die Intensität ausgewertet wird. Bei der Wahl einer ausreichend hohen Winkel- und Frequenz-Diskretisierung, sollte daher die Gauß-Integration die effizienteste Methode mit der höheren Genauigkeit sein.

Es sei aber darauf hingewiesen, daß in den hier entwickelten Algorithmen die örtliche Auflösung der spektralen Intensitäten durch diese Winkel-Diskretisierung *nicht* (wie bei anderen Methoden für sphärische Konfigurationen sonst üblich) festgelegt ist, sondern nur durch die Wahl der diskreten Ortsgitterpunkte $\vec{r}_k$. Deren Anzahl und Lage kann nämlich *unabhängig* von der vorgegebenen Winkel-Diskretisierung entsprechend der Geometrie (d.h. Dichteverteilung) der Molekülwolke angepaßt werden: Beim 1D-Fall einer sphärischen Wolke wurde ein logarithmisches Schalengitter aus N_r Schalen, und im 3D-Strahlungstransport-Code für höher dimensionale Objekte ein kubisches Gitter aus $N_x \times N_y \times N_z$ Ortspunkten gewählt. Durch die *freie* Wahl einer größeren Anzahl von Gitterpunkten kann daher die Rechengenauigkeit noch zusätzlich erhöht werden.

3 Ratengleichungen

3.1 Herleitung

Man betrachte ein Volumenelement $dV = dF \cdot ds$ mit einer Grundfläche dF und der Länge ds in einem bewegten Medium. Die Anzahl der durch die Grundfläche dF im Zeitintervall dt hindurch tretenden Teilchen dN_i im Energie-Zustand i (bei einer Teilchengeschwindigkeit v senkrecht zur Fläche dF) ist gegeben durch

$$dN_i = n_i \cdot dV = n_i \cdot dF \cdot ds = n_i \cdot dF \cdot v \cdot dt \quad ,$$

worin n_i die Besetzungszahl*dichte* des i-ten Zustands bedeutet. Hieraus folgt für die *pro Zeiteinheit dt* durch die *Flächeneinheit dF* fließende Anzahl an Teilchen im Zustand i, welche als (Teilchen-)*Stromdichte* j_i bezeichnet wird,

$$j_i = \frac{dN_i}{dF\,dt} = n_i \cdot v \quad ,$$

bzw. in vektorieller Schreibweise

$$\vec{j_i} = n_i \cdot \vec{v} \quad .$$

Die Stromdichte ist dann ein Vektor, dessen Richtung die Bewegungsrichtung der Teilchen angibt. Das Integral über die gesamte *geschlossene* Oberfläche $F\,(dV)$ des Volumenelements dV

$$\int_{F(dV)} \vec{j_i} \cdot d\vec{F} \quad ,$$

welches sich mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes bzw. mit dem Divergenz-Theorem (Integraldarstellung von div) auch schreiben läßt als

$$\int_{F(dV)} \vec{j_i} \cdot d\vec{F} = \int_{dV} div\vec{j_i}\,dV \equiv div\vec{j_i} = \vec{\nabla} \cdot (n_i\,\vec{v})$$

(jetzt mit dem *vektoriellen* Flächenelement $d\vec{F}$ der geschlossenen Fläche F), entspricht nun gerade dem Netto*fluß* dieser Teilchen *aus* dem Einheitsvolumen dV.

Da die Teilchen nun ihren Zustand i durch *radiative* oder *Stoß*-Prozesse ändern können, muß eine zeitliche Zunahme (Abnahme) der Besetzungszahldichte dn_i/dt des i-ten Zustands innerhalb des Volumenelements dV im allgemeinen sowohl als *Netto*fluß der in dV hinein- (bzw. heraus-) strömenden Teilchen, als auch als *Netto-Rate* mit welcher Teilchen von anderen Zuständen j (durch radiative oder Stoß-Prozesse) in den Zustand i (bzw. ausgehend vom i-ten Niveau in einen anderen Zustand j) gelangen, verstanden werden

$$\frac{dn_i}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot (n_i\,\vec{v}) + \sum_{j \neq i} (n_j\,P_{ji} - n_i\,P_{ij}) \tag{3}$$

(in Anlehnung an Mihalas & Weibel Mihalas 1984). Hierin bezeichnet P_{ij} die *gesamte Rate* (d.h. die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit) *vom* Niveau i nach j.

Summiert man diese für jeweils jeden Zustand i gültige Gleichung über *alle* Zustände, erhält man

$$\frac{d}{dt}\sum_i n_i = -\vec{\nabla}\cdot(\sum_i n_i\,\vec{v}) \quad ,$$

weil die doppelte Summation

$$\sum_i \left(\sum_{j\neq i}(n_j\,P_{ji} - n_i\,P_{ij})\right) \equiv 0$$

identisch verschwindet. Berücksichtigt man außerdem, daß die Summe über alle Besetzungszahldichten gerade der Teilchendichte n der Molekülspezies entspricht

$$n = \sum_i n_i \quad ,$$

folgt schließlich die bekannte *Kontinuitätsgleichung für diese Spezies*

$$\frac{dn}{dt} = -\vec{\nabla}\cdot(n\,\vec{v}) \equiv -div\vec{j} \tag{4}$$

(mit der gesamten Stromdichte $\vec{j} = \sum_i \vec{j_i}$), welche gleichbedeutend mit der gesamten *Teilchenzahl-Erhaltung* ist.

Nimmt man einen *statischen* Zustand in der Molekülwolke, bezogen auf jeweils jede Teilchenzahl n_i im Zustand i (pro Volumenelement), an, d.h.

$$\vec{\nabla}\cdot(n_i\,\vec{v}) = 0 \quad ,$$

folgt hieraus zum einen aus der Kontinuitätsgleichung (4), daß insgesamt ein *stationärer Teilchen*strom

$$\frac{dn}{dt} = -\sum_i(\vec{\nabla}\cdot(n_i\,\vec{v})) = -div\vec{j} = 0$$

vorliegen muß, und zum andern, daß die vereinfachte Ratengleichung für den Teilchenzustand i

$$\boxed{\frac{dn_i}{dt} = \sum_{j\neq i}(n_j\,P_{ji} - n_i\,P_{ij})} \tag{5}$$

gilt, in der die zeitliche Ableitung dn_i/dt also *nicht* verschwindet, solange sich noch kein *statistisches Gleichgewicht* eingestellt hat.

Erst nach Einstellung eines stationären Gleichgewichts (nach einer gewissen Zeit) gelten dann die ansonsten oft gebräuchlichen zeitunabhängigen NLTE-Ratengleichungen (s. z.B. Mihalas 1978)

$$\frac{dn_i}{dt} = 0 = \sum_{j\neq i}(n_j\,P_{ji} - n_i\,P_{ij}) \quad ,$$

wo die Anzahl der das Niveau i verlassenden Moleküle die Anzahl derjenigen, welche – ausgehend von einem anderen Niveau – in den Zustand i übergehen, ausgleichen.

In unserem Fall erfolgt die Berechnung der Niveaubesetzungszahlen $n_i\,(\vec{r_k})$ für diagnostisch wichtige Linien des CS-Moleküls zu jeweils jedem diskreten Ortsgitterpunkt $\vec{r}_k$ der Wolke und Zeitschritt durch numerische Lösung der *zeitabhängigen* NLTE-Ratengleichungen

$$\boxed{\frac{dn_i}{dt} = \sum_{l<i} n_l \cdot P_{li} + \sum_{u>i} n_u \cdot P_{ui} - n_i \sum_{l<i} P_{il} - n_i \sum_{u>i} P_{iu}} \tag{6}$$

mit den Übergangsraten

$$\begin{aligned} P_{lu} &= B_{lu} \cdot \overline{J}_{lu} + C_{lu} \\ P_{ul} &= \frac{g_l}{g_u} \left(\left(\frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} + \overline{J}_{lu} \right) \cdot B_{lu} + e^{h\nu_{lu}/kT} \cdot C_{lu} \right) \end{aligned}$$

(l<u), bis sich das stationäre statistische Gleichgewicht (für $t \to \infty$) eingestellt hat.

Der entwickelte 1D- und 3D-Code ist in der Lage, die zeitliche Entwicklung der Besetzungszahlen $n_i(\vec{r_k}, t)$ $(i = 1, \ldots, N_i; k = 1, \ldots, N_r$ bzw. $k = 1, \ldots, N_x \times N_y \times N_z)$ von N_i Niveaus eines Moleküls an k Orten eines Mediums als Funktion der Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung (letztere besteht aus einer großräumigen *und* einer Turbulenz-Geschwindigkeit) bis zum Gleichgewichtsfall zu berechnen. Das Strahlungsfeld wird dabei durch Lösung der Transportgleichung für alle Orte, Richtungen und Frequenzen selbstkonsistent berücksichtigt.

Durch die niedrigen Temperaturen in den Außenschichten von protostellaren Objekten während der frühen Entstehungsphasen geht die Anzahl angeregter Niveaus drastisch zurück, so daß es ausreicht, die NLTE-Ratengleichungen für eine relativ geringe Anzahl von Zuständen (z.B. $N_i = 8$) zu lösen.

3.2 Geschwindigkeits- und Dichteverteilung einer sphärischen Wolke

Nimmt man beispielsweise für den Fall einer sphärischen Wolke eine radiale Dichteverteilung von $\rho\,(r) = \rho_R\,(r/R)^m$ an, d.h. bei Unterteilung der Wolke in Kugelschalen, in der k-ten Schale eine Teilchendichte von

$$\frac{\rho\,(r_k)}{\rho_R} = \left(\frac{r_k}{R}\right)^m ,$$

so lassen sich z.B. die Besetzungszahldichten der einzelnen Niveaus in den übrigen Schalen $n_i\,(r_k)$, $k = 2, \ldots, N_r$, aus den jeweiligen, zur Startzeit $t = 0$ vorgegebenen, in der ersten äußeren Schale mittels

$$n_i\,(r_k) = \left(\frac{r_k}{R}\right)^m n_i\,(R)\,,$$

errechnen, weil ja mit den Ratengleichungen (5) - wie schon gezeigt - nach Voraussetzung die gesamte Teilchenzahldichte in jeder Schale $(n\,(r_k) = \Sigma\, n_i\,(r_k))$ zu jedem Zeitpunkt netto erhalten bleibt wegen unserer Annahme $\vec{\nabla} \cdot (n_i\,\vec{v}) = 0$.

Unter Berücksichtigung der Massenerhaltung in einem Materie-Volumen, d.h. der Kontinuitätsgleichung für einen eindimensionalen, stationären sphärisch symmetrischen Fluß

$$\frac{\partial\,(r^2\,\rho\,v_r)}{\partial r} = 0\,,$$

und der Vorgabe eines *radialen* Geschwindigkeitsgesetzes von

$$\boxed{v_r\,(r) = v_R\,\left(\frac{r}{R}\right)^n}\,, \tag{7}$$

(z.B. im freien Fall mit $n = -1/2$ u. $v_R < 0$) ist dann jedoch die 1D-Dichteverteilung $\rho\,(r)$ bestimmt durch die Beziehung

$$r^2\,v_r\,(r)\,\rho\,(r) = R^2\,v_R\,\rho_R\,,$$

d.h. festgelegt durch

$$\boxed{\frac{\rho\,(r)}{\rho_R} = \frac{1}{\left(\frac{r}{R}\right)^2}\,\frac{v_R}{v_r} = \left(\frac{r}{R}\right)^{-(n+2)}} \tag{8}$$

mit dem Exponenten $m = -(n+2)$.

3.3 Ratenkoeffizienten

Im folgenden werden die benötigten Formeln zur Berechnung der totalen Ratenkoeffizienten P_{ij} (für Aufwärts- bzw. Abwärtsübergänge) aus den Stoßratenkoeffizienten c_{ij} und den Einstein-Koeffizienten B_{ij} (für die Absorption) bzw. A_{ji} (für die spontane Emission) zusammengestellt (vgl. z.B. Mihalas 1978). Die in den späteren numerischen Linientransportrechnungen verwendeten Koeffizienten A_{ji} für CS stammen aus der Molekül-Datenbank des MPIfR in Bonn, bzw. die Stoßraten c_{ij} von CS mit H_2-Molekülen (in cm^3/s) für die Temperaturen $T_{\rm kin} = 20$ K und 40 K (in den Wolken-Beispielen) von Turner et al. (1992) (worin die Ratenkoeffizienten von Green & Chapman (1978) unter denselben Näherungen neu berechnet wurden).

3.3.1 Radiative Ratenkoeffizienten

1. **Absorptionsratenkoeffizient**

$$R_{ij} = B_{ij} \cdot \overline{J}_{ij} \tag{9}$$

2. **Emissionsratenkoeffizient**

   Einstein-Relationen:

$$A_{ji} \equiv \frac{2\,h\,\nu_{ij}^3}{c^2}\,B_{ji} \tag{10}$$

$$\text{und} \qquad g_j\,B_{ji} \equiv g_i\,B_{ij} \qquad (i < j) \tag{11}$$

   Hiermit folgen die Ratenkoeffizienten für

   (a) spontane Emissionen

$$A_{ji} = \frac{2\,h\,\nu_{ij}^3}{c^2}\,\frac{g_i}{g_j}\,B_{ij}$$

   und

   (b) stimulierte Emissionen

$$B_{ji}\,\overline{J}_{ij} = \frac{g_i}{g_j}\,B_{ij}\,\overline{J}_{ij}$$

und daraus insgesamt der **radiative Raten-Koeffizient für Emissionen**

$$\begin{aligned} R_{ji} &= A_{ji} + B_{ji}\,\overline{J}_{ij} \\ &= \frac{g_i}{g_j} \cdot \left(\frac{2\,h\,\nu_{ij}^3}{c^2} + \overline{J}_{ij} \right) \cdot B_{ij}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

3.3.2 Kollisionsratenkoeffizienten

1. **Ratenkoeffizient für Aufwärtsübergänge durch Stöße**

$$C_{ij} = C_{ij}\,(T) = n_{H_2}\,c_{ij}\,(T) \qquad c_{ij}\,(T) : \text{tabelliert} \tag{13}$$

und der

2. **Ratenkoeffizient für Abwärtsübergänge durch Stöße**

$$\begin{aligned} C_{ji} &= \left(\frac{n_i}{n_j}\right)^* C_{ij} \\ &= \frac{g_i}{g_j}\,e^{h\,\nu_{ij}/k\,T} \cdot C_{ij}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

3.3.3 Gesamte Ratenkoeffizienten

1. **Gesamter Aufwärts-Ratenkoeffizient** P_{lu}

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{lu} &= R_{lu} + C_{lu} \\ &= B_{lu} \cdot \overline{J}_{lu} + C_{lu} \qquad (l < u) \end{aligned}} \tag{15}$$

bzw.

$$P_{lu} = \frac{g_u}{g_l}\,\frac{c^2}{2h\nu_{lu}^3} A_{ul} \cdot \overline{J}_{lu} + n_{H_2}\,c_{lu}\,(T) \tag{16}$$

und der

2. **gesamte Abwärts-Ratenkoeffizient** P_{ul}

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{ul} &= R_{ul} + C_{ul} \\ &= \frac{g_l}{g_u}\left(\left(\frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} + \overline{J}_{lu} \right) \cdot B_{lu} + n_{H_2}\,c_{lu}\,(T)\,e^{h\nu_{lu}/kT} \right) \end{aligned}} \tag{17}$$

bzw.

$$P_{ul} = \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu_{lu}^3}\,\overline{J}_{lu} \right) A_{ul} + \frac{g_l}{g_u}\,e^{h\nu_{lu}/kT}\,n_{H_2}\,c_{lu}\,(T)\,, \tag{18}$$

wenn nicht die Einstein-Koeffizienten B_{lu}, sondern die A_{ul}-Koeffizienten gegeben sind.

Dabei ist der Einstein-Koeffizient B_{lu} bezüglich der Absorptionsfrequenz ν_{lu} des Übergangs, mit dessen Oszillator-Stärke f_{lu} durch die Gleichung

$$\boxed{B_{lu} = 4\,\frac{\pi^2\,e^2}{m\,c}\,\frac{1}{h\,\nu_{lu}}\cdot f_{lu}} \tag{19}$$

verknüpft, bzw. aus den Dipolmoment-Matrizenelementen $\vec{d}_{mk}$

$$B_{lu} = \frac{32\,\pi^4}{3\,h^2\,c}\,\frac{1}{g_l}\cdot\sum_{m,k} d_{mk}^2 \tag{20}$$

bestimmbar, wobei über alle entarteten Zustände k des niederen Zustands l *und* alle Zustände m des oberen Zustands u summiert wird.

4 1D-Strahlungstransport

Kollabierende Systeme ohne Rotation: Es wird eine sphärische Symmetrie unter Vernachlässigung azimutaler Geschwindigkeiten angenommen, und das Strahlungsfeld mit Hilfe analytischer Lösungen der Transportgleichung für radial nicht-relativistisch bewegte Kugeln berechnet.

4.1 Vorgehensweise

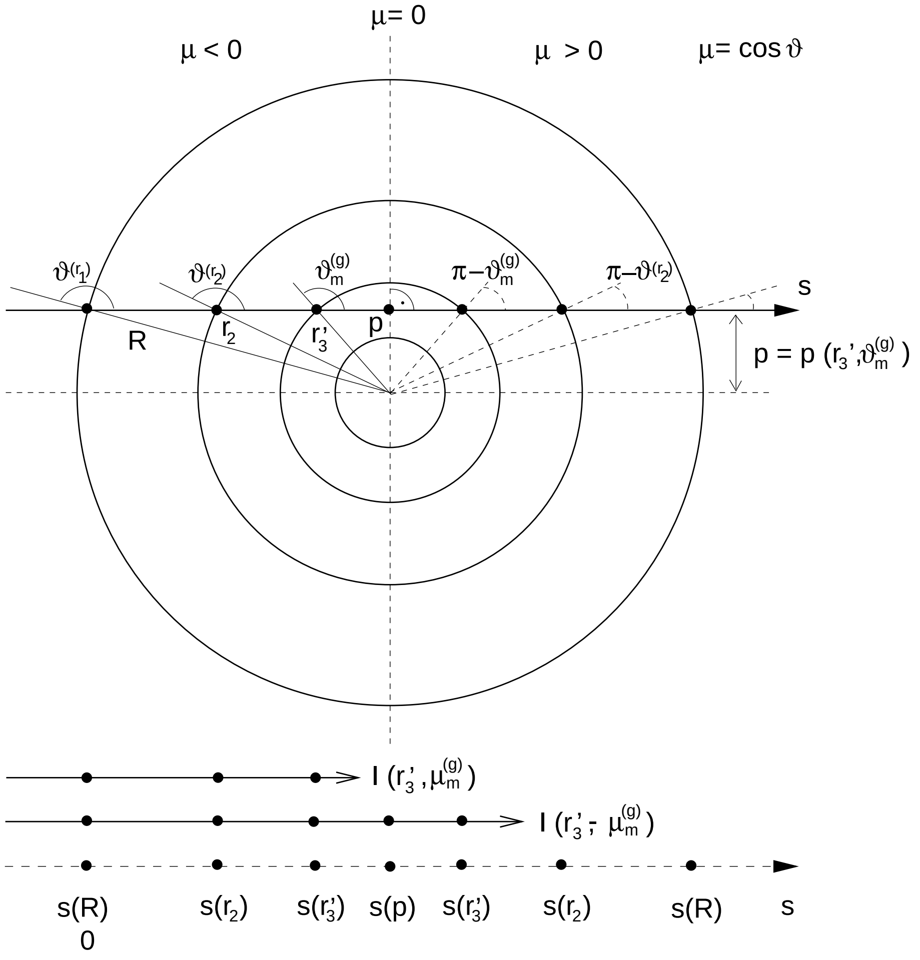


Abbildung 1: Skizze zur Beschreibung des Verfahrens der Berechnung der lokal- und richtungsabhängigen spezifischen Intensität I, z.B. am Schalenradius r_3 zu den vorgegebenen Strahlrichtungen mit den zugehörigen "Gauß-Winkeln" $\pm\mu_m^{(g)}$, in einem bewegten sphärischen Medium; siehe Erläuterungen in Abschnitt 4.

Um die vom Ortsradius r' abhängige gemittelte Intensität $\overline{J}_{lu}(r')$ des betrachteten Übergangs $l \to u$, welche zur Bestimmung des zugehörigen Aufwärts- bzw. Abwärts-Ratenkoeffizienten $P_{lu}(r')$, bzw. $P_{ul}(r')$, in den Ratengleichungen nötig ist, mittels einer Gauß-Integration auswerten zu können (s. Anh. A.2), wird das Kugelvolumen in Schalen vom Radius r_k (mit k =1, …, N_r) unterteilt und die spezifische Intensität $I_{0_{lu}}(r'_k, \mu_{0_m}^{(g)}, x'_{0_n})$ an jeweils jedem Schalenpunkt r'_k zu den fest vorgegebenen diskreten Strahlrichtungen, bzw. "Gauß-Winkeln" $\mu_{0_m}^{(g)} := \cos \vartheta_{0_m}^{(g)}$ (ϑ_0 = Winkel zwischen dem Ortsradius $\vec{r}$ und der Strahlrichtung), und diskreten dimensionslosen

Frequenz-Verschiebungspunkten x'_{0_n} des Übergangs $l \to u$ ermittelt (s. hierzu im folgenden Abb. 1).

Das hierfür passend ausgewählte p-s Koordinatensystem zur Lösung der Transportgleichung beschreibt dann den Ort eines Punktes durch den Stoßparameter p und die Strecke s. Die Strahlungstransportgleichung wird dann für Strahlen entlang einer geraden Strecke mit konstantem p gelöst, und dabei der zur Richtung $\mu_{0_m}^{(g)}$ am Ort r'_k gehörende Parameter p, des Strahls für welchen dort die Intensität zu berechnen ist, aus

$$p\,(r'_k, \mu_{0_m}^{(g)}) = r'_k \sqrt{1 - (\mu_{0_m}^{(g)})^2} \tag{21}$$

bestimmt. Bei Benutzung des p-s Koordinatensystems ist die Auswertung des Strahlungsfeldes dann begleitet durch eine eindimensionale Integration in s entlang der Linien mit konstantem p. Die s-Knoten sind dann die Schnittpunkte des Strahls mit dem radialen Gitter:

$$s\,(r,p) = \sqrt{R^2 - p^2} \mp \sqrt{r^2 - p^2} \tag{22}$$

(Das Minus- bzw. Pluszeichen gilt für einwärts bzw. auswärts gerichtete Strahlen). Da sich für den Strahl (mit p =konst) entlang der Strecke s der Winkel $\mu_0(r_k)$ an jedem Knotenpunkt ändert, werden für diesen Strahl zunächst alle die dem Schalenradius r'_k (zu welchem die Intensitäten in der Gauß-Integration ausgewertet werden müssen) vorausgehenden Winkel aus

$$\mu_0\,(r_k) = \mp\sqrt{1 - (p/r_k)^2} \tag{23}$$

bestimmt (mit $p = p(\mu_{0_m}^{(g)}(r'_k)))$, solange die Bedingung $r_k \geq p$ erfüllt ist. Dabei ist $\mu_0 < 0$ für einwärts in die Wolke gerichtete Strahlen in der ersten Kugelhälfte und $\mu_0 > 0$ für auswärts gerichtete in der zweiten Kugelhälfte. Insgesamt sind also $(N_m/2) \times N_r$ Strahlendurchgänge[2] durch die sphärische Wolke für verschiedene p's zu jeweils allen N_n Frequenzpunkten (bzw. $N_n/2$) eines möglichen Übergangs $l \to u$ zu berechnen; und dafür noch mehr Winkel $\mu_0\,(r_k)$ (nämlich maximal $(N_m/2) \times N_r \times N_r$) an den Schnittpunkten der einzelnen Strahlen mit dem radialen Gitter zu bestimmen.

Die *gleichen* und einfachen, im folgenden Abschnitt 4.3 hergeleiteten, implementierbaren Näherungsformeln für die spezifische Intensität nach Durchgang durch ein Schalenintervall $[r_k, r_{k+1}]$, erhält man aus der von Baschek et al. (1997) angegebenen exakten analytischen Lösung der Strahlungstransportgleichung für Konfigurationen mit sphärisch relativistischer Bewegung, wenn man dort als Integrationsgrenzen die Radien der Schalenintervallgrenzen wählt und Strahlendurchgänge mit konstantem p betrachtet für nicht-relativistische radiale Wolkengeschwindigkeiten $\beta(r)$, wobei man außerdem annimmt, daß die Funktionen $S(r)\exp(-t(r))$[3], $\mu_0(r)\beta(r)$, und $\chi_0(r)$ schalenweise linear in r sind (s. Anh. A.1).

4.2 Doppler-Verschiebung in der Profilfunktion der Linien-Extinktion

Die Doppler-Verschiebung der beobachteten Frequenzen ν_0 eines betrachteten Übergangs vom Niveau i nach j im mitbewegten Bezugssystem mit dem Linienzentrum ν_{ij}, wie sie ein im

[2]... mit $(N_m/2)$ = Anzahl der tatsächlichen Gauß-Winkel μ_0 zu denen die Intensität ausgewertet werden muß.
[3]... mit der optischen Tiefe t.

bewegten System ruhender Beobachter wahrnimmt, muß im Argument der Linienprofil-Funktion Φ in der Gl. (2) für den Extinktionskoeffizienten (in der Transportgleichung) berücksichtigt werden.

Wählt man aus praktischen Gründen eine dimensionslose Größe für diese Frequenzverschiebung erhält man für das Argument der Linienprofil-Funktion

$$\Phi = \Phi\left(\frac{\nu_0 - (\nu_{ij} - \Delta\nu_{ij})}{\Delta\nu_D}\right)$$

mit dem Doppler-verschobenen Linienzentrum um

$$\Delta\nu_{ij}\,(r) = \left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right)\nu_{ij} = \mu_0(r)\beta(r)\nu_{ij} = \mu_0(r)\frac{v_{\rm r}\,(r)}{v_{turb}\,(r)}\Delta\nu_D\,, \qquad (24)$$

wobei hierin die Doppler-Breite

$$\Delta\nu_D \equiv \frac{v_{turb}\,(r)}{c}\nu_{ij} \qquad (25)$$

ist, mit der *zufälligen* (d.h. der thermischen *und* turbulenten) Geschwindigkeit $v_{turb}\,(r)$, sowie der radialen makroskopischen Geschwindigkeit $\beta\,(r) = v_{\rm r}\,(r)/c$.

Dabei wird für die Turbulenz-Geschwindigkeit ein Potenzgesetz der Form

$$v_{turb}\,(r) = v_{turb_R}\,\left(\frac{r}{R}\right)^l$$

angenommen.

Mit Hilfe des Ausdrucks für die *dimensionslose* Frequenzverschiebung

$$x_0 := \frac{\nu_0 - \nu_{ij}}{\Delta\nu_D} \qquad (26)$$

vom Linienzentrum ν_{ij} (gemessen in Dopplerbreiten), ergibt sich dann für das Argument in der Linienprofil-Funktion für einen Beobachter im mitbewegten System

$$\begin{aligned} g\,(r,\mu_0,x_0) \quad &:= \quad \frac{\nu_0 - (\nu_{ij} - \Delta\nu_{ij})}{\Delta\nu_D} = x_0 + \frac{\Delta\nu_{ij}}{\Delta\nu_D} \\ &= \quad x_0 + \mu_0(r)\,\frac{v_{\rm r}\,(r)}{v_{turb}\,(r)}\,. \end{aligned} \qquad (27)$$

Die zu den Verschiebungen x_0 gehörenden Frequenzen erhält man aus Gl. (26)

$$\nu_0\,(x_0) = \left(1 + \frac{v_{turb}}{c}\,x_0\right)\nu_{ij}\,. \qquad (28)$$

Die Transformation des Linien-Profils von $\Phi_\nu(\nu_0)$ nach $\Phi_x(x_0)$, wie sie anschließend zur Herleitung des Ausdrucks für χ_0 als Funktion von x_0 benötigt wird[4], erfolgt mit Hilfe der Beziehung

$$\Phi\,(\nu_0)\,d\nu_0 \stackrel{!}{=} \Phi\left(x_0 + \mu_0(r)\,\frac{v_{\rm r}\,(r)}{v_{turb}\,(r)}\right)\,dx_0\,,$$

[4]...um später mit den berechneten Intensitäten $I_0(r,x_0)$ das Integral über x_0 für die mittlere Intensität $\overline{J}_{lu}$, Gl. (147) im Anhang A.2, auswerten zu können.

die sich aus der Normierung von Φ ergibt, das heißt mit

$$\boxed{\Phi\left(\nu_0\right) = \Phi\left(x_0 + \mu_0\,\frac{v_{\mathrm{r}}}{v_{turb}}\right)\,\frac{dx_0}{d\nu_0} = \frac{c}{\nu_{ij}}\,\frac{1}{v_{turb}}\,\Phi\left(x_0 + \mu_0\,\frac{v_{\mathrm{r}}}{v_{turb}}\right)}\,, \tag{29}$$

worin die Ableitung von Gl. (26) nach der Frequenz

$$\frac{dx_0}{d\nu_0} = \frac{1}{\Delta\nu_D}$$

ist.

4.3 Berechnung der spezifischen Intensität

4.3.1 Integrationsrichtung entlang einwärts gerichteter Strahlen mit $\mu_0 \leq 0$

Die zeitunabhängige Strahlungstransportgleichung im mitbewegten System für eine Frequenz ν_0, entlang einer geraden Strecke s bei konstantem Impaktparameter p (unter Berücksichtung der Geschwindigkeit im Argument der Linienprofil-Funktion des Extinktionskoeffizienten, s. Abschn. 4.2 und 4.4) lautet (vgl. z.B. Mihalas 1978)

$$\frac{dI_0}{ds}\left(s,\nu_0\right) = -\chi_0\left(s,\nu_0\right) I_0\left(s,\nu_0\right) + \chi_0\left(s,\nu_0\right) S\left(s\right) \tag{30}$$

bzw.

$$\frac{\partial\, I_0}{\partial\,\tau}\left(s,\nu_0\right) = S\left(s\right) - I\left(s,\nu_0\right) \tag{31}$$

mit der optischen Tiefe

$$d\,\tau\left(s,\nu_0\right) := \chi_0\left(s,\nu_0\right) ds\,. \tag{32}$$

Eine implementierbare Lösung der Strahlungstransportgl. (31) für einen *einwärts* gerichteten Strahls ($\mu_0 < 0$) mit konstantem p, nach Durchgang des Schalenintervalls *von* r_k *nach* r_{k+1} (d.h. für $R \geq r_k > r_{k+1} \geq p$), ist dann

$$I_0\left(s_{k+1},\nu_0\right) = I_0\left(s_k,\nu_0\right) e^{-\Delta\,\tau} + \int_0^{\Delta\,\tau} S\left(\tau'\right) e^{-\tau'}\, d\,\tau' =: I_0\left(s_k,\nu_0\right) e^{-\Delta\,\tau} + \Delta Q\,, \tag{33}$$

womit sich die Intensität an jedem Knotenpunkt s_{k+1} schrittweise aus jener zum vorausgehenden Knotenpunkt s_k des Strahls mit dem radialen Gitter errechnet, mit Hilfe der Änderung der optischen Tiefe

$$\Delta\,\tau = \tau\left(s_{k+1}\right) - \tau\left(s_k\right) = \int_{\tau\,(s_k)}^{\tau\,(s_{k+1})} d\,\tau = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \chi_0\left(s,\nu_0\right) ds \tag{34}$$

zwischen den beiden Punkten, bei einer Unterteilung der sphärischen Wolke in Kugelschalen mit den Radien $R > \ldots > r_k > r_{k+1} > \ldots > r_{N_r}$ und $r_1 = R$, $r_2 = r_1 - \Delta\, r_1$, $r_3 = r_2 - \Delta\, r_2$, $\ldots$, r_k, $\ldots$, r_{N_r}, (wobei $\Delta r_k > 0$).

Dieses Integral (34) läßt sich mittels der Koordinatentransformation (22) ins $p-r$-Koordinatensystem für $\mu_0 < 0$

$$s = s\,(r,p) = \sqrt{R^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - p^2}$$

umschreiben zu

$$\Delta\,\tau = \int_{\sqrt{R^2-p^2}-\sqrt{r_k^2-p^2}}^{\sqrt{R^2-p^2}-\sqrt{r_{k+1}^2-p^2}} \chi_0\,(r,\nu_0)\,ds\,.$$

Bei anschließender Anwendung der Trapez-Regel erhält man schließlich die Näherung

$$\boxed{\Delta\tau \approx \frac{\Delta s}{2}\,\left(\chi_0(r_k,\nu_0) + \chi_0(r_{k+1},\nu_0)\right) > 0} \qquad (35)$$

für die Änderung der optischen Tiefe mit der optischen Weglänge zwischen den beiden Knotenpunkten s_k und s_{k+1} (bzw. radialen Gitterpunkten r_k und r_{k+1})

$$\Delta s = \sqrt{r_k^2 - p^2} - \sqrt{r_{k+1}^2 - p^2} > 0$$

und den Funktionswerten des Doppler-verschobenen Linien-Extinktionskoeffizienten (s. Abschn. 4.4)

$$\chi_0(r,\nu_0) := \hat{\chi}_{0_{lu}}(r)\,\Phi_{lu}\,\left(g\,(r,\mu_0(r),\beta(r),x_0(\nu_0))\right)\,.$$

an den Gitterpunkten r_k und r_{k+1}, die über die Argumentfunktion g von der Geschwindigkeit β an den beiden Punkten abhängen. Ebenso sind zur Auswertung von $\Delta\tau$ die sich an jedem Knotenpunkt des Strahls mit dem radialen Gitter r_k ändernden Werte von $\mu_0(r_k)$ in der Funktion g nach Gl. (23) zu bestimmen.

Die Änderung der optischen Linien-Tiefe berechnet sich also näherungsweise aus dem Produkt des Mittelwertes der Funktionswerte des Doppler-verschobenen Linien-Extinktionskoeffizienten an den beiden Schalenradien und der optischen Weglänge zwischen den Knotenpunkten des Strahls mit dem radialen Gitter.

Für die Näherung der Quellterm-Differenz ergibt sich dann

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\Delta Q & \approx & \frac{\Delta\tau}{2}\,\left(S(\tau'=\Delta\tau)\,e^{-\Delta\tau} + S(\tau'=0)\right)\\ & = & \frac{1}{2}\Delta\tau\,\left(S(r_k)\,e^{-\Delta\tau} + S(r_{k+1})\right)\,.\end{array}} \qquad (36)$$

Damit erhält man das gleiche Resultat, vgl. Gl. (136),

$$\boxed{\begin{array}{rcl} I_{0_{lu}}\,(r_{k+1},p,\mu_0(r_{k+1}),\nu_0) & = & I_{0_{lu}}\,(r_k,p,\mu_0(r_k),\nu_0)\cdot e^{-\Delta\tau_{lu}\,(r_k,r_{k+1},p,\nu_0)}\\ & & +\Delta Q_{lu}(r_k,r_{k+1},p,\nu_0)\end{array}} \qquad (37)$$

für die Berechnung der Intensitätsänderung des Strahls (mit p =konstant und $\mu_0 < 0$) nach Durchgang durch das Schalenintervall von r_k nach r_{k+1}, mit denselben Näherungen für ΔQ bzw. $\Delta\tau$, wie im Anh. A.1 gezeigt wird. Dabei hängt der in Gl. (37) jeweils zu wählende Parameter p vom vorgegebenen Gaußwinkel $\mu_{0_m}^{(g)}(r'_k)$ am betrachteten Gitterpunkt r'_k, nach Gl. (21), ab.

4.3.2 Integrationsrichtung entlang auswärts gerichteter Strahlen mit $\mu_0 > 0$

In diesem Fall muß die Strahlungstransportgleichung (31) vom Punkt s_{k+1} nach s_k, entlang des *auswärts* gerichteten Strahls ($\mu_0 > 0$), integriert werden, und die Intensität am Ort s_k, für den auswärts gerichteten Strahl, ist aus der Intensität am zurückliegenden Knotenpunkt s_{k+1} berechenbar durch

$$I_0\,(s_k,\nu_0) = I_0\,(s_{k+1},\nu_0)\,e^{-\Delta\,\tau} + \int_0^{\Delta\,\tau} S\,(\tau')\,e^{-\tau'}\,d\,\tau' =: I_0\,(s_{k+1},\nu_0)\,e^{-\Delta\,\tau} + \Delta Q\,, \tag{38}$$

mit Hilfe der optischen Dicke

$$\Delta\,\tau = \tau\,(s_k) - \tau\,(s_{k+1}) = \int_{\tau\,(s_{k+1})}^{\tau\,(s_k)} d\,\tau = \int_{s_{k+1}}^{s_k} \chi_0\,(s,\nu_0)\,ds \tag{39}$$

zwischen den Punkten s_{k+1} und s_k. Dieses Integral (39) läßt sich dann wiederum mittels der Koordinatentransformation (22) ins $p-r$-Koordinatensystem für $\mu_0 > 0$

$$s = s\,(r,p) = \sqrt{R^2 - p^2} + \sqrt{r^2 - p^2}$$

umschreiben zu

$$\Delta\,\tau = \int_{\sqrt{R^2-p^2}+\sqrt{r_{k+1}^2-p^2}}^{\sqrt{R^2-p^2}+\sqrt{r_k^2-p^2}} \chi_0\,(r,\nu_0)\,ds\,.$$

Bei anschließender Anwendung der Trapez-Regel erhält man dann schließlich dieselbe Näherung, Gl. (35) bzw. Gl. (144), für die Änderung der optischen Tiefe. Für die Quelltermänderung ergibt sich jetzt für $\mu_0 > 0$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \Delta Q & \approx & \frac{\Delta\tau}{2}\,\left(S(\tau' = \Delta\tau)\,e^{-\Delta\tau} + S(\tau' = 0)\right) \\ & = & \frac{1}{2}\,\Delta\tau\,\left(S(r_{k+1})\,e^{-\Delta\tau} + S(r_k)\right)\,. \end{array}} \tag{40}$$

Damit läßt sich die Intensität des auswärts gerichteten Strahls ($\mu_0 > 0$) nach Durchgang durch das Schalenintervall von r_{k+1} nach r_k berechnen aus ($r_k > r_{k+1}$)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} I_{0_{lu}}\,(r_k,p,\mu_0(r_k),\nu_0) & = & I_{0_{lu}}\,(r_{k+1},p,\mu_0(r_{k+1}),\nu_0)\cdot e^{-\Delta\tau_{lu}\,(r_{k+1},r_k,p,\nu_0)} \\ & & +\Delta Q_{lu}(r_{k+1},r_k,p,\nu_0)\,, \end{array}} \tag{41}$$

mit Hilfe der Ausdrücke (35) und (40) für $\Delta\tau$ bzw. ΔQ.

Die Auswertung der Intensitätswerte zu einer *gegebenen* Frequenz ν_0 (bzw. zu einem festen $x_0\,(\nu_0,\nu_{lu})$-Wert) einer bestimmten Linie $I_{0_{lu}}\,(r,p,\mu_0,\nu_0)$ erfolgt dann *schalenweise* zu jeweils einem *konstanten* $p = p\,(r'_k,\mu_{0_m}^{(g)})$ mit Hilfe der Gleichung (37) bzw. (41), entsprechend für den Bereich $\mu_0 < 0$ bzw. $\mu_0 > 0$, in der Reihenfolge

$$\begin{array}{rcl} I_0\,(R,p,\mu_0(R,p)) & = & I_0\,(r_1,p,\mu_0(r_1,p)) \Rightarrow I_0\,(r_2,p,\mu_0(r_2,p)) \Rightarrow \\ & \cdots & \Rightarrow I_0\,(r_{N_r},p,\mu_0(r_{N_r},p)) \Rightarrow I_0\,(r = p,p,\mu_0 = 0) \end{array}$$

(für $\mu_0 \leq 0$) und

$$\begin{array}{rcl} I_0\,(r = p,p,\mu_0 = 0) & \Rightarrow & I_0\,(r_{N_r},p,\mu_0(r_{N_r},p)) \Rightarrow I_0\,(r_{N_r-1},p,\mu_0(r_{N_r-1},p)) \Rightarrow \\ \cdots & \Rightarrow & I_0\,(r_2,p,\mu_0(r_2,p)) \Rightarrow I_0\,(r_1,p,\mu_0(r_1,p)) \equiv I_0\,(R,p,\mu_0(R,p)) \end{array}$$

(für $\mu_0 \geq 0$), bis zum Knotenpunkt $s(r'_k, p)$ am radialen Gitterpunkt r'_k, wo die Intensität zur Strahlrichtung mit vorgegebenem Gauß-Winkel $\mu_{0_m}^{(g)}$ gesucht wird.

Bei der Intensitätsberechnung durch Integration der Strahlungstransportgleichung entlang der Strecke s von Knotenpunkt zu Knotenpunkt quer durch jede Schale, wird dabei ausgenutzt, daß aus Symmetriegründen die Intensität $I_0(r'_k, \mu_{0_m}^{(g)})$ am Ort r'_k für eine Strahlrichtung mit positivem μ_0 gerade der Intensität $I_0(r'_k, -\mu_{0_m}^{(g)})$ des Strahls mit gleichem p entspricht, welcher von außerhalb der Kugel kommend von der ersten Kugelhälfte in die zweite Hälfte übertritt bis zum Knotenpunkt $s(r'_k, p)$ (s. Abb. 1 unten).

Es ist hierbei zu beachten, daß beim Übertritt des Strahls von der ersten in die zweite Kugelhälfte (bei $\mu_0(r = p) = 0$) zuerst die Intensität am Punkt $r = p$ und $\mu_0 = 0$ schrittweise aus der Intensitätsformel für $\mu_0 \leq 0$ zu bestimmen ist, und *dann erst* daraus wieder die weiteren Intensitätswerte an den Knotenpunken des Strahls mit dem radialen Gitter, $s(r_{k+1}), s(r_k), s(r_{k-1}), \ldots,$ in der zweiten Kugelhälfte nach der Formel für den auswärts gerichteten Strahl $\mu_0 > 0$ berechnet werden können.

Nachdem so mit den spezifischen Intensitätswerten die *endgültigen* $\overline{J}_{lu}(r_k)$'s und Besetzungszahldichten $n_i(r_k)$ aus den Ratengleichungen bestimmt sind, werden zum Schluß für beliebig ausgewählte äquidistante Impaktparameter p (mit $0 \leq p \leq R$) die aus der gesamten Wolke tretenden Intensitäten berechnet und anschließend die zugehörigen Frequenzen mit Hilfe der *Dopplertransformation*

$$\nu = \gamma\nu_0\,(1 + \beta\mu_0) \approx \nu_0\,(1 + \beta\mu_0)\,, \tag{42}$$

(für $v_\mathrm{r} \ll c$ und $\beta = \beta\,(R) = v_\mathrm{r}\,(R)/c$), sowie die Intensitäten mit der Beziehung

$$I\,(R, p, \mu(R), \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3 I_0\,(R, p, \mu_0(R), \nu_0) \tag{43}$$

ins Beobachtersystem transformiert. Wegen $v_\mathrm{r} \ll c$ gilt hierbei

$$\mu = \frac{\mu_0 + \beta}{1 + \beta\mu_0} \approx \mu_0\,. \tag{44}$$

4.4 Quellfunktion und Extinktionskoeffizient

Die Linien-Quellfunktion $S_{ul}(r)$ und der Extinktionskoeffizient $\chi_{0_{lu}}(r, \nu_0)$ des Übergangs $l \to u$, in der Strahlungstransportgl. (30) im mitbewegten System der sphärischen Wolke, sind gegeben durch die Gleichung (1) bzw. (2) (s. Mihalas 1978) und lassen sich einfach aus den Besetzungszahlen $n_l(r)$ und $n_u(r)$ bestimmen, welche in diesem *ein*dimensionalen Fall nur vom Kugelschalen-*Radius* r abhängen.

Mit der Beziehung (29) für die Transformation der Linienprofilfunktion nach der Frequenzverschiebung x_0 (zum Linienzentrum des Übergangs), folgt dann für den Extinktionskoeffizienten *in Abhängigkeit von* x_0

$$\boxed{\chi_{0_{lu}}(r, \mu_0, x_0) = \frac{n_l\,(r)\,B_{lu}\,h\,c}{4\,\pi\,v_{turb}\,(r)} \left(1 - \frac{n_u\,(r)\,g_l}{n_l\,(r)\,g_u}\right) \cdot \Phi\,(g\,(x_0)) =: \hat{\chi}_{0_{lu}}(r) \cdot \Phi_{lu}\,(r, \mu_0, x_0)} \tag{45}$$

mit dem nur vom Ortsradius r abhängigen Teil

$$\hat{\chi}_{0_{lu}}(r) = \frac{n_l\,(r)\,B_{lu}\,h\,c}{4\,\pi\,v_{turb}\,(r)}\,\left(1 - \frac{n_u\,(r)\,g_l}{n_l\,(r)\,g_u}\right)\,,$$

sowie der Profilfunktion in x_0

$$\Phi_{lu}\,(r,\mu_0,x_0) = \Phi\,\left(g\,(r,\mu_0(r),x_0\,(\nu_0))\right) = \Phi\,\left(x_0 + \mu_0(r)\,\frac{v_{\mathrm{r}}\,(r)}{v_{turb}\,(r)}\right)$$

mit dem Gauß-Profil

$$\Phi\,(g\,(x'_{0_j})) = C\,e^{-g\,(x'_{0_j})^2}\,,$$

und den diskreten (durch die Gauß-Integration fest vorgegebenen) Frequenzen x'_{0_j}; worin noch der (Re-)Normierungsfaktor C (entspr. Gl. (157))

$$C = \frac{1}{2\,x_{max}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n/2} w_j^{(\pm x_0)}\,e^{-x'^2_{0_j}}}$$

zu bestimmen ist (s. Anhang A.2).

4.5 Zur Wahl des Schalengitters

Es wurde ein logarithmisches Gitter gewählt mit

$$\Delta(log\,r_k) = log\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right) = konst > 0\,,$$

was gleichbedeutend ist mit $(r_{k+1}/r_k) = \alpha = konst < 1$. Damit ergibt sich hieraus rekursiv die Gleichung für die Gitterpunkte

$$r_k = \alpha^{k-1}\,R\,,$$

mit $k = 1, 2, \ldots, N_r$, wobei speziell für den innersten Gitterpunkt $r_{N_r} = \alpha^{N_r-1}\,R$ gilt, woraus sich zu vorgegebenem Radius R der Wolke, Gesamtzahl N_r der Schalen und Radius r_{N_r} der innersten Schale, die Konstante α berechnen läßt zu

$$\alpha = \left(\frac{r_{N_r}}{R}\right)^{(1/(N_r-1))}\,.$$

Beispielsweise erhält man für den Fall eines zehn mal kleineren Radius der innersten Schale im Vergleich zum äußeren Radius der Wolke, $r_{N_r} = (R/10)$, einen α-Wert von

$$\alpha = \left(\frac{1}{10}\right)^{(1/(N_r-1))} < 1\,.$$

Für die ungleichen Schalenabstände folgt schließlich

$$\Delta\,r_k := r_k - r_{k+1} \equiv (1-\alpha)\,\alpha^{k-1}\,R\,.$$

5 3D-Strahlungstransport

Rotierende kollabierende Systeme: Erweiterung der Berechnung des Strahlungsfeldes auf *einfache* dreidimensionale, differentiell bewegte Konfigurationen.

5.1 Die 3D-Strahlungstransportgleichung im mitbewegten System für kleine Geschwindigkeiten

Ausgehend von der **Annahme**, daß

1. für nicht-relativistische Geschwindigkeiten

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 \qquad \text{und} \qquad \vec{n} \approx \vec{n_0}$$

   gilt, sowie

2. die Transformation der Koordinaten (x_0, y_0, z_0) des bewegten System ins Beobachtersystem in der Gestalt

$$\begin{aligned} x &= x\,(x_0, \nu_0) \\ y &= y\,(y_0, \nu_0) \\ z &= z\,(z_0, \nu_0) \end{aligned} \tag{46}$$

   mit der Lorentztransformation erfolgt, wobei für die Frequenzen (s. z.B. Mihalas 1978)

$$\nu = \gamma\,\nu_0 \left(1 + \vec{n_0} \cdot \vec{\beta}\right) \tag{47}$$

   d.h. für die Frequenzen im mitbewegten System

$$\nu_0 \approx \frac{\nu}{1 + \vec{n_0} \cdot \vec{\beta}} \tag{48}$$

   folgt,

wird im folgenden die 3D-Strahlungstransportgleichung im mitbewegten System zunächst für ein allgemeines Geschwindigkeitsfeld $\vec{\beta}$ und für eine beliebige Strahlrichtung $\vec{n}$ hergeleitet (vgl. Wehrse et al. 2000).

Die Strahlungstransportgleichung für den *statischen dreidimensionalen* Fall läßt sich allgemein schreiben als (s. Mihalas 1978)

$$(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\, I = -\chi\, I + \chi\, S \tag{49}$$

mit dem Skalarprodukt (Differentialoperator) in kartesischen Koordinaten

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z}\,,$$

und dem Einheitsvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{50}$$

in Strahlrichtung (ϑ,φ).

Wegen der funktionalen Abhängigkeiten in den Transformationsgleichungen (46), gehen die Differentialoperatoren für das *bewegte* System über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \nu_0}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial \nu_0} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \nu_0}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial \nu_0} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \nu_0}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial \nu_0}\,, \end{aligned}$$

mit dem Ausdruck

$$\frac{\partial \nu_0}{\partial x} \approx \left(-\frac{\nu}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right) \equiv \left(-\frac{\nu_0}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right)$$

und analog mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_0}{\partial y} &\approx \left(-\frac{\nu_0}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right) \\ \frac{\partial \nu_0}{\partial z} &\approx \left(-\frac{\nu_0}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right)\,, \end{aligned}$$

für die Frequenzableitungen, die sich aus der genäherten Transformationsgleichung (48) ergeben.

Dementsprechend transformiert sich auch der Ausdruck für die Richtungsableitung in Strahlrichtung $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ in Gleichung (49) zur Herleitung der Strahlungstransportgleichung im mitbewegten System

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}} &\longrightarrow n_{0_x}\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\nu_0}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial \nu_0}\right] \\ &+ n_{0_y}\left[\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\nu_0}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})}\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial \nu_0}\right] \\ &+ n_{0_z}\left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\nu_0}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})}\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial \nu_0}\right] \\ &\equiv \vec{n_0}\cdot\vec{\nabla} - \frac{\nu_0}{(1+\vec{n_0}\cdot\vec{\beta})}\vec{n_0}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{n_0}\cdot\vec{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial \nu_0} \\ &\approx \vec{n}\cdot\vec{\nabla} - \nu_0\left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \nu_0} \\ &\equiv \vec{n}\cdot\vec{\nabla} - \left[\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \xi_0}\,, \end{aligned}$$

wobei $\xi_0 := \ln \nu_0$ ist, und von den Näherungen $\beta \ll 1$ und $\vec{n} \approx \vec{n_0}$ Gebrauch gemacht wurde.

Damit lautet die 3D-Strahlungstransportsgleichung im mitbewegten System für kleine Geschwindigkeitsfelder und unter Vernachlässigung von Aberration und Advektion

$$\boxed{(\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\, I_0 + w\, \frac{\partial}{\partial \xi_0} I_0 = -\chi_0\, I_0 + \chi_0\, S}, \tag{51}$$

mit der spezifischen Intensität I_0, $\xi_0 := \ln \nu_0$, und der Frequenz ν_0, jeweils im mitbewegten System, und der Definition der Funktion

$$\boxed{w = w\,(x, y, z, \vec{n}) := -\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\, \left(\vec{n} \cdot \vec{\beta}\right)} \tag{52}$$

mit dem festen Einheitsvektor $\vec{n}$ in Strahlrichtung.

5.2 Lösung der 3D-Strahlungstransportgleichung

Unter Verwendung von kartesischen Koordinaten kann die Transportgl. (51) somit geschrieben werden als

$$\boxed{n_x\, \frac{\partial I_0}{\partial x} + n_y\, \frac{\partial I_0}{\partial y} + n_z\, \frac{\partial I_0}{\partial z} + w\, \frac{\partial I_0}{\partial \xi_0} = -\chi_0\, I_0 + \chi_0\, S}, \tag{53}$$

mit $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $I_0 = I_0\,(x, y, z, \vec{n}, \xi_0)$, $\xi_0 := \ln \nu_0$ und $w = w\,(x, y, z, \vec{n})$.

Diese Form (53) der Strahlungstransportgleichung wird nun durch die Finite-Differenzen-Methode mit der *Up-wind*-Diskretisierung in Strahlrichtung gelöst (vgl. Stenholm et al. 1991), d.h. für *positive* $n_x, n_y, n_z > 0$ *und* $w > 0$, durch Auflösung der diskretisierten Gleichung

$$\begin{aligned}
& \frac{n_x}{\Delta x}\, \left(I_0\,(x_i, y_j, z_k, \xi_{0_n}) - I_0\,(x_{i-1}, y_j, z_k, \xi_{0_n})\right) \\
+ \quad & \frac{n_y}{\Delta y}\, \left(I_0\,(x_i, y_j, z_k, \xi_{0_n}) - I_0\,(x_i, y_{j-1}, z_k, \xi_{0_n})\right) \\
+ \quad & \frac{n_z}{\Delta z}\, \left(I_0\,(x_i, y_j, z_k, \xi_{0_n}) - I_0\,(x_i, y_j, z_{k-1}, \xi_{0_n})\right) \\
+ \quad & \frac{w\,(x_i, y_j, z_k, \vec{n})}{\Delta \xi_0}\, \left(I_0\,(x_i, y_j, z_k, \xi_{0_n}) - I_0\,(x_i, y_j, z_k, \xi_{0_{n-1}})\right) \\
= \quad & -\chi_0\,(x_i, y_j, z_k, \xi_{0_n})\, \left(I_0\,(x_i, y_j, z_k, \xi_{0_n}) - S\,(x_i, y_j, z_k)\right)
\end{aligned}$$

nach $I_0\,(x_i, y_j, z_k, x_{0_n})$, wobei i, j, k die diskreten Punkte auf dem Ortsgitter darstellen und sich n auf die durch die Gauß-Integration vorgegebene Frequenz-Diskretisierung x_{0_n} bezieht mit

$$\begin{aligned}
\Delta \xi_0 &= \ln \nu_{0_n} - \ln \nu_{0_{n-1}} = \ln \left(\frac{\nu_{0_n}}{\nu_{0_{n-1}}}\right) \\
&= \ln \left(\frac{1 + v_{\mathrm{turb}}\,(x_i, y_j, z_k)\, x_{0_n}\,/c}{1 + v_{\mathrm{turb}}\,(x_i, y_j, z_k)\, x_{0_{n-1}}\,/c}\right) .
\end{aligned} \tag{54}$$

Das Ergebnis lautet dann für diesen Fall

$$\boxed{\begin{aligned} I_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_n}\right) \;=\; & \left(\frac{n_x}{\Delta x} I_0\left(x_{i-1}, y_j, z_k, x_{0_n}\right) + \frac{n_y}{\Delta y} I_0\left(x_i, y_{j-1}, z_k, x_{0_n}\right)\right. \\ & + \frac{n_z}{\Delta z} I_0\left(x_i, y_j, z_{k-1}, x_{0_n}\right) + \frac{w\left(x_i, y_j, z_k, \vec{n}\right)}{\Delta\xi_0} I_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_{n-1}}\right) \\ & \left. + \chi_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_n}\right) S\left(x_i, y_j, z_k\right)\right) \\ & \Big/ \left(\frac{n_x}{\Delta x} + \frac{n_y}{\Delta y} + \frac{n_z}{\Delta z} + \frac{w\left(x_i, y_j, z_k, \vec{n}\right)}{\Delta\xi_0} + \chi_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_n}\right)\right) \end{aligned}} \tag{55}$$

Diese Intensitätsgleichung gilt also für jeweils alle diskreten Frequenzen x_{0_n} eines betrachteten *festen* Übergangs $u \rightarrow l$ in der vorgegebenen Strahlrichtung $\vec{n} = (n_x > 0, n_y > 0, n_z > 0)$ für $w > 0$.

Da die einfallenden Intensitäten als Grenzbedingung an allen Eintrittsflächen des Gitters, sowie die Quellfunktion und der Extinktionskoeffizient an jedem Gitterpunkt, gegeben sind, können wir in diesem Fall $(n_x, n_y, n_z > 0)$ am Ortspunkt $(i, j, k) = (2, 2, 2)$ unsere Berechnungen starten und nachfolgend alle Intensitäten $I_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_n}\right)$ rekursiv aus Gl. (55) bestimmen, bis zu den Gitterpunkten $x_i = N_x$, $y_j = N_y$, $z_k = N_z$, wenn N_x, N_y, und N_z die Gesamtzahl der Gitterpunkte in der x, y, bzw. z-Richtung darstellen. Für die restlichen 7 Strahlrichtungen, der insgesamt acht möglichen Vorzeichen-Kombinationen von n_x, n_y und n_z, verläuft die Diskretisierung und Rekursion auf analoge Weise, jedoch muß dann der Startpunkt für *negative* Strahlenvektor-Komponenten folgendermaßen geändert werden:

$n_x < 0$: $i = N_x - 1, \ldots, 1$

$n_y < 0$: $j = N_y - 1, \ldots, 1$

$n_z < 0$: $k = N_z - 1, \ldots, 1$.

Beispielsweise erhält man dann die zugehörige Rekursionsformel zur Berechnung der Intensitäten für den Fall der Strahlrichtung in *negativer* z-Richtung ($n_z < 0$, $n_x, n_y > 0$) durch Substitution des Index k (für die entsprechende Diskretisierung entlang der z-Achse) mit $k-1$ und umgekehrt $(k \leftrightarrow k-1)$ in Gl. (55)

$$\begin{aligned} I_0\left(x_i, y_j, z_{k-1}, x_{0_n}\right) \;=\; & \left(\frac{n_x}{\Delta x} I_0\left(x_{i-1}, y_j, z_{k-1}, x_{0_n}\right) + \frac{n_y}{\Delta y} I_0\left(x_i, y_{j-1}, z_{k-1}, x_{0_n}\right)\right. \\ & + \frac{|n_z|}{|\Delta z|} I_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_n}\right) + \frac{w\left(x_i, y_j, z_{k-1}, \vec{n}\right)}{\Delta\xi_0} I_0\left(x_i, y_j, z_{k-1}, x_{0_{n-1}}\right) \\ & \left. + \chi_0\left(x_i, y_j, z_{k-1}, x_{0_n}\right) S\left(x_i, y_j, z_{k-1}\right)\right) \\ & \Big/ \left(\frac{n_x}{\Delta x} + \frac{n_y}{\Delta y} + \frac{|n_z|}{|\Delta z|} + \frac{w\left(x_i, y_j, z_{k-1}, \vec{n}\right)}{\Delta\xi_0} + \chi_0\left(x_i, y_j, z_{k-1}, x_{0_n}\right)\right) \end{aligned} \tag{56}$$

Die Intensitätsformeln für die restlichen Fälle $(n_x, n_y, n_z \gtrless 0)$ ergeben sich völlig analog. In jedem Fall ist außerdem darauf zu achten und zu überprüfen, ob an jedem Ortsgitterpunkt (x_i, y_j, z_k) die Funktion w positiv ist, und die obigen Formeln anwendbar sind. Ist dies nicht der

Fall, muß entlang der *negativen* Richtung der Frequenz-Achse x_0 integriert werden, beginnend mit den Indexwerten: $n = N_\nu - 1, \ldots, 1$ in absteigender Folge. Die zugehörige Rekursionsformel ändert sich dann entsprechend (für den Fall $n_x, n_y, n_z > 0$)

$$\begin{aligned} I_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_{n-1}}\right) = & \left(\frac{n_x}{\Delta x} I_0\left(x_{i-1}, y_j, z_k, x_{0_{n-1}}\right) + \frac{n_y}{\Delta y} I_0\left(x_i, y_{j-1}, z_k, x_{0_{n-1}}\right)\right. \\ & + \frac{n_z}{\Delta z} I_0\left(x_i, y_j, z_{k-1}, x_{0_{n-1}}\right) + \frac{|w\left(x_i, y_j, z_k, \vec{n}\right)|}{|\Delta \xi_0|} I_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_n}\right) \\ & \left. + \chi_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_{n-1}}\right) S\left(x_i, y_j, z_k\right)\right) \\ & \Big/ \left(\frac{n_x}{\Delta x} + \frac{n_y}{\Delta y} + \frac{n_z}{\Delta z} + \frac{|w\left(x_i, y_j, z_k, \vec{n}\right)|}{|\Delta \xi_0|} + \chi_0\left(x_i, y_j, z_k, x_{0_{n-1}}\right)\right) \end{aligned} \tag{57}$$

für $w\left(x_i, y_j, z_k, \vec{n}\right) < 0$.

Die in den Intensitätsgleichungen verwendeten Werte für die Quellfunktion S und den Extinktionskoeffizienten χ_0 an den Orten (x_i, y_j, z_k) (sowie für die Linienfrequenz x_{0_n} im letzteren Fall), lassen sich wieder analog aus den Besetzungszahlen und den Gleichungen (1) bzw. (45) bestimmen, mit dem Unterschied, daß jetzt die Besetzungszahlen von den kartesischen Koordinaten $(n_i(r) \to n_i(x, y, z))$ abhängen, und im Argument der Linienprofil-Funktion im Ausdruck für

$$\chi_0\left(x, y, z, x_0\right) = \hat{\chi}_{0_{lu}}(x, y, z)\, \Phi_{lu}\left(x_0\right) \tag{58}$$

mit

$$\hat{\chi}_{0_{lu}}(x, y, z) = \frac{n_l\left(x, y, z\right) B_{lu}\, h\, c}{4\, \pi\, v_{turb}\left(x, y, z\right)} \left(1 - \frac{n_u\left(x, y, z\right) g_l}{n_l\left(x, y, z\right) g_u}\right), \tag{59}$$

die Doppler-Verschiebung nicht explizit berücksichtigt werden muß, so daß Φ in diesem Fall nur von der Frequenz x_0 abhängt.

5.3 Berechnung der gemittelten Intensität $\overline{J}_{lu}\left(\vec{r}\right)$

Die gemittelte Intensität wird wiederum mittels der Gauß-Formel und denselben im sphärischen 1D-Fall bestimmten Gewichtsfaktoren für die Frequenzintegration numerisch berechnet (s. Anhang A.2), mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt eine weitere Integration (d.h. Diskretisierung) über den φ-Winkelraum nötig ist.

Im allgemeinen Fall gilt für die gemittelte Intensität

$$\boxed{\overline{J}_{lu}\left(x, y, z\right) = \frac{1}{4\, \pi\, \Delta \nu_{\mathrm{D}}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \Phi\left(x_0\right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^{+1} I_{0_{lu}}\left(x, y, z, \mu, \varphi, x_0\right) d\varphi\, d\mu\, dx_0}\,, \tag{60}$$

mit der Doppler-Breite (vgl. Gl. (25))

$$\Delta \nu_{\mathrm{D}}\left(x, y, z\right) = \frac{v_{\mathrm{turb}}\left(x, y, z\right)}{c}\, \nu_{lu}\,, \tag{61}$$

der Definition $\mu := \cos \vartheta$, wobei der Einheitsvektor in Strahlrichtung in diesen Winkelgrößen durch $\vec{n} = (\vartheta, \varphi)$ festgelegt ist, sowie der analogen Überführung des Frequenzintegrals in ein Integral über die Frequenz*verschiebung* x_0 (vgl. Gl. (147)).

Das zusätzlich hinzugekommene Integral über den Winkel φ in Gl. (60) läßt sich dann darstellen als die Summe

$$\int_0^{2\pi} I_0\left(x,y,z,\mu,\varphi,x_0\right)d\varphi \approx \sum_{p=1}^{N_p} w_p^{(\varphi)}\, I_0\left(x,y,z,\mu,\varphi_p,x_0\right), \tag{62}$$

wobei sich die Abszissenwerte mit Hilfe der Gaußschen Formel für beliebige Integrationsgrenzen (s. Gl. (153)) durch die Beziehung

$$\varphi_i' = \left(1+y_i\right)\pi \tag{63}$$

bestimmen lassen, mit wiederum denselben (tabellierten) Nullstellen y_i des Legendre-Polynoms $P_n(y)$ (mit $n = N_p$), sowie den zugehörigen Gewichtsfaktoren (identisch mit jenen tabellierten für eine Integration von -1 bis $+1$)

$$w_i^{(\varphi')} \equiv \left[w_i^{(y)}\right]_{\rm tab} \tag{64}$$

(s. Abramowitz & Stegun 1972). Insgesamt ergibt sich für die Diskretisierung des Dreifachintegrals der gemittelten Intensität am Ortspunkt (x_i, y_j, z_k) die Näherung

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{J}_{lu}\left(x_i,y_j,z_k\right) \;=\; & \frac{1}{4\pi\nu_{\rm D}} \sum_{p=1}^{N_p}\sum_{m=1}^{N_m/2}\sum_{n=1}^{N_n/2} w_p^{(\varphi')}\, w_m^{(\pm\mu)}\, W_n^{(\pm x_0')} \cdot \Big\{ I_{0_{lu}}\left(x_i,y_j,z_k,\mu_m,\varphi_p',x_{0_n}'\right) \\ & + I_{0_{lu}}\left(x_i,y_j,z_k,\mu_m,\varphi_p',-x_{0_n}'\right) + I_{0_{lu}}\left(x_i,y_j,z_k,-\mu_m,\varphi_p',x_{0_n}'\right) \\ & + I_{0_{lu}}\left(x_i,y_j,z_k,-\mu_m,\varphi_p',-x_{0_n}'\right)\Big\}\end{aligned}} \;. \tag{65}$$

6 Strahlungshydrodynamik eines rotierenden und kollabierenden oder expandierenden Systems

Um den Eingabe-Parameterraum eines rotierenden kollabierenden Systems einzuschränken, werden analytische Ausdrücke für die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung für isotherme kollabierende Wolken mit Rotation, die sowohl für den Unter- als auch Überschallbereich gelten, aus den hydrodynamischen Grundgleichungen hergeleitet. Diese Lösungen ergeben sich als Spezialfall aus den Ausdrücken für entsprechende Sternwinde unter Vernachlässigung von Strahlungsbeschleunigungen durch Kontinua und Linien.

6.1 Das Geschwindigkeitsfeld

Das Geschwindigkeitsfeld einer Molekülwolke oder eines Sternwindes am Ort $\vec{r} = (x,\, y,\, z)$ kann im allg. beschrieben werden durch seine sphärischen Komponenten

$$\boxed{\vec{v}\,(\vec{r}) = v_r\,(\vec{r})\,\vec{e_r}\,(\vec{r}) + v_\phi\,(\vec{r})\,\vec{e_\phi}\,(\vec{r}) + v_\theta\,(\vec{r})\,\vec{e_\theta}\,(\vec{r})} \tag{66}$$

mit den Einheitsvektoren $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_\phi}$, in radialer, polarer bzw. azimuthaler Richtung, wobei die folgenden zwei Darstellungen der Einheitsvektoren

$$\vec{e_r}\,(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\phi \\ \sin\theta\,\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{e_r}\,(x,\,y,\,z) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{67}$$

und

$$\vec{e_\phi}\,(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{e_\phi}\,(x,\,y,\,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

im weiteren nützlich sein werden.[5]

6.2 Hydrodynamische Grundgleichungen

Betrachtet man eine nichtviskose, d.h. ideale Flüssigkeit, gilt die *Impulsgleichung*

$$\rho\,\frac{D\,\vec{v}}{D\,t} = \vec{f} - \vec{\nabla}\,p\,, \tag{69}$$

(s. z.B., Mihalas & Weibel Mihalas 1984), worin $D/D\,t$ die kovariante *Lagrangesche* oder mitbewegte Zeitableitung im bewegten System des Materie-Elements ist, $\vec{f}$ die gesamte äußere Körperkraft *pro Volumen* ist, welche auf das Masse-Element der Flüssigkeit wirkt, und $\vec{\nabla}\,p$ der *Divergenz*term eines diagonalen isotropen *Druck-Tensor* $\vec{\nabla}\cdot\mathsf{T}$ ist, in welchem $\mathsf{T} = -p\,\mathsf{I}$ (mit der Einheitsmatrix I) und p der hydrostatische Druck ist.

Zum anderen muß auch die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\,(\rho\,\vec{v}) = 0\,, \tag{70}$$

berücksichtigt werden, mit der kovarianten Divergenz $\nabla\cdot\vec{v}$ des Geschwindigkeitsvektors.

[5]Wir sind hier nicht an der Darstellung des polaren Vektors $\vec{e_\theta}$ interessiert, weil in allen weiteren betrachteten Fällen die Geschwindigkeit v_θ Null gesetzt werden wird.

6.3 Vereinfachende Annahmen

Um die hydrodynamischen Gleichungen analytisch lösen zu können und dem axialsymmetrischen und stationären Problem anzupassen, machen wir in unseren Modell die folgenden vereinfachenden Annahmen:

1. Die protostellare Wolke oder der Sternwind ist *isotherm* mit einer Temperatur gleich der Effektiv-Temperatur des Zentralsterns ($T \equiv T_{eff}\,(\star)$). In diesem Fall ersetzen wir die Energiegleichung durch die *Zustandsgleichung*

$$p = a^2\,\rho\,, \tag{71}$$

   wobei a die isotherme Schallgeschwindigkeit, und ρ die Dichte der Wolke oder des Windes ist.

2. Wir nehmen einen *stationären axialsymmetrischen Fluß* an, da wir uns für einen rotierenden Stern (bzw. inneren Wolkenkern) interessieren bei welchem Rotationseffekte den Fluß beherrschen, d.h. wir setzten

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0, \quad f_\phi \equiv 0 \tag{72}$$

   (d.h. u.a. keine Schocks und keine Klumpen). Desweiteren nehmen wir an,

3. daß die *polare Komponente* der Geschwindigkeit des Windes (und der Wolke), wie Sternwind-Berechnungen (von z.B. Petrenz & Puls 1996) gezeigt haben, im Vergleich zu den anderen Komponenten vernachlässigt werden kann,

$$v_\theta \equiv 0\,, \tag{73}$$

   und

4. daß keine signifikante Verzerrung des Sterns auftritt, d.h. ein *sphärischer* Stern vorliegt, wenn wir unsere Anfangsbedingungen auf der Sternoberfläche ansetzen, um die Kontinuitätsgleichung und ϕ-Komponente der Impulsgleichung (d.h. die Erhaltungsgl. des Drehimpulses) getrennt voneinander zu integrieren.

5. Wir nehmen im Falle eines *Windes* von einem hellen frühen Stern an, daß der Wind primär durch Kontinuum- *und* Linien-Strahlungskräfte getrieben wird.

6.4 Vereinfachte hydrodynamische Gleichungen

Indem wir die korrekten kontravarianten Komponenten der Beschleunigung ($D\,v_i/D\,t$) in Gl. (69) verwenden, insbesondere für *sphärische* Koordinaten, und diese durch deren äquivalenten physikalischen Komponenten ersetzen (s. z.B. Mihalas & Weibel Mihalas 1984), sowie die oben erwähnten Annahmen 1–3 anwenden, erhalten wir die vereinfachte r- and ϕ-Komponente der

Impulsgleichung

$$
\begin{aligned}
v_{\rm r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,v_{\rm r} - \frac{v_\phi^2}{r} &= \frac{f_{\rm r}}{\rho} - \frac{a^2}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial r}\,, && (74)\\
v_{\rm r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,v_\phi + \frac{v_{\rm r}\,v_\phi}{r} &= 0\,, \qquad \text{oder äquivalent} &&\\
\frac{v_{\rm r}}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,v_\phi) &= 0\,, && (75)
\end{aligned}
$$

wobei die äußere radiale Kraft pro Einheitsmasse, d.h. die radiale Beschleunigung auf das Masseelement

$$\frac{f_{\rm r}}{\rho} = -\frac{G\,M}{r^2}\,(1-\Gamma) + g_{\rm R,l} =: g_{\rm r}\,, \tag{76}$$

ist, wenn wir ebenso die obige fünfte Annahme verwenden; hierin ist M die Masse des Zentralsterns, d.h. z.B. die Masse des Protosterns in einer kollabierenden Wolke oder jene eines Sterns von welchem ein stellarer Wind ausgeht, $g_{\rm R,l}= g_{\rm R,l}(r,\theta,\ldots)$ ist die auswärts gerichtete radiative Beschleunigung, verursacht durch Spektrallinien, und $\Gamma(\approx \text{const})$ ist die übliche Definition des Kräfteverhältnisses

$$\Gamma = \frac{g_{\rm R,c}}{g}\,,$$

im Vergleich mit der nach innen gerichteten Gravitationsbeschleunigung g. $g_{\rm R,c}$ ist dabei die radiative Beschleunigung, verursacht durch die Kontinuums-Opazität (vorwiegend durch Elektronenstreuung im Falle von Winden von hellen Sternen frühenTyps). Bei protostellaren Wolken können diese Beschleunigungsterme im Vergleich zur Anziehung des inneren Kerns vernachlässigt werden.

Wenn wir außerdem die kovariante Ableitung (s. z.B. Mihalas & Weibel Mihalas 1984), insbesondere für *sphärische* Koordinaten, verwenden und desweiteren dieselben schon erwähnten Annahmen 2 und 3 auf die Kontinuitätsgleichung (70) anwenden, finden wir, daß

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\left(r^2\,\rho\,v_{\rm r}\right) = 0\,. \tag{77}$$

Diese Gleichung sieht genauso aus wie jene, welche wir für einen *ein*dimensionalen, sphärisch symmetrischen und stationären Fluß erhalten würden. Jedoch muß darauf hingewiesen werden, daß in unserem Fall dieser Ausdruck, ebenso wie die anderen Gleichungen (74) und (75), viel allgemeiner und für einen gegebenen festen Polarwinkel θ erfüllt ist. Aber ähnlich zu einem sphärisch symmetrischen Fluß impliziert Gl. (77), daß

$$4\,\pi\,r^2\,\rho\,(r,\theta)\,v_{\rm r}\,(r,\theta) = \text{constant} =: \dot M\,(\theta)\,, \tag{78}$$

worin *hier* $\dot M(\theta)$ *nicht* der gesamte Massenfluß durch eine sphärische Schale ist, welche den Stern umhüllt, sondern sein *Massenfluß* (oder Massenverlust-Rate) *am Breitengrad* θ *durch die Sternoberfläche, multipliziert mit* $4\,\pi\,R^2$ (vgl. Definition von Bjorkman & Cassinelli 1993). Die gesamte Massenverlust-Rate muß dann

$$\dot{\mathcal{M}} \equiv \int_{4\,\pi} \frac{\dot M\,(\theta)}{4\,\pi}\,d\Omega \tag{79}$$

sein, integriert über den Raumwinkel Ω. Beachte, daß im Falle einer kollabierenden protostellaren Wolke diese Massenverlust-Rate negativ ist, weil der innere Kern an Masse gewinnt.

Beachte auch, daß die ϕ-Komponente der Impulsgl. (75) nichts anderes ist als die Erhaltung des Drehimpulses pro Einheitsmasse, z.B. um die Rotationsachse $L_z(\theta)$, für einen konstanten Polarwinkel θ entlang einer Stromlinie

$$r\,\sin\theta\, v_\phi\,(r,\,\theta) \equiv L_z(\theta) = \text{konstant}\,, \tag{80}$$

wie zu erwarten bei äußeren *Zentral*kräften und einer Axialsymmetrie, was wir ja zuvor angenommen haben.

6.5 Lösungen: Die azimutale Geschwindigkeitskomponente und 2D-Wolken- bzw. Winddichte

Die letzten beiden Differentialgleichungen (75) und (77) können sofort und getrennt voneinander gelöst (d.h. integriert) werden, um die unbekannte Geschwindigkeitskomponente v_ϕ, und die Wind- bzw. Wolken-Dichte ρ zu erhalten, wenn man passende Anfangsbedingungen für diese physikalischen Größen wählt.

Die Erhaltung des Drehimpulses um die Rotationsachse (aus Gl. (75) oder Gl. (80)) fordert

$$r\,\sin\theta\, v_\phi\,(r,\,\theta) \stackrel{!}{=} L_z(\theta)\,,$$

mit einer geeignet gewählten Grenzbedingung $L_z(\theta)$ für ein konstantes θ zu jeder radialen Entfernung r, angepaßt auf das speziell betrachtete astrophysikalische Problem. Dies führt zum allgemeinen Gesetz für die *azimutale Geschwindigkeit*

$$v_\phi\,(\hat{r},\theta) = \frac{1}{\hat{r}}\,\frac{L_z(\theta)}{R\,\sin\theta} =: \frac{L(\theta)}{\hat{r}} \tag{81}$$

am dimensionslosen Radius $\hat{r} = (r/R)$, mit R als Referenzradius.

Mit der Vermutung, daß sich die Oberfläche des Zentralsterns, bzw. des inneren Kerns einer Molekülwolke, wie eine rotierende Kugel verhält und der Annahme 4, wird die Rotationsgeschwindigkeit auf der Sphäre an der Breite θ beschrieben durch

$$v_\phi\,(R,\theta) = v_{\rm rot}\,\sin\theta\,, \tag{82}$$

mit der äquatorialen Rotationsgeschwindigkeit $v_{\rm rot}$. Dann ist die offensichtlich geeignete Anfangsbedingung für $v_\phi\,(R,\theta)$ eines Materieelements, welches am Breitengrad θ seinen Ursprung hat, gleich der Rotationsgeschwindigkeit auf der Sternoberfläche bei dieser Breite, wo die Materie ausgestoßen worden ist, d.h. $v_{\rm rot}\,\sin\theta$. Daher ist die Grenzbedingung für den Drehimpuls

$$L_z(\theta) = R\,\sin\theta\, v_\phi\,(R,\,\theta) = R\, v_{\rm rot}\,\sin^2\theta\,.$$

Somit ist hier die ϕ–Komponente der Geschwindigkeit eines Teilchens im Abstand $\hat{r}$ in seiner Bahn*ebene*, d.h. auf einer *Kegel*fläche mit konstantem Winkel θ,

$$\boxed{v_\phi\,(\hat{r},\theta) = \frac{1}{\hat{r}}\, v_{\rm rot}\,\sin\theta}\,, \tag{83}$$

mit $L(\theta) \equiv v_{\rm rot}\,\sin\theta$.

Um die Kontinuitätsgleichung (Gl. (77)) integrieren zu können, verwenden wir den in Gl. (78) definierten, zu jedem Winkel θ erhaltenen Massenfluß als passende Anfangsbedingung. Dieser Massenfluß ergibt sich aus den gegebenen Werten der Geschwindigkeit $v_{\rm r}\,(R,\theta)$ und Dichte $\rho\,(R)$ an der stellaren Photosphäre am Radius R, bzw. auf der Oberfläche eines protostellaren Kerns, da nach Gl. (78)

$$\dot{M}\,(\theta) = 4\,\pi\,R^2\,\rho\,(R)\,v_{\rm r}\,(R,\theta) = \text{konstant} \tag{84}$$

gilt. Dann liefert Gl. (77) (aus der Massen-Erhaltung) für irgend einen Radius r bei konstantem Winkel θ

$$r^2\,\rho\,(r,\theta)\,v_{\rm r}\,(r,\theta)\,d\Omega = \frac{\dot{M}\,(\theta)}{4\,\pi}\,d\Omega\,, \tag{85}$$

d.h. die folgende *2D-Dichteverteilung*

$$\rho\,(r,\theta) = \frac{\dot{M}\,(\theta)}{4\,\pi\,r^2\,v_{\rm r}\,(r,\theta)} = \frac{F\,(\theta)}{\hat{r}^2\,v_{\rm r}\,(\hat{r},\theta)} \tag{86}$$

am Ort (r,θ), mit dem definierten Fluß $F = \dot{M}\,(\theta)/4\,\pi\,R^2$ durch die Sternoberfläche, oder

$$\boxed{\rho\,(\hat{r},\theta) = \frac{v_{\rm r}\,(R,\theta)}{\hat{r}^2\,v_{\rm r}\,(\hat{r},\theta)}\,\rho\,(R)}\,. \tag{87}$$

6.6 Die Bewegungsgleichung

Als nächstes lösen wir die r-Komponente der Impulsgleichung (74), d.h. suchen nach einem Ausdruck für die radiale Geschwindigkeitskomponente $v_{\rm r}$. Diese Differentialgleichung kann in dimensionsloser Form umgeschrieben werden zu

$$\hat{v}_{\rm r}\,\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\,\hat{v}_{\rm r} - \frac{\hat{v}_\phi^2}{\hat{r}} = -\frac{\hat{v}_{\rm crit}^2}{\hat{r}^2} + \hat{g}_{\rm R,l} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial\hat{r}}\,, \tag{88}$$

mit den dimensionslosen Geschwindigkeiten

$$\hat{v}_{\rm r} := \frac{v_{\rm r}}{a}\,,\ \hat{v}_\phi := \frac{v_\phi}{a}\,,\ \text{and}\ \hat{v}_{\rm crit} := \frac{v_{\rm crit}}{a}\,, \tag{89}$$

in Einheiten der isothermen Schallgeschwindigkeit a, wobei $v_{\rm crit}$ der *Break-up*-Geschwindigkeit entspricht (üblicherweise ohne Berücksichtigung radiativer Linienbeschleunigungsterme)

$$v_{\rm crit} \equiv \sqrt{\frac{G\,M}{R}\,(1-\Gamma)}\,, \tag{90}$$

und mit der dimensionslosen Linienbeschleunigung

$$\hat{g}_{\rm R,l} := \frac{R}{a^2}\,g_{\rm R,l}\,. \tag{91}$$

Durch Kombination der Beziehungen für die azimutale Geschwindigkeit und Dichte (Gleichungen (83) und (86)) mit Gl. (88), erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial\hat{r}} &= \left(-\frac{2}{\hat{r}^3}\,\frac{1}{v_{\rm r}\,(\hat{r})} - \frac{1}{\hat{r}^2}\,\frac{1}{v_{\rm r}\,(\hat{r})^2}\,\frac{\partial v_{\rm r}\,(\hat{r})}{\partial\hat{r}}\right)F \\ &\equiv -\rho\,(\hat{r},\theta)\left(\frac{2}{\hat{r}} + \frac{1}{v_{\rm r}\,(\hat{r},\theta)}\,\frac{\partial v_{\rm r}\,(\hat{r},\theta)}{\partial\hat{r}}\right) \end{aligned}$$

(dies wird erreicht mittels Gl. (86) und Anwendung der Kettenregel auf die Funktion $1/v_\mathrm{r}(\hat{r})$), um schließlich die dimensionslose (und im weiteren genannten) differentielle *Bewegungsgleichung* für die radiale Komponente $\hat{v}_\mathrm{r}$

$$\boxed{\left(\hat{v}_\mathrm{r} - \frac{1}{\hat{v}_\mathrm{r}}\right) \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \hat{v}_\mathrm{r} = \frac{\hat{L}^2(\theta)}{\hat{r}^3} - \frac{\hat{v}_\mathrm{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \hat{g}_{\mathrm{R,l}}} \tag{92}$$

zu finden, mit dem dimensionslosen Zentrifugal-Beschleunigungsterm $\hat{L}^2/\hat{r}^3$, und (s. Definitionsgl. (81) von L)

$$\hat{L}^2(\theta) := \frac{L_z^2(\theta)}{R^2 a^2 \sin^2\theta}\,; \tag{93}$$

welcher z.B. für einen Sternwind am Polarwinkel θ

$$\hat{L}^2(\theta) \equiv \frac{v_\mathrm{rot}^2}{a^2}\,\sin^2\theta =: \hat{v}_\mathrm{rot}^2\,\sin^2\theta\,. \tag{94}$$

ist.

Beachte: Selbst wenn es einen Drehimpuls um die Rotationsachse gibt, dessen Betrag *nicht* mit dem Winkel θ variiert, d.h. $L_z \neq L_z(\theta)$, kann die Größe $\hat{L}$ trotzdem noch von θ abhängen. In diesem Fall ergibt sich ebenso ein nicht-sphärisches Geschwindigkeitsfeld.

Wenn der Linien-Beschleunigungsterm in Gl. (92) durch

$$\boxed{\hat{g}_{\mathrm{R,l}}(\hat{r},\theta,\hat{v}_\mathrm{r},d\hat{v}_\mathrm{r}/d\hat{r}) = \frac{\hat{g}_{\mathrm{l,1}}}{\hat{r}^2} + g_{\mathrm{l,2}}(\theta)\,\hat{v}_\mathrm{r}\frac{d\hat{v}_\mathrm{r}}{d\hat{r}}} \tag{95}$$

angenähert werden kann (s. Abschn. B.4), mit den dimensionslosen Faktoren $\hat{g}_{\mathrm{l,1}}$ =konst und $g_{\mathrm{l,2}}$, wird die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\left((1-g_{\mathrm{l,2}}(\theta))\,\hat{v}_\mathrm{r} - \frac{1}{\hat{v}_\mathrm{r}}\right) \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \hat{v}_\mathrm{r} = \frac{\hat{L}^2(\theta)}{\hat{r}^3} - \frac{\hat{v}_\mathrm{crit}^2 - \hat{g}_{\mathrm{l,1}}}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}}}\,. \tag{96}$$

6.6.1 Der kritische Punkt und die kritischen Lösungen

Die Bewegungsgleichung (Gl. (92), und insbesondere Gl. (96)) liefert verschiedene Lösungsfamilien, welche ein ziemlich unterschiedliches mathematisches Verhalten und physikalische Bedeutung haben (vgl. Abb. 2).

Die linke Seite von Gl. (96) verschwindet für $(d\hat{v}_\mathrm{r}/d\hat{r} \neq 0)_{\hat{r}_c}$ am kritischen Radius $\hat{r}_\mathrm{c}$, wo[6]

$$\boxed{\hat{v}_\mathrm{r}(\hat{r}_c) = \frac{1}{\sqrt{1-g_{\mathrm{l,2}}(\theta)}} \geq \hat{v}_\mathrm{r}(\hat{r}_s) = 1}\,. \tag{97}$$

ist. Dies bedeutet, daß die Geschwindigkeit am kritischen Punkt mindestens größer als die isotherme Schallgeschwindigkeit $\hat{v}_\mathrm{r} = 1$ ist. Für thermische Winde und protostellare Wolken ($\hat{g}_{\mathrm{l,2}} \equiv 0$) ist der kritische Punkt von Gl. (96) gerade der Schallpunkt

$$\hat{r}_c \equiv \hat{r}_s\,.$$

[6] Hierin ist der Wert von $g_{\mathrm{l,2}} < 1$ aus physikalischen Gründen.

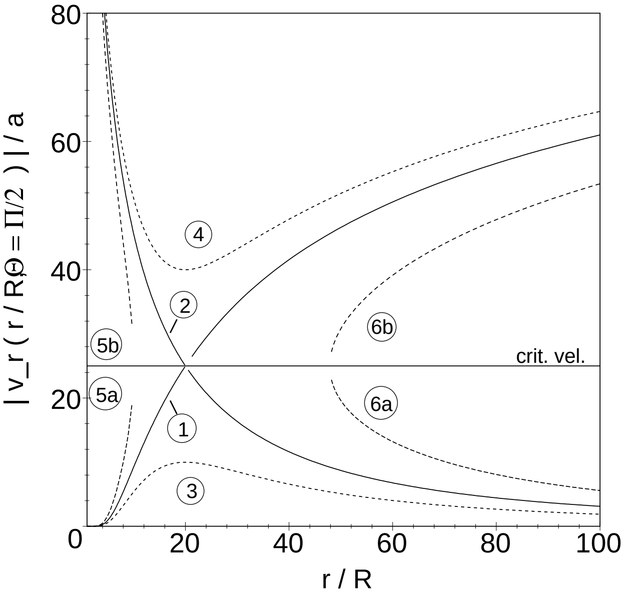


Abbildung 2: Die Topologie der Lösungen $|\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}, \theta = \pi/2)|$ der Bewegungsgl. (96) in der Äquatorebene aufgetragen gegen die radiale Entfernung $\hat{r} = r/R$ in Sternradien, für einen typischen O5–V-Stern im Zentrum, der mit $v_{\rm rot} = 120$ km/s rotiert (s. Modell-Parameter in Abschn. B.5). Lösung 1 ist die eindeutige transsonische Sternwind-Lösung durch den kritischen Punkt bei $\hat{r}_{\rm c} = 20.0$ und $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}_{\rm c}) = 25.0$. Was die Beschreibung der verschiedenen Lösungstypen 2–6 im Falle einer kollabierenden protostellaren Wolke angeht, siehe auch die Diskussion in Abschn. 6.8 (neben Abschn. 6.6.1)).

Wir sind nun daran interessiert, unter welchen Bedingungen man einen *stetig differenzierbaren transsonischen* Fluß durch den kritischen Punkt $\hat{r}_{\rm c}$ von Gl. (96) erhält. Das bedeutet im Falle eines Sternwindes: Wie erhält man einen glatten Übergang vom *sub*sonischen und *sub*kritischen Fluß ($\hat{v}_{\rm r} < (\hat{v}_{\rm r})_{\rm c}$) bei kleinen $\hat{r} < \hat{r}_{\rm c}$ zu einem *super*kritischen und *super*sonischen Fluß ($\hat{v}_{\rm r} > (\hat{v}_{\rm r})_{\rm c} > 1$) bei großen $\hat{r} > \hat{r}_{\rm c}$, wenn diese kritische Lösung eine *finite* positive Steigung $(d\hat{v}_{\rm r}/d\hat{r}) > 0$ hat bei $\hat{r} = \hat{r}_c$ (vgl. durchgezogene Kurve in Abb. 2)?[7] Dann ist nachweislich aus Gl. (96) klar, daß man einen solchen transsonischen *Wind* erhält, wenn (1) die rechte Seite am kritischen Radius $\hat{r}_{\rm c}$ verschwindet, (2) negativ ist für $\hat{r} < \hat{r}_{\rm c}$, und (3) positiv ist für $\hat{r} > \hat{r}_{\rm c}$.

Wir können im Gegensatz dazu im Falle einer *kollabierenden Wolke* genau die umgekehrte Situation vorliegen haben: Wenn $(d\hat{v}_{\rm r}/d\hat{r})_{\hat{r}_{\rm c}} < 0$ ist, erhalten wir die zweite eindeutige transsonische und kritische Lösung in welcher $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r})$ monoton *abnimmt* von *super*sonischen Geschwindigkeiten für $\hat{r} < \hat{r}_s$, z.B. nahe eines Protosterns, zu *sub*sonischen Geschwindigkeiten für $\hat{r} > \hat{r}_s$, z.B. am äußeren Rand einer Wolke (s. zweite durchgezogene Linie 2, in Abb. 2, eines entsprechenden Akkretionsflusses).

Insgesamt sind wir in beiden Fällen nur an diesen zwei eindeutigen kritischen Lösungen interessiert, als eine zusätzliche astrophysikalische Grenzbedingung, um die Differentialgl. (96) lösen zu können, neben den vier anderen möglichen *Lösungstypen* (alle in Abb. 2 dargestellt, oder in z.B. Mihalas 1978), die für unseren Fall nicht geeignet sein sollten.

Die rechte Seite von Gl. (96) verschwindet am kritischen Radius $\hat{r}_c$, der die quadratische Gleichung

$$2\,\hat{r}^2 - \left(\hat{v}^2_{\rm crit} - \hat{g}_{\rm l,1}\right)\hat{r} + \hat{L}^2\,(\theta) = 0\,. \tag{98}$$

[7] Wir nehmen desweiteren an, daß sowohl $\hat{v}_{\rm r}$ als auch $(d\hat{v}_{\rm r}/d\hat{r})$ *überall* einwertig und stetig sind.

löst. Daher ist die reelle und physikalisch signifikante Lösung, d.h. der kritische Radius

$$\boxed{\hat{r}_c(\theta) = \frac{\left(\hat{v}_{\rm crit}^2 - \hat{g}_{\rm l,1}\right) + \sqrt{\left(\hat{v}_{\rm crit}^2 - \hat{g}_{\rm l,1}\right)^2 - 8\,\hat{L}^2\,(\theta)}}{4}}, \tag{99}$$

falls die Diskriminante

$$D := \left(\hat{v}_{\rm crit}^2 - \hat{g}_{\rm l,1}\right)^2 - 8\,\hat{L}^2\,(\theta) \geq 0$$

ist, oder gleichbedeutend, falls die äquatoriale Rotationsgeschwindigkeit des Zentralsterns die Bedingung

$$v_{\rm rot} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{v_{\rm crit,eff}^2}{a} \tag{100}$$

erfüllt, mit der folgenden korrigierten *Break-up*-Geschwindigkeit,

$$\boxed{v_{\rm crit,eff} \equiv \sqrt{{v_{\rm crit}}^2 - R\,g_{\rm l,1}}}, \tag{101}$$

welche die Beschleunigung durch optisch dünne Linien berücksichtigt, und falls die Bedingung

$$g_{\rm l,1} \leq \frac{{v_{\rm crit}}^2}{R} = \frac{GM(1-\Gamma)}{R^2} \tag{102}$$

garantiert ist.

6.6.2 Zur Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung (96) kann einfach gelöst werden, indem man zuerst die linke Seite über $\hat{v}_{\rm r}$, und dann die rechte Seite über $\hat{r}$ getrennt voneinander integriert, was zu

$$\begin{aligned}(1 - g_{\rm l,2}(\theta))\,\hat{v}_{\rm r}^2 - \ln\hat{v}_{\rm r}^2 \quad &= \quad -\frac{\hat{L}^2\,(\theta)}{\hat{r}^2} + 2\,\frac{\hat{v}_{\rm crit}^2 - \hat{g}_{\rm l,1}}{\hat{r}} \\ &\quad\; +4\,\ln\hat{r} + C\end{aligned} \tag{103}$$

führt, mit der rechten Seite von Gl. (103) bezeichnet als Funktion

$$\begin{aligned}f\left(\hat{r},\theta;\hat{r}'\right) \quad &:= \quad -\frac{\hat{L}^2\,(\theta)}{\hat{r}^2} + 2\,\frac{\hat{v}_{\rm crit}^2 - \hat{g}_{\rm l,1}}{\hat{r}} \\ &\quad\; +4\,\ln\hat{r} + C\left(\hat{r}',\theta\right),\end{aligned} \tag{104}$$

und der Integrationskonstanten C, die bestimmt ist durch die Grenzbedingung für die radiale Geschwindigkeit $\hat{v}_{\rm r}$ an einem vorgegebenen Ort $(\hat{r}',\theta)$.

Da wir nur an den *transsonischen* kritischen Lösungen interessiert sind, bestimmen wir C aus den Gleichungen (97) und (103) für $\hat{r} = \hat{r}_{\rm c}$

$$\begin{aligned}C_{\rm c} = C\left(\hat{r}_{\rm c},\theta\right) \quad &= \quad 1 + \ln\left(1 - g_{\rm l,2}(\theta)\right) + \frac{\hat{L}^2\,(\theta)}{\hat{r}_{\rm c}^2} \\ &\quad\; -2\,\frac{\hat{v}_{\rm crit}^2 - \hat{g}_{\rm l,1}}{\hat{r}_{\rm c}} - 4\,\ln\hat{r}_{\rm c}\,.\end{aligned}$$

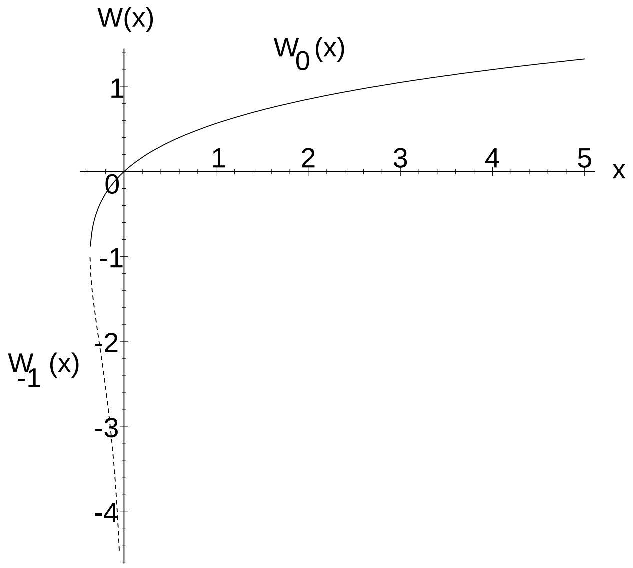


Abbildung 3: Die zwei reellen Zweige der Lambert W-Funktion: $W_0(x)$ (durchgez. Kurve) und $W_{-1}(x)$ (gestr. Kurve).

Damit wird die Funktion f in Gl. (104) zu

$$\begin{aligned} f_{\rm c}\left(\hat{r},\theta\right) &= -\hat{L}^2(\theta)\left(\frac{1}{\hat{r}^2}-\frac{1}{\hat{r}_{\rm c}^2}\right)+2\left(\hat{v}_{\rm crit}^2-\hat{g}_{1,1}\right)\left(\frac{1}{\hat{r}}-\frac{1}{\hat{r}_{\rm c}}\right) \\ &\quad +4\,\ln\left(\frac{\hat{r}}{\hat{r}_{\rm c}}\right)+\ln\left(1-g_{1,2}(\theta)\right)+1\,. \end{aligned} \tag{105}$$

Beachte, daß $f_{\rm c}\left(\hat{r}_{\rm c}\right) \equiv 1+\ln(1-g_{1,2})$ ist.

Somit läßt sich Gl. (103) nun schreiben als

$$\hat{v}_r^2\, e^{-\left(1-g_{1,2}(\theta)\right)\hat{v}_r^2} = e^{-f_{\rm c}\left(\hat{r},\theta\right)}\,, \tag{106}$$

welche explizit und völlig analytisch mittels der Lambert W-Funktion (s.u.) gelöst wird.

6.6.3 Die Lambert W-Funktion

Die W-Funktion ist definiert als die implizite Funktion, welche die Gleichung

$$W(z)\, e^{W(z)} = z \tag{107}$$

erfüllt (vgl. Corless et al. 1993).

So wie die Gleichung $y(x)\exp y(x) = x$ eine unbegrenzte Anzahl von Lösungen $y(x)$ für jeden nicht-verschwindenen Wert von x hat, hat W eine unendliche Anzahl von Zweigen. Wir sind nur an unserem physikalisch relevanten Fall interessiert, wo x *reell* und $-1/e \leq x < 0$ ist; dann gibt es zwei mögliche *reelle* Werte von $W(x)$ (s. Abb. 3). Wie man schon an der Definitionsgleichung von W sehen kann, verschwindet die W-Funktion bei $x = 0$, ist negativ für $x < 0$, positiv für positive Werte von x, und muß -1 am Punkt $x = -1/e$ sein. Der Zweig, welcher $-1 \leq W(x)$ erfüllt für x im Bereich $[-1/e, \infty)$, wird als $W_0(x)$ oder nur $W(x)$ bezeichnet, und der Zweig, welcher $W(x) \leq -1$ im Intervall $[-1/e, 0)$ genügt, als $W_{-1}(x)$. Daher teilen sich die Zweige $W_0(x)$ und $W_{-1}(x)$ den Zweig-Punkt bei $x = -1/e$. $W_0(x)$ bezieht sich auf den *Haupt-Zweig* der W-Funktion, welcher der einzige Zweig ist, der analytisch bei 0 ist. Die anderen restlichen *Nicht*-Hauptzweige von W haben alle einen Zweig-Punkt bei 0, und werden bezeichnet als $W_k(x)$, wobei k eine ganze Zahl ungleich Null ist.

6.7 Die Lösung der Bewegungsgleichung

Es ist nun möglich, einen *expliziten* analytischen Ausdruck für die Lösung $\hat{v}_r$ der Bewegungsgleichung (106) mittels der W-Funktion anzugeben, d.h.

$$\boxed{\hat{v}_{\mathrm{r},k}\left(\hat{r},\theta\right) = \pm\sqrt{-\frac{W_k\left(-\left(1-g_{1,2}(\theta)\right)e^{-f_{\mathrm{c}}(\hat{r},\theta)}\right)}{1-g_{1,2}(\theta)}}}\,. \tag{108}$$

Dies kann leicht gezeigt werden, indem dieser Ausdruck in Gl. (106) eingesetzt wird. Dann ist die resultierende Beziehung gleich der Definitionsgleichung (107) der Lambert W-Funktion,

$$W_k(x)\,e^{W_k(x)} = x\,,$$

mit

$$x = -\left(1-g_{1,2}(\theta)\right)e^{-f_{\mathrm{c}}(\hat{r},\theta)}\,.$$

Da das Argument der W-Funktion in Gl. (108) immer reell und negativ ist, ist gewährleistet (s. Abb. 3), daß das Argument der Quadratwurzel nie negativ wird, und somit die Lösung immer reell ist.

Wir sind nur an den möglichen zwei *reellen* Werten von $W(x)$ interessiert, den $k = 0, -1$–Zweigen in Gl. (108), wo x reell ist und $-1/e \leq x < 0$. Der Zweig-Punkt bei $x = -1/e$, wo sich diese beiden Zweige treffen, entspricht dem kritischen Punkt $\hat{r}_{\mathrm{c}}$, wo die radiale Komponente in Gl. (108) $\hat{v}_{\mathrm{r}} = \hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r}_{\mathrm{c}})$ wird für $f_{\mathrm{c}}(\hat{r}_{\mathrm{c}}, \theta) \equiv 1 + \ln(1 - g_{1,2})$. In Abhängigkeit davon, auf welchem Zweig von W man sich diesem Punkt $x = -1/e$ nähert, erhält man eine andere Form der $\hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r}, \theta)$–Kurve, entweder Sternwind oder kollabierende Wolke.

Um jedoch zu wissen, welchen der zwei Zweige man in den beiden interessierenden Fälle (Wind oder Wolke), für einen bestimmten Wert des Radius $\hat{r}$ im Bereich von $[1, \hat{r}_{\mathrm{c}}]$ und $[\hat{r}_{\mathrm{c}}, \infty)$, zu wählen hat, um den beschriebenen stetigen, monotonen Anstieg (bzw. Abstieg) und *glatten* transsonischen Fluß als zusätzliche physikalische Grenzbedingung (s. Abschn. 6.6.1) zu gewährleisten, muß man noch das Verhalten der Argument-Funktion $x(\hat{r})$ von W, in Gl. (108), mit dem Radius $\hat{r}$ untersuchen (s. Abb. 4).

Die Argument-Funktion $x(\hat{r}) = -(1 - g_{1,2}(\theta))e^{-f_{\mathrm{c}}(\hat{r},\theta)}$ zu einer gegebenen Breite θ nimmt monoton vom Sternradius bei $\hat{r} = 1$ (mit einem Wert von nahezu Null) *ab* bis zu ihrem Minimum bei $\hat{r} = \hat{r}_{\mathrm{c}}$ mit $x = -1/e$, d.h. bis zum kritischen Punkt, wo $f_{\mathrm{c}} = 1 + \ln(1 - g_{1,2})$ ist, um danach im Bereich negativer Werte wieder monoton anzu*steigen*.

Sternwind: Wählen wir dann zuerst den reellen Hauptzweig $W_0(x)$ der Lambert-Funktion, der in negativer Richtung bis zum kritischen Punkt $x(\hat{r}_{\mathrm{c}}) = -1/e$ und $W_0(x) = -1$ (d.h. $\hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r}_{\mathrm{c}})$)

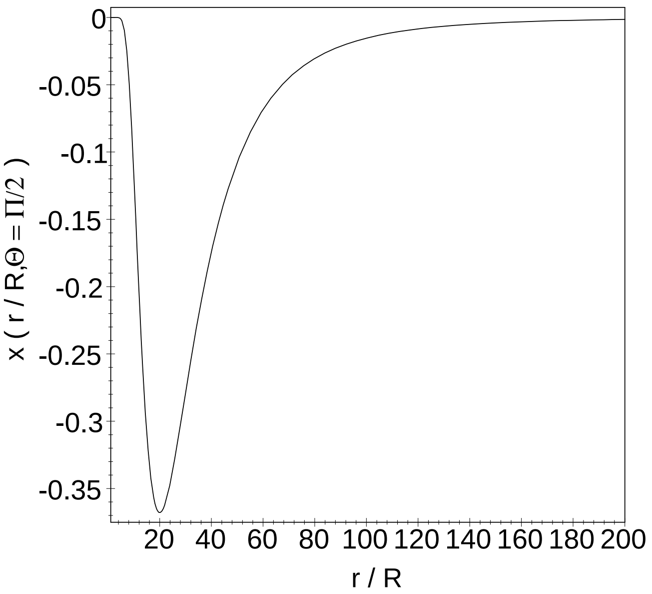


Abbildung 4: Die Argument-Funktion der W-Funktion, $x(\hat{r},\pi/2) = -(1-g_{1,2}(\pi/2))\exp(-f_c(\hat{r},\pi/2))$, im radialen Geschwindigkeitsgesetz, Gl. (108), aufgetragen gegen die radiale Entfernung $\hat{r} = r/R$ in der Äquatorebene für den Sternwind von einem typischen O5–V-Stern, welcher mit $v_{\rm rot} = 120$ km/s rotiert (s. Modell-Parameter in Abschn. B.5). Das Minimum dieser Funktion ist beim kritischen Radius $\hat{r}_c$ =20.0.

durchwandert wird, für zunehmende Radien von nahe der Sternoberfläche $\hat{r} \approx 1$ und daher von $x(\hat{r}) \lesssim 0$ und $W_0(x) \lesssim 0$ kommend (d.h. $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}=1) \approx 0$), erhalten wir die gewünschte, in Abschnitt 6.6.1 beschriebene kritische Wind-Lösung. Diese Wahl bewirkt den streng monotonen Anstieg der radialen Geschwindigkeitskomponente $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r})$ von nahe Null bis zum Schallpunkt in der subsonischen Region. Damit die Lösung glatt den kritischen Punkt durchquert, d.h. die Ableitung $\hat{v}_{\rm r}'(\hat{r}_c)$ dort stetig ist, muß man dort zum $W_{-1}(x)$–Zweig wechseln. Dann wird der reelle Teil dieses Zweiges von dort an in negativer Richtung $W_{-1}(x) \to -\infty$ für größere Radien $\hat{r} > \hat{r}_s$, wieder mit abnehmendem $|x(\hat{r})| \to 0$, weiter durchschritten. Dies ergibt die gewünschte Fortsetzung des monotonen Anstiegs von $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r})$ in der Überschallregion $\hat{r} > \hat{r}_c > \hat{r}_s$.

Protostellare Wolke: Um die erwünschte kritische Wind-Lösung zu erhalten, d.h. die eindeutige transsonische Lösung für welche $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r})$ streng monoton *an*steigt von kleinen Beträgen im subsonischen Gebiet am äußeren Rand der Wolke ($\hat{r} > \hat{r}_s$ und $|\hat{v}_{\rm r}(\hat{r})| \ll |\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}_s)|$) bis eventuell in die supersonische Region hinein ($\hat{r} < \hat{r}_s$ and $|\hat{v}_{\rm r}(\hat{r})| > 1$) mit *abnehmendem* Radius (wobei wir wiederum verlangen, daß $\hat{v}_{\rm r}'$ stetig am Schallpunkt $\hat{r}_s$ ist), müssen wir zuerst den reellen Hauptzweig $W_0(x)$ für die *sub*sonische Region $\hat{r} > \hat{r}_s$ nehmen (mit dem beobachteten Anfangswert von $\hat{v}_{\rm r}$ am äußeren Rand als Grenzbedingung) und wechseln dann am kritischen (d.h. hier Schall-) Punkt auf den $W_{-1}(x)$–Zweig für *kleinere* Radien in der supersonischen Region. Somit nähern wir uns in diesem Fall dem kritischen Punkt $x(\hat{r}_s) = -1/e$, wo die Argument-Funktion $x(\hat{r})$ ihr Minimum hat, mit abnehmenden Radien $\hat{r} > \hat{r}_s$ von der *rechten* Seite und von $x(\hat{r}) \lesssim 0$, um dort den Zweig zu wechseln, und $x(\hat{r})$ wieder streng monoton mit kleiner werdenden Radien *zu*nimmt bis annähernd $x(\hat{r}_\star) \lesssim 0$ nahe des Protosterns. Insgesamt wandert man hier wieder in derselben negativen Richtung durch die möglichen zwei reellen Werte von $W(x)$ im Bereich von $-1/e \leq x < 0$: Zuerst durch den $W_0(x)$–Zweig für $0 \geq x(\hat{r}) \geq -1/e$ und dann den $W_{-1}(x)$–Zweig für $-1/e \leq x(\hat{r}) < 0$, jedoch jetzt mit *abnehmendem* Radius $\hat{r} \to 1$.

Damit kann der Betrag der *radialen* Geschwindigkeitskomponente (d.h. die axialsymmetrische zwei-dimensionale transsonische analytische Lösung unserer Bewegungsgleichung für ein rotierendes und expandierendes oder kollabierendes System) beschrieben werden,

(a) im Falle eines *strahlungsgetriebenen Sternwindes* durch

$$\boxed{\hat{v}_{\mathrm{r}} = \begin{cases} +\sqrt{-\dfrac{W_0\left(-b(\theta)\, e^{-f_{\mathrm{c}}(\hat{r},\theta)}\right)}{b(\theta)}} & \text{falls} \quad 1 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_{\mathrm{c}} \\ +\sqrt{-\dfrac{W_{-1}\left(-b(\theta)\, e^{-f_{\mathrm{c}}(\hat{r},\theta)}\right)}{b(\theta)}} & \text{falls} \quad \hat{r} > \hat{r}_{\mathrm{c}}\,, \end{cases}} \tag{109}$$

mit $b(\theta) := 1 - g_{1,2}(\theta) \geq 0$, und

(b) im Falle einer *kollabierenden protostellaren Wolke* durch

$$\boxed{\hat{v}_{\mathrm{r}} = \begin{cases} -\sqrt{-W_{-1}\left(-e^{-f_{\mathrm{s}}(\hat{r},\theta)}\right)} & \text{falls} \quad 1 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_{\mathrm{s}} \\ -\sqrt{-W_0\left(-e^{-f_{\mathrm{s}}(\hat{r},\theta)}\right)} & \text{falls} \quad \hat{r} > \hat{r}_{\mathrm{s}}\,. \end{cases}} \tag{110}$$

Dementsprechend erhält man auch unterschiedliche Ausdrücke für die Dichteverteilung (s. Gl. (87)), $\rho_0(\hat{r},\theta)$ und $\rho_{-1}(\hat{r},\theta)$, welche von $\hat{v}_{\mathrm{r}}$ abhängt und damit stückweise für diese verschiedenen Bereiche des Radius $\hat{r}$ definiert ist.

6.8 Anwendung der Hydrodynamik auf eine rotierende und kollabierende Molekülwolke

In diesem Abschnitt wenden wir die gewonnenen Ausdrücke für das axialsymmetrische Geschwindigkeits- und Dichtefeld auf den Fall einer rotierenden und kollabierenden Molekülwolke, ähnlich der von *W49 A North*, mit einer eingebetteten H II–Region an (vgl. Dickel & Auer 1994). Der umgekehrte und weitaus allgemeinere Fall eines rotierenden nicht-sphärischen, strahlungsgetriebenen Sternwinds (für welchen die zuvor entwickelte Theorie ebenso ihre Gültigkeit hat), findet seine Anwendung an einem typischen O5-V Hauptreihenstern im Anhang dieser Arbeit. Diese unterschiedlichen zwei Beispiele werden u.a. dazu verwendet um die Eigenschaften unseres 2-D-Geschwindigkeitsfeldes und der Dichteverteilung zu untersuchen, sowie um die große Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten unseres hydrodynamischen Modells zu illustrieren, und natürlich in erster Linie, um damit den Strahlungstransport durch eine protostellare Wolke berechnen zu können.

Zuerst werden die Parameter erklärt auf welchen unsere Modellrechnungen basieren, und nachfolgend die hydrodynamischen Modell-Ergebnisse beschrieben. Desweiteren wird eine physikalische Interpretation dieser Ergebnisse angegeben.

Die Molekülwolke *W49 A North* hat also eine eingebettete sphärische H II–Region, welche hier im folgenden als *Kern* bezeichnet wird, von einem inneren Radius

Tabelle 1: Der kritische Radius $\hat{r}_{\rm c}$, der hier dem Schallradius $\hat{r}_{\rm s}$ entspricht, die Geschwindigkeit $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}_{\rm c})$ am kritischen Radius, und der Massen-Fluß $\dot{M}\,(\theta)$, für verschiedene Breiten θ und äquatoriale Rotationsgeschwindigkeiten $v_{\rm rot}$ des inneren Wolken-Kerns, welche aus den Wolken-Modell-Parametern resultieren (erwähnt in Abschn. 6.8).

$v_{\rm rot}$	13 km/s		7 km/s
θ	0	$\theta=\pi/2$	$\theta=\pi/2$
$\hat{r}_{\rm c}=\hat{r}_{\rm s}$	260.69	259.90	260.46
$\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}_{\rm c})$	1.0	1.0	1.0
$\dot{M}\,(\theta)\,[M_\odot/y]$	-0.520	-0.445	-0.499

- $R = 0.2$ pc$^{(\star)}$ und Masse
- $M = 10^4\,M_\odot^{(\star)}$,
  der in unserem Modell mit den zwei verschiedenen Geschwindigkeiten
- $v_{\rm rot}$ =13, und 7 km/s,
  rotiert. Der äußere Radius der gesamten Wolke ist ungefähr 6.0 pc und ihre Temperatur ist
- $T = 50$ K$^{(\star)}$,
  wobei die radiative Beschleunigung vernachlässigbar sei
- $\Gamma = g_{\rm l,1} = g_{\rm l,2} = 0$,
  und die H_2-Dichte
- $\rho(R) = 3.34 \times 10^{-18}$ g/cm$^{3\,(\star)}$

ist, am inneren Radius (konstant mit der geogr. Breite), oder $\rho(R) = 1.82 \times 10^{-18}$ g/cm^3 in der radialen Entfernung $r = 0.3$ pc von der Wolkenmitte. Wir werden diese Eingabe-Parameter (($\star$) aus dem Freien-Fall-Kollaps-Modell von Dickel & Auer 1994) in unseren folgenden hydrodynamischen Berechnungen verwenden.

Aus der Wolken-Temperatur erhält man eine Schallgeschwindigkeit von 0.64 km/s.

Mit der vernachlässigten Strahlungsbeschleunigung wird die kritische *Breakup*-Geschwindigkeit $v_{\rm crit} = 14.7$ km/s. Damit entsprechen die zwei unterschiedlich ausgewählten Rotationsgeschwindigkeiten 89% und 48% der *Breakup*-Geschwindigkeit. Insgesamt führt dies zu einem kritischen Radius $\hat{r}_{\rm c}$ von ungefähr 260 Kernradien, welcher gleichbedeutend ist mit dem Schallpunktradius $\hat{r}_{\rm s}$ (s. Tab. 1 mit mehr Details).

Schließlich erhalten wir mittels unseres radialen Geschwindigkeitsgesetzes, Gl. (110), für die kollabierende Wolkenlösung, und der Anfangsbedingung für die Wolkendichte $\rho(R)$ am inneren Kern (s. oben), die negative Massen-Verlust- (d.h. Zufluß-) Rate $\dot{M}\,(\theta)$ zu verschiedenen Breiten von ungefähr einer halben Sonnenmasse pro Jahr, aufgelistet in Tabelle 1: Für eine schnellere Rotation des Wolkenkerns von $v_{\rm rot} = 13$ km/s varriiert der Massen-Zufluß auf die Kernregion um 14 % und nimmt dabei vom Äquator zum Pol hin zu, im Gegensatz zu unserem Windmodell

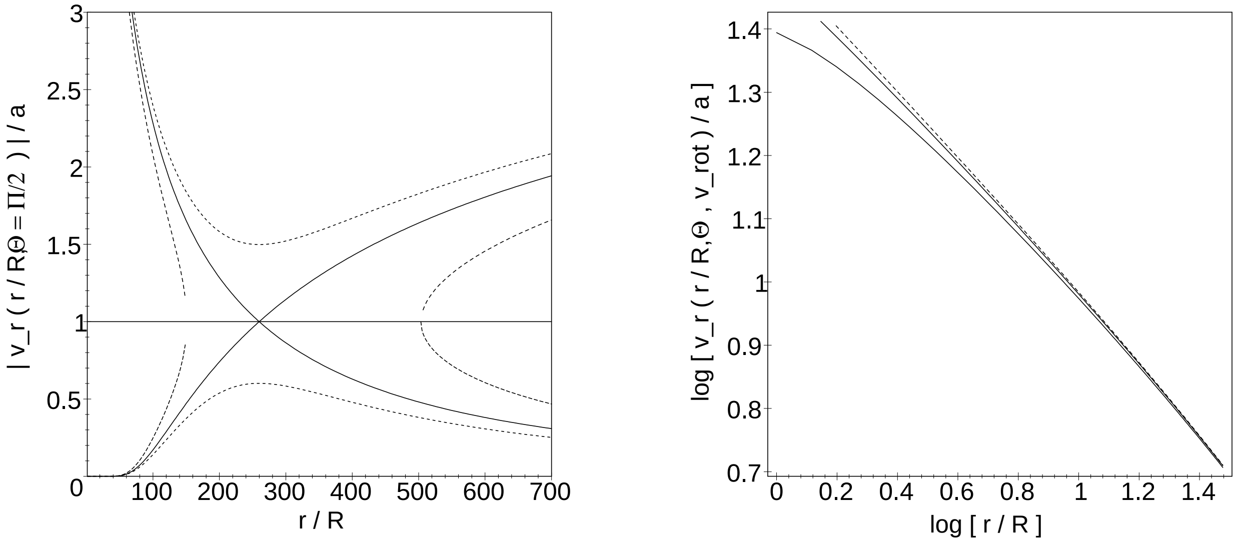


Abbildung 5: **Links:** Die Topologie der Lösungen $|\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}, \theta = \pi/2)|$ in der Äquatorebene aufgetragen gegen die radiale Entfernung $\hat{r} = r/R$ in Kernradien, für die Eingabe-Parameter der Molekülwolke W49 A North in Abschn. 6.8. **Rechts:** Nur ein kleiner Teil der kritischen Wolken-Lösung (des Typs 2) ist vergrößert dargestellt im interessierenden Radius-Bereich $0.2 \leq r \leq 6.0$ pc der Wolke. Das Diagramm zeigt den Betrag der radialen Geschwindigkeitskomponenten am Pol (obere gestrichelte Linie) und $|\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}, \theta, v_{rot})|$ in der Äquatorebene für zwei verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten, $v_{rot} = 7$ km/s (s. mittlere durchgez. Linie) und 13 km/s (unterste Kurve).

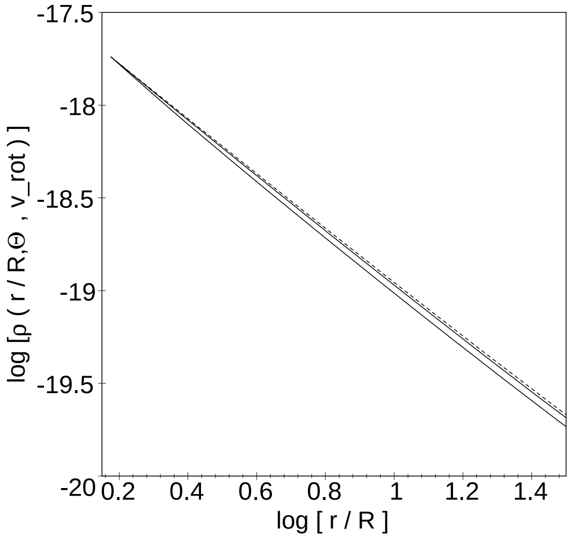


Abbildung 6: Die Dichteverteilung einer Molekülwolke $\rho(\hat{r}, \theta, v_{rot})$ aufgetragen gegen die radiale Entfernung $\hat{r} = r/R$ in Kernradien (s. Modell-Parameter in Abschn. 6.8): Die obere gestrichelte Kurve stellt die Dichte am Pol dar, und die mittlere und untere Kurve zeigt ρ am Äquator für die verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten $v_{rot} = 7$ km/s bzw. 13 km/s des Kerns.

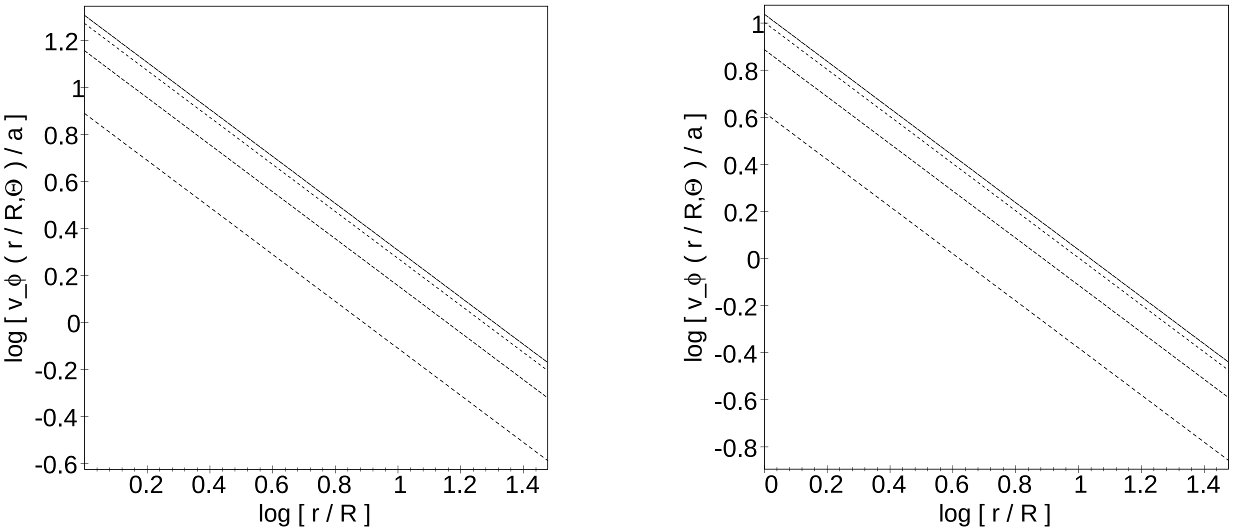


Abbildung 7: Die azimutale Geschwindigkeit $\hat{v}_\phi(\hat{r},\theta)$ für verschiedene Breiten ($\theta = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ und $\pi/2$, von unten nach oben) und Rotationsgeschwindigkeiten (v_{rot} = 13 und 7 km/s, linke bzw. rechte Seite) des inneren Wolkenkerns, aufgetragen gegen die radiale Entfernung $\hat{r} = r/R$ in Kernradien (s. Wolken-Parameter in Abschn. 6.8).

(s. Anhang), wo der Massen-Fluß $\dot{M}\,(\theta)$ für größere Co-Breiten[8] θ zunimmt. Dieser Unterschied nimmt für eine Rotationsgeschwindigkeit von fast der halben *Breakup*-Geschwindigkeit rasch ab und beträgt nur 4 %.

Als nächstes wollen wir unsere Wolken-Modell-Ergebnisse näher erläutern: Die Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten $\hat{v}_\mathrm{r}$, $\hat{v}_\phi$, und Dichte ρ, von der radialen Entfernung $\hat{r}$ und Breite θ, in den Abb. 5–7.

Abb. 5 (s. linkes Diagramm) zeigt die Topologie der Lösungen $|\hat{v}_\mathrm{r}|$ in der Äquatorialebene für die oben erwähnten Eingabe-Parameter der Molekülwolke W49 A North (beachte, daß die Geschwindigkeit am kritischen Punkt in Abb. 5 gleich der Schallgeschwindigkeit $(\hat{v}_\mathrm{r})_\mathrm{c} \equiv 1$ ist). Außer den zwei kritischen Lösungen (Typ 1 und 2, vgl. Numerierung in Abb. 2), welche den kritischen Punkt (hier den Schallpunkt) durchqueren und schon in Abschn. 6.6.1 und 6.7 diskutiert wurden, wurden alle anderen vier Lösungstypen aus unserem allgemeinen Geschwindigkeitsgesetz, Gl. (108), gewonnen, jedoch mit anderen Parametern $C(\hat{r}', \theta = \pi/2, \hat{v}_\mathrm{r}')$ in der Funktion f, die durch die gewünschte Lösung durch den vorgegebenen Punkt $(\hat{r}', \theta = \pi/2, \hat{v}_\mathrm{r}')$ bestimmt sind. Die Funktion f, in Gl. (108), für diese Kurven ist dann gegeben durch Gl. (105), und der Ersetzung von $\hat{r}_\mathrm{c}$ durch $\hat{r}'$ und des gesamten Terms $[\ln(1 - g_{\mathrm{l},2}) + 1]$ durch $[(1 - g_{\mathrm{l},2})\hat{v}_\mathrm{r}'^2 - \ln \hat{v}_\mathrm{r}'^2]$. Lösungen des Typs 3 sind überall *sub*sonisch (hier wählt man ausschließlich nur den Hauptzweig, $k = 0$, der W-Funktion in Gl. (108)), jene vom Typ 4 sind überall *super*sonisch (indem man nur den $k = -1$-Zweig im radialen Geschwindigkeitsgesetz wählt), und jene des Typs 5 und 6 sind doppel-wertig, zusammengesetzt aus sowohl dem $k = 0$ als auch $k = -1$-Zweig, für den Bereich unterhalb bzw. oberhalb der Schallinie. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß die zwei sub- und supersonischen Kurvenpaare der zuletzt genannten Typen in Abb. 5, welche unterteilt

[8]Die Co-Breite ist identisch mit dem Polarwinkel θ, welcher vom Pol in Richtung Äquator und *nicht* vom Äquator in Richtung Pol, wie die gewöhnliche (geogr.) Breite, gemessen wird.

sind in ((5a), (6a)) und ((5b), (6b)) (vgl. Numerierung in Abb. 2), zusammen gehören: Sie sind festgelegt *nicht nur* durch denselben gewählten Zweig der W-Funktion in Gl. (108), *sondern auch* durch dieselben ausgewählten Parameter in f für die Lösung durch genau den gleichen vorgegebenen Punkt $(\hat{r}', \theta, \hat{v}_{\rm r}')$.

All diese Lösungstypen könnten dazu verwendet werden, den Fluß in einer Molekülwolke zu beschreiben, weil sie *Teile* einer vollständigen Lösung bereitstellen könnten, welche Schockübergänge miteinschließt. *Wir* hingegen haben uns entschlossen, die zweite transsonische kritische Lösung des Typs 2 (s. Abschn. 6.6.1) auszuwählen, um den Akkretionsfluß $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}, \theta)$ unserer Wolke zu beschreiben.

Auf der rechten Seite von Abb. 5 ist nur ein kleiner Teil *dieser* kritischen Wind-Lösung (des Typs 2) ausgewählt und im interessierenden Radius-Bereich $0.2 \leq r \leq 6.0$ pc vergrößert, d.h. innerhalb der Wolkenregion vom inneren Kern bei $\hat{r} = 1$ bis zum äußeren Rand bei 30 Kernradien. Offensichtlich unterscheidet sich der radiale Fluß zu verschiedenen Breiten nur merklich für Entfernungen $\hat{r}$ nahe des inneren Kerns und nimmt für größere Entfernungen in Richtung des äußeren Wolken-Radius ab. Dieser Unterschied ist stärker für höhere Rotationsgeschwindigkeiten, während der Betrag von $\hat{v}_{\rm r}$ für größere Co-Breiten θ immer deutlich unter jenem in polaren Gebieten ist.

Diese radiale Geschwindigkeit für verschiedene Breiten und äquatoriale Rotationsgeschwindigkeiten ($v_{rot} = 7$ km/s and 13 km/s) des Kerns führt zur 2-D-Dichteverteilung $\rho(\hat{r}, \theta, v_{rot})$, wie sie in Abb. 6 dargestellt ist. Die Kurven sind voneinander kaum zu unterscheiden, d.h. selbst hohe Rotationsgeschwindigkeiten des Kerns von beinahe der Breakup-Geschwindigkeit verursachen *keine* merkliche Aspherizität der Molekülwolke, wie z.B. im Falle eines rotierenden Sternwinds. Trotzdem entdecken wir für konstantes $\hat{r}$ eine Abnahme (und *keinen* Anstieg) der Dichte in äquatorialen Breiten, d.h. eine schwache Verdichtung über dem Pol, die für größeres $\hat{r}$ (nahe des äußeren Wolkenradius) und für ein größeres v_{rot} merklicher wird. Somit haben wir in diesem Fall eine Dichteinversion im Gegensatz zu einem liniengetriebenen Wind, der aus einem rotierenden Zentralstern hervorgeht.

Schließlich zeigt Abb. 7 die azimutale Geschwindigkeit $\hat{v}_\phi(\hat{r}, \theta)$ für verschiedene Breiten und die zwei Rotationsgeschwindigkeiten. $\hat{v}_\phi(\hat{r}, \theta)$ verschwindet für größere radiale Entfernungen $\hat{r}$ vom Kern und ist größer für Breiten nahe des Äquators (vgl. Gl. (83)).

7 Berechnung der Funktion w

7.1 Die Funktion w für eine sphärische Wolke

Mit Hilfe der allgemeinen Darstellung (66) des Geschwindigkeitsfeldes und der Ausdrücke für die Einheitsvektoren $\vec{e_r}$ und $\vec{e_\phi}$ in kartesischen Koordinaten, läßt sich das Skalarprodukt aus dem Einheitsvektor $\vec{n}$ in Strahlrichtung (50) und der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ angeben zu

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{\beta} &= \beta_r\,(x,y,z)\ \left(\vec{n}\cdot\vec{e_r}\,(x,y,z)\right) + \beta_\phi\,(x,y,z)\ \left(\vec{n}\cdot\vec{e_\phi}\,(x,y,z)\right) \\ &= \beta_r\,(x,y,z)\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,(n_x\,x+n_y\,y+n_z\,z) + \beta_\phi\,(x,y,z)\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(n_y\,x-n_x\,y)\ , \end{aligned} \tag{111}$$

weil ja die polare Komponente $v_\theta \equiv 0$ gesetzt wurde.

Für den einfachsten Fall einer sphärischen Wolke ($\beta_\phi = \beta_\theta \equiv 0$) und unter der Annahme des freien Fall-Gesetzes

$$\beta_r(r) = \beta_R\,\left(\frac{r}{R}\right)^{-1/2} \qquad \text{bzw.} \qquad \beta_r(x,y,z) = \beta_R\,\sqrt{R}\,(x^2+y^2+z^2)^{-1/4} \tag{112}$$

folgt dann für das Skalarprodukt in diesem Fall

$$\vec{n}\cdot\vec{\beta} = \beta_R\,\sqrt{R}\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/4}\ (n_x\,x+n_y\,y+n_z\,z)\ , \tag{113}$$

mit dem äußeren Radius R der Wolke. Um desweiteren die Komponenten des Gradienten $\vec{\nabla}\,(\vec{n}\cdot\vec{\beta})$ zu berechnen, muß der Ausdruck (113) jeweils nach x, y und z partiell differenziert werden,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\,(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) = \beta_R\,\sqrt{R}\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/4}\,\left(n_x - \frac{3}{2}\,\frac{n_x\,x+n_y\,y+n_z\,z}{x^2+y^2+z^2}\,x\right)}\ , \tag{114}$$

sowie analog die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y}\,(\vec{n}\cdot\vec{\beta})$ und $\frac{\partial}{\partial z}\,(\vec{n}\cdot\vec{\beta})$, die sich aus Gl. (114) durch Austauschen von $x \to y$ bzw. $\to z$, und $n_x \to n_y$ bzw. $\to n_z$, ergeben.

Die Funktion $w\,(x,y,z,\vartheta,\varphi)$ erhält man schließlich aus

$$\boxed{w = -\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\,\left(\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right) = -\left(n_x\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) + n_y\,\frac{\partial}{\partial y}\,(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) + n_z\,\frac{\partial}{\partial z}\,(\vec{n}\cdot\vec{\beta})\right)}, \tag{115}$$

durch Einsetzen der partiellen Ableitungen, Gl. (114), und der Strahlenvektorkomponenten ($n_x = \sin\vartheta\,\cos\varphi, n_y = \sin\vartheta\,\sin\varphi, n_z = \cos\vartheta$).

7.2 Die Funktion w für eine axialsymmetrische Wolke

Um als nächstes die Funktion w in Abhängigkeit von den kartesischen Koordinaten des Ortes (x,y,z) und der Strahlrichtung (n_x, n_y, n_z) für die zuvor in Abschn. 6 hergeleitete axialsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung einer Molekülwolke zu erhalten, wird im nächsten Schritt der allgemein gültige Ausdruck (83) für die azimutale Komponente $v_\phi\,(r,\theta)$ umgeschrieben als Funktion $v_\phi\,(x,y,z)$.

Mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und der Umrechnung von

$$\sin\theta \equiv \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$$

auf kartesische Koordinaten, folgt also aus der Beziehung (83) die x-y-z-Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponente

$$v_\phi\,(x, y, z) = v_{rot}\,R_i\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{116}$$

wobei R_i der innere Kernradius der Wolke ist. Mit Hilfe der allgemeinen Darstellung (66) des Geschwindigkeitsfeldes und der Ausdrücke für die Einheitsvektoren $\vec{e_r}$ und $\vec{e_\phi}$ in kartesischen Koordinaten, läßt sich damit das Skalarprodukt aus dem Einheitsvektor $\vec{n}$ in Strahlrichtung (50) und der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ angeben zu

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\beta} &= \beta_r\,(x, y, z)\;(\vec{n} \cdot \vec{e_r}\,(x, y, z)) + \beta_\phi\,(x, y, z)\;(\vec{n} \cdot \vec{e_\phi}\,(x, y, z)) \\ &= \beta_r\,(x, y, z)\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\;(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z) + \frac{v_{rot}}{c}\,R_i\,\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\;(n_y\,x - n_x\,y)\;, \end{aligned} \tag{117}$$

mit $v_\theta \equiv 0$.

Um desweiteren die Komponenten des Gradienten $\vec{\nabla}\,(\vec{n} \cdot \vec{\beta})$ zu berechnen, muß die Funktion (117) jeweils nach x, y und z partiell differenziert werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\,(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) &= \frac{(\frac{\partial}{\partial x}\,\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z))\,(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z)\,(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z)\,x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z)\,n_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 2\,\frac{b\,(n_y\,x - n_x\,y)\,x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{b\,n_y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}\,(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) &= \frac{(\frac{\partial}{\partial y}\,\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z))\,(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z)\,(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z)\,y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z)\,n_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 2\,\frac{b\,(n_y\,x - n_x\,y)\,y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{b\,n_x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial}{\partial z}\,(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) &= \frac{(\frac{\partial}{\partial z}\,\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z))\,(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z)\,(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z)\,z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{\beta_\mathrm{r}(x,\,y,\,z)\,n_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 2\,\frac{b\,(n_y\,x - n_x\,y)\,z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,, \end{aligned} \tag{118}$$

mit $b := (v_{rot}\,R_i)/c$.

Die Funktion $w\,(x, y, z, n_x, n_y, n_z)$ ergibt sich dann aus Gl. (115) durch Einsetzen dieser partiellen Ableitungen, worin noch die radiale Geschwindigkeitsfunktion $\beta_r\,(x, y, z)$ eingesetzt werden muß.

Die axialsymmetrische, transsonische analytische Lösung für die radiale Geschwindigkeit im Falle einer kollabierenden Molekülwolke, Gl. (110) in kartesischen Koordinaten, ist hierbei

$$\beta_r\,(x,y,z) = -\frac{a}{c}\sqrt{-W_k\left(-e^{-f_\mathrm{s}\,(x,y,z)}\right)}\,, \tag{119}$$

mit der Funktion f aus Gl. (105) für $g_{\mathrm{l},2}=0$ und $\hat{r}_c=\hat{r}_\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} f_\mathrm{s}\,(x,y,z) \;&=\; -\hat{L}^2\,(x,y,z)\left(\frac{1}{\hat{r}^2\,(x,y,z)}-\frac{1}{\hat{r}_\mathrm{s}^2\,(x,y,z)}\right) \\ &\quad +2\,\hat{v}_\mathrm{crit}^2\left(\frac{1}{\hat{r}\,(x,y,z)}-\frac{1}{\hat{r}_\mathrm{s}\,(x,y,z)}\right) \\ &\quad +4\,\ln\left(\frac{\hat{r}\,(x,y,z)}{\hat{r}_\mathrm{s}\,(x,y,z)}\right)+1\,, \end{aligned} \tag{120}$$

$$\hat{r} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R_i}\,, \tag{121}$$

und Gl. (94) in kartesischen Koordinaten

$$\hat{L}^2\,(x,y,z) \equiv \frac{v_{rot}^2}{a^2}\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\,, \tag{122}$$

sowie dem Radius am kritischen, d.h. hier Schallpunkt $\hat{r}_\mathrm{s}$,

$$\hat{r}_c \equiv \hat{r}_\mathrm{s}\,(x,y,z) = \frac{\hat{v}_\mathrm{crit}^2+\sqrt{\hat{v}_\mathrm{crit}^4-8\,\hat{L}^2\,(x,y,z)}}{4}\,, \tag{123}$$

und der Breakup-Geschwindigkeit des inneren Wolkenkerns

$$\hat{v}_\mathrm{crit}^2 = \frac{G\,M}{R_i\,a^2}\,, \tag{124}$$

wobei sich die letzten beiden Beziehungen aus der Gl. (99) und (90) für den Spezialfall der Molekülwolke, wo $\hat{g}_{\mathrm{l},1}=0$ bzw. $\Gamma=0$ ist, ergeben. Die ebenso notwendigen einzelnen partiellen Ableitungen der radialen Geschwindigkeit nach den verschiedenen kartesischen Koordinaten x_i, in Gl. (118), erhält man dann durch Differenzierung des Ausdrucks (119), wobei zu berücksichtigen ist, daß jetzt der Schallpunktradius in Gl. (123) und die Größe $\hat{L}$ in Gl. (122) in kartesischen Koordinaten durch den variierenden Winkel θ nicht mehr konstant sind. Die Rechnung ergibt dann für die partiellen Ableitungen nach x_i $(i=1,2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta_r}{\partial x_i} \;&=\; \frac{a}{c}\,\frac{\sqrt{-K\,(x,y,z)}}{1+K\,(x,y,z)}\,x_i\left[u\,(x,y,z)\left(\frac{1}{\hat{r}^2\,(x,y,z)}-\frac{1}{\hat{r}_\mathrm{s}^2\,(x,y,z)}\right)\right. \\ &\quad -\hat{L}^2\,(x,y,z)\left(\frac{2\,u\,(x,y,z)}{\hat{r}_\mathrm{s}^3\,(x,y,z)\,s\,(x,y,z)}+\frac{R_i^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) \\ &\quad +\hat{v}_\mathrm{crit}^2\left(\frac{2\,u\,(x,y,z)}{\hat{r}_\mathrm{s}^2\,(x,y,z)\,s\,(x,y,z)}+\frac{R_i}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\ &\quad \left.-2\left(\frac{2\,u\,(x,y,z)}{\hat{r}_\mathrm{s}\,(x,y,z)\,s\,(x,y,z)}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\right]\,, \end{aligned} \tag{125}$$

sowie die Ableitung nach z

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_r}{\partial z} &= \frac{a}{c}\,\frac{\sqrt{-K\,(x,y,z)}}{1+K\,(x,y,z)}\,z\left[\frac{\hat{L}^2\,(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}\right.\\
&\qquad\left(\frac{1}{\hat{r}_{\mathrm{s}}^2\,(x,y,z)}-\frac{1}{\hat{r}^2\,(x,y,z)}+\frac{2\,\hat{L}^2\,(x,y,z)}{\hat{r}_{\mathrm{s}}^3\,(x,y,z)\,s\,(x,y,z)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2\,\hat{v}_{\mathrm{crit}}^2}{\hat{r}_{\mathrm{s}}^2\,(x,y,z)\,s\,(x,y,z)}+\frac{4}{\hat{r}_{\mathrm{s}}\,(x,y,z)\,s\,(x,y,z)}\right)\\
&\qquad\left.-\frac{\hat{L}^2\,(x,y,z)\,R_i^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{\hat{v}_{\mathrm{crit}}^2\,R_i}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\right] \qquad (126)\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$K(x,y,z) := W_k\,(-e^{-f_{\mathrm{s}}\,(x,y,z)})\,,$$

$$u\,(x,y,z) := \frac{v_{rot}^2}{a^2}\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}-\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

und

$$s\,(x,y,z) := \sqrt{\hat{v}_{\mathrm{crit}}^4-8\,\hat{L}^2\,(x,y,z)}\,.$$

8 Anwendung der Strahlungstransport-Modelle auf CS-Emissionen

8.1 Numerische Ergebnisse zu einer sphärischen kollabierenden Molekülwolke

8.1.1 Die Wolken- und Programm-Parameter

Tabelle 2: Spezifische Eingabedaten zur sphärischen Wolke

Ges. Radiusbereich der Wolke	$0 \leq r/\text{pc} \leq 6.0 = R^{(\star)}$
Kernbereich	$0 \leq r/\text{pc} \leq 0.2 = R_i^{(\star)}$; $M \approx 10^4 M_\odot^{(\star)}$
Geschw.-Gesetz	$v_\mathrm{r}(r) = \begin{cases} v_\mathrm{R} \cdot (r/R)^n & \text{für} \quad r \geq R_i \text{, s. Gl. (7)} \\ 0 & \text{für} \quad r < R_i \end{cases}$ mit $v_\mathrm{R} = -4.0$ km/s und $n = -0.5^{(\star)}$
Geschw.-Bereich	$-21.9^{(\star\star)} \leq v_\mathrm{r}/(\text{km/s}) \leq -4.0$ $(\star)$ ($\star\star$ = Im 3D-Gitter wird nur ein Maximalbetrag von $\lvert v_\mathrm{r}(r = 0.5\text{pc})\rvert = 13.9$ km/s berücksichtigt)
Turbulenzgeschw.	(a) $v_\mathrm{turb} = 6.0$ km/s=konst, (b) $v_\mathrm{turb} = 30.0$ km/s=konst (im Anhang)
Dichtegesetz	$\rho(r) = \begin{cases} \rho_\mathrm{R} \cdot (r/R)^{-(n+2)} & \text{für} \quad r \geq R_i \text{, s. Gl. (8)} \\ \rho(R_i) & \text{für} \quad r < R_i \end{cases}$ mit $\rho(r) \equiv \rho_{\mathrm{H}_2}(r)$, $n_{\mathrm{H}_2}(r)$, $n_\mathrm{CS}(r)$ bzw. $n_{i,\mathrm{CS}}(r)$ und $\rho_\mathrm{R} \equiv \rho_{\mathrm{H}_2}(R)$, $n_{\mathrm{H}_2}(R)$, $n_\mathrm{CS}(R)$ bzw. $n_{i,\mathrm{CS}}(R)$
X(CS)	$n(\text{CS})/n(\mathrm{H}_2) = 10^{-9}$
Dichtebereich	$\rho(r \leq R_i) = 9.33 \times 10^{-18} \geq \rho_{\mathrm{H}_2}/(\text{g/cm}^3) \geq 5.68 \times 10^{-20} = \rho(R)$ bzw. $2.79 \times 10^6 \geq n_{\mathrm{H}_2}/\text{cm}^{-3} \geq 1.70 \times 10^4$ (zum Vergleich: $1.0 \times 10^6 \geq n_{\mathrm{H}_2}/\text{cm}^{-3} \geq 0.61 \times 10^4$) $(\star)$ bzw. $2.79 \times 10^{-3} \geq n_\mathrm{CS}/\text{cm}^{-3} \geq 1.70 \times 10^{-5}$
Wolkentemp.	$T_\mathrm{kin} = 20$ K
	$(\star)$ = Werte n. dem Freien-Fall-Kollaps-Modell v. Dickel & Auer (1994)

Die in diesem Abschnitt 8.1, bzw. im Anhang D.1, zur Berechnung der ortsaufgelösten CS-Linienprofile verwendeten Strukturdaten der sphärischen Wolke, sowie die programmspezifischen Eingabedaten (für das 1D- und 3D-Strahlungstransport-Programm), sind in der Tabelle 2 bzw. 3 aufgelistet.

Tabelle 3: Programmspezifische Eingabedaten

	Beim 1D-Code	Beim 3D-Code
Anzahl der Kugelschalen	$N_r = 10$	–
Anzahl der 3D-Gitterpunkte (in x-, y- bzw. z-Richtung)	–	$N_x = N_y = N_z = 25$ (=insges. 15625)
Resultierender Gitterpunktabstand	–	$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.5$ pc
Anzahl der Rot.-Niveaus von CS	$N_i = 8$	$N_i = 8$
Anzahl der Winkel	$N_m = 16$	$N_m = N_p = 16$ (=insges. 256)
Anzahl der Frequenzen pro Linienübergang	$N_n = 20$	$N_n = 20$
Zeitschritt-Intervallgröße	$\Delta t = 100000$s-Einh.	$\Delta t = 100000$s-Einh.
Progr.-Abbruch bei Abw. ($\Delta n_i/n_i$ für jedes Niveau i)	$\frac{\Delta n_i}{n_i} = \frac{n_i(t+\Delta t) - n_i(t)}{n_i(t)} \leq 10^{-6}$	(a) $\Delta n_i/n_i \leq 10^{-4}$ für $v_{\mathrm{turb}} = 6$ km/s bzw. (b) $\Delta n_i/n_i \leq 10^{-3}$ für $v_{\mathrm{turb}} = 30$ km/s
Resultierende Anz. der Zeitschritte (=DDRIV2-Progr.-Aufrufe)	$N_{\Delta t} = 280$	(a) $N_{\Delta t} = 17$ bzw. (b) $N_{\Delta t} = 14$
Ges. Rechenzeit (SUN Enterprise 3500, SPARC v9)	(a) $t = 0:37$min bzw. (b) $t = 4:08$min	(a) $t =$13h56 bzw. (b) $t =$11h36

8.1.2 Die NLTE-Besetzungszahlen

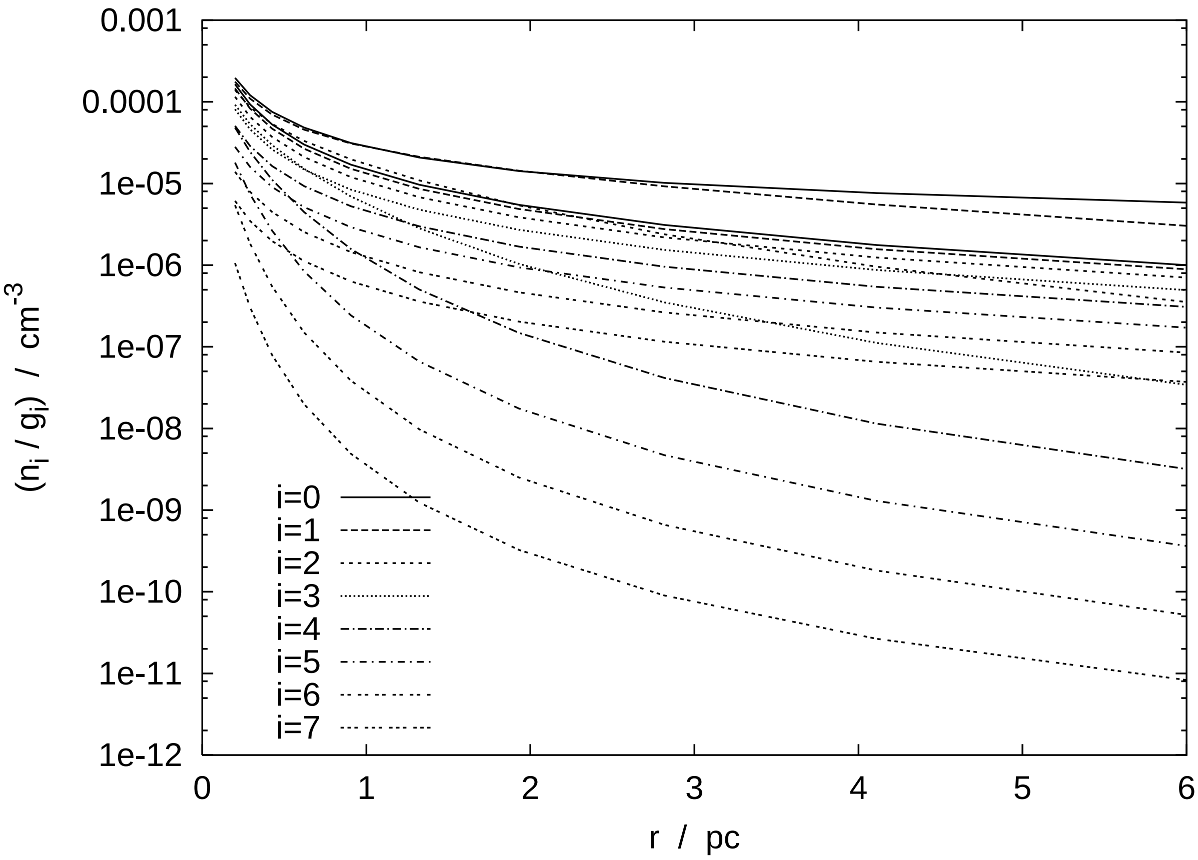


Abbildung 8: Mit dem 1D-Strahlungstransport-Code berechnete *non-LTE*-Besetzungszahldichten n_i/g_i (dividiert durch das satistische Gewicht g_i des i-ten Zustands), bzw. *LTE*-Besetzungszahldichten berechnet nach dem Maxwell-Boltzmann-Verteilungsgesetz, der untersten acht Rotationsniveaus $J = 0$ bis $J = 7$ des CS-Moleküls in der *sphärischen Wolke*, aufgetragen gegen den Radius r vom inneren Wolkenkern bei $r = 0.2$pc bis zum äußeren Wolkenrand bei $r = 6.0$pc. Dabei liegen die LTE-Kurven vorwiegend im oberen Teil der Abb. mit Ausnahme der beiden non-LTE-Besetzungszahlen des $J = 0$ und $J = 1$-Zustands als die beiden obersten Kurven im Diagramm. Jeder einzelne LTE-Kurvenverlauf, in Abhängigkeit vom Radius r, spiegelt den (im Text beschriebenen) angenommenen Dichteverlauf $\rho(r) = \rho_R\,(r/R)^{-3/2}$ (mit R =äußerer Wolkenradius) der sphärischen Wolke wider. Dabei gilt sowohl für den LTE- als auch NLTE-Fall, daß die Summe der Besetzungszahldichten $\sum_i n_i(r)$ an einem bestimmten Ort r der gesamten dortigen CS-Moleküldichte $n_{\rm CS}(r)$ entspricht.

Wie Abb. 8 erkennen läßt, sind zur numerischen Bestimmung der austretenden Linienintensitäten aus protostellaren Molekülwolken non-LTE-Berechnungen notwendig. Diese Erkenntnis wird auch z.B. durch die Beobachtungen der GF9-2-Quelle im globularem Filament L1082 von Wiesemeyer (1997) unterstützt (s. Abschn. 9). Dort zeigen die Verhältnisse der Linienstärken der verschiedenen CS-Linienübergänge, daß ebenfalls kein LTE vorliegt.

Die Besetzungszahlen der Rotationsniveaus im abstrahlenden Molekülgas sind *nicht* diejenigen, welche durch die statistische Mechanik im Gleichgewichtsfall für die lokalen Werte der Temperatur und Dichte vorhergesagt werden (LTE). Die Abweichungen vom LTE sind in unserem Fall vielfach sehr stark. Sie werden durch radiative Prozesse angetrieben, die von den Gleichgewichtswerten abweichen. Dies ist vor allem in den äußeren Gebieten der Wolke der Fall, wo

Photonen durch den Wolkenrand effizient entkommen können.

Im thermodynamischen Gleichgewicht sind alle Prozesse im *detaillierten Gleichgewicht*, d.h. jeder Übergang, egal welcher Art, wird genau durch seinen Inversen rückgängig gemacht. Detailliertes Gleichgewicht gilt für Stoßprozesse solange die Verteilungsfunktion der Teilchen eine Maxwellsche ist; Stöße erfolgen dann mit ihren Gleichgewichtsraten der lokalen kinetischen Temperatur. In unserem Fall wird dies für Stöße der CS- mit den H_2–Molekülen angenommen. Wären das die einzigen ablaufenden Prozesse, hätten wir den LTE-Fall vorliegen.

Jedoch treten radiative Prozesse in Konkurrenz mit den Teilchenstößen. Wenn diese zu ihren Gleichgewichtsraten geschehen, d.h. wenn ein Plancksches Strahlungsfeld vorliegt, sind sie ebenfalls im detaillierten Gleichgewicht und treiben die Materie zusätzlich ins LTE. Wenn aber das Strahlungsfeld keiner Gleichgewichtsverteilung folgt, können die radiative Raten aus dem Gleichgewicht sein und die Materie eher vom LTE wegtreiben. Im tiefen Innern z.B. unserer Wolke, in der Nähe des protostellaren Kerns, thermalisiert das Strahlungsfeld in der Tat tendentiell zur Planck-Funktion hin, und LTE wird dort, zumindest für die untersten Rotationszustände (bis etwa $J = 4$, vgl. Abb. 8), erreicht.

Hingegen ist das Strahlungsfeld am äußeren Rand der Wolke in zweierlei Hinsicht nicht im Gleichgewicht: Zum einen gibt es keine einströmende Photonen, und das Feld ist folglich anisotrop. Die mittlere Intensität, welche die Absorptionsraten festsetzt, wird auch über die Hemisphäre gemittelt, die keine Strahlung abgibt. Bedeutender ist jedoch zum andern, daß die nach außen wandernden Photonen im Außenbereich der Wolke hauptsächlich aus tieferen Schichten stammen mit einer optischen Tiefe von eins; diese Schichten haben wesentlich unterschiedliche physikalische Eigenschaften, wie z.B. Temperatur, im Gegensatz zu den oberen Schichten. Daher kann selbst für eine Planck-Strahlung aus den tieferen Schichten in den äußeren Regionen der Wolke die charakteristische Strahlungstemperatur sehr verschieden sein von der (ansonsten lokalen) kinetischen Temperatur; letztere wurde in unserem Wolken-Modell als konstant ($T_{\rm kin} = 20$K) angenommen. Dieser Effekt ist am größten für Frequenzen, bei denen die Materie am durchsichtigsten ist und die Fläche, auf der die optische Tiefe eins ist, am tiefsten liegt. Somit ist das Frequenzspektrum der Intensität nahe dem Wolkenrand stark unterschiedlich zur Planck-Verteilung, und die radiative Raten sind weit vom detaillierten Gleichgewicht entfernt.

Abb. 8 zeigt, daß die oberen Zustände ab $J = 4$ in allen Wolkenbereichen stark *unter*besetzt sind im Vergleich zu den Populationen im LTE, vor allem aber in weiter Entfernung vom Kern. Die unteren beiden Zustände ($J = 0$ und $J = 1$) sind dagegen überall stark *über*besetzt, mit einer schwachen Inversion im radialen Bereich von etwa 1 bis 2 parsec (bei übrigens allen numerischen Beispielen mit unterschiedlichem $v_{\rm turb}$), welche ebenso bei der Modellierung der ähnlichen Wolke von Dickel & Auer bei $r = 0.5$pc vorausgesagt wird, jedoch dort für die gleichen Rotationsniveaus von HCO^+ bei einer wärmeren sphärischen Wolke ($T_k = 50$K) mit einer heißen abstrahlenden HII-Kernregion ($T_e = 10^4$K). Das Termschema des linearen CS-Moleküls ist aber dem des HCO^+ sehr ähnlich. Die Kurven der NLTE-Besetzungszahldichten der Rotationszustände $J = 2$ und $J = 3$ überschneiden sich jeweils mit ihren LTE-Besetzungszahlen an den Orten $r = 3.2$ pc bzw. $r = 0.6$ pc und sind damit im Gebiet von der Wolkenmitte $r = 0$ bis zu diesen jeweiligen Radien im Vergleich zum thermischen Gleichgewicht *über*besetzt, bzw. von dort an bis zum Wolkenrand *unter*besetzt.

Im Innern der Wolke in Kernnähe sind die untersten Zustände (bis $J = 4$) im LTE, d.h. dort ist die Wolkenmaterie für die Frequenzen der zugehörigen Linienübergänge optisch dick und die

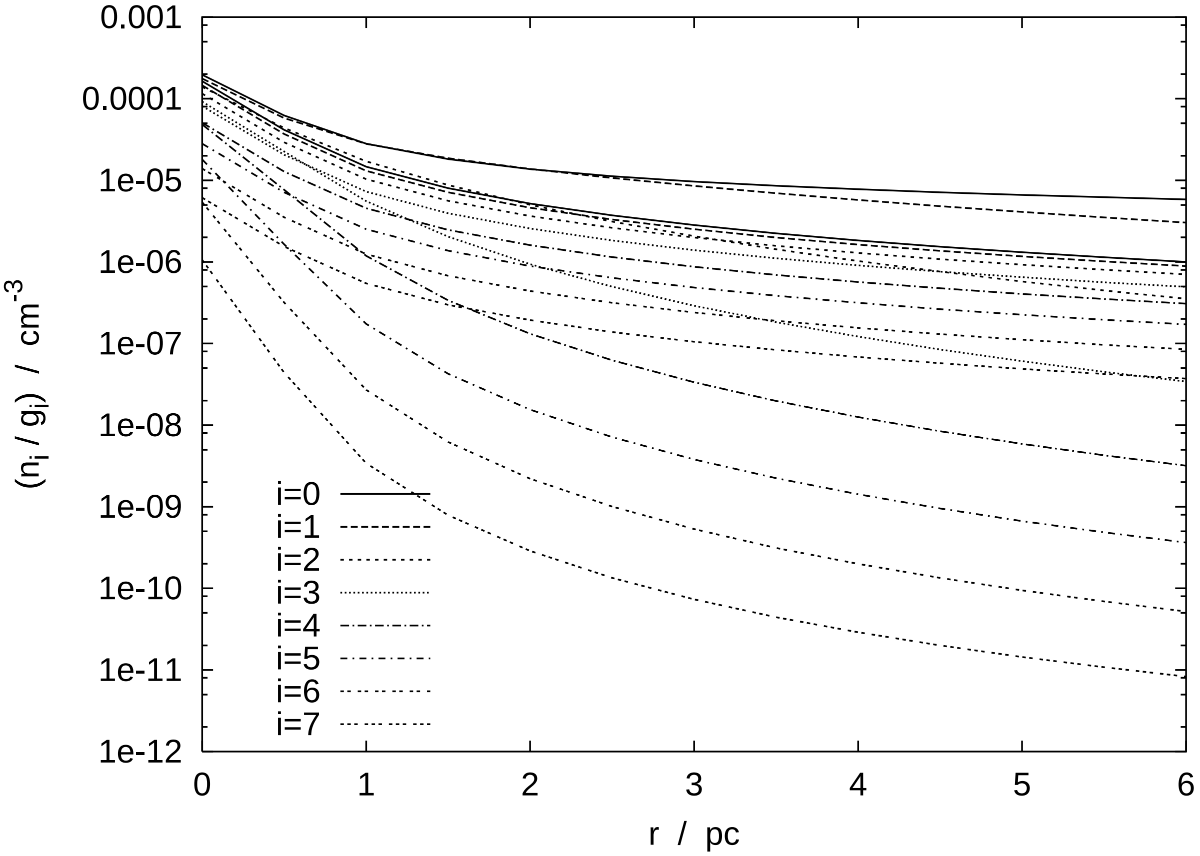


Abbildung 9: Mit dem 3D-Strahlungstransport-Code berechnete *non-LTE*-Besetzungszahldichten n_i/g_i (dividiert durch das satistische Gewicht g_i des i-ten Zustands), bzw. *LTE*-Besetzungszahldichten berechnet nach dem Maxwell-Boltzmann-Verteilungsgesetz, der untersten acht Rotationsniveaus $J = 0$ bis $J = 7$ des CS-Moleküls in derselben *sphärischen Wolke*, aufgetragen gegen den Radius r von der Wolkenkernmitte bei $r = 0$ bis zum äußeren Wolkenrand bei $r = 6.0$pc. Dabei liegen die LTE-Kurven vorwiegend im oberen Teil der Abb. mit Ausnahme der beiden non-LTE-Besetzungszahlen des $J = 0$ und $J = 1$-Zustands als die beiden obersten Kurven im Diagramm. Es wurde die (gleiche zuvor und im Text erwähnte) 1D-Dichteverteilung $\rho(r) = \rho_R\,(r/R)^{-3/2}$ (mit R =äußerer Wolkenradius) angenommen.

Strahlung im Gleichgewicht, so daß durch diese zusammen mit den Molekülstößen von CS mit H_2, welche im detaillierten Gleichgewicht angenommen werden, die Besetzungen dieser Niveaus ins LTE getrieben werden. In den Linienübergängen zwischen den oberen Zuständen ($J = 5 - 7$) ist hingegen die Wolke in ihrem Innern optisch dünn, und es herrscht selbst dort kein thermisches Gleichgewicht.

Die mit den unterschiedlichen Strahlungtransport-Modellen berechneten, vom Radius abhängigen NLTE-Besetzungszahldichten entlang einer Linie durch das Wolkenzentrum, in den Abb. 8 und 9, unterscheiden sich, trotz der verschiedenen Anordnung und gewählten Anzahl der Ortsgitterpunkte (logarithmisches Schalengitter im 1D-Modell aus $N_r = 10$ Schalen bzw. kartesisches Ortsgitter mit äquidistanten Gitterpunktabständen von (z.B.) $\Delta x = 0.5$ pc in jeweils jede x-, y-, z-Richtung im 3D-Modell) nur im innersten Wolkenbereich von $r = 0$ bis $r = 0.5$ pc voneinander. Der Grund für letzteres liegt einfach nur daran, daß durch die schlechtere Auflösung des 3D-Gitters im Wolkenkernbereich der letzte Ortsgitterpunkt vor dem inneren Kernradius bei $R_i = 0.2$ pc schon bei $r = 0.5$ pc liegt, und die maximale Dichte im homogenen Kern mit der 3D-Methode erst im Wolkenzentrum, $\rho(r = 0) = \rho(R_i)$, erreicht wird (im Gegensatz zum 1D-Modell, bei dem die letzte zehnte Schale den Wolkenkern bei $r = 0.2$ pc umschließt, wo die maximale Wolkendichte $\rho(R_i)$ schon angenommen wird). In unserem Rechenbeispiel werden also die Besetzungszahldichten mit dem 3D-Modell (in Abb. 9) im Wolkenbereich von $r = 0$ bis $r = 0.5$ pc nur durch das gröbere 3D-Gitter schlechter interpoliert als mit dem 1D-Modell.

Die entsprechenden, vom Ortsradius abhängigen, aus den verschiedenen Modellen resultierenden Besetzungszahlen der untersten acht Rotationsniveaus des CS-Moleküls für dieselbe sphärische Wolke mit *größerer* Turbulenzgeschwindigkeit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s, unterscheiden sich jeweils zu denen in den Abb. 8 und 9 graphisch dargestellten nur unwesentlich. Für die im Anhang D.1.1 dokumentierten CS-Linienprofile zur sphärisch kollabierenden Wolke mit hoher Turbulenz, gelten also die gleichen Diagramme 8 und 9 für die ortsabhängigen NLTE-Besetzungszahldichten (n_i/g_i).

8.1.3 Die Profile aus dem 1D- und 3D-Modell

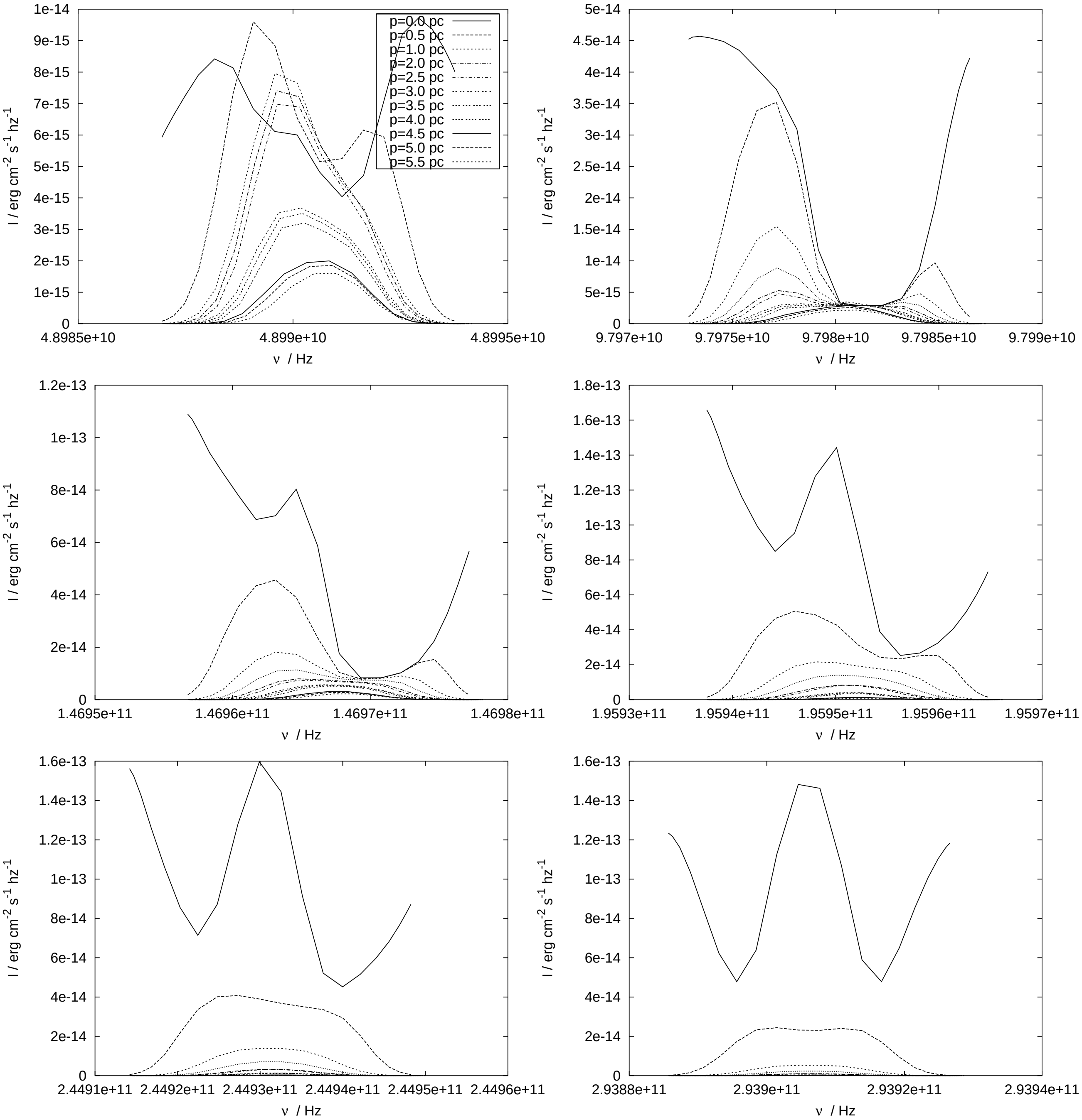


Abbildung 10: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0\times10^5$ cm/s: Mit dem 1D-Strahlungstransport-Modell berechnete Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie (links oben) bis $J = 6 \rightarrow 5$-Linie (rechts unten) für verschiedene Austrittsparameter p gemessen vom Zentrum der Wolke.

Zur physikalischen Erklärung der Struktur der berechneten Linienprofile, d.h. vor allem der darin auftretenden Selbstabsorptionen im Linienkern, kann die *vollständige* Wiederverteilung in der Frequenz der an den Molekülen gestreuten Photonen herangezogen werden. Die verwendeten

Tabelle 4: Frequenzen ν_{ij} der erlaubten Rotationsübergänge von CS zwischen dem Grundzustand $J = 0$ und oberen Zustand $J = 7$, berechnet mit den Ausdrücken (196) und (197) im Anhang C mit den Molekülkonstanten B_e, α_e, und D_e, für den Schwingungsgrundzustand ($v = 0$) von Huber & Herzberg (1979).

$J_j \rightarrow J_i$	ν_{ij} / Hz
1–0	4.8991013×10^{10}
2–1	9.7980996×10^{10}
3–2	1.4696892×10^{11}
4–3	1.9595376×10^{11}
5–4	2.4493449×10^{11}
6–5	2.9391007×10^{11}
7–6	3.4287947×10^{11}

Ausdrücke für die Linien-Quellfunktion und den Linien-Absorptionskoeffizient (nach Mihalas (1978), s. Gl. (1) bzw. (2)) gelten nämlich unter der Annahme einer *vollständigen* Wiederverteilung und der dann *identischen*, bei der Streuung beteiligten Emissions- und Absorptionsprofile $\Psi \equiv \Phi$.

Ein Streuprozeß kann in unserem Fall (vgl. Mihalas 1978) als Wechselwirkung eines Photons mit einem Molekül (Atom) im gebundenen (Rotations-) Zustand J' verstanden werden, welche zu einer Anregung in einen höheren Zustand J'' führt, gefolgt von einer direkten Rückkehr in den Zustand J' durch die Emission eines Photons. Dabei wird im allgemeinen das emittierte Photon in eine andere Richtung weiterziehen als in diese des einfallenden Photons. Außerdem werden sowohl die unteren als auch oberen Zustände J' und J'' eines Moleküls im abstrahlenden Gas der Wolke nicht perfekt scharf sein, und endliche Energiebreiten haben (durch die Wechselwirkung des Moleküls mit den anderen Gasteilchen). Jeder gebundene (Rotations-) Zustand kann dann als eine Verteilung aus Unterzuständen betrachtet werden, mit möglichen radiativen Übergängen von irgend einem Unterzustand eines Niveaus zu irgend einem Unterzustand eines anderen. Damit kann die emittierte Energie des Photons leicht unterschiedlich zu der des einfallenden Photons sein (d.h. entsprechend dazu auch die Frequenz), wenn der Zerfall des oberen Zustands in einen anderen Subzustand des unteren Niveaus erfolgt, als der von welchem die Anregung ausging.

Änderungen der Photonen-Richtung und Frequenz während der Streuung werden durch die Wiederverteilungsfunktion beschrieben.[9] Die Wiederverteilungsfunktion enthält sowohl das normierte Absorptions- $\Phi(\nu)$ als auch Emissionsprofil $\Psi(\nu)$ des betrachteten Streuprozesses.

Für natürliche Anregung sind die Emissions- und Absorptionsprofile identisch, was vor allem im thermischen Gleichgewicht (TE) gilt, wo die natürliche Anregung vorherrscht. Es gibt allerdings noch andere physikalische Verhältnisse in welchen $\Psi(\nu) = \Phi(\nu)$ angetroffen wird: Unter der Annahme einer *vollständigen Wiederverteilung* (oder Unkohärenz) der Photonenfrequenz, d.h. wenn die Atome (Moleküle) derart wieder vollständig in ihren angeregten Zustand zurückgehoben werden, daß es keine Korrelation zwischen den Frequenzen der einfallenden und gestreuten Photonen

[9] ... welche die Wahrscheinlichkeit angibt, daß ein Photon aus einer Richtung $\vec{n}'$ vom Raumwinkel $d\omega'$ im Frequenzbereich $(\nu', \nu' + d\nu')$ in die Richtung $\vec{n}$ und den Raumwinkel $d\omega$ im Frequenz-Intervall $(\nu, \nu + d\nu)$ gestreut wird: $R(\nu', \vec{n}'; \nu, \vec{n})\, d\nu' d\nu (d\omega'/4\pi)(d\omega/4\pi)$.

gibt; dann haben beide Frequenzen, die über das Absorptionsprofil $\Phi(\nu)$ verteilt sind.[10]

Eine zumindest teilweise Wiederverteilung bezüglich der Frequenz der Photonen ist eine sehr nützliche Annahme zur Beschreibung des allgemeinen Linien-Transportproblems, und dem dortigen Hauptphänomen der Frequenz-Diffusion der Photonen vom undurchsichtigen Linienkern, wo sie eingefangen werden (Selbstabsorption), zu den transparenteren Linienflügeln (Emissionspeaks), wodurch sie aus der Wolke entkommen können (bei optischen Tiefen wo I nahezu isotrop ist).

Im statischen Medium haben die Photonen der Linienflügel größere mittlere freie Weglängen (für diese Frequenzen ist τ_l kleiner) und folglich ist die Wahrscheinlichkeit für diese Photonen absorbiert zu werden klein. Im Kern ist die optische Tiefe der Linie so hoch, daß die Chance für ein Photon durch Streuungen zum Linienflügel zu diffundieren, bevor es absorbiert wird, ziemlich klein ist, und dadurch die Gasmoleküle effizienter in der Absorption dieser Photonen sind als in den Flügeln. Außerdem werden die Photonen hauptsächlich nahe des Linienkerns erzeugt und im Diffusionsprozess zum Flügel nimmt deren Alter zu, was eine größere Wahrscheinlichkeit beinhaltet durch Moleküle absorbiert zu werden. In einem bewegten Medium müssen sich die Photonen nicht so vielen Streuungen unterziehen, um das System durch die Oberfläche zu verlassen.

Die Asymmetrie der Profile und die Verschiebung der Linienmitte relativ zum Frequenzzentrum der ruhenden Linie läßt sich vielmehr durch das makroskopische Geschwindigkeitsfeld der Wolke erklären. Ohne dieses (für eine statische Wolke) sind unsere Profile nämlich symmetrisch zum unverschobenen Linienzentrum.

Durch die Doppler-verschobenen (mikroskopischen Absorptions-)Linienprofile im Ausdruck für die orts-, frequenz- und richtungsabhängige optische Linientiefe (vgl. Gl. (171)), wie sie von einem ruhenden Beobachter (außerhalb sowie auch innerhalb des bewegten Systems) entlang der Blickrichtung des entgegen kommenden Strahls mit konstantem Impaktparameter p gesehen werden, können Photonen durch die frequenzverschobenen Linienflügel (der mikroskopischen Profile) von Orten innerhalb der Wolke entweichen, und die Materie in bestimmen Gebieten zur betrachteten Linienfrequenz der Photonen in Beobachtungsrichtung optisch dünn werden ($\tau_l \ll 1$). Selbst in Blickrichtung zum dichteren Wolkenzentrum (für $p = 0$) können dann fast symmetrische makroskopische Emissionsprofile (und damit optisch dünne Linien) von außen beobachtet werden. Natürlich spielt dabei die Materiedichte im Ausdruck für die optische Linientiefe bzw. die aus dem statistischen Gleichgewicht der Strahlungsübergänge berechneten Besetzungszahldichten (n_u und n_l) des betreffenden Anfangs- und Endzustandes des betrachteten Linienübergangs eine größere Rolle, ob die Linie z.B. optisch dick wird ($\tau_l \gg 1$) und eine Selbstabsorption in der Linienmitte zeigt.

Außerdem kann im allgemeinen kein eindeutiger Rückschluß von der Asymmetrie der Profile, und damit der relativen Höhe des roten zum blauen Emissionspeaks der Linie, auf den Betrag und die Richtung des großräumigen Geschwindigkeitsfeldes der Wolke (in Sichtrichtung) gezogen werden; wie z.B. vor allem die berechnete Intensitätsverteilung der $J = 1 - 0$-Linie für $p = 0$ mit dem 1D-Strahlungstransport-Modell (in Abb. 10 oben links) und dem 3D-Modell (in Abb. 11 oben links) zeigt, sowie alle übrigen mit dem 3D-Modell berechneten Profile für $p = 0$ (in Abb. 11) aus der sphärischen Wolke. Dort zeigen die Profile in Richtung des Wolkenzentrums eine (scheinbare) Blauverschiebung zu höheren Frequenzen mit einem ausgeprägten blauen Emissionspeak,

[10] Dann gilt für die Absorptions-Emissions-Wahrscheinlichkeit der Streuung: $R(\nu', \nu) = \Phi(\nu')\Phi(\nu)$.

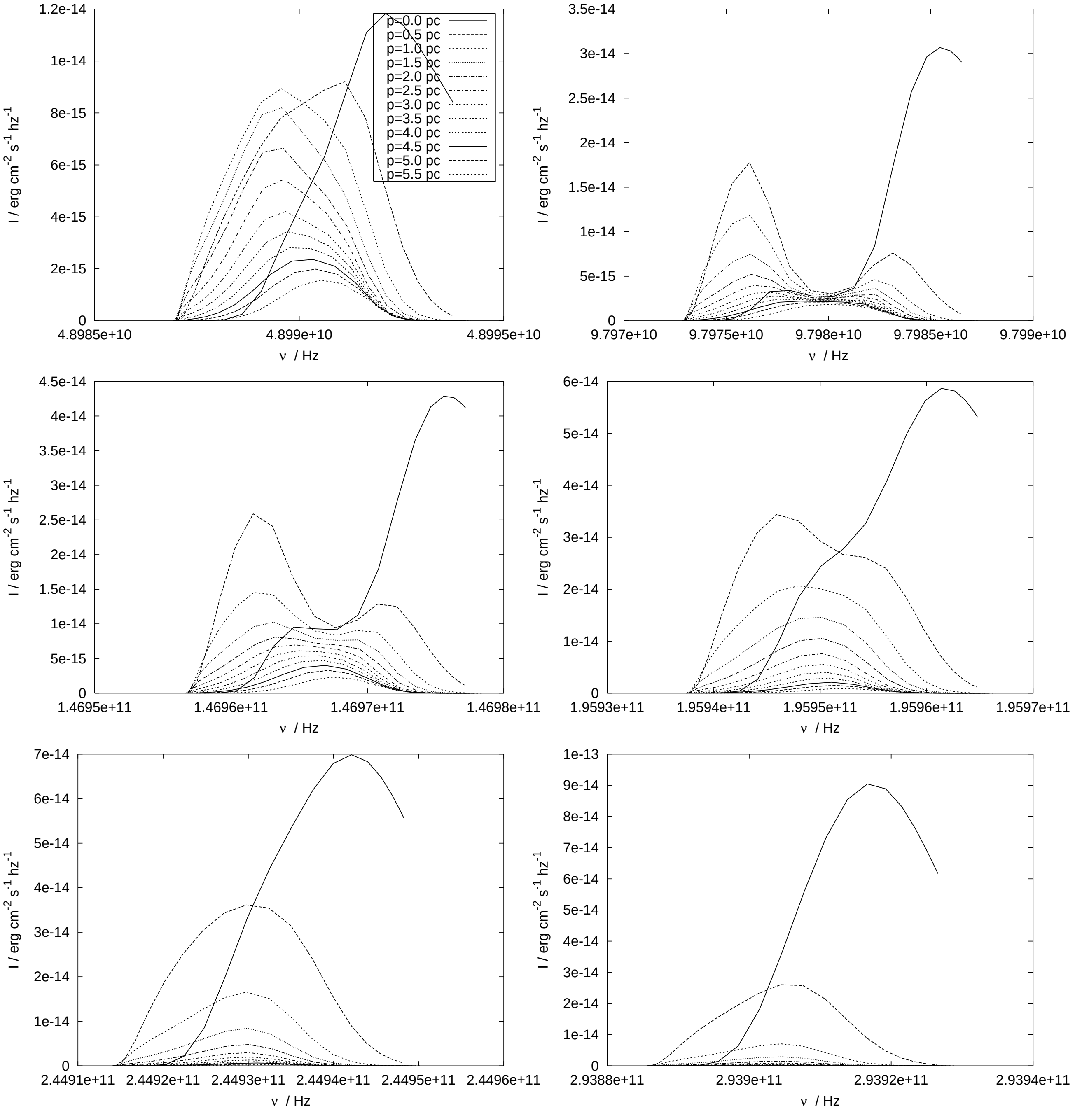


Abbildung 11: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0\times10^5$ cm/s: Mit dem 3D-Strahlungstransport-Modell berechnete Profile der $J = 1 \to 0$-Linie (links oben) bis $J = 6 \to 5$-Linie (rechts unten) für verschiedene Austrittsparameter p gemessen vom Zentrum der Wolke.

während der rote Frequenzanteil der Linie (Peak), welcher von der dem Beobachter zugewandten vorderen Wolkenhälfte ausgesandt wird, die sich von ihm wegbewegt (Wolkeneinfall), z.T. stark unterdrückt ist. Obwohl also die durchschnittliche Materiegeschwindigkeit der Wolke entlang der Sichtlinie Null ist, und die zum Beobachter näher liegende Wolkenhälfte sich beim Materieeinfall zum Zentrum von ihm wegbewegt, ergibt sich ein blauverschobenes Emissionsprofil durch die von der gegenüberliegenden Wolkenhälfte emittierten Photonen, welche leichter nach außen dringen, was eine expandierende Wolkenhülle vortäuscht. Diese Tendenz zeigt sich auch noch für $p = 0.5$ pc bei der $J = 1 - 0$-Linie (s. Abb. 11 oben links).

Das Intensitätsdiagramm für den $J = 1 - 0$-Übergang, in der Abb. 10 (oben links), zeigt also für die Sichtlinie durch das Wolkenzentrum ($p = 0$) ein inverses P Cygni-ähnliches Profil[11], was auch Dickel & Auer bei ihrem Modell-Beispiel ihrer vergleichbaren Wolke für den gleichen Übergang im HCO^+-Molekül für Turbulenzgeschwindigkeiten derselben Größenordnung ($v_{\rm turb} = 3.5 \times 10^5$ cm/s) erhalten haben. Dieses P Cygni-ähnliche Profil verliert sich allmählich in den Übergängen zwischen den zunehmend höheren Niveaus für $p = 0$ und wandelt sich in ein ausgeprägtes, fast zur Linienmitte symmetrisches Emissionsprofil um (s. Diagramm von oben rechts bis unten rechts), mit Intensitätsminima im kurz- und langwelligen Bereich der zentralen Emission.

Damit ein P Cygni-Profil entstehen kann, muß in der Regel eine eingebettete Kontinuumsquelle im Zentrum, ein radialer Geschwindigkeitsgradient, und ein Vordergrundgebiet der Molekülwolke vorliegen, dessen Anregungstemperatur $T_{\rm ex}$ (für den betrachteten Übergang) unterhalb der Strahlungstemperatur der inneren Quellregion liegt. Das Vorzeichen des Geschwindigkeitsgradienten (Kollaps oder Expansion) kann aus der Geschwindigkeit der Absorption relativ zur Emission bestimmt werden.

In unserem Wolkenbeispiel wird zwar im Gegensatz dazu keine heiße leuchtende HII-Kernregion angenommen, sondern ein homogener dichterer Kern aus vorwiegend molekularem Wasserstoff H_2 (mit CS-Gas) im Bereich $r \leq R_i = 0.2$ pc, der aber durch die LTE-besetzten untersten Zustände des CS-Moleküls (bis $J = 4$) in den Frequenzen der betreffenden Übergänge wie ein schwarzer Körper in die umliegende Wolkenhülle abstrahlt. Die unteren beiden Zustände $J = 0$ und $J = 1$ sind in allen Wolkenbereichen im Vergleich zum thermischen Gleichgewicht stark überbesetzt. Außerdem liegt die Anregungstemperatur für den $J = 1 - 0$-Übergang im Bereich von $r = 1$ pc bis 2 pc durch die Besetzungszahl-Inversion *deutlich* über der konstanten kinetischen Temperatur ($T_{\rm kin} = 20$ K) der Wolke und erst ab ca. $r = 3$ pc bis zum äußeren Rand *darunter* (vgl. ber. Besetzungszahlen in den Abb. 8 und 9). Für alle anderen Rotationsübergänge ausgehend von den höheren Niveaus ab $J = 2$, ist die zugehörige Temperatur $T_{\rm ex}$ *überall* kleiner als die Wolkentemperatur $T_{\rm kin}$. Insgesamt erhalten wir also dann in unserem Fall ebenso ein typisches P Cygni-Profil für den $J = 1 - 0$-Übergang aus der Richtung des Wolkenkerns.

Wie bereits erwähnt, rührt der blaue Emissionspeak im Profil des $J = 1 - 0$-Übergangs, in Abb. 10 bzw. in Abb. 11 jeweils oben links, sowie im Profil der Linien $J = 2 - 1$ bis $J = 6 - 5$ in Abb. 11, für jeweils $p = 0$, von dem Molekülgas *hinter* dem Wolkenkern her. Die Absorptionssenke bei der Ruhefrequenz des Linienzentrums $\nu_{10} = 4.8991 \times 10^{10}$ Hz des $J = 1 - 0$-Übergangs,

[11] Wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit von einem P Cygni-Profil gesprochen, so ist immer ein *inverses* gemeint. Zu einem *typischen* P Cygni-Profil hätte außerdem eine Kontinuumsquelle im Zentrum unseres Wolken-Beispiels vorhanden sein müssen; die Begründung warum dennoch ein solches Profil in unseren Berechnungen beim $J = 1 - 0$-Übergang entstand, findet der Leser in den unmittelbar darauf folgenden beiden Absätzen. Ansonsten ist mit dem Ausdruck "P Cygni-ähnlich" im weitesten Sinne *hier* nur ein Profil gemeint, das aus einem größeren blauen Primärpeak und einem roten Sekundärpeak besteht.

sowie die bei den entsprechenden Frequenzen der Linienzentren ν_{21}, ν_{32}, ν_{43}, der höheren Übergange von $J = 2 - 1$ bis $J = 4 - 3$, in den Abbildungen 10 und 11 im oberen und mittleren Teil, stammt vom Molekülgas, das *vor* dem Wolkenkernbereich lokalisiert ist, wo die Anregungstemperatur des betrachteten Übergangs geringer ist als die Strahlungstemperatur des dahinter liegenden Kerns und der restlichen Wolkenmaterie. Der teilweise in den jeweiligen Linienprofilen auftretende *rote* Emissionspeak kommt vom Gas *vor* und sehr nahe der Kernregion, wo speziell für den $J = 1 - 0$-Übergang die Populationen des betreffenden Anfangs- und Endzustands invertiert sind.

Die mit dem 1D- sowie 3D-Modell berechneten ortsaufgelösten Intensitätsverteilungen *aller* Linienübergänge für die *übrigen* Impaktparameter $p \geq 0.5$ pc der austretetenden Strahlen für Sichtlinien, die nicht durch die Kernregion gehen (mit $p > R_i = 0.2$ pc, s. ebenfalls in den Abb. 10 und 11), zeigen eine z.T. starke Selbstabsorption in der Linienmitte, die sich aber mit zunehmendem p abschwächt, so daß ein reines Emissionsprofil vorliegt, mit einer leichten rot-verschobenen Asymmetrie hin zu kleineren Frequenzen. Dabei nimmt die Intensität zum Wolkenrand hin stetig ab, und diese zunächst optisch dicken Linien (mit Selbstabsorptionen im Linienkern) werden dort allmählich optisch dünner (vgl. hierzu auch die Abb. 12 bis 17). Diese Profile erscheinen auch – wie man intuitiv für einen sich vom Beobachter wegbewegenden Emitter (die vordere Wolkenhälfte) erwartet – insgesamt rot-verschoben durch den größeren roten Emissionspeak bzw. Linienanteil links vom jeweiligen Linienzentrum ν_{ij}. Für die austretenden Strahlen dieser Übergänge aus Richtungen neben der Kernregion im Bereich von $0.5 \leq p \lesssim 2.5\,pc$ (vgl. z.B. Abb. 14 zum $J = 2 - 1$-Übergang), wird durch die vorderen Wolkenschichten der blaue Emissionspeak (von den Photonen aus der entfernteren Wolkenhälfte kommend) unterdrückt bis ausgelöscht, während der rote Peak verstärkt wird.

Für eine höhere Turbulenzgeschwindigkeit von $v_{\rm turb} = 30$ km/s, die den maximalen Betrag der radialen makroskopischen Geschwindigkeit der Wolke am Kernradius von $v_{\rm r} = 22$ km/s sogar noch übersteigt, ist das mit dem 1D-Modell berechnete Profil der $J = 1 - 0$-Linie dagegen (für $p = 0$ und für alle *restlichen* Impaktparameter in größerer Entfernung zum Wolkenzentrum, s. Abb. 46 oben links, im Anh. D.1.2) fast genau symmetrisch zum Linienzentrum (der ruhenden Linie) und zeigt *keine* Doppler-Verschiebung, d.h. kein P-Cygni-ähnliches Profil: Durch die hohe Turbulenzgeschwindigkeit und folglich große Dopplerbreite der Linie wird die großräumige Struktur des radialen Geschwindigkeitsfeldes überdeckt, und bei diesem Übergang eine statische Wolke vorgetäuscht. Außerdem treten im Linienkern *keine* Absorptionen – wie bei der sonst bei kleinerer Turbulenzgeschwindigkeit optisch dickeren Linie – durch das Molekülgas im vorderen Teil der Wolke auf, wo die Anregungstemperatur $T_{\rm ex}$ des $J = 1 - 0$-Übergangs geringer ist als die Temperatur $T_{\rm kin}$ der dahinter liegenden Wolkenmaterie.

Hingegen sind die zur hohen Turbulenzgeschwindigkeit (mit der 1D-ST-Methode) berechneten Profile der $J = 2 - 1$- bis $J = 4 - 3$-Linie für Strahlen aus dem Wolkenkernbereich (für $p = 0$ und 0.5 pc, in Abb. 46 oben rechts bis Mitte rechts) wieder P-Cygni-ähnlich, *jedoch hier* nicht so stark rot-verschoben und asymmetrisch (wie vergleichsweise für $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s) mit einem höheren *roten* Emissionspeak im Vergleich zum blauen Peak, sowie einer Absorptionssenke bei der Ruhefrequenz des Linienzentrums ν_{ij} des jeweiligen Übergangs.

Im Gegensatz dazu sind die gleichen, mit der 3D-Methode berechneten Profile für $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s und $p = 0$ (s. Abb. 47, oberer und mittlerer Teil) wieder alle blau-verschoben (wie im Falle der kleineren Geschwindigkeit $v_{\rm turb}$) und asymmetrischer mit einem großen blauen Peak und einer Intensitätssenke im Linienkern des $J = 2 - 1$- und $J = 3 - 2$-Übergangs, wiederum mit

Ausnahme der fast symmetrischen, nur schwach blau-verschobenen $J = 1 - 0$-Linie (s. Abb. 47 oben links, für $p = 0$).

Die restlichen, sowohl mit dem 1D- als auch 3D-Modell bestimmten Linienprofile zu den übrigen Parametern $p \geq 0.5$ pc, für Strahlen aus der sphärischen Wolke mit hoher Turbulenz, weisen nur eine merkliche Selbstabsorption bei den Übergängen $J = 2 - 1$ und $J = 3 - 2$ (s. Abb. 46 und 47, jew. oben rechts und Mitte links) bis $p = 1.5$ pc bzw. $p = 0.5$ pc auf (vgl. auch Abb. 50 oben und mitte, und Abb. 52 oben), und sind ansonsten fast symmetrisch und insgesamt leicht rot-verschoben.

Abb. 11 (mit den Linienprofilen aus dem 3D-Modell) zeigt, daß die Intensitätsmaxima für $p = 0$ für die Übergänge von $J = 1 - 0$ bis $J = 6 - 5$ um bis zu etwa eine Zehnerpotenz ansteigen, während für $p \neq 0$ ein höchster Wert beim $J = 4 - 3$-Übergang auftritt. Das gleiche Verhalten der Linienprofil-Maxima für zunehmend höhere Übergänge und den austretenden Strahlen mit unterschiedlichem p ($= 0$ bzw. $\neq 0$) wird durch die mit Hilfe des 1D-Strahlungstransport-Modells berechneten Profile (in Abb. 10) aus derselben sphärischen Wolke bestätigt.

Die entsprechenden Linienprofil-Berechnungen zur gleichen sphärischen Wolke mit *höherer* Turbulenzgeschwindigkeit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s (s. Abb. 46 mit dem 1D-Modell, und Abb. 47 mit dem 3D-Modell) zeigen dieses beschriebene Verhalten der Profilmaxima der verschiedenen Übergänge noch in verstärktem Maße. Ferner werden die Intensitätsmaxima der Linien bei fester Entfernung p vom Wolkenzentrum durch die größere Turbulenzgeschwindigkeit in der Regel geschwächt (vgl. Diagramme in Abb. 10 mit denen in Abb. 46, und Abb. 11 mit 47).

8.1.4 Der Vergleich der Profile aus den verschiedenen Modellen

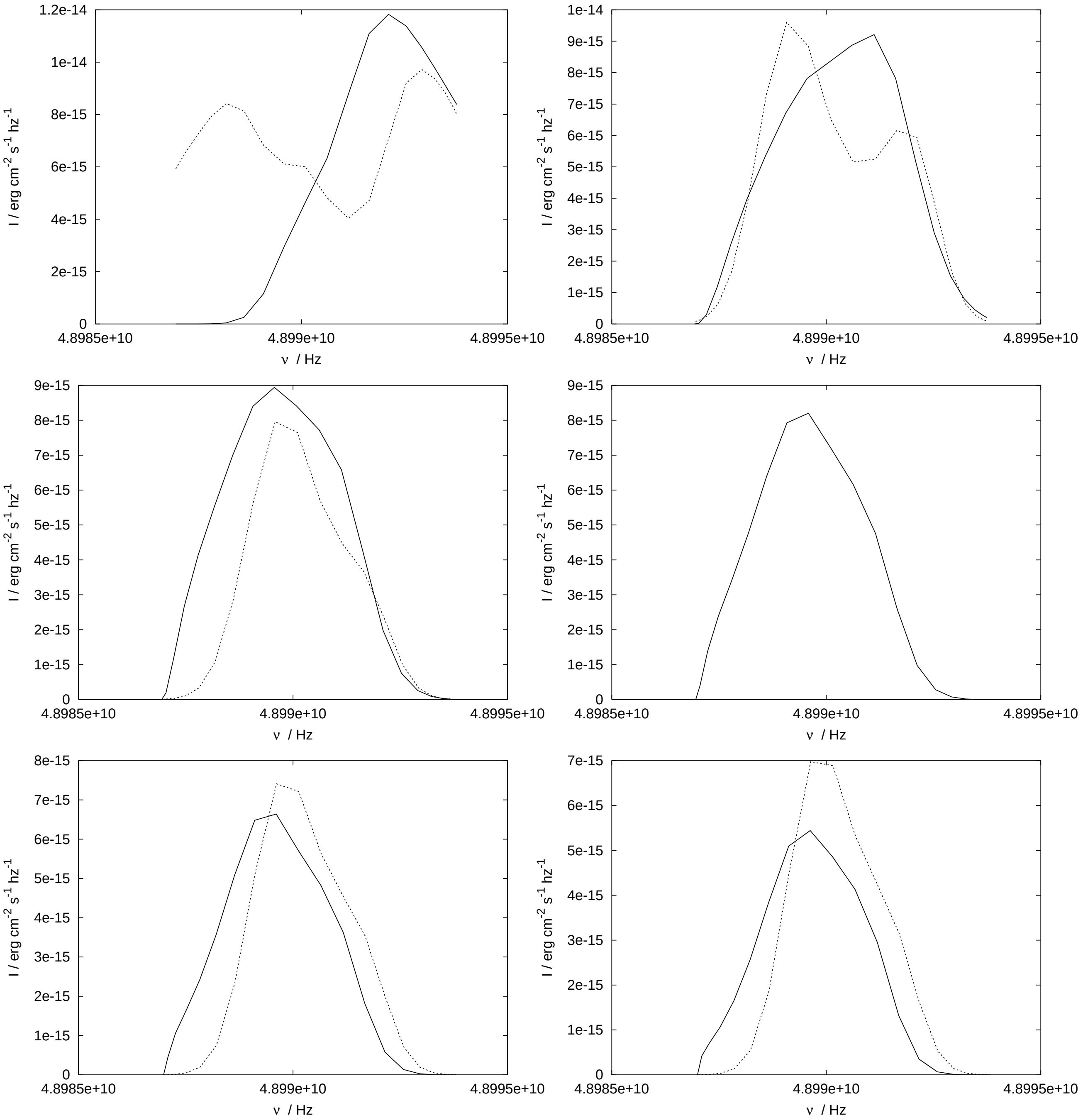


Abbildung 12: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 1 \to 0$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 0$ (links oben) bis $p = 2.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten). Die aus dem 1D-Modell gewonnene Vergleichskurve bei $p = 1.5$pc wurde nicht dargestellt, weil in diesem Bereich der Wolke eine Überbesetzung des ersten angeregten Rotationsniveaus auftrat.

Die Abbildungen 12 – 17 demonstrieren die vorwiegend gute Übereinstimmung sowohl der Form

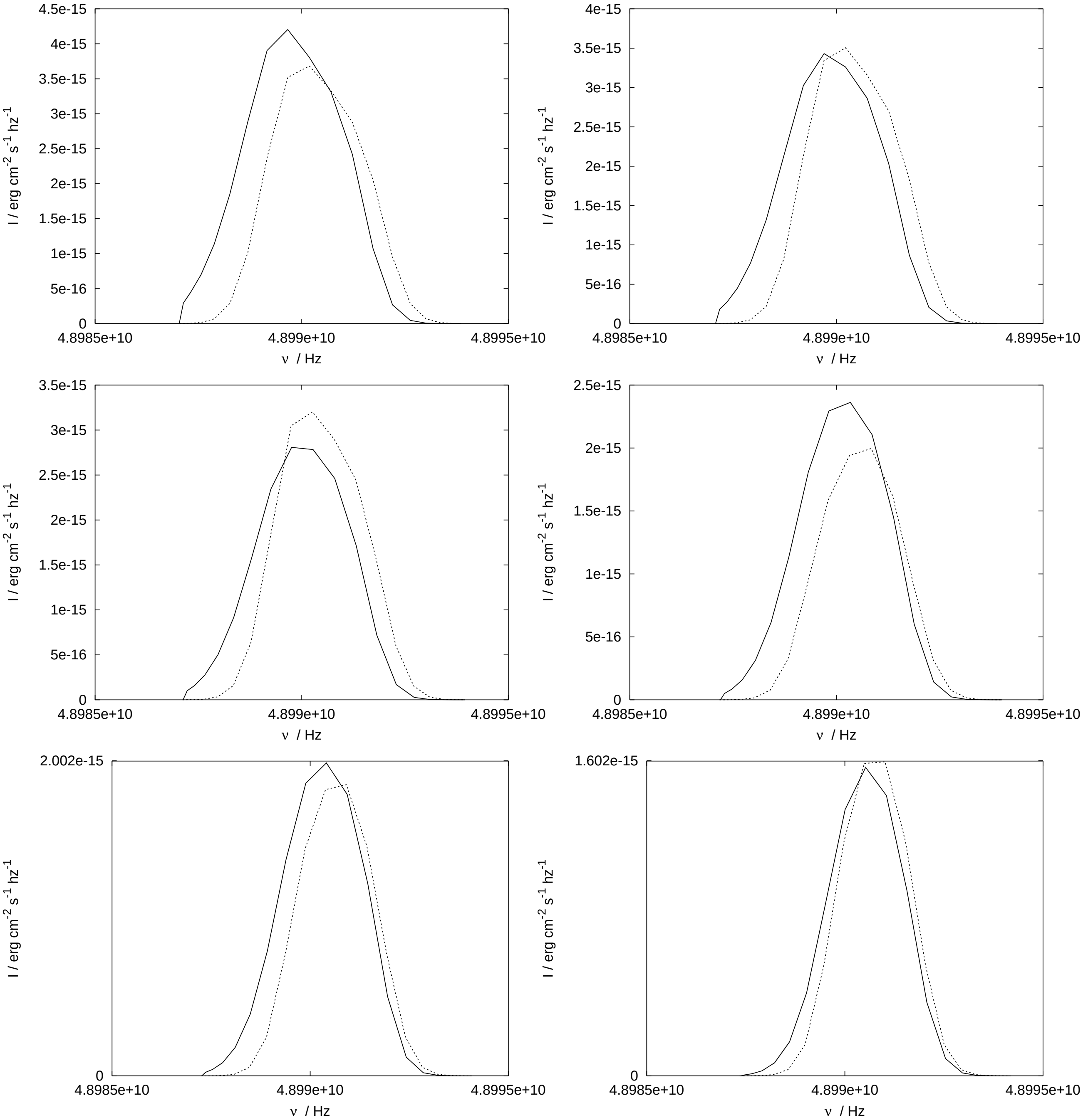


Abbildung 13: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 3.0$ (links oben) bis $p = 5.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

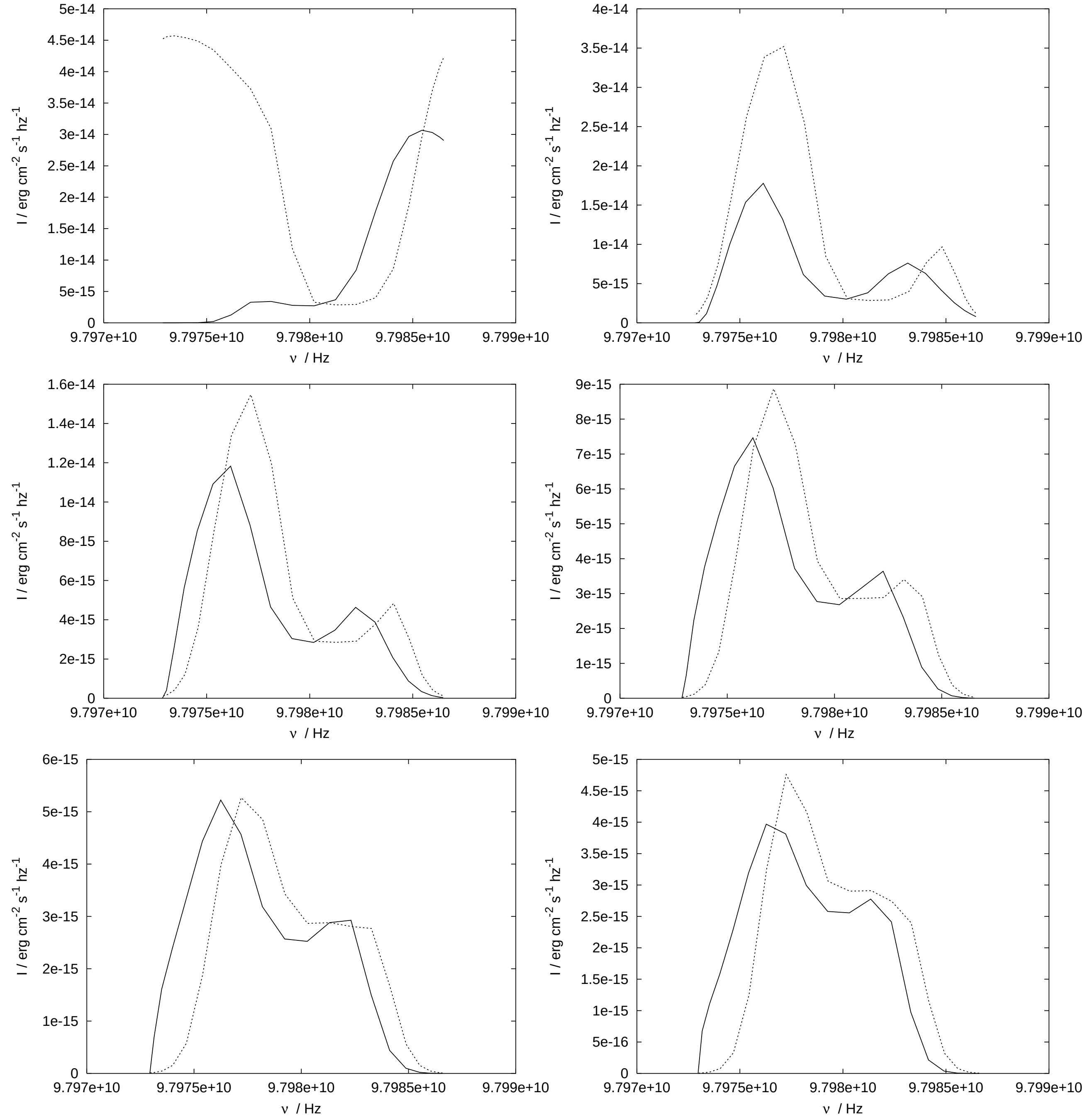


Abbildung 14: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 0$ (links oben) bis $p = 2.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

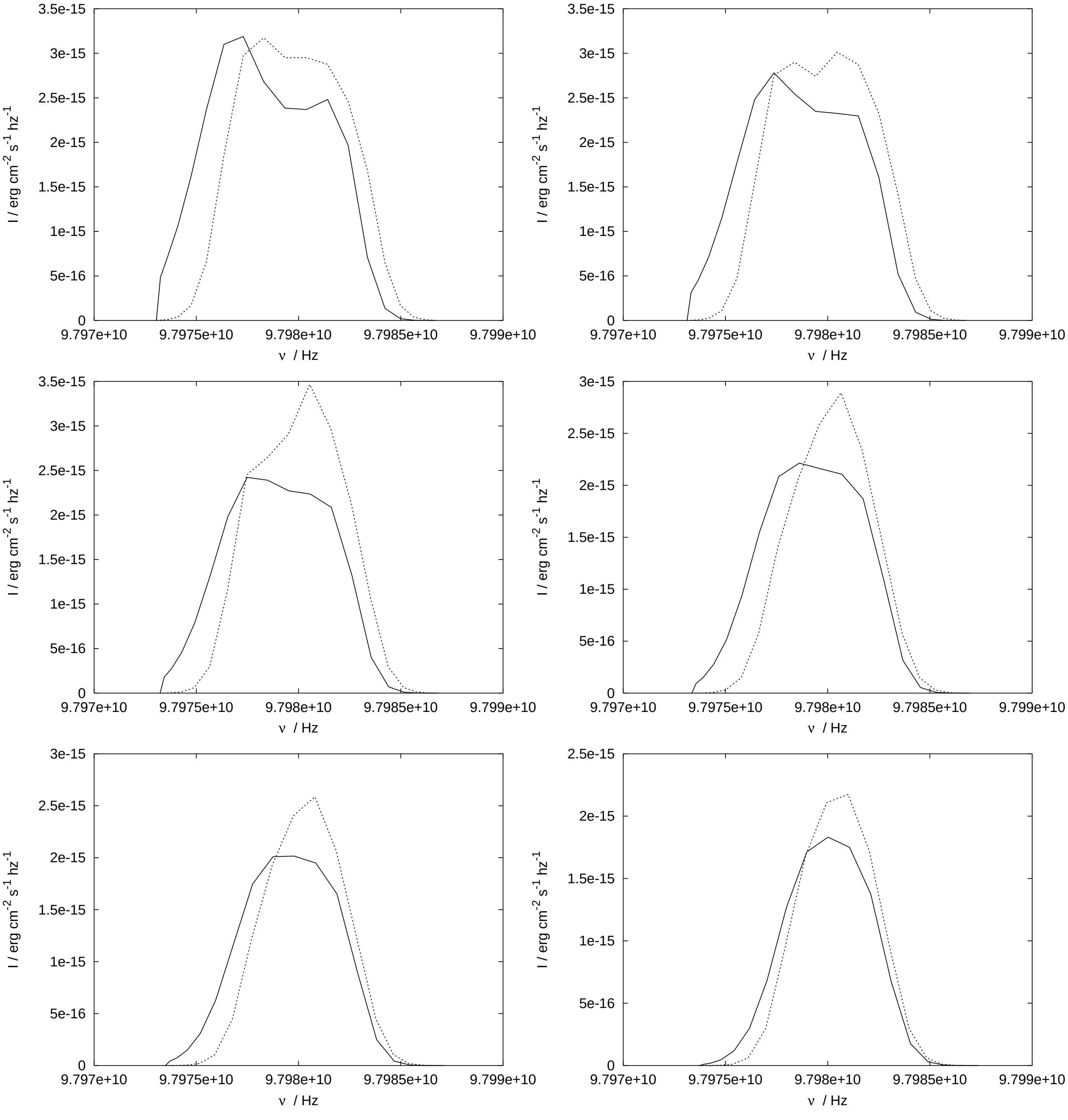


Abbildung 15: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 3.0$ (links oben) bis $p = 5.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

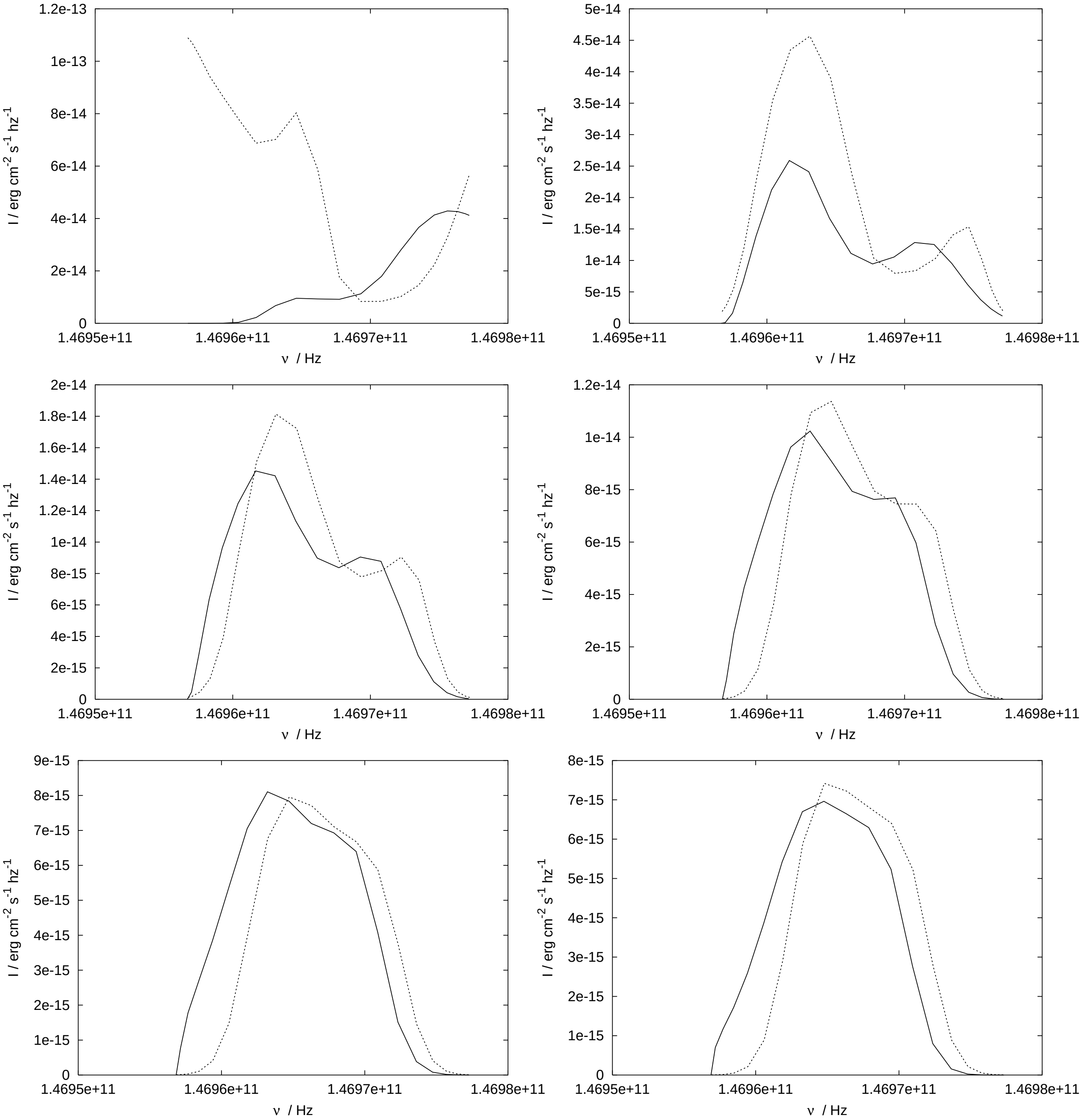


Abbildung 16: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 0$ (links oben) bis $p = 2.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

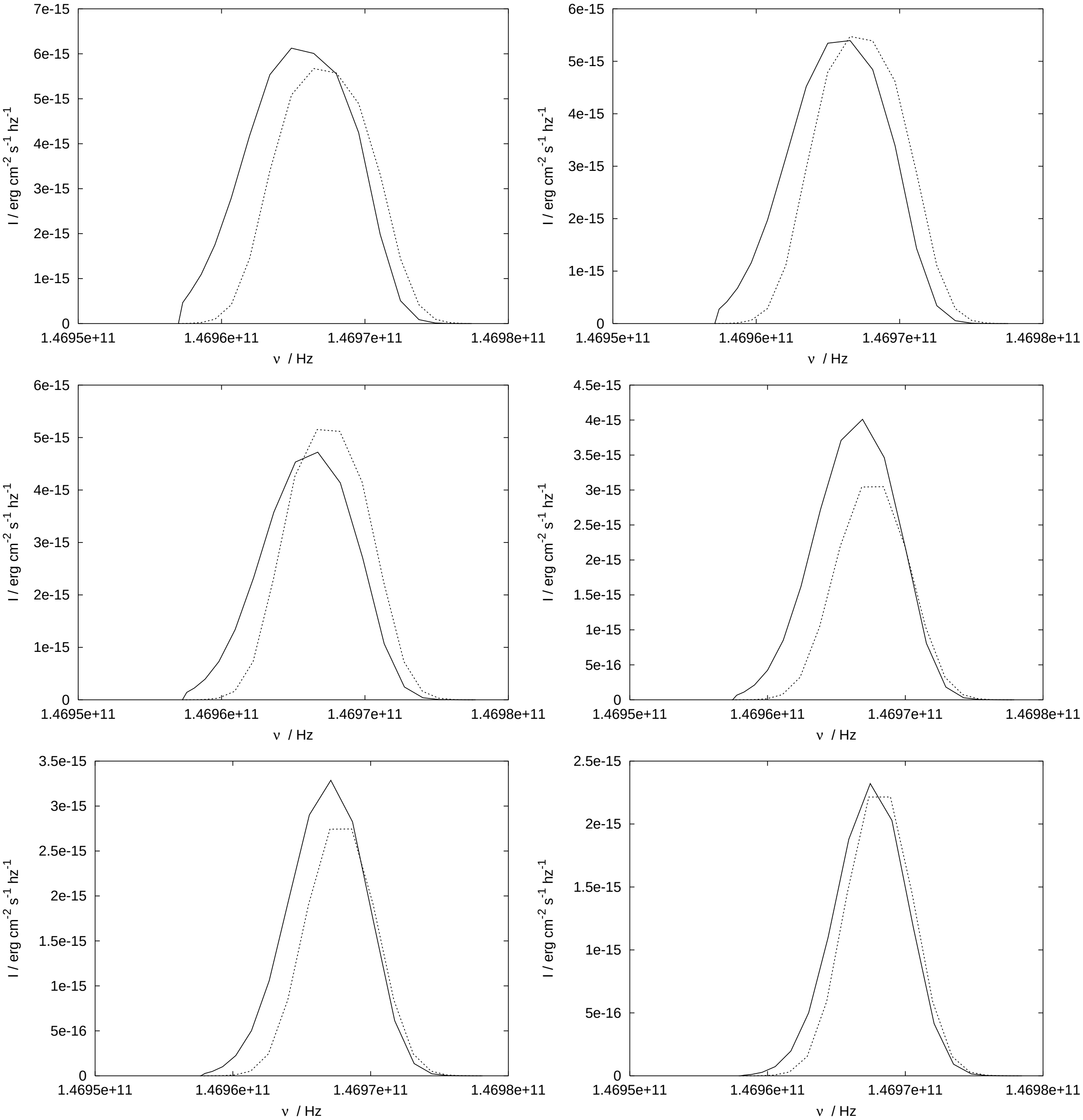


Abbildung 17: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 3.0$ (links oben) bis $p = 5.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

als auch relativen Größe der mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen (1D- bzw. 3D-Codes) berechneten CS-Profile für die Übergänge $J = 1{-}0$ bis $J = 3{-}2$ für dieselbe kollabierende sphärische Wolke. Eine noch bessere Übereinstimmung dieser unterschiedlich gewonnenen Profile für den Fall der gleichen sphärischen Wolke mit einer höheren Turbulenzgeschwindigkeit ($v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s), ist aus den Abbildungen 48–53 (im Anhang D.1.4) zu erkennen.

Die wenigen größeren Abweichungen in der Profilform, die vor allem für die aus der Richtung der Kernregion aus der Wolke tretende Strahlen auftreten (s. Abb. 12 oben links und rechts, sowie Abb. 14 und 16 jew. oben links), lassen sich hauptsächlich mit der unterschiedlichen Wahl der den verschiedenen Modellen zugrunde liegenden Ortsgitter, sowie der in den Programmen frei wählbaren *Anzahl* der Ortsgitterpunkten, zu denen die Intensitäten schließlich in Richtung des Beobachters berechnet werden (d.h. die Strahlungstransportgl. gelöst wird), erklären.

Dem 1D-Modell liegt ein logarithmisches Schalengitter zugrunde, das sich besser an die Form und den Dichteverlauf der sphärischen Wolke anpaßt und bis zum inneren Wolkenradius $R_i = 0.2$ pc des homogenen Kerns reicht, in welchem die Materiedichte als konstant, $\rho(r < R_i) \equiv \rho(R_i)$, und die Geschwindigkeit $v_{\rm r}(r < R_i) = 0$ angenommen wird. Die im Programm wählbare Anzahl der Schalen wurde auf $N_r = 10$ gesetzt, was für die durch die gesamte Wolke und durch das Zentrum tretende Strahlen 21 Knotenpunkten entspricht, einschließlich dem zentralen Knotenpunkt im Kern, zu denen die Intensitäten in Beobachtungsrichtung schrittweise bestimmt werden.

Dies entspricht gerade einer vergleichbaren Anzahl der im 3D-Programm gewählten Ortsgitterpunkten $N_x = 25$ in x-Richtung des Beobachters, zu denen die Intensität sowohl für die Mittelpunktsstrahlen als auch für alle anderen Strahlen in Impaktparameter-Abständen $\Delta p = 0.5$ pc durch die ganze Wolke ausgewertet wird. Dabei basiert das 3D-Modell generell auf einem würfelförmigen Tensor-Produkt-Gitter, das die gesamte kugelförmige Wolke mit Radius $R = 6$ pc einschließt (mit dem Wolkenmittelpunkt im Gitterzentrum). In unserem Wolkenbeispiel wurden dann in alle drei Raumrichtungen (x, y, z) als Eingabe-Parameter die gleiche Anzahl von Gitterpunkten $N_x = N_y = N_z = 25$ gewählt, was einem äquidistanten Gitterpunktabstand von 0.5 pc in jeweils jede x-, y-, z-Richtung entspricht.

Diese Methode hat zwar nun den Vorteil, daß für austretende Strahlen mit schrittweise zunehmendem p (in $\Delta p = 0.5$ pc-Schritten) die Anzahl der Gitterpunkte, im Gegensatz zur Anzahl der Knotenpunkte mit dem Schalengitter in der 1D-Methode, nicht so schnell abnimmt, und die Intensität für diese Strahlen an einer größeren Menge von Ortspunkten im Innern der Wolke ausgewertet wird, was folglich insgesamt am Ende ein genauer berechnetes Linienprofil vermuten läßt; jedoch unterscheiden sich aber offensichtlich gerade diese mit der 3D-Methode gewonnenen Profile für größere p's von den entsprechenden mit der 1D-Methode erhaltenen, nur kaum voneinander (s. Abb. 12–17). Der Unterschied liegt mehr bei den Profilen aus Richtung der kernnahen Region der Wolke (für kleine p), wo die Auflösung des 3D-Gitters (in unserem Rechenbeispiel für $N_x = N_y = N_z = 25$) für die Mittelpunktsstrahlen noch zu gering ist, damit die beiden innersten Gitterpunkte (vor und nach dem Gitterzentrum entlang der Sichtlinie) möglichst nahe am Kernradius liegen (hier in 0.3 pc-Entfernung). Dabei wird im 3D-Modell (ebenso wie beim 1D-Strahlungstransport) die radiale Geschwindigkeit innerhalb des homogenen Kerns $v_{\rm r}(r < R_i) = 0$, und die Dichte $\rho(r < R_i) = \rho(R_i)$ konstant zu jener am Kernradius R_i gesetzt.

Dadurch werden gerade die am Kernradius größten radialen Geschwindigkeiten $v_{\rm r}(R_i) = 22$ km/s des Molekülgases *vor* und *hinter* dem Wolkenzentrum (in Blickrichtung) nicht berücksichtigt, und man erhält dort für $p = 0$ (s. Abb. 12, 14, 16, jeweils oben links, sowie für 0.5 pc in Abb. 12 oben rechts) mit der 3D-Strahlungstransport-Methode (im Gegensatz zur 1D-Methode) *keine* ausgeprägten inversen P Cygni-Profile mit einem ebenso roten Emissionspeak durch das mit hoher Geschwindigkeit einfallende Molekülgas *vor* dem Wolkenkern. Vielmehr wird hier durch die rot-verschobene, dem Beobachter zugewandte, absorbierende und streuende Wolkenmaterie der linke rote Emissionspeak teilweise oder vollständig ausgelöscht. Und es ergeben sich zum einen vor allem durch diese für den Wolkenkernbereich zu grobe 3D-Gitterauflösung und die damit verbundene schlechtere Geschwindigkeitsinterpolation, und zum andern möglicherweise durch die prinzipiell andere Lösungsmethode der Strahlungstransportgl. mittels der Finiten Differenzen, Profile mit verstärktem dominanten blauen Emissionspeak (für $p = 0$) vom einfallenden Gas hinter der Kernregion.

Hingegen erhält man für den Fall der sphärischen Wolke mit *hoher* Turbulenz (s. Anh. D.1.4) selbst mit Hilfe des 3D-Modells ein erkennbares P-Cygni-Profil für $p = 0$ und die Übergänge $J = 2{-}1$ und $J = 3{-}2$ (in Abb. 50 bzw. 52, jew. oben links). Der durch diese Methode berechnete rote Emissionspeak ist darin jeweils zwar nur angedeutet, der blaue jedoch fast identisch mit jenem aus dem 1D-Modell bestimmten Profil. Vergleicht man die übrigen, mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten CS-Profile der Linien $J = 1 - 0$ bis $J = 3 - 2$, zu den jeweils verschiedenen Positionen p (in den Abb. 48–53), sieht man die überraschend gute Übereinstimmung der Profile nach ihrer Form und relativen Größe, bis auf Ausnahme derjenigen der $J = 1 - 0$-Linie, für Strahlen mit Entfernungen von $p = 1.0$ bis 2.0 pc zum Wolkenzentrum: Am Ort $p = 1.0$ pc und 1.5 pc fällt die Höhe der mit dem 1D-Code bestimmten, symmetrischen Emissionslinie gegenüber der mittels des 3D-Codes gewonnenen, zu stark herab, was durch die Überbesetzung des ersten angeregten Rotationsniveaus $J = 1$ im Vergleich zur Besetzung des Grundzustands $J = 0$ in diesem Wolkenbereich verursacht wird.

8.1.5 Die ortsaufgelösten CS-Linienprofile

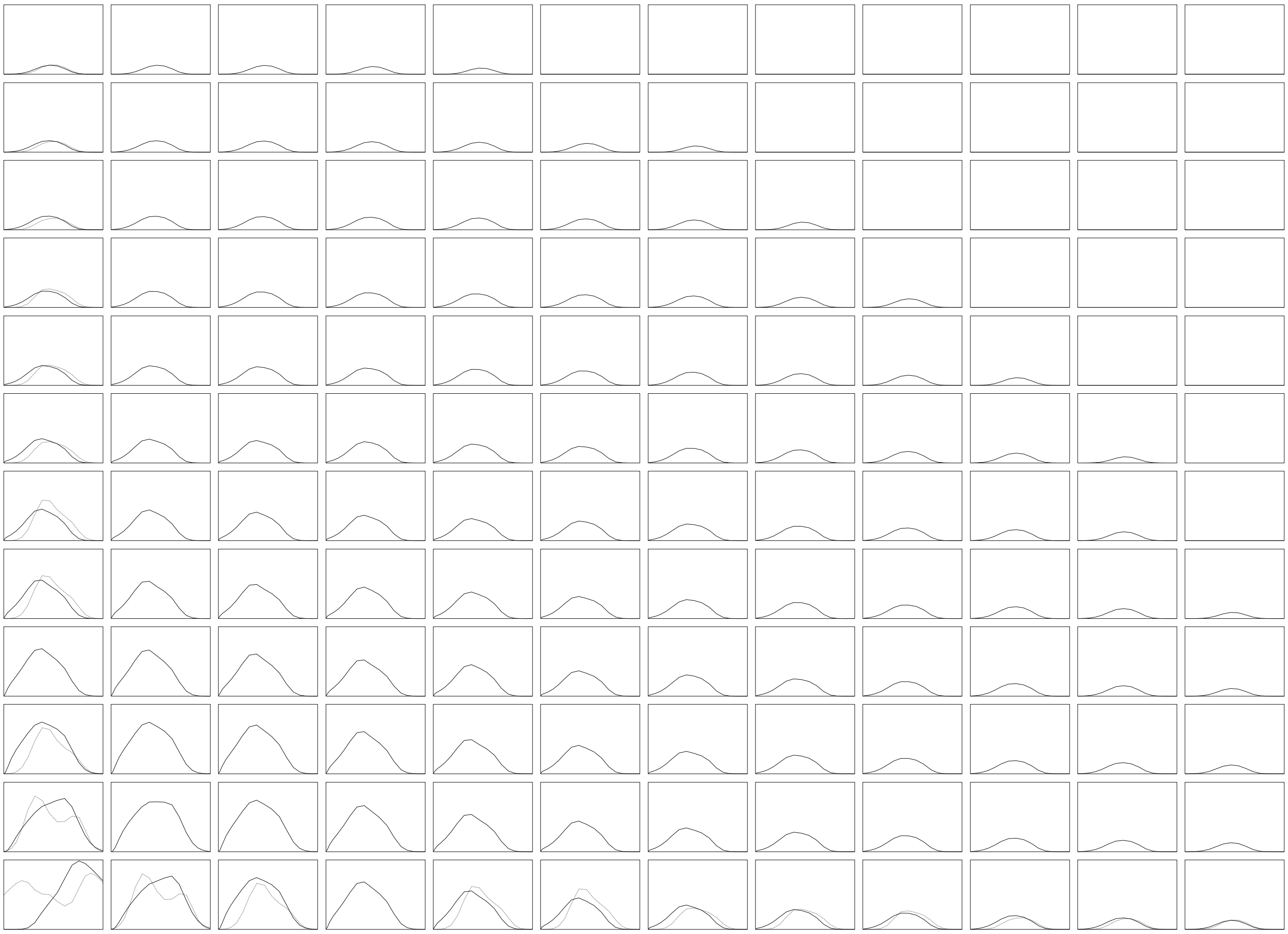


Abbildung 18: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 1 \to 0$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 1.2×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 4.8986 bis 4.8994×10^{10} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

In den Abbildungen 18 – 23 sind die (z.T. schon im Abschnitt 8.1.3 näher diskutierten) ortsaufgelösten CS-Linienprofile der Übergänge $J = 1 - 0$ bis $J = 6 - 5$ aus der sphärischen Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s, bzw. in den Abbildungen 40–45 (im Anhang D.1.1) die entsprechenden Profile zur größeren Turbulenzgeschwindigkeit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s, graphisch dargestellt. Die einzelnen aus der sphärischen Wolke (bzw. aus dem kartesischen Gitter durch die vordere Würfelfläche mit Strahlrichtung $\vartheta = 90°$) tretende Intensitätsverteilungen des jeweiligen Linienübergangs, sind entlang der Abszisse (entsprechend der y-Achse im 3D-Modell) und Ordinate (entspr. der z-Achse im 3D-Modellgitter, mit der Strahlrichtung entlang der x-Achse) in den Abständen von Δy bzw. $\Delta z = 0.5$ pc in einer Entfernung von 0 bis 5.5 pc zum Wolkenzentrum angeordnet, wobei letzteres sich links unten befindet. Aufgrund der sphärischen Symmetrie ist also nur das rechte obere Viertel der zum Beobachter zeigenden Gitterfläche (d.h. nur ein Viertel

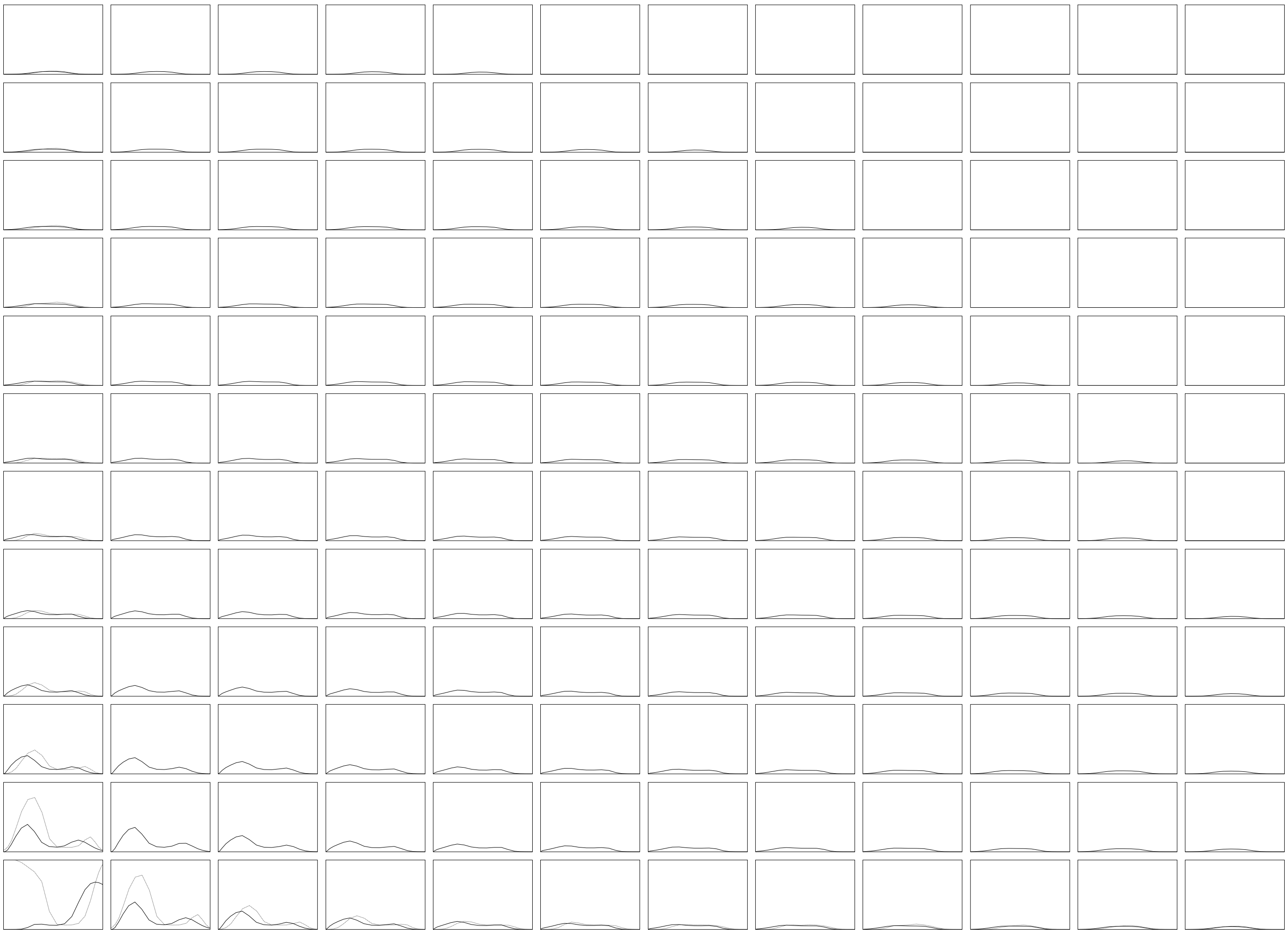


Abbildung 19: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 4.5×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 9.7972 bis 9.7988×10^{10} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

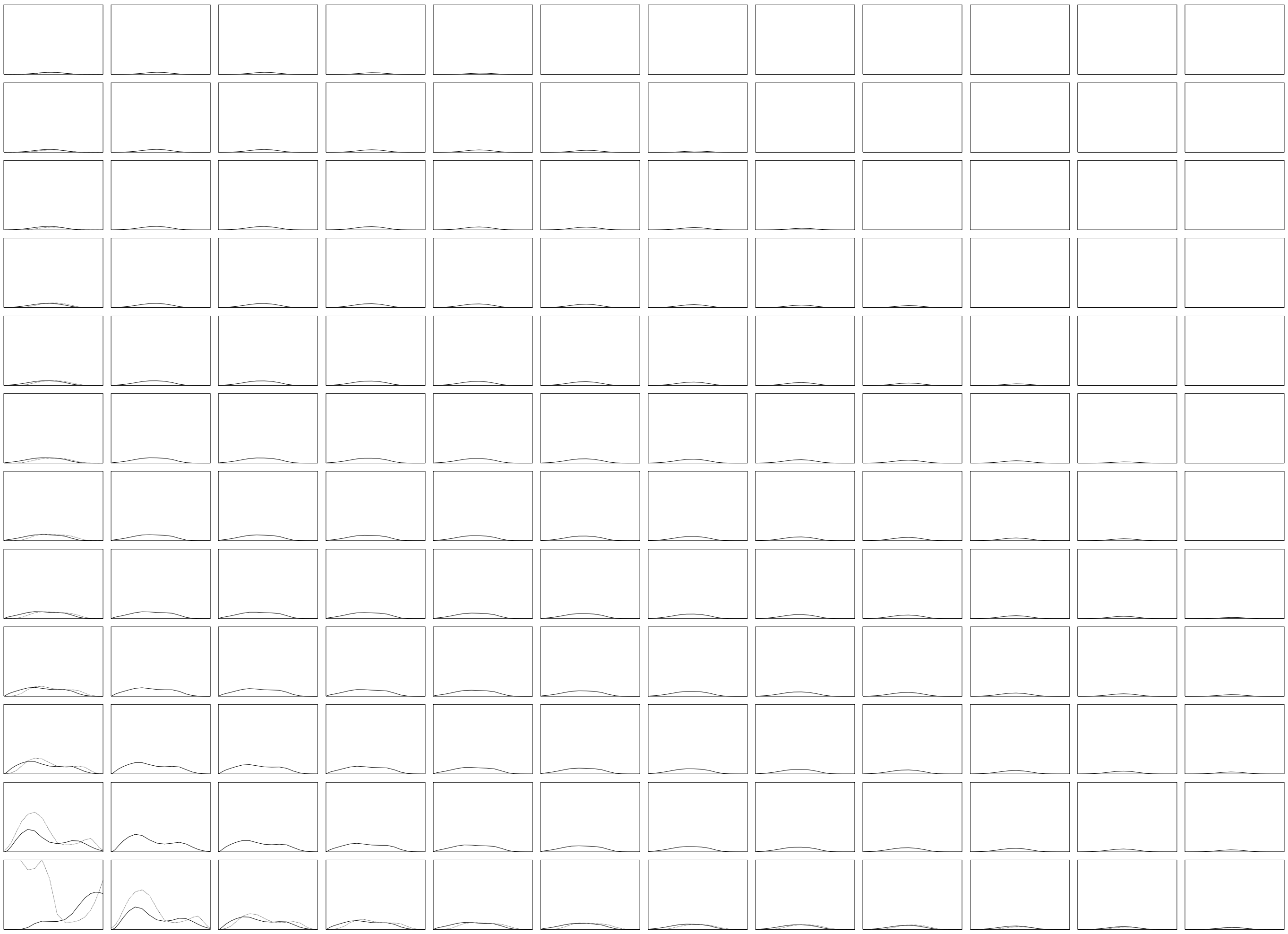


Abbildung 20: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 8×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.46955 bis 1.4698×10^{11} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

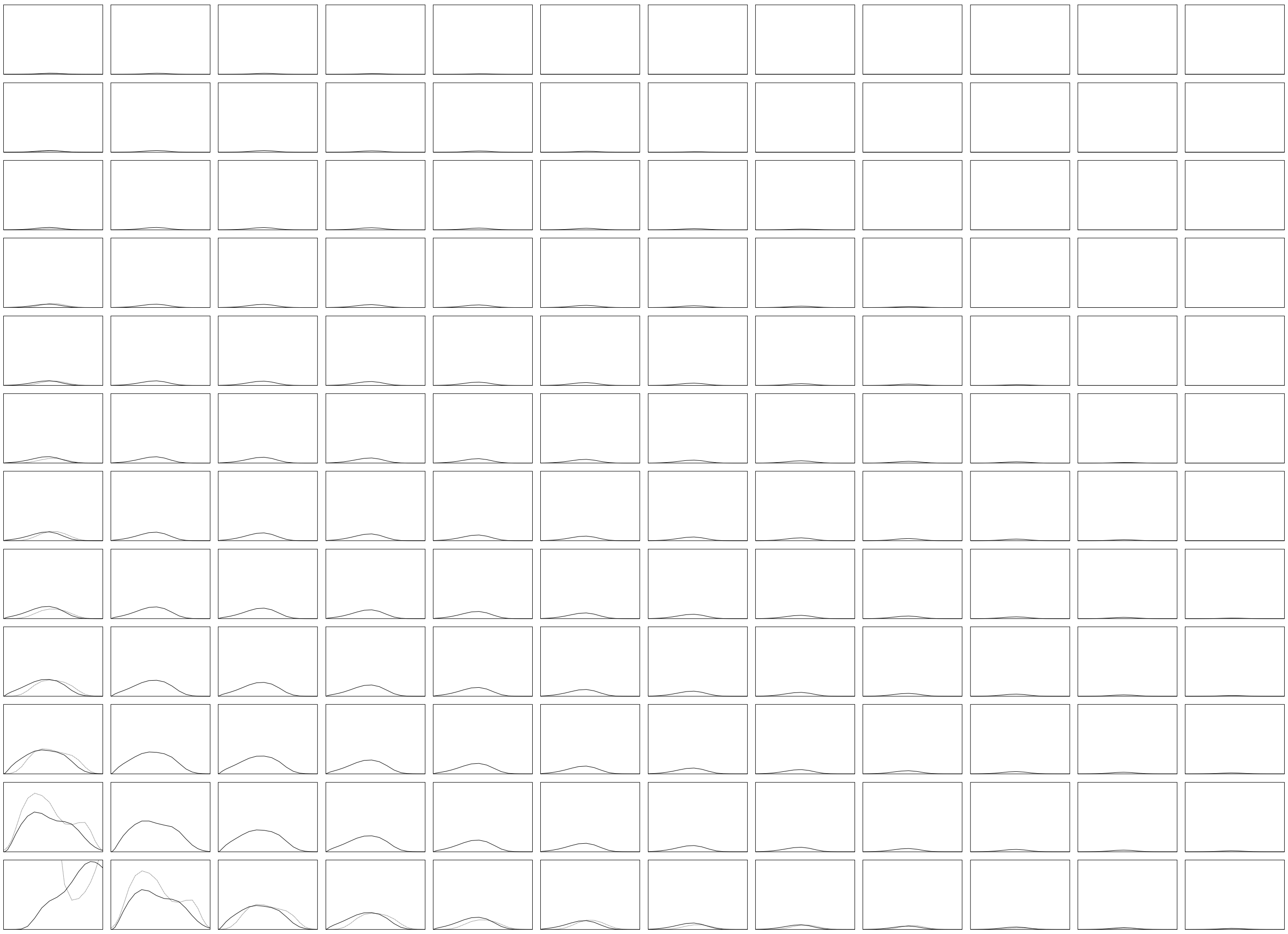


Abbildung 21: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 4 \rightarrow 3$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 6×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.95935 bis $1.95965{\times}10^{11}$ Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

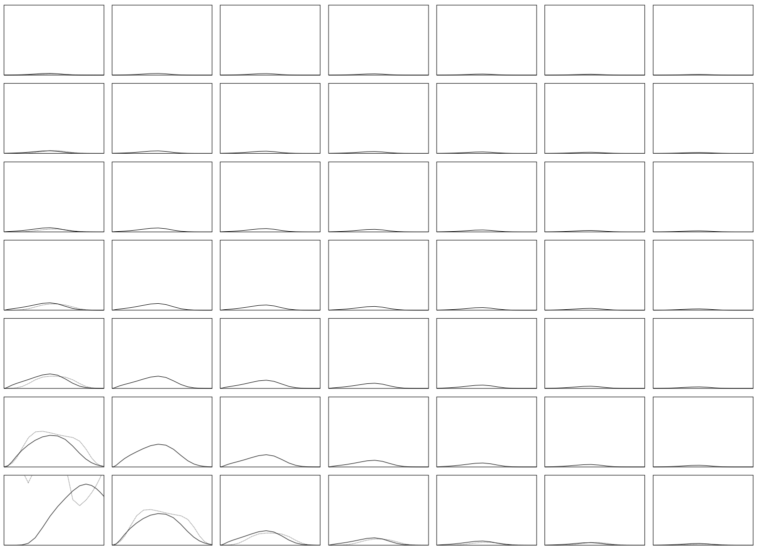


Abbildung 22: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 5 \rightarrow 4$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 3.0 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 8×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 2.4491 bis 2.4495×10^{11} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

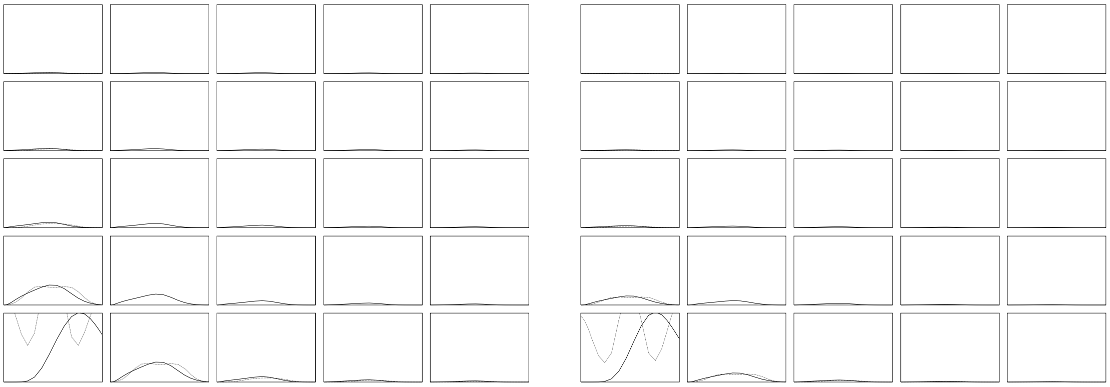


Abbildung 23: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 6 \rightarrow 5$-Linie (links) und $J = 7 \rightarrow 6$-Linie (rechts) in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (jew. links unten) von $p = 0$ bis 2.0 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 9×10^{-14} bzw. von 0 bis 6×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 2.93885 bis 2.9393×10^{11} Hz bzw. 3.4285 bis 3.429×10^{11} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

der projezierten Wolkenscheibe) abgebildet. Zusätzlich sind zu diesen mit dem 3D-Code berechneten Profile noch diejenigen aus dem 1D-Code gewonnenen, in den Einzelbildern entlang der Koordinatenachsen zum Vergleich aufgetragen (s. Diskussion zu den vergrößerten Abbildungen in Abschn. 8.1.4 für die Übergänge $J = 1 - 0$ bis $J = 3 - 2$). Die Bildpositionen entlang dieser Ortsachsen entsprechen also einem Impaktparameter von $p = 0$ bis 5.5 pc der zugehörigen austretenden Strahlungsintensitäten in den Abständen $\Delta p = 0.5$ pc; die übrigen, zwischen diesen Intervallen liegenden p-Werte, zu denen die restlichen abgebildeten Profile mit dem 3D-Modell berechnet wurden, ergeben sich aus der zugehörigen Bildposition (y, z) und $p = \sqrt{y^2 + z^2}$.

In Abb. 18 sind die ortsaufgelösten CS-Linienprofile des $J = 1 - 0$-Übergangs dargestellt. Die mit dem 3D-Strahlungstransport-Modell berechneten Profile zeigen eine insgesamt leicht rotverschobene schwach asymmetrische Emissionslinie mit einer schwachen Selbstabsorption rechts vom Linienkern, mit Ausnahme des Linienprofils aus dem Zentrum (für $p = 0$ bzw. (y=0,z=0)) mit einem ausgeprägten blauen Emissionspeak. Mit zunehmender Entfernung p zum Wolkenzentrum nimmt die Linienintensität kontinuierlich ab, unter Verringerung der Rotverschiebung und einer Zunahme der Symmetrie zum Linienzentrum (der ruhenden Linie); vgl. hierzu auch Abb. 11 oben links, in Abschn. 8.1.3.

In Abb. 19 sind die CS-Linienprofile des $J = 2 - 1$-Übergangs nach ihren Positionen aus der sphärischen Wolke angeordnet. Die nach dem 3D-Modell berechneten Profile zeigen wiederum eine insgesamt rot-verschobene, jedoch jetzt stark asymmetrische Linie mit einem relativ großen roten und kleineren blauen Emissionspeak, und einer starken Selbstabsorption im Linienkern dazwischen; mit Ausnahme des scheinbar blau-verschobenen Profils aus dem Zentrum mit hohem blauen Peak. Mit zunehmender Entfernung p zum Wolkenzentrum nimmt die Linienintensität ebenso stetig ab, unter Verringerung der Rotverschiebung und einer Zunahme der Symmetrie zum Linienzentrum (vgl. hierzu auch Abb. 11 oben rechts).

Abb. 20 zeigt die ortsaufgelösten Linienprofile des $J = 3 - 2$-Übergangs. Die Profile erscheinen wieder insgesamt rot-verschoben und asymmetrisch mit einem größeren roten und kleineren blauen Emissionspeak, sowie einer Absorptionssenke im Linienzentrum; mit Ausnahme des Profils aus dem Wolkenzentrum mit relativ großem blauen Peak. Auch hier beobachtet man das gleiche, wie schon zu den vorigen Übergängen, beschriebene Verhalten der Linienintensität mit wachsender Entfernung p zum Wolkenzentrum (vgl. Abb. 11 Mitte links).

Die Linienprofile des $J = 4 - 3$-Übergangs in Abb. 21 sind als Ganzes leicht rot-verschoben und schwach asymmetrisch mit einer schwachen Selbstabsorption rechts vom Linienkern, mit Ausnahme des blau-verschobenen Profils aus dem Zentrum. Mit zunehmender Entfernung p zum Wolkenzentrum nimmt die Linienintensität nun viel stärker ab, als zu den vorigen Übergängen. Dabei beobachtet man auch hier eine Zunahme der Symmetrie zum Linienzentrum mit wachsendem p (vgl. Abb. 11 Mitte rechts).

In Abb. 22 sind die örtlichen CS-Linienprofile des $J = 5 - 4$-Übergangs angeordnet. Die Linien sind insgesamt leicht rot-verschoben und asymmetrisch mit schwach gedämpften, schneller abfallenden, rechten blauen Linienflügeln (mit Ausnahme der blau-verschobenen symmetrischen Linie aus dem Zentrum). Mit wachsender Entfernung p nimmt die Intensität im Vergleich zur Höhe des blauen Emissionspeaks aus dem Wolkenzentrum so rasch ab, daß die Wolke in diesem Linienübergang nur bis zu etwa dem halben Wolkenradius $r = 3$ pc zu sehen ist. Die Asymmetrie der Linien nimmt dabei gleichzeitig wieder ab (s. genauere Details in Abb. 11 unten links).

In Abb. 23 sind die ortsaufgelösten Linienprofile des $J = 6 - 5$- und $J = 7 - 6$-Übergangs dargestellt. In diesen Linien ist die Wolke nur noch in ihrem innersten Bereich bis etwa $r =$ 2 pc bzw. 1 pc beobachtbar, im Verhältnis zur relativ hohen Strahlungsintensität der blau-verschobenen Emissionslinie aus dem Wolkenkern (s. genauere Details zur $J = 6 - 5$-Linie in Abb. 11 unten rechts).

In Abb. 40 sind die ortsaufgelösten Linienprofile des $J = 1 - 0$-Übergangs aus der sphärischen Wolke mit *hoher* Turbulenz dargestellt. Die mit dem 3D-Modell berechneten Profile zeigen dort eine insgesamt nur schwach rot-verschobene und nahezu *symmetrische* Emissionslinie *ohne* Selbstabsorption, mit Ausnahme des ebenso fast symmetrischen Profils aus dem Wolkenzentrum ($p = 0$) mit einer leichten *Blau*verschiebung (vgl. hierzu auch Abb. 47 oben links, im Anh. D.1.3). In dieser, sowie in allen folgenden Abbildungen 41–45 der ortsaufgelösten Linienprofile der übrigen Übergänge aus der Wolke mit hoher Turbulenz, nimmt dabei die Linienintensität wiederum mit zunehmender Entfernung p zum Wolkenzentrum kontinuierlich ab, *jedoch* jetzt bei etwa gleich bleibender Rotverschiebung (der Linien für $p > 0$) und einer Zunahme der Symmetrie zur Linienmitte (vgl. hierzu auch die Diagramme in Abb. 47 von oben rechts bis unten rechts, zur $J = 2 - 1$- bis $J = 6 - 5$-Linie). Für die höheren Übergänge ab $J = 5$ ist auch für eine größere Turbulenz wieder eine viel stärkere Abnahme der Linienintensität mit wachsendem p beobachtbar.

In Abb. 41, wo die Profile der $J = 2 - 1$-Linie aus der Wolke mit großer Turbulenzgeschwindigkeit angeordnet sind, zeigt die nach dem 3D-Modell berechnete Intensitätsverteilung aus dem Wolkenzentrum (im Gegensatz zu der aus dem 1D-Modell) ein insgesamt leicht blau-verschobenes, abgeschwächtes P-Cygni-Profil mit einem starken blauen Peak und einem schwachen, nur angedeuteten roten Peak, d.h. Selbstabsorption in der linken Linienhälfte. Die gleiche Profilform (für $p = 0$) ist auch in der Abb. 42 zur $J = 3 - 2$-Linie in einer etwas schwächeren Form zu erkennen. Die zu den übrigen, vom Wolkenzentrum entfernten Positionen ($p > 0$) berechneten rot-verschobenen Profile der $J = 2-1$- und $J = 3-2$-Linien in der Abb. 41 bzw. 42, sind nahe der Kernregion ebenso noch schwach asymmetrisch mit einem etwas größeren roten Emissionspeak und einer schwachen Selbstabsorption im Linienkern, die sich mit zunehmender Entfernung p schnell abschwächt (vgl. auch Abb. 47 oben rechts bzw. Mitte links).

Die blau-verschobenen Profile der $J = 4 - 3$- und $J = 5 - 4$-Linie (aus dem 3D-Modell) aus dem Zentrum der Wolke mit hoher Turbulenz, in der Abb. 43 bzw. 44, sind etwas asymmetrisch und zeigen immer noch eine schwache Selbstabsorption links vom Linienkern, während alle restlichen weiter von der Wolkenmitte entfernten, leicht rot-verschobenen Emissionsprofile fast symmetrisch sind (vgl. Abb. 47 Mitte rechts bzw. unten links).

Die ortsaufgelösten Profile des $J = 6 - 5$- und $J = 7 - 6$-Übergangs in Abb. 45, sind durch den starken Intensitätsabfall nur noch bis etwa $p = 1$ pc zu erkennen (s. genauere Details zur $J = 6 - 5$-Linie in Abb. 47 unten rechts): Darin sind die Linien (aus dem 3D-Modell) aus dem Zentrum nur schwach blau-verschoben und ebenso fast symmetrisch wie die übrigen leicht rot-verschobenen Emissionslinien für $p > 0$.

8.2 Numerische Ergebnisse zu einer axialsymmetrischen, rotierenden und kollabierenden Molekülwolke

8.2.1 Die Wolken- und Programm-Parameter

Tabelle 5: Spezifische Eingabedaten zur axialsymmetrischen Wolke

Ges. Radiusbereich der Wolke	$0 \le r/\mathrm{pc} \le 6.0 =: R$ für $\theta = 0, \pi/2$ minimal $0 \le r/\mathrm{pc} \le 8.5$ für $\theta = \pi/4$ maximal
Wolkenkern	$0 \le r/\mathrm{pc} \le 0.2 = R_i$; $M = 10^4 M_\odot$; $v_\mathrm{rot} = 13$ km/s
Radiales Geschw.-Gesetz	$v_\mathrm{r}(x,y,z) = \begin{cases} -a\sqrt{-W_{-1}\left(-\exp(-f_\mathrm{s}(x,y,z))\right)} & \text{für} \quad r \ge R_i \text{, s. Gl. (110) oben} \\ 0 & \text{für} \quad r < R_i \end{cases}$ (mit $\Gamma = g_{l,1} = g_{l,2} = 0$ in $f_\mathrm{s}(x,y,z)$)
Geschw.-Bereich der rad. Komp.	$v_\mathrm{r}(1.5\,R_i,\theta)^{(\star\star)} = -16.72^{(\star)} \le v_\mathrm{r}/(\mathrm{km/s}) \le -3.30 = v_\mathrm{r}(R,\theta)$ für $\theta = 0$ $v_\mathrm{r}(R_i,\theta) = -15.92^{(\star)} \le v_\mathrm{r}/(\mathrm{km/s}) \le -3.27 = v_\mathrm{r}(R,\theta)$ für $\theta = \pi/2$
Azimutales Geschw.-Gesetz	$v_\phi(x,y,z) = \begin{cases} v_\mathrm{rot}\, R_i \sqrt{x^2+y^2}/(x^2+y^2+z^2) & \text{für} \quad r \ge R_i\text{, s.Gl.(116) od. (83)} \\ 0 & \text{für} \quad r < R_i \end{cases}$
Geschw.-Bereich der azimut. Komp.	$v_\phi(R_i,\theta) = 13.0^{(\star)} \ge v_\phi/(\mathrm{km/s}) \ge 0.43 = v_\phi(R,\theta)$ für $\theta = \pi/2$
Turbulenzgeschw.	(a) $v_\mathrm{turb} = 6.0$ km/s=konst, (b) $v_\mathrm{turb} = 30.0$ km/s=konst (im Anhang)
Dichtegesetz	$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{v_\mathrm{r}(1.5\,R_i,\theta)\,1.5^2\,R_i^2}{v_\mathrm{r}(x,y,z)\,(x^2+y^2+z^2)}\,\rho(1.5\,R_i) & \text{für} \quad r \ge 1.5\,R_i \\ \rho(1.5\,R_i) & \text{für} \quad r < 1.5\,R_i \end{cases}$ Vgl. Gl. (87), *hier* bezogen auf die von $r = 0$ bis zu $r = 1.5\,R_i$ konstant gesetzte Dichte$^{(\star\star)}$ $\rho_\mathrm{H_2}(1.5\,R_i) = 1.82 \times 10^{-18}\mathrm{g/cm^3}$ (rechts), bzw. auf $n_\mathrm{H_2}(1.5\,R_i) = 5.44 \times 10^5\mathrm{cm^{-3}}$ in der Formel für $n_\mathrm{H_2}(x,y,z)$, $n_\mathrm{CS}(1.5\,R_i) = 5.44 \times 10^{-4}\mathrm{cm^{-3}}$ in der Formel für $n_\mathrm{CS}(x,y,z)$, oder $n_{i,\mathrm{CS}}(1.5\,R_i) = \dfrac{n_\mathrm{CS}(1.5\,R_i)}{\sum_{j=0}^{(N_i-1)} g_j\,\exp(-h\nu_{0j}/kT)}\,g_i\,\exp(-h\nu_{0i}/kT)$, für $n_{i,\mathrm{CS}}(x,y,z)$, ...wobei
$X(\mathrm{CS})$	$n(\mathrm{CS})/n(\mathrm{H_2}) = 10^{-9}$
Dichtebereich	$\rho(r \le 1.5\,R_i, \theta = 0) = 1.82 \times 10^{-18} \ge \rho_\mathrm{H_2}/(\mathrm{g/cm^3}) \ge 2.31 \times 10^{-20} = \rho(R, \theta = 0)$ bzw. $5.44 \times 10^{-4} \ge n_\mathrm{CS}/\mathrm{cm^{-3}} \ge 6.90 \times 10^{-6}$, ebenfalls für $\theta = 0$; die entsprechenden Werte für $\theta = \pi/2$ und $\pi/4$, sowie an den innersten Gitterpunkten *vor* dem Wolkenkern bei $r = 0.5$ bzw. 0.7 pc, siehe Tab. 7.
Wolkentemp.	$T_\mathrm{kin} = 40$ K
	$(\star)$ = Durch die gewählte 3D-Gitterauflösung werden aber (bei den num. Rechnungen) nur die maximalen Beträge bei $r = 0.5$ pc (s. Tab. 7) erreicht. Siehe auch Tab. 7 zu den übrigen Extremwerten, die an den innersten und äußersten Punkten des 3D-Gitters zu verschiedenen Breiten θ erreicht werden. $(\star\star)$ = Aus rechentechnischen Gründen ließ sich der Funktionswert von $v_\mathrm{r}(R_i, \theta = 0)$ *nicht* mit Hilfe der in MapleV implementierten W-Funktion berechnen.

Tabelle 6: Programmspezifische Eingabedaten beim 3D-Code

Anzahl der 3D-Gitterpunkte (in x-, y- bzw. z-Richtung)	$N_x = N_y = N_z = 25$ (=insges. 15625)	
Resultierender Gitterpunktabstand	$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.5$ pc	
Anzahl der Rot.-Niveaus von CS	$N_i = 8$	
Anzahl der Winkel	$N_m = N_p = 16$ (=insges. 256)	
Anzahl der Frequenzen pro Linienübergang	$N_n = 20$	
Zeitschritt-Intervallgröße	$\Delta t = 100000$s-Einh.	
Progr.-Abbruch bei Abw. $\Delta n_i/n_i$ (für jedes Niveau i)	$\leq 10^{-3}$	
	$v_{\rm turb} = 6.0$ km/s	$v_{\rm turb} = 30.0$ km/s
Resultierende Anz. der Zeitschritte (=DDRIV2-Progr.-Aufrufe)	$N_{\Delta t} = 34$	$N_{\Delta t} = 31$
Ges. Rechenzeit (SUN Enterprise 3500, SPARC v9)	t =49h43	t =45h28

Tabelle 7: Zur axialsymmetrischen Wolke: Die H_2-Dichte ρ, CS-Anzahldichte $n_{\rm CS}$, und die Beträge der radialen $v_{\rm r}$, bzw. azimutalen Geschwindigkeitskomponente v_ϕ, zu den Extremwerten an den innersten (im Wolkenkernbereich) und äußersten Punkten des 3D-Gitters für verschiedene Breiten θ, sowie außerdem zu verschiedenen Zwischenwerten (s. untere beiden Tabellenzeilen) bezüglich der in den folgenden Abbildungen der ortsaufgelösten CS-Linienprofilen dargestellten Positionen im Innern bzw. am Rand der Wolke.

	$\theta = 0$		$\theta = \pi/2$			$\theta = \pi/4$	
r / pc	ρ / (g/cm^3)	$n_{\rm CS}$ / (cm^{-3})	ρ / (g/cm^3)	$n_{\rm CS}$ / (cm^{-3})	r / pc	ρ / (g/cm^3)	$n_{\rm CS}$ / (cm^{-3})
0 - 0.3	1.82×10^{-18}	5.44×10^{-4}	1.82×10^{-18}	5.44×10^{-4}	0 - 0.3	1.82×10^{-18}	5.44×10^{-4}
0.5	8.52×10^{-19}	2.55×10^{-4}	7.96×10^{-19}	2.38×10^{-4}	0.7	4.89×10^{-19}	1.46×10^{-4}
6.0	2.31×10^{-20}	6.90×10^{-6}	1.99×10^{-20}	5.95×10^{-6}	8.5	1.34×10^{-20}	3.99×10^{-6}
	$\|v_{\rm r}\|$ / (cm/s)	v_ϕ / (cm/s)	$\|v_{\rm r}\|$ / (cm/s)	v_ϕ / (cm/s)		$\|v_{\rm r}\|$ / (cm/s)	v_ϕ / (cm/s)
0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	1.29×10^6	0	1.18×10^6	5.20×10^5	0.7	1.04×10^6	3.68×10^5
6.0	3.30×10^5	0	3.27×10^5	0.43×10^5	8.5	2.65×10^5	0.31×10^5
1.0	–	0	–	2.60×10^5	1.4	–	1.84×10^5
5.0	–	0	–	0.52×10^5	7.1	–	0.37×10^5

8.2.2 Die NLTE-Besetzungszahlen

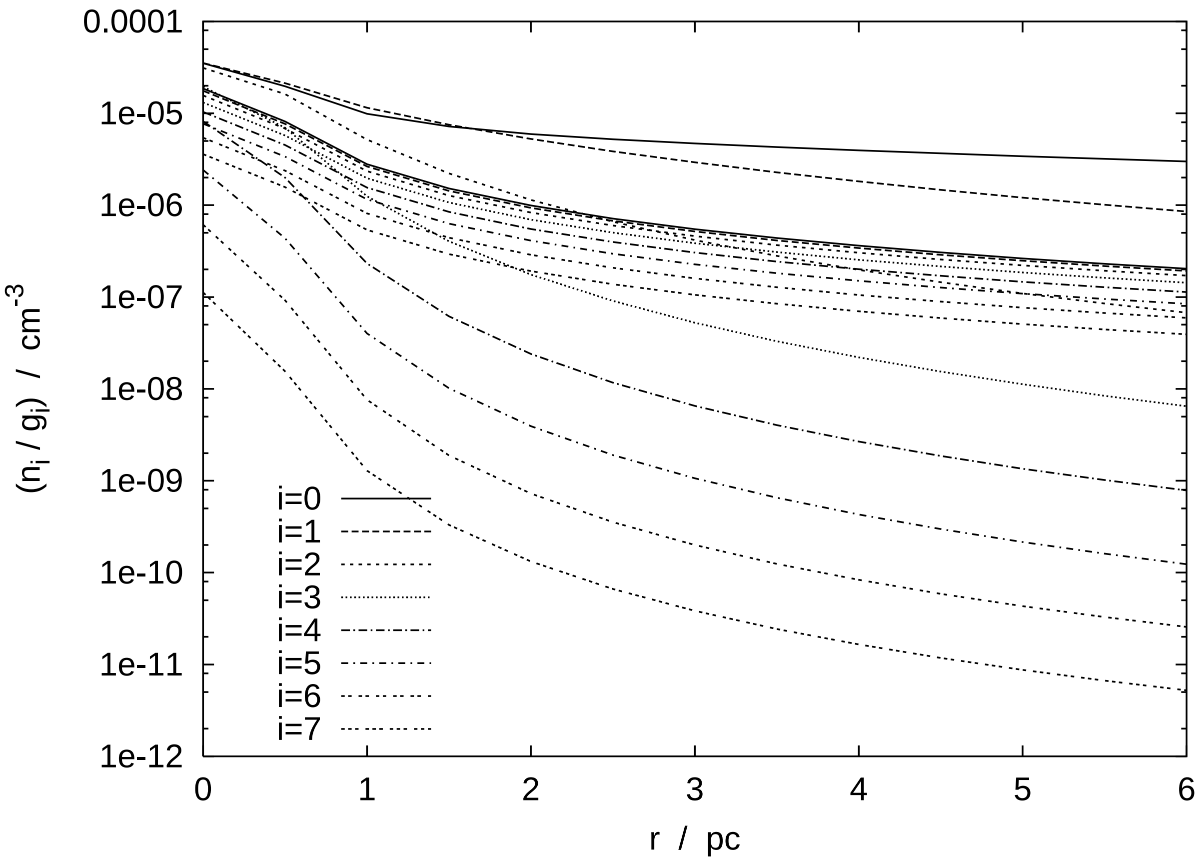


Abbildung 24: Mit dem 3D-Strahlungstransport-Code berechnete *non-LTE*-Besetzungszahldichten n_i/g_i (dividiert durch das statistische Gewicht g_i des i-ten Zustands), bzw. *LTE*-Besetzungszahldichten berechnet nach dem Maxwell-Boltzmann-Verteilungsgesetz, der untersten acht Rotationsniveaus $J = 0$ bis $J = 7$ des CS-Moleküls in der *axialsymmetrischen Wolke*, aufgetragen gegen den Radius r *in der Äquatorebene* von der Wolkenkernmitte bei $r = 0$ bis $r = 6.0$pc. Dabei liegen die LTE-Kurven vorwiegend im oberen Teil der Abb. mit Ausnahme der ersten drei non-LTE-Besetzungszahlen des $J = 0$ bis $J = 2$-Zustands als die obersten Kurven im Diagramm. Die einzelnen LTE-Kurvenverläufe entsprechen der im Text beschriebenen Wolken-Dichteverteilung $\rho(r, \theta = 90°)$ in Abhängigkeit vom Radius r in der Äquatorebene.

In Abb. 24 sind die mit dem 3D-Strahlungstransport-Code berechneten non-LTE-Besetzungszahldichten n_i/g_i (dividiert durch das statistische Gewicht g_i des i-ten Zustands), bzw. nach dem Maxwell-Boltzmann-Verteilungsgesetz bestimmten LTE-Besetzungszahldichten der untersten acht Rotationsniveaus $J = 0$ bis $J = 7$ des CS-Moleküls in der *axial*symmetrischen Wolke (mit der Temperatur $T_{\rm kin} = 40$ K) gegen den Radius r in der Äquatorebene – bzw. in der Abb. 25 entlang der Polachse – von der Wolkenkernmitte bei $r = 0$ bis zum Radius $R = 6.0$ pc aufgetragen. Dabei folgt jede einzelne, sowohl LTE-, als auch resultierende NLTE-Besetzungszahldichte n_i eines betrachteten J-Zustands der im Abschnitt 6 hergeleiteten 2D-Dichteverteilung einer rotierenden und kollabierenden Wolke, d.h. Gl. (86) (mit der radialen Geschwindigkeit aus Gl. (110)). Wobei für die innere Bezugsgröße $\rho(R_i)$ in Gl. (86) entweder die jeweils von $r = 0$ bis zum Wolkenkern-Radius $R_i = 0.2$ pc (bzw. $r = 1.5\,R_i$) als konstant gesetzte und vorgegebene H_2-Dichte $\rho(r \leq 1.5\,R_i) = 1.82 \times 10^{-18}$ g/cm^3, oder die entsprechende CS-

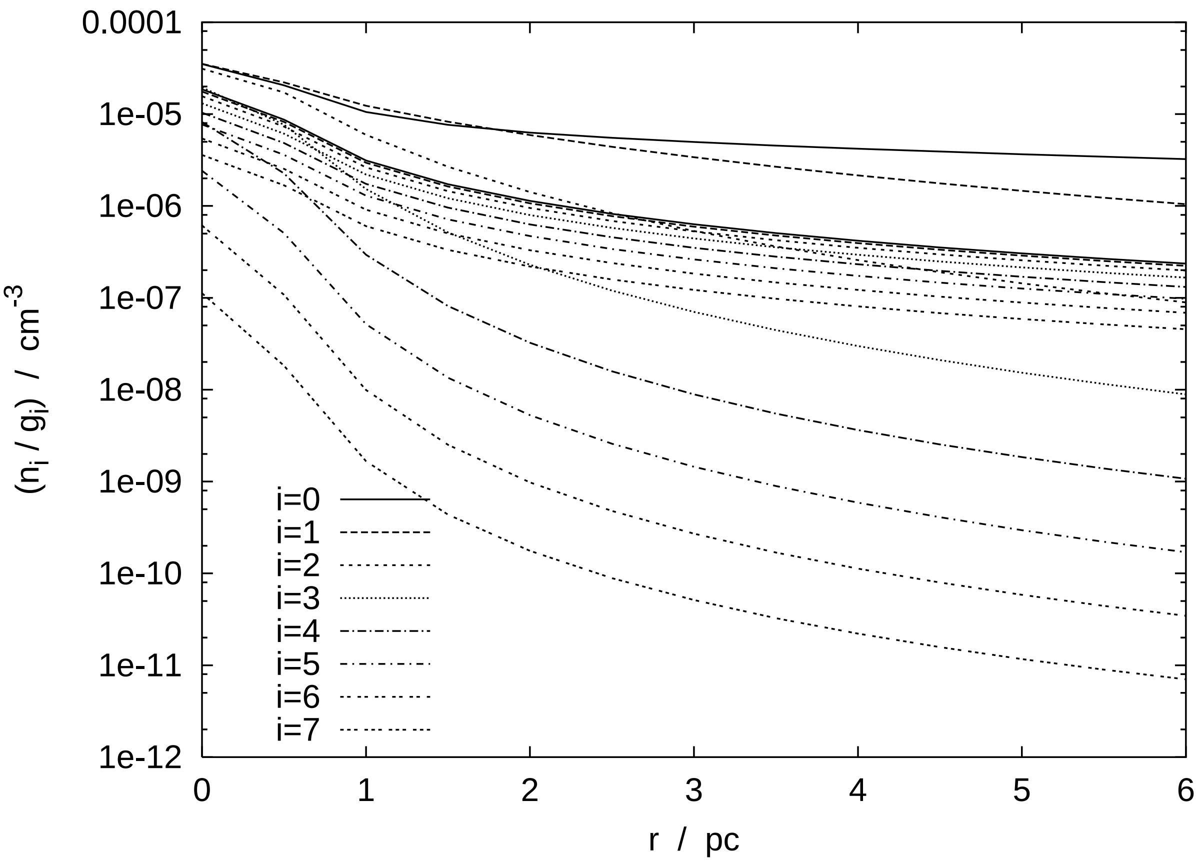


Abbildung 25: Mit dem 3D-Strahlungstransport-Code berechnete *non-LTE*-Besetzungszahldichten n_i/g_i (dividiert durch das statistische Gewicht g_i des i-ten Zustands), bzw. *LTE*-Besetzungszahldichten berechnet nach dem Maxwell-Boltzmann-Verteilungsgesetz, der untersten acht Rotationsniveaus $J = 0$ bis $J = 7$ des CS-Moleküls in der *axialsymmetrischen Wolke*, aufgetragen gegen den Radius r *entlang der Polachse* von der Wolkenkernmitte bei $r = 0$ bis $r = 6.0$pc. Dabei liegen die LTE-Kurven vorwiegend im oberen Teil der Abb. mit Ausnahme der ersten drei non-LTE-Besetzungszahlen des $J = 0$ bis $J = 2$-Zustands als die obersten Kurven im Diagramm. Die einzelnen LTE-Kurvenverläufe entsprechen der im Text beschriebenen Wolken-Dichteverteilung $\rho(r, \theta = 0°)$ in Abhängigkeit vom Radius r entlang der Polachse.

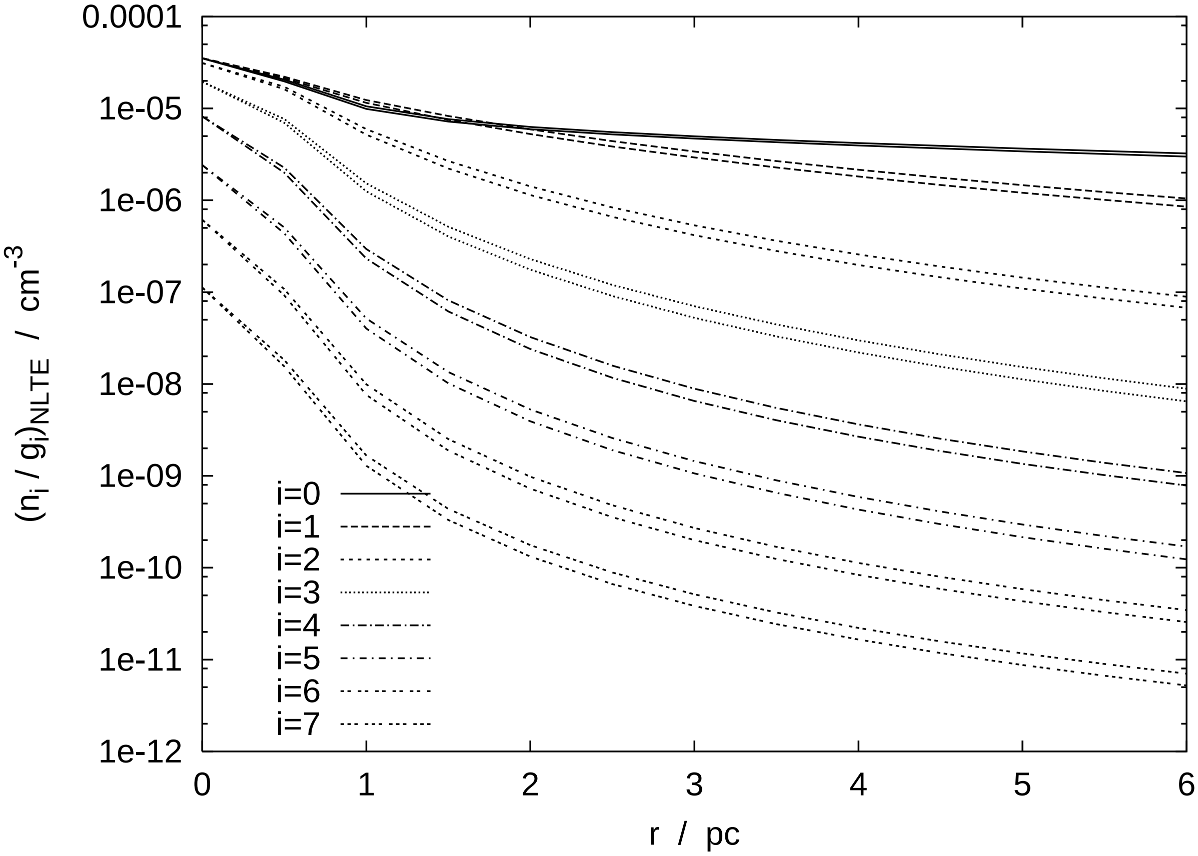


Abbildung 26: Vergleich der beiden *non-LTE*-Besetzungszahldichten n_i/g_i der untersten acht Rotationsniveaus $J = 0$ bis $J = 7$ des CS-Moleküls in der *axialsymmetrischen Wolke*, (a) entlang der Polachse (jew. obere Kurve) und (b) in der Äquatorebene (jew. untere Kurven), in Abhängigkeit vom Radius r.

Gesamtdichte $n_{\rm CS}(1.5\,R_i) = 5.44 \times 10^{-4}$ cm^{-3}, bzw. die einzelnen dortigen Besetzungszahldichten $n_i(1.5\,R_i)$ aus der Maxwell-Boltzmann-Verteilung (unter Berücksichtigung der Erhaltung des Wertes von $n_{\rm CS}(1.5\,R_i) \equiv \sum_i n_i(1.5\,R_i)$), beim Programm-Start eingesetzt wurden. D.h. unter der Voraussetzung, daß die Summe der LTE-Besetzungszahldichten $\sum_i n_i(R_i)$ im Wolkenkern der gesamten dortigen CS-Moleküldichte $n_{\rm CS}(R_i)$ entspricht, ist dann auch wieder die Summe der resultierenden NLTE-Besetzungszahldichten an einem *beliebigen* Ort (r, θ) (außerhalb des Kerns) identisch mit der gesamten lokalen CS-Moleküldichte: $\sum_i n_i(r, \theta) = n_{\rm CS}(r, \theta)$.

In den Abb. 24 und 25 sind die oberen Zustände ab $J = 4$ *überall* in der Wolke stark *unter*besetzt im Vergleich zu den LTE-Populationen, vor allem aber in großer Entfernung zum Kern, wie bei unserem sphärischen Wolken-Beispiel. Die unteren beiden Zustände $J = 0$ und $J = 1$ sind dagegen wiederum überall stark *über*besetzt, mit einer schwachen Besetzungszahl-Inversion, *hier* aber schon ab der Wolkenkernmitte bei $r = 0$ bis nur etwa $r = 1.6$ pc in der Äquatorebene (vgl. Abb. 24) bzw. bis $r = 1.75$ pc auf der Polachse (vgl. Abb. 25), im Gegensatz zur sphärischen Wolke von ca. $r = 1$ pc bis $r = 2$ pc. Die NLTE-Kurven der Rotationszustände $J = 2$ und $J = 3$ überschneiden sich jeweils mit ihren LTE-Werten bei den inneren Wolkenradien $r = 2.7$ pc in der Äquatorebene und $r = 3.0$ pc entlang der Polachse (beim $J = 2$-Zustand), bzw. bei $r = 0.6$ pc und $r = 0.7$ pc (beim $J = 3$-Zustand); von der Wolkenmitte $r = 0$ bis zu diesen jeweiligen Radien sind diese Zustände somit (fast wie im sphärischen Wolken-Beispiel) im Vergleich zum thermischen Gleichgewicht *über*besetzt, und von dort an bis zum Wolkenrand *unter*besetzt.

Abb. 26 zeigt noch einmal im Vergleich die beiden non-LTE-Besetzungszahldichten n_i/g_i der untersten acht Rotationsniveaus $J = 0$ bis $J = 7$ des CS-Moleküls in der axialsymmetrischen Wolke entlang der Polachse und in der Äquatorebene, in Abhängigkeit vom Radius r. Die NLTE-Besetzungszahlen entlang der Polachse sind zu jeder Entfernung r vom Wolkenzentrum etwas größer als die entsprechenden in der Äquatorebene (genauso verhalten sich vergleichweise die verschiedenen LTE-Kurven in den Abb. 24 und 25), was an den unterschiedlichen Dichteverläufen $\rho(r, \theta)$ in diesen verschiedenen Richtungen θ, außerhalb des Wolkenkerns, liegt, wie sie in Abschn. 6.8 beschrieben werden: Für ein konstantes $r > R_i = 0.2$ pc (bzw. durch den gewählten Gitterpunktabstand im 3D-Programm erst ab $r \geq 0.5$ pc) nimmt die Dichte in äquatorialen Breiten ab, d.h. die Wolkenmaterie ist über dem Pol des inneren Wolkenkerns etwas stärker verdichtet. Vergleichswerte der Dichte zu den verschiedenen Breiten $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$, zu jeweils einer gleichen Entfernung r vom Zentrum, findet man in Tabelle 7. Dadurch ergeben sich auch die etwas unterschiedlichen, von der Breite θ abhängigen Schnittpunkte zwischen den Kurven der NLTE- und LTE-Besetzungszahldichten des $J = 2$- und $J = 3$-Zustandes (in den Abb. 24 und 25), oberhalb denen diese Zustände im NLTE-Fall der axialsymmetrischen Wolke – vergleichsweise zum Fall des thermischen Gleichgewichts – *unter*besetzt sind.

Die entsprechenden, vom Ortsradius abhängigen, resultierenden NLTE-Besetzungszahlen der untersten acht Rotationsniveaus des CS-Moleküls für dieselbe axialsymmetrische Wolke mit *größerer* Turbulenzgeschwindigkeit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s, unterscheiden sich jeweils zu denen in den Abb. 24–26 gezeigten nur unmerklich. Für die im Anhang D.2.1 dokumentierten CS-Linienprofile zur axialsymmetrischen kollabierenden Wolke mit hoher Turbulenz, gelten also die gleichen Diagramme 24 und 25 für die ortsabhängigen Besetzungszahldichten (n_i/g_i) in der Äquatorebene bzw. entlang der Polachse.

8.2.3 Die ortsaufgelösten CS-Linienprofile

In den Abbildungen 27–32 sind die mit der 3D-Strahlungstransport-Methode berechneten ortsaufgelösten CS-Linienprofile der Übergänge $J = 1 - 0$ bis $J = 3 - 2$ aus der axialsymmetrischen rotierenden Wolke mit Kollaps und einer Turbulenzgeschwindigkeit von $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s (bzw. in den Abb. 54–59, im Anhang D.2.1, die entsprechenden Profile zur höheren Turbulenzgeschwindigkeit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s) für jeweils drei verschiedene Blickwinkel ($\vartheta = 1°, 89°$ und 45°, gemessen zur Polachse) nach ihrer Position angeordnet. Dabei sind die einzelnen aus der Wolke, d.h. aus dem kartesischen Gitter (durch die vordere, bzw. obere Würfelfläche im jeweils unteren, bzw. oberen Bild) für eine jeweils *fast* senkrechte Sicht auf den Äquator, bzw. Pol, tretenden Intensitätsverteilungen der betreffenden Linie, in Richtung der Abszisse[12] und Ordinate[13] in den Abständen von Δx, Δy, bzw. $\Delta z = 1.0$ pc für eine Entfernung von -5.0 bis $+5.0$ pc vom Wolkenzentrums (in der Bildmitte) angeordnet.

Für die Auflösung des zugrunde liegenden 3D-Gitters in diesem Modell-Beispiel ergibt sich wiederum durch die gleich gewählte Anzahl der Ortsgitterpunkte von $N_x = N_y = N_z = 25$ ein äquidistanter Gitterpunktabstand von Δx, Δy, bzw. $\Delta z = 0.5$ pc, wobei sich die Wolkenkernmitte wieder im Gitterzentrum (bei $x = y = z = 0$) befindet, und das würfelförmige Gitter die nicht-sphärische Wolke bis *mindestens* zum Radius $R = 6.0$ pc einschließt. Im Gegensatz zur kugelförmigen Wolke (im vorigen Abschn. 8.1) wurde hier das 2D-Geschwindigkeitsfeld und die Dichteverteilung der axialsymmetrischen Wolke (aus Abschn. 6) bis zu den äußeren Begrenzungen des 3D-Gitters, d.h. im *gesamten* Würfelgitter-Volumen, berücksichtigt. Durch diese Gitterauflösung sind die am nächsten zum inneren Wolkenkern-Radius ($R_i = 0.2$ pc) liegenden Ortsgitterpunkte von diesem jedoch wiederum immer noch 0.3 pc entfernt, so daß gerade die am Kernradius größten radialen Geschwindigkeiten ($v_{\rm r}(R_i, \theta = \pi/2) = -15.92$ km/s, bzw. $v_{\rm r}(1.5R_i, \theta = \pi/2) = -14.3$ km/s und $v_{\rm r}(1.5R_i, \theta = 0) = -16.72$ km/s) nicht erreicht, d.h. berücksichtigt werden, sondern höchstens nur $v_{\rm r}(r = 0.5\ {\rm pc}, \theta = \pi/2) = -11.8$ km/s unter dem Blickwinkel $\vartheta = 90°$ zum Wolkenzentrum in der Äquatorebene, $v_{\rm r}(r = 0.7\ {\rm pc}, \theta = \pi/4) = -10.4$ km/s entlang der Sichtlinie mit $\vartheta = 45°$ in Richtung des Zentrums, sowie der maximalen radialen Geschwindigkeit von $v_{\rm r}(r = 0.5\ {\rm pc}, \theta = 0) = -12.9$ km/s in Blickrichtung zum Pol ($\vartheta = 0°$), vgl. Tab. 7. Dabei wird in diesem 3D-Modell die radiale Geschwindigkeit innerhalb des homogenen Kerns wieder $v_{\rm r}(r < R_i) = 0$ gesetzt, und die Dichte $\rho(r < 1.5R_i) = \rho(1.5R_i) = 1.82 \times 10^{-18}$ g/cm^3 konstant zu jener am Radius $r = 1.5R_i = 0.3$ pc (aus rechentechnischen Gründen). Unter einem Blickwinkel von $\vartheta = 90°$ erreicht der Betrag der in Strahlrichtung projezierten azimutalen Geschwindigkeitskomponente jeweils sein Maximum in der Schnittebene parallel zur vorderen Gitteraustrittsfläche, welche das Wolkenzentrum einschließt. Dabei nimmt der Betrag entsprechend der Gl. (83) (zu einer konstanten Breite θ) mit der Entfernung $\hat{r} = r/R_i$ vom inneren Kernradius wie $1/\hat{r}$ ab, so daß der Maximalbetrag $|v_\phi|$ entlang der Strahlrichtung mit der Austrittsposition ($y = \pm 0.5$ pc, $z = 0$) links und rechts von den Koordinaten des Wolkenzentrums (bei $y = z = 0$) nur noch 5.2 km/s ist. Im Vergleich dazu ist die äquatoriale Rotationsgeschwindigkeit $v_{\rm rot} = 13$ km/s des sphärischen Wolkenkerns bei $R_i = 0.2$ pc viel größer. Durch die gewählte Gitterauflösung wird dadurch also nur eine maximale azimutale Geschwindigkeit der Wolke von 5.2 km/s in der Äquatorebene berücksichtigt.

In den Abbildungen 27, 29 und 31 (jew. untere Bildhälfte), sind die Profile (aus Platzgründen) zu den am nächsten zum Wolkenkern liegenden Positionen in einer Entfernung von $y = \pm 1.0$ pc,

[12]...entsprechend der y-Achse.

[13]...entsprechend der z-Achse im jeweils unteren Bild, bzw. der x-Achse im jeweils oberen Bild

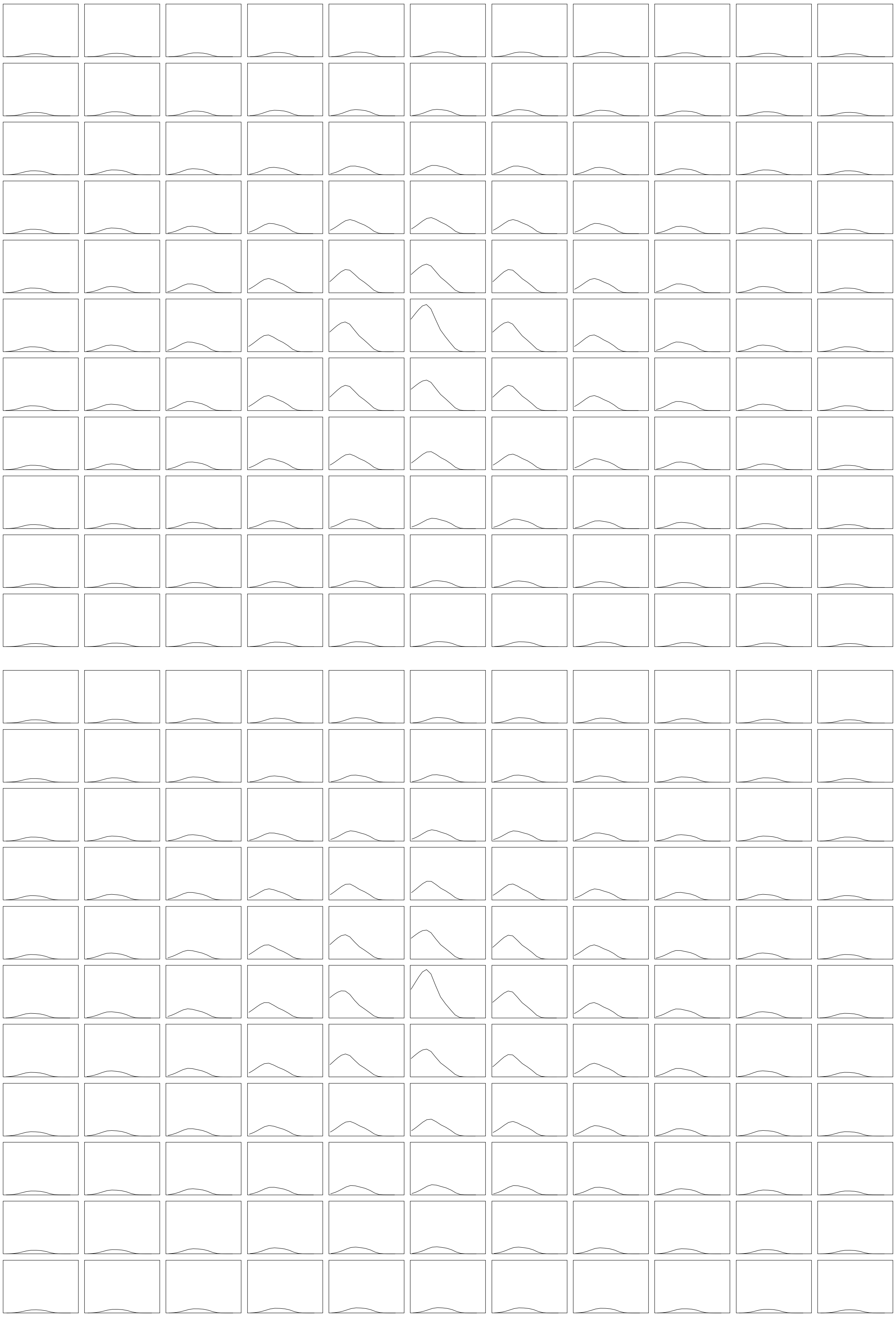


Abbildung 27: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie für den Blickwinkel $\vartheta = 1°$ (oben) bzw. 89° (unten). Jeweilige Abszisse und Ordinate: Profile in den Abständen von 1.0 pc vom Wolkenzentrum (Mitte) von -5.0 bis +5.0 pc, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 7×10^{-15} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 4.8987 bis 4.8995×10^{10} Hz aufgetragen sind.

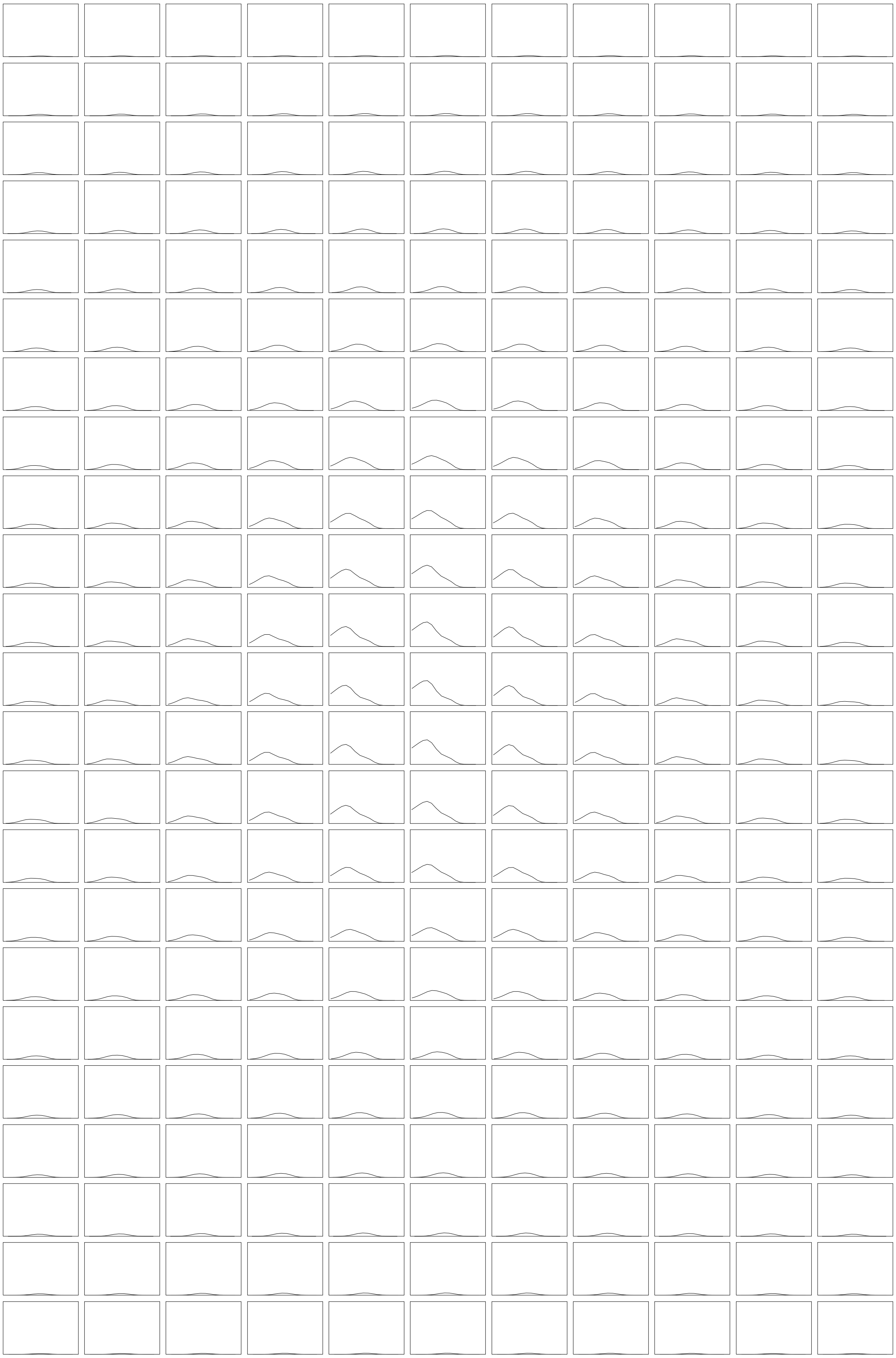


Abbildung 28: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie in den Abständen von 1.0 pc (in beiden Achsenrichtungen) für eine schräge Aufsicht mit Blickwinkel $\vartheta = 45°$. Das Wolkenzentrum befindet sich in der Bildmitte. Es sind jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 7×10^{-15} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 4.8987 bis 4.8995$\times 10^{10}$ Hz aufgetragen sind.

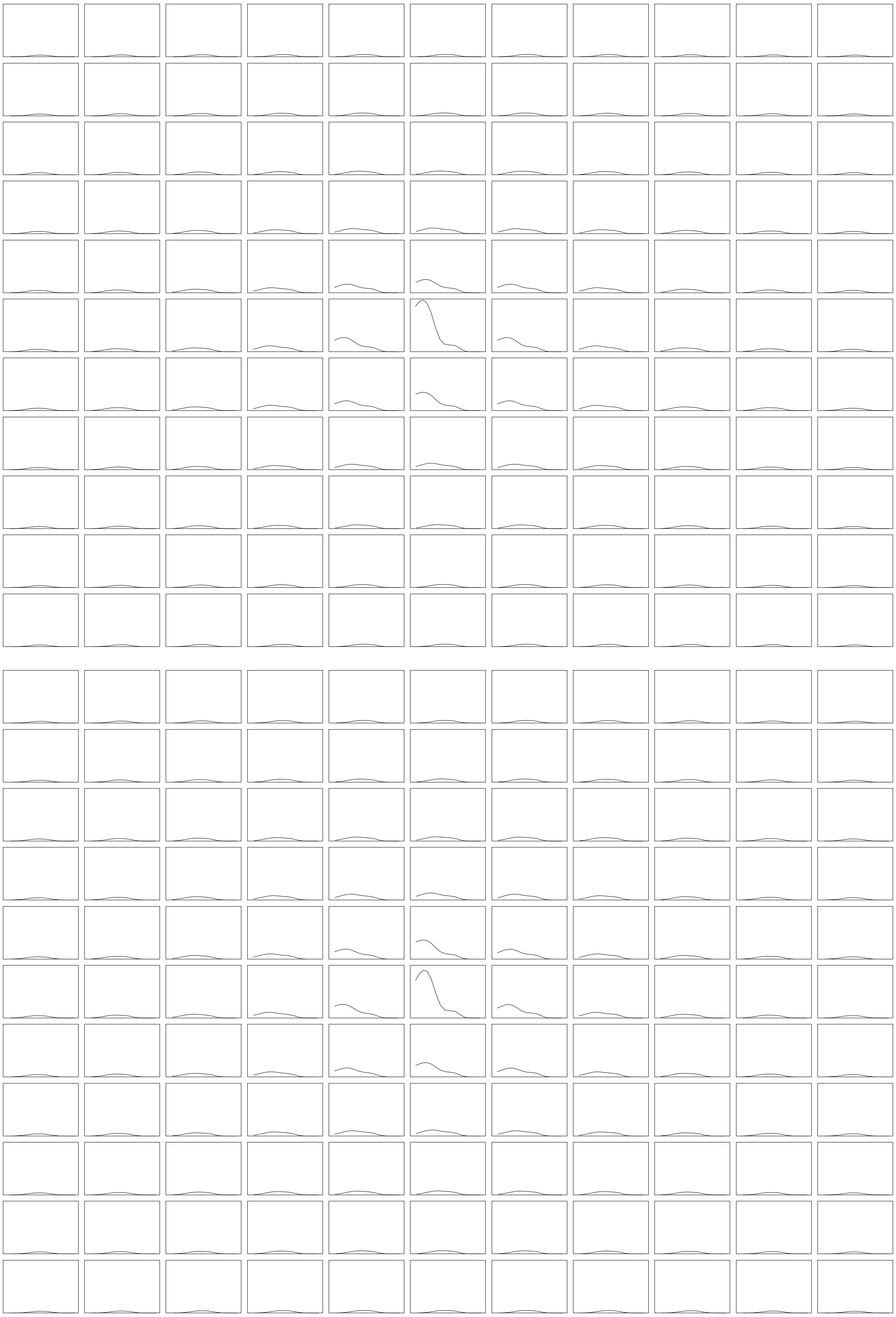


Abbildung 29: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Profile der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie für den Blickwinkel $\vartheta = 1^\circ$ (oben) bzw. 89° (unten). Jeweilige Abszisse und Ordinate: Profile in den Abständen von 1.0 pc vom Wolkenzentrum (Mitte) von -5.0 bis +5.0 pc, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 2.3×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 9.7972 bis $9.7988{\times}10^{10}$ Hz aufgetragen sind.

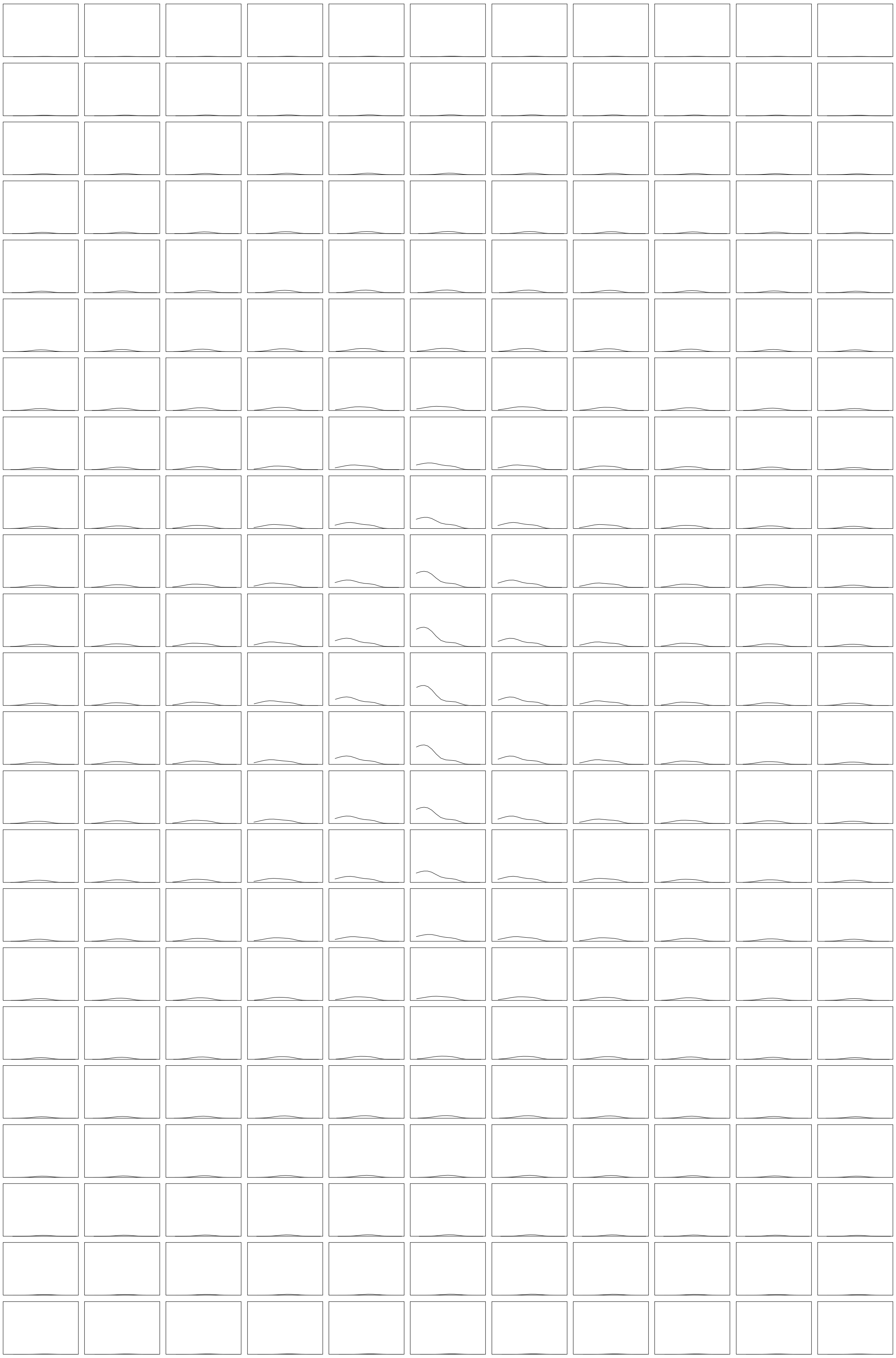


Abbildung 30: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Profile der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie in den Abständen von 1.0 pc (in beiden Achsenrichtungen) für eine schräge Aufsicht mit Blickwinkel $\vartheta = 45°$. Das Wolkenzentrum befindet sich in der Bildmitte. Es sind jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 2.3×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 9.7972 bis 9.7988×10^{10} Hz aufgetragen sind.

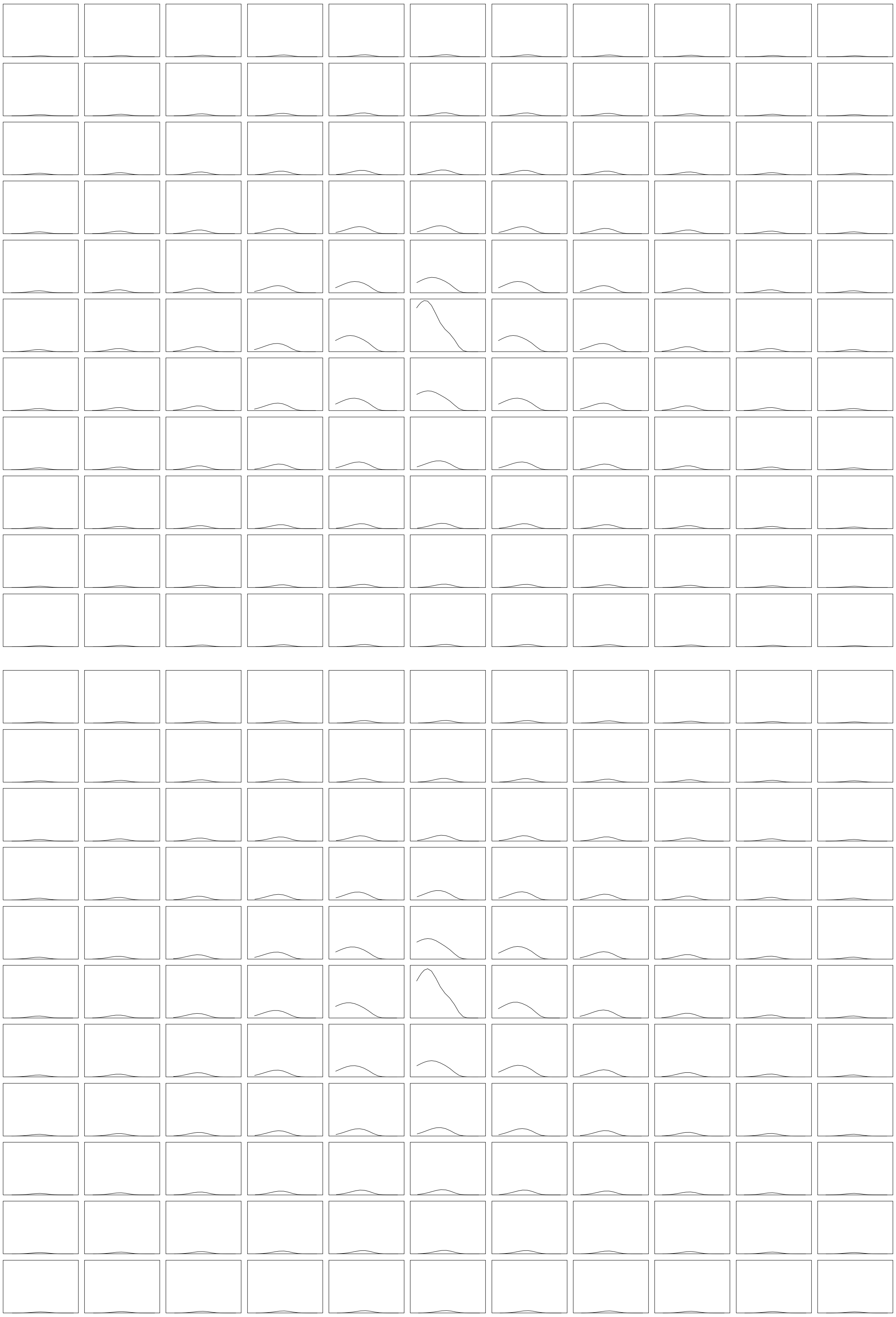


Abbildung 31: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Profile der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie für den Blickwinkel $\vartheta = 1°$ (oben) bzw. 89° (unten). Jeweilige Abszisse und Ordinate: Profile in den Abständen von 1.0 pc vom Wolkenzentrum (Mitte) von -5.0 bis +5.0 pc, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 3×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.46955 bis $1.4698{\times}10^{11}$ Hz aufgetragen sind.

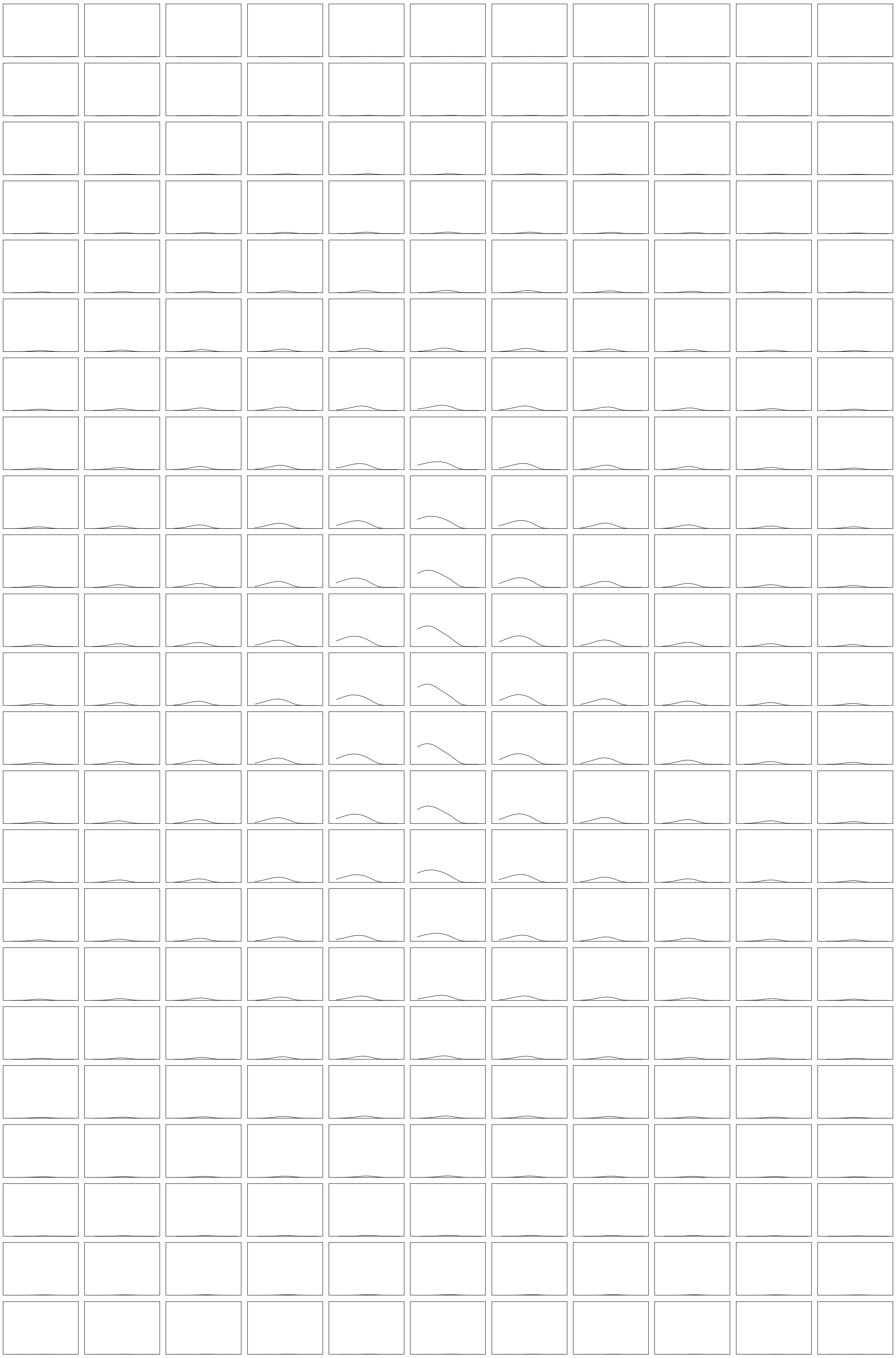


Abbildung 32: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Profile der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie in den Abständen von 1.0 pc (in beiden Achsenrichtungen) für eine schräge Aufsicht mit Blickwinkel $\vartheta = 45°$. Das Wolkenzentrum befindet sich in der Bildmitte. Es sind jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 3×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.46955 bis 1.4698×10^{11} Hz aufgetragen sind.

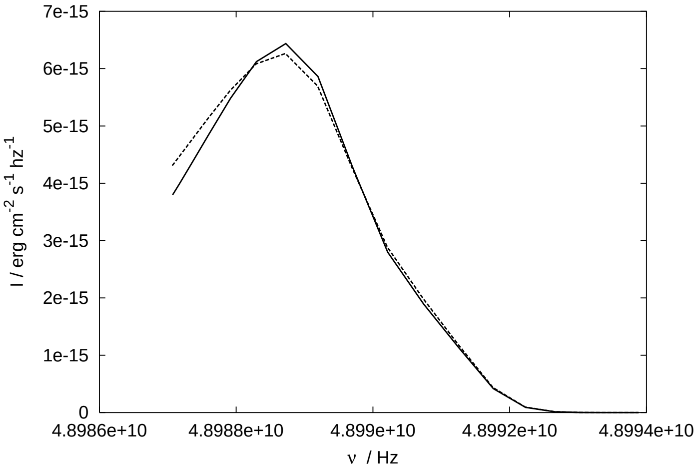


Abbildung 33: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich der Intensitätsverteilungen der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie aus dem Wolkenzentrum für die Blickwinkel 1° (gestrichelte Kurve) bzw. 89° (durchgezogene Kurve).

jeweils links und rechts vom Zentrum, angeordnet, wo die (zur Sichtrichtung gehörende maximale) azimutale Geschwindigkeit in der Äquatorebene entsprechend zum Radius $r = 1$ pc (sogar) nur noch $v_\phi(r = 1\text{pc}, \theta = \pi/2) = 2.6$ km/s beträgt. Im Abstand von $r = 0.5$ pc zum Wolkenzentrum (d.h. entlang der y-Achse in diesen Abb.) fällt der Betrag der azimutalen Komponente in der Wolke auf $v_\phi = 0.52$ km/s (s. zugehörige Bildpositionen ($y = \pm 5.0$ pc,$z = 0$) auf der vorderen Gitterfläche). Entlang der Polachse $\theta = 0$ hat das Geschwindigkeitsfeld der Wolke keine azimutale Komponente ($v_\phi = 0$), so daß die aus dem Gitter zu den Positionen ($y = 0, z = -5.0$pc, ..., 5.0pc) entlang einer senkrecht gezogenen Geraden (durch das Wolkenzentrum) tretenden Strahlen ebenso *kein* Wolkengebiet mit einem in Sichtrichtung projezierten Beitrag der azimutalen Geschwindigkeitskomponente durchquert haben. An diesen Austrittsorten hat also nur die radiale Geschwindigkeit im Innern der Wolke einen Einfluß auf die Profilform der Linie.[14] Die in den Abbildungen (jew. im unteren Teil) zu den Bildpositionen jeweils schräg oben links und rechts, sowie unten links und rechts vom Wolkenzentrum (bei ($y = z = 0$)) unter dem Winkel $\theta = 45°$ angeordneten Linienprofile im Abstand von 1.4 pc, gehören zu Strahlen die Wolkengebiete mit einer Rotationsgeschwindigkeit (-skomponente in Strahlrichtung) von nur bis zu $v_\phi(r = 1.4\text{pc}, \theta = \pi/4) = 1.84$ km/s durchquert haben; zu den Austrittspositionen an den oberen und unteren Gitterecken (in den unteren Bildhälften der Abb. 27, 29 und 31) in je einer Entfernung von $r = \sqrt{5^2 + 5^2}$ pc= 7.1 pc vom Zentrum, ist es nur noch eine azimutale Geschwindigkeit (-skomponente in Strahlrichtung) von (maximal) $v_\phi(r = 7.1\text{pc}, \theta = \pi/4) = 0.37$ km/s.

Für einen Blickwinkel (bzw. Strahlrichtung) von $\vartheta = 1°$, d.h. für eine nahezu senkrechte Sicht auf den Pol der Wolke, kann die differentielle Rotationsbewegung der Wolke in den ortsaufgelösten Linienprofilen (in den Abb. 27, 29 und 31, jew. *oben*) nicht sichtbar werden, da die Richtungen der azimutalen Geschwindigkeit im Innern alle in Ebenen fast parallel zur oberen Gitterfläche (bzw. zur Äquatorebene) liegen. Dort wirkt sich also nur die Projektion der radialen Geschwindigkeitskomponente in Strahlrichtung auf das Linienprofil aus.[14]

[14]Läßt man (hier und im folgenden) einen möglichen Einfluß der Rotation aufgrund der Änderung der Quellfunktion außer Acht.

In Abb. 27 und 28 sind die ortsaufgelösten CS-Linienprofile des $J = 1-0$-Übergangs dargestellt. Die für einen Blickwinkel $\vartheta = 1°$ bzw. $\vartheta = 89°$ (in Abb. 27 oben bzw. unten) berechneten Profile zeigen eine insgesamt (z.T. stark) rot-verschobene, schwach asymmetrische Emissionslinie mit einer schwachen Selbstabsorption rechts vom Linienkern (wie im Falle der ähnlichen sphärischen Wolke mit gleicher Turbulenzgeschwindigkeit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s). Im Gegensatz zum mit der 3D-Strahlungstransport-Methode berechneten sphärischen Fall hat hier das Linienprofil bei der Bildposition $(y = 0, z = 0)$ für $\vartheta = 89°$, bzw. bei $(x = 0, y = 0)$ für $\vartheta = 1°$, einen ausgeprägten *roten* Emissionspeak, wie man auch für einen sich vom Beobachter wegbewegenden Emitter intuitiv erwartet.
Mit zunehmender projezierter Entfernung $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ vom Wolkenzentrum, senkrecht zur Beobachtungsrichtung (mit (y, z) = Ortspunkt-Koordinaten auf der vorderen Fläche des 3D-Gitters für z.B. den Fall $\vartheta = 89°$), nimmt auch hier die Linienintensität wieder kontinuierlich ab, unter Verringerung der Rotverschiebung und einer Zunahme der Symmetrie zum Linienzentrum, wie bei der sphärischen Wolke, was intuitiv klar ist. Dieses beschriebene Verhalten der Linienintensität mit wachsender Entfernung r zum Wolkenzentrum ist deshalb wieder bei allen übrigen Linienübergängen ($J = 2-1$ und $J = 3-2$) in den Abb. 29–32 (bzw. Abb. 54–59 zur Wolke mit höherer Turbulenz) zu beobachten.
Die Linienprofil-Anordnungen zum Blickwinkel $\vartheta = 89°$, d.h. für eine fast senkrecht Sicht auf den Äquator (in Abb. 27 unten) lassen keine *axial*symmetrische Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung der im Kern schnell rotierenden Wolke erkennen. Vielmehr vermutet man durch die Punktsymmetrie der rot-verschobenen ortsaufgelösten Profile zum Wolkenzentrum (bei $(y = 0, z = 0)$) eine kugelsymmetrische kollabierende Molekülwolke *ohne* Rotation. Diese ortsaufgelösten Profile der $J = 1-0$-Linie im unteren Bildabschnitt, gleichen denen für eine Blickrichtung (fast) zum Pol, im oberen Bild, wo im allgemeinen eine Rotationsbewegung der Wolke nicht aus der Profilform und der Frequenzverschiebung ersichtlich sein kann. In Abb. 33 sieht man die praktisch identischen Intensitätsverteilungen aus dem Wolkenzentrum für die verschiedenen Blickwinkel $\vartheta = 1°$ bzw. $\vartheta = 89°$. Erst ein genauerer Vergleich der Linienprofile an den Austrittsorten jeweils symmetrisch links und rechts zum Wolkenzentrum im Abstand von $\Delta y = \pm 1.0$ pc (wie sie auch in Abb. 27 unten zu sehen sind), bzw. $\Delta y = \pm 0.5$ pc, für einen Blick ($\vartheta = 89°$) auf den Wolkenäquator in Abb. 35 (oben, zu den Profilen der $J = 1-0$-Linie, sowie der $J = 2-1$- und $J = 3-2$-Linie in der Mitte, bzw. unten), zeigt den schwachen Einfluß der differentiellen Wolkenrotation auf die Intensitätsverteilung; und das selbst gerade dort (bei $\Delta y = \pm 0.5$ pc) zu den am nächsten beim Wolkenkern liegenden Ortsgitterpunkten in der Äquatorebene, wo die aus dem Gitter (Wolke) tretenden Strahlen das kernnahe Wolkengebiet mit der höchsten azimutalen Geschwindigkeit von $v_\phi(r = 0.5\ \text{pc}, \theta = \pi/2) = 5.2$ km/s (für diese gewählte Gitterauflösung) durchquert haben. Die Wahl einer größeren Zahl von Gitterpunkten nahe des Wolkenkerns im Bereich von $r = R_i = 0.2$ pc bis $r = 0.5$ pc (als Eingabe-Parameter im 3D-Programm) hätte sicher einen stärkeren Einfluß der Wolkenrotation auf die Profile gerade in diesem Ortsbereich dokumentiert, wo die äquatoriale Rotationsgeschwindigkeit bis auf $v_{\rm rot} = 13$ km/s am Kernradius R_i ansteigt.
Unter einem Blickwinkel von $\vartheta = 45°$ schräg auf die Molekülwolke (Polachse), sind die berechneten rot-verschobenen CS-Linienprofile des $J = 1-0$-Übergangs, in Abb. 28, aus Richtungen um den inneren Kernbereich *stärker* asymmetrisch, im Vergleich zu jenen für den Sichtwinkel $\vartheta = 1°$ und $\vartheta = 89°$ in Abb. 27, mit einer *stärkeren* Selbstabsorption rechts vom Linienkern (bei etwa der Frequenz des Zentrums der entsprechend ruhenden Linie). Dabei wird die Höhe des roten Emissionspeaks aus Richtung des Wolkenzentrums gegenüber des entsprechenden Peaks

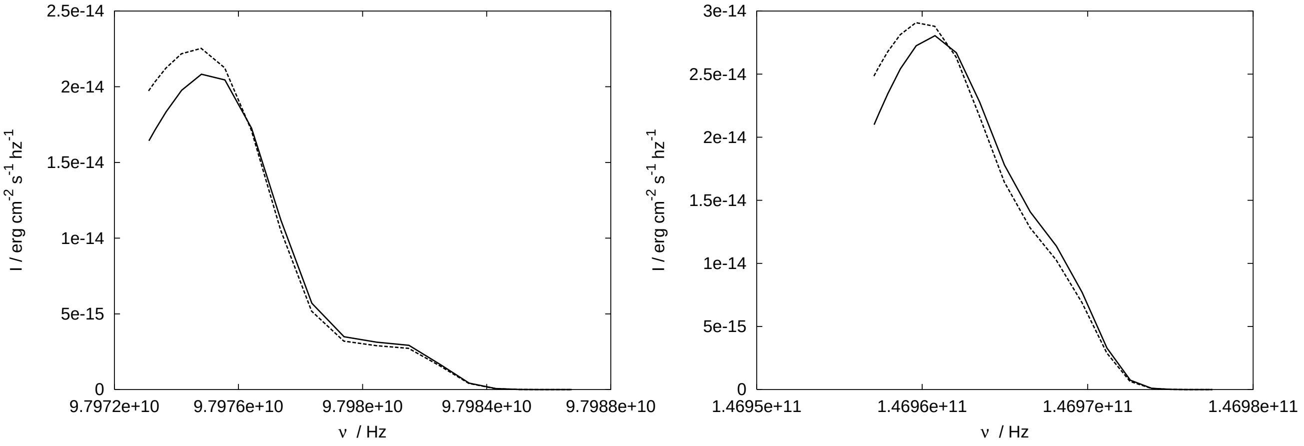


Abbildung 34: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Vergleich der Intensitätsverteilungen der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie (links) bzw. $J = 3 \rightarrow 2$-Linie (rechts) aus dem Wolkenzentrum für die Blickwinkel $\vartheta = 1°$ (gestrichelte Kurven) bzw. 89° (durchgezogene Kurven).

zum Blickwinkel $\vartheta = 1°$, bzw. $\vartheta = 89°$, um die Hälfte abgeschwächt.

In Abb. 29 und 30 sind die berechneten CS-Linienprofile des $J = 2 - 1$- Übergangs nach ihren örtlichen Positionen, zu jeweils den verschiedenen Blickrichtungen, aus der rotierenden und kollabierenden Wolke angeordnet. Die Profile sind wiederum insgesamt (um den Bereich des Wolkenzentrums) stark rot-verschoben und zeigen eine größere Asymmetrie (im Vergleich zu den Profilen der $J = 1 - 0$-Linie) mit einer Selbstabsorption im rechten Linienflügel und einem größeren roten Emissionspeak (ähnlich wie im vergleichbaren Fall der sphärischen Wolke). Hier, wie auch schon zuvor bei der $J = 1 - 0$-, und bei der $J = 3 - 2$-Linie in den folgenden Abbildungen 31 und 32, hat das Profil aus Richtung des Wolkenzentrums einen ausgeprägten *roten* Emissionspeak, im Gegensatz zum sphärischen Wolkenbeispiel, wo das Intensitätsmaximum *dort blau*-verschoben ist.
Wiederum lassen die nahezu identischen, jeweils in gleicher Entfernung r zum Wolkenzentrum gegenüber liegenden, ortsaufgelösten Profile für $\vartheta = 89°$ (in Abb. 29 unten) eine fast sphärische Geschwindigkeits- und Dichteverteilung der Wolke vermuten. Erst in Abb. 35 (Mitte) erkennt man einen schwachen Unterschied der kernnahen Profile, an Orten jeweils symmetrisch zum Wolkenzentrum auf der projezierten Linie der Äquatorebene *unterhalb* einer Entfernung von $r \leq 1.0$ pc, verursacht durch die azimutale Geschwindigkeitskomponente der Wolke. Nur an den Gitterpositionen entlang der auf die vordere Gitterfläche projezierten Polachse, haben die oberhalb und unterhalb des Wolkenzentrums jeweils in gleicher Entfernung gegenüber liegenden Profile leicht unterschiedliche Intensitätsmaxima, was sich nur durch den nicht exakt senkrechten Blick ($\vartheta = 89°$) auf die Pol*achse* einer *nicht* kugelsymmetrischen Wolke erklären läßt; denn selbst für eine axialsymmetrische Wolke müßten für $\vartheta = 90°$ auch diese Linienprofile identisch sein. Für einen Blick *fast* senkrecht auf den *Pol* (für $\vartheta = 1°$), in Abb. 29 oben, beobachtet man auch diesen zuletzt beschriebenen Unterschied der Intensitätsmaxima entlang einer senkrechten Linie durch das Wolkenzentrum, was wieder *nur* durch den *nicht* genau senkrechten Blick auf den Pol der Wolke mit axialsymmetrischer Geschwindigkeits- und Dichteverteilung erklärt werden kann.
Die Intensitätsmaxima der Linien aus Richtung des Wolkenzentrums für die verschiedenen Blickwinkel $\vartheta = 1°$ und $\vartheta = 89°$ unterscheiden sich geringfügig voneinander (vgl. auch Abb. 34

links); die zugehörigen austretenden Strahlen durchqueren die Wolke nämlich zu verschieden großen Dichte- und radialen Geschwindigkeits-Intervallen (nahezu) entlang der Polachse bzw. in der Äquatorebene (für z.B. $\vartheta = 90°$: $1.82 \times 10^{-18} \geq \rho \geq 1.99 \times 10^{-20}$ g/cm^3 und $11.8 \geq |v_r| \geq 3.3$ km/s, sowie für $\vartheta = 0°$: $1.82 \times 10^{-18} \geq \rho \geq 2.31 \times 10^{-20}$ g/cm^3 und $12.9 \geq |v_r| \geq 3.3$ km/s, mit jeweils $v_r = 0$ im Zentrum). Dabei ist die Höhe des Maximums der Intensitätsverteilung aus Richtung des Zentrums für den Blickwinkel $\vartheta = 45°$ (s. Bildmitte von Abb. 32) nicht mal halb so groß wie das zum Sichtwinkel $\vartheta = 1°$, weil der zugehörige aus dieser Richtung kommende Strahl einen größeren Weg durch das (bis zur äußeren Begrenzung völlständig mit dem Wolkengas gefüllte) kubische 3D-Gitter in der Diagonalen (und damit eine größere Wolkenmaterie) durchschritten hat. Außerdem erreicht der Betrag der radialen Geschwindigkeitskomponenten für die Strahlrichtung mit $\vartheta = 45°$ am letzten inneren Ortsgitterpunkt vor und nach dem Wolken*kern* nur einen Maximalwert von $|v_r| = 10.4$ km/s.

Die Abbildungen 31 und 32 zeigen die ortsaufgelösten Linienprofile des $J = 3-2$-Übergangs für die verschiedenen Blickrichtungen auf die axialsymmetrische Wolke. Die Profile aus der Wolkenregion für einen Sichtwinkel von $\vartheta = 1°$ und $\vartheta = 89°$ erscheinen insgesamt wieder *stark* rot-verschoben und fast *symmetrisch* zur Linienmitte *ohne* Selbstabsorption, bis auf Ausnahme des Profils *direkt* aus Richtung des Zentrums mit einer schwachen Absorption im rechten Linienflügel des relativ großen roten Emissionspeaks. Das entsprechende Profil aus dem Zentrum für $\vartheta = 45°$ (in Abb. 32) hingegen, zeigt dort *keine* Selbstabsorption. Sein Intensitätsmaximum hat nur etwa die halbe Höhe im Vergleich zu den entsprechenden Profilen für $\vartheta = 1°$ und $\vartheta = 89°$, welche beide fast identisch miteinander sind (vgl. Abb. 34 rechts). Im Gegensatz dazu sind die Profile der $J = 3-2$-Linie aus der sphärischen Wolke asymmetrisch mit einem größeren roten und kleineren blauen Emissionspeak (mit Ausnahme des Profils aus dem Zentrum), sowie einer Absorptionssenke (vgl. Abb. 20, und Abb. 11 Mitte links).
Auf den ersten Blick vermutet man wieder durch die fast identischen, in gleichem Abstand zum Zentrum angeordneten, gegenüber liegenden Profile, eine sphärisch symmetrische Wolke. Jedoch sieht man auch hier wieder durch den genaueren Vergleich der kernnahen Profile an den jeweils symmetrisch links und rechts vom Zentrum, im Abstand von $\Delta y = \pm 1.0$ und ± 0.5 pc, liegenden Orten die durch die azimutale Wolkengeschwindigkeit verursachte Frequenzverschiebung der $J = 3-2$-Linie, in Abb. 35 unten. Außerdem erkennt man (ebenso wie bei den ortsaufgelösten Profilen der $J = 2-1$-Linie), daß im unteren Teil der Abb. 31 die Intensitätsverteilungen entlang einer senkrechten Linie durch das Wolkenzentrum, in jeweils gleichem Abstand für $r \leq 2.0$ pc oberhalb und unterhalb vom Zentrum, unterschiedliche Maximalhöhen haben. Dies ist wiederum nur durch den nicht genau senkrechten Blick auf die Polachse ($\vartheta = 89°$) bzw. den Pol ($\vartheta = 1°$) einer *nicht* sphärisch symmetrischen Wolke mit einer höchstens nur axialsymmetrischen Geschwindigkeits- und Dichteverteilung erklärbar. Diese Beobachtung kann also im allgemeinen als ein weiteres Indiz für das Vorliegen einer *nicht*-sphärischen Verteilung dienen.

Die in den Abbildungen 54–59 dargestellten breiteren ortsaufgelösten Profile der $J = 1-0$- bis $J = 3-2$-Linie aus der axialsymmetrischen Wolke mit hoher Turbulenz ($v_{\rm turb} = 30$ km/s), sind (für alle Blickwinkel) im Verhältnis zu ihrer Linienbreite nur *leicht* rot-verschoben, fast *symmetrisch* zur Linienmitte, und zeigen *keine* Selbstabsorptionen. Durch die ortsunabhängig große Turbulenzgeschwindigkeit, welche selbst sowohl den Maximalbetrag der radialen als auch azimutalen Komponente des makroskopischen Geschwindigkeitsfeldes der Wolke (an den kernnahen innersten Gitterpunkten) bei weitem übersteigt, und die damit verbundene größere Dopplerbreite der Linien, wird die axialsymmetrische Struktur der Wolke aus der Symmetrie der nach ihrer Position angeordneten Profile aus der Wolke für verschiedene Blickwinkel *nicht* ersichtlich:

Die Intensitäten der $J = 1 - 0$- bis $J = 3 - 2$-Linie aus Richtung des Wolkenzentrums für die verschiedenen Blickwinkel $\vartheta = 1^\circ$ und $\vartheta = 89^\circ$ sind jeweils identisch (s. Abb. 60 und 61). Dies liefert also *keinen* Hinweis auf ein ebenso von der Breite θ abhängiges radiales Geschwindigkeitsfeld $v_\mathrm{r}(r, \theta)$ bei der axialsymmetrischen Wolke. Außerdem sind die Intensitätsverteilungen dieser Linien an den jeweils symmetrisch zum Wolkenzentrum liegenden kernnahen Orten aus der Äquatorebene für $\vartheta = 89^\circ$ in der Abb. 62 selbst für $y = \pm 0.5$ pc praktisch deckungsgleich, was keinen Hinweis auf die existierende azimutale Geschwindigkeitskomponente der Wolke gibt.

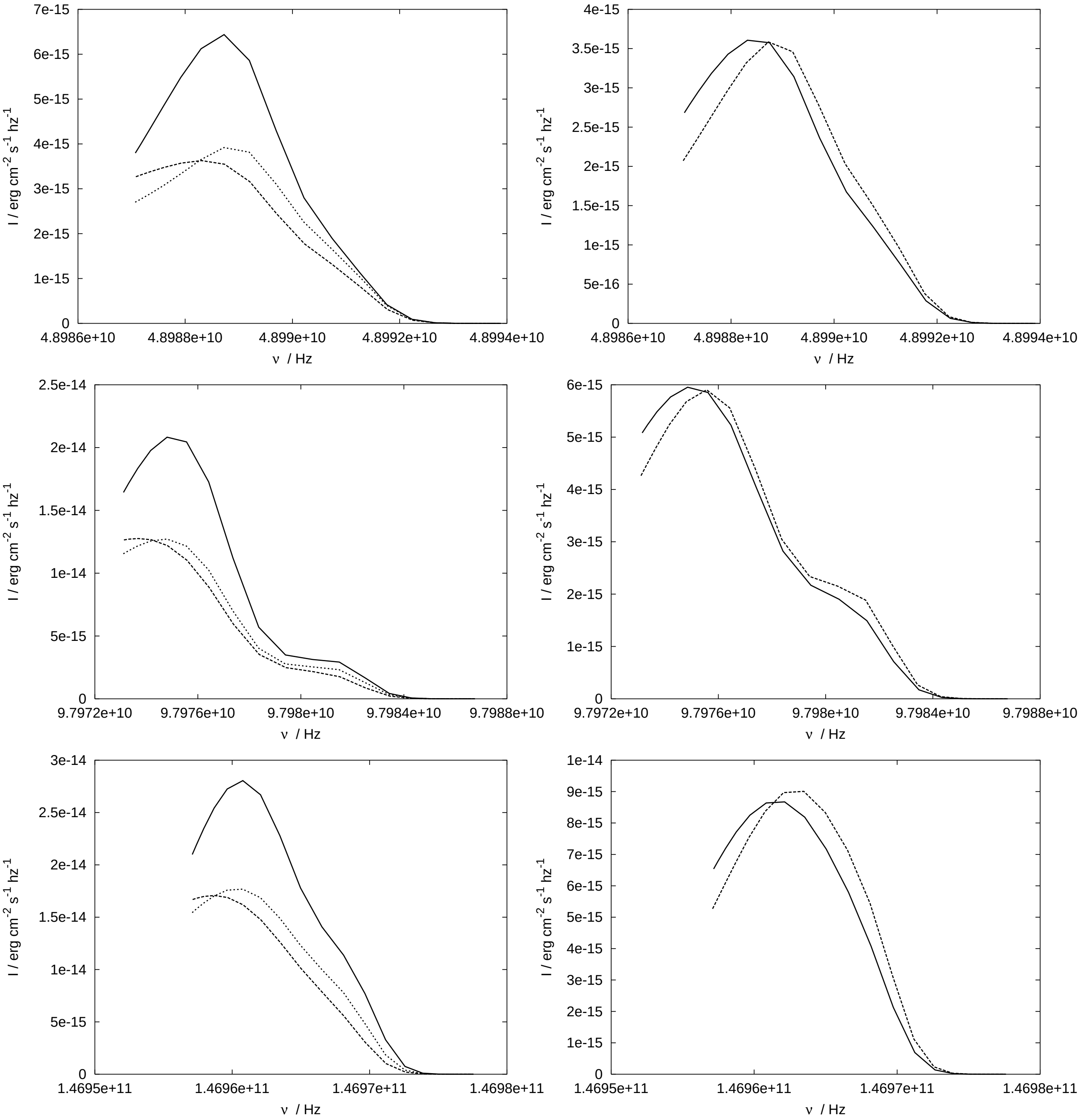


Abbildung 35: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\rm turb} = 6.0 \times 10^5$ cm/s: Der Einfluß der Rotation auf das Profil der $J = 1 \to 0$-Linie (oben), $J = 2 \to 1$-Linie (mitte) und $J = 3 \to 2$-Linie (unten), an Orten jeweils symmetrisch zum Zentrum (für konstanten Blickwinkel $\vartheta = 89^\circ$ auf die Äquatorebene); links für $r = \pm 0.5$pc und rechts für $r = \pm 1.0$pc. Links ist jeweils die Intensität vom Wolkenzentrum zusätzlich zum Vergleich als durchgezogene Kurve dargestellt.

9 Vergleich der numerischen Beispiele mit Beobachtungen

9.1 Beschreibung beobachteter ortsaufgelöster CS-Linienprofile

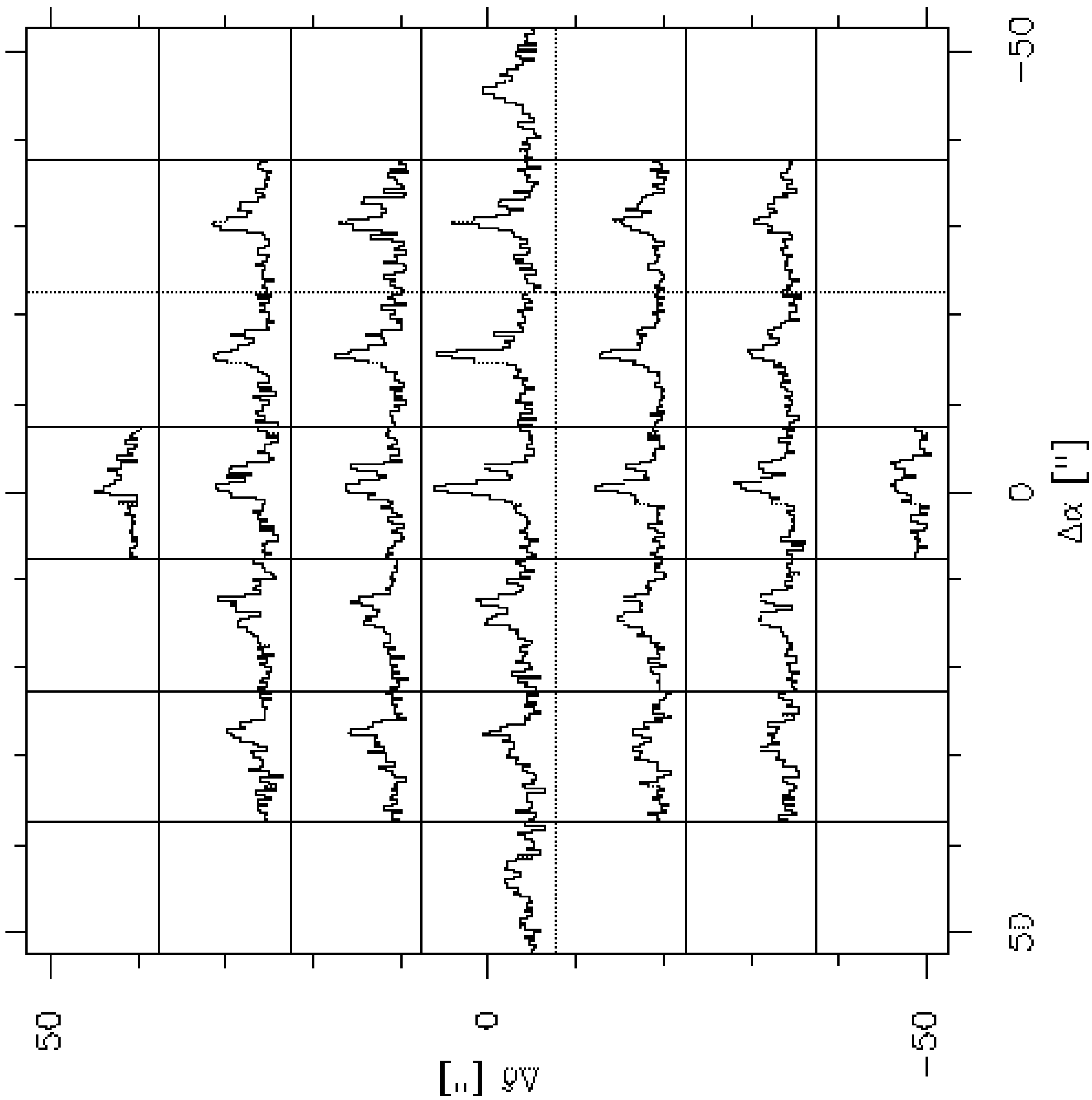


Abbildung 36: Ortsaufgelöste CS-Profile der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie der GF9-2-Quelle (n. Katalog von Schneider & Elmegreen 1979) im globularem Filament L1082. Vertikale Achsen: *Main beam brightness temperature* $T_{mb} = -0.5$ bis 2K, horizontale Achsen: Geschw. in Sichtrichtung $v_{lsr} = -5$ bis -1km/s, äußere Boxenmarkierung: Abstand zum Zentrum in Bogensekunden (H. Wiesemeyer 1997, IRAM 30m).

Die von Wiesemeyer (1997) beobachteten ortsaufgelösten CS-Linienprofile der GF9-2-Quelle, in den Abb. 36 und 37, zeigen keine sphärische Symmetrie zum Wolkenzentrum. Demzufolge sind komplexere Wolkendichte- und Geschwindigkeitsverteilungen als die einer sphärisch kolla-

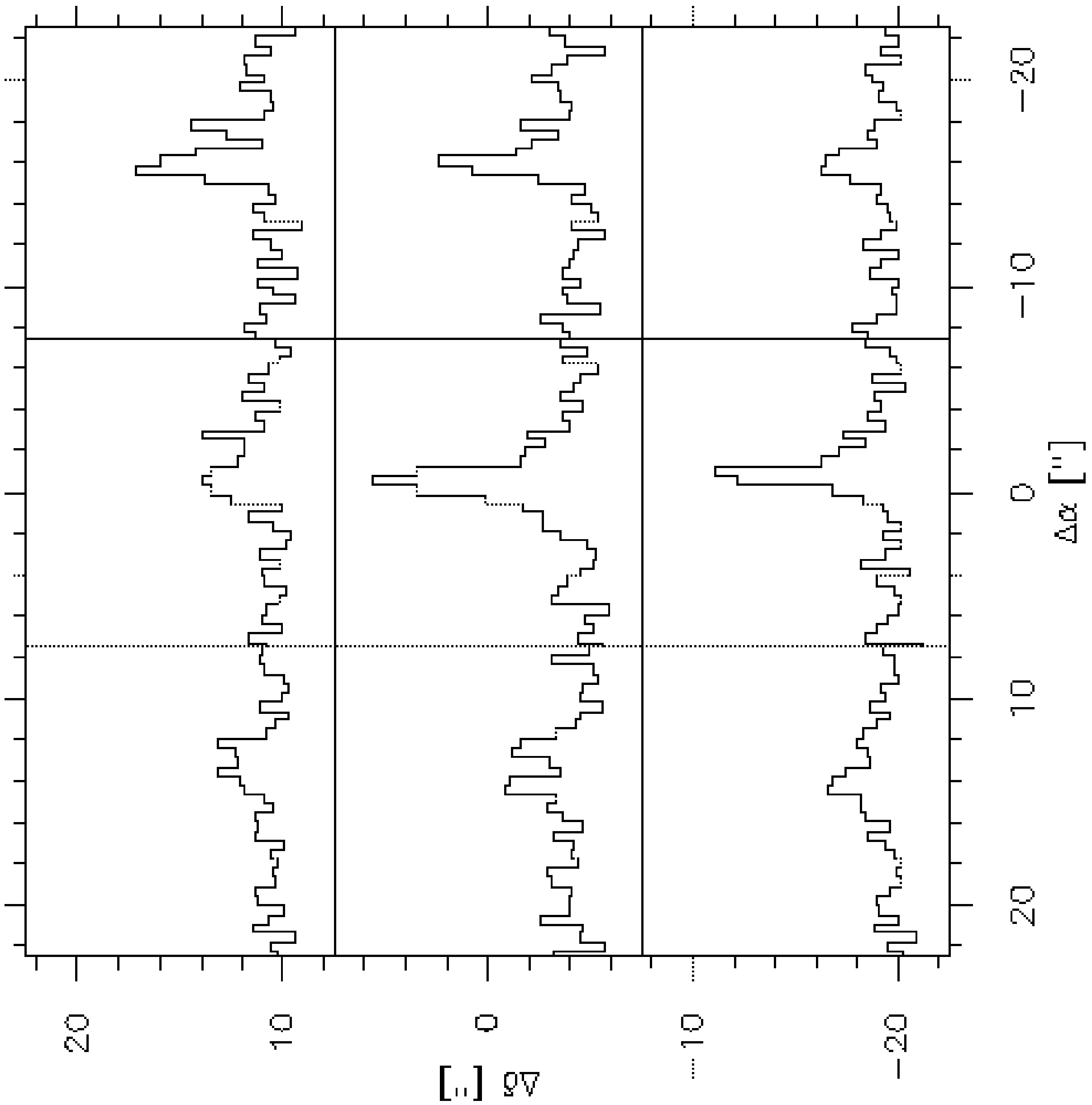


Abbildung 37: Ortsaufgelöste CS-Profile der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie der GF9-2-Quelle (n. Katalog von Schneider & Elmegreen 1979) im globularem Filament L1082. Vertikale Achsen: *Main beam brightness temperature* $T_{mb} = -0.5$ bis 2K, horizontale Achsen: Geschw. in Sichtrichtung $v_{lsr} = -5$ bis -1km/s, äußere Boxenmarkierung: Abstand zum Zentrum in Bogensekunden (H. Wiesemeyer 1997, IRAM 30m).

bierenden Wolke (1D-Verteilung) anzunehmen, z.B. die einer axialsymmetrischen mit Rotation (2D-Verteilung). Dabei sind 3D-NLTE-Strahlungstransport-Berechungen notwendig, um diese beobachteten Linienprofile interpretieren zu können.

Bei einer allgemein axialsymmetrischen Verteilung unter senkrechtem Blick auf die Rotations- d.h. Polachse (*edge on* für $\vartheta = 90°$) in Nord-Süd-Richtung (am Himmel), würden die ortsaufgelösten Linienprofile in den beiden oberen Quadranten (einer vergleichsweisen Aufnahme des Himelsauschnitts wie in Abb. 36) zumindest symmetrisch zu den Profilen in den jeweils unteren Quadranten sein, mit der horizontalen Symmetrieachse[15] durch das Wolkenzentrum (d.h. der projezierten Äquatorlinie auf die Himmelssphäre). Bei gleichzeitig starker Rotation sind dabei die Profile oben und unten rechts von der (auf den Himmel projezierten) Polachse durch die Wolkenmitte *nicht* symmetrisch zu denjenigen im linken oberen und unteren Quadranten links davon (und umgekehrt). Bei schrägem Blick auf die Polachse (mit $0 < \vartheta < 90°$) einer solchen rotationssymmetrischen Wolke wären dann keinerlei Symmetrieachsen vorhanden. Nur bei senkrechtem Blick auf den Pol (*face on* für $\vartheta = 0°$) erscheint dann selbst eine axialsymmetrische Wolke immer als sphärische Verteilung mit einer punktsymmetrischen Anordnung der Profile zum Wolkenzentrum, d.h. jeder Quadrant ist außerdem jeweils spiegelsymmetrisch zu den beiden angrenzenden gegenüber liegenden Quadranten in Nord-Süd- und Ost-West-Richtung, mit den beiden oben erwähnten Symmetrieachsen.

Da die beobachteten CS-Profile der $J = 2 - 1$- und $J = 3 - 2$-Linie aus der GF9-2-Quelle in den Abb. 36 und 37 keine dieser beschriebenen Symmetrien in ihrer örtlichen Anordnung aufweisen, kann es sich nicht um eine sphärische Wolke, sondern *höchstens* nur um eine Wolke mit axialsymmetrischer Geschwindigkeits- und Dichteverteilung, d.h. z.B. eine kollabierende rotierende Wolke, handeln, mit *geneigter* Rotationsachse (Polachse) auf die man schräg blickt (mit $0 < \vartheta < 90°$).

Sieht man sich ebenso die Form und Orientierung des GF9-2-Wolkenkerns in den NH_3-Iso-Intensitätskonturen an (s. Beob. v. Fiebig et al., zitiert in Wiesemeyer 1997), vermutet man auch eine nahezu axialsymmetrische abgeplattete Wolkenverteilung, jedoch mit einer (senkrecht zur Sichtrichtung projezierten) Rotations- bzw. Symmetrieachse in *NW-SO*-Richtung, d.h. in Abb. 36 von oben rechts nach unten links, durch das Wolkenzentrum. Legt man dann eine zweite Symmetrieachse senkrecht dazu durch das Wolkenzentrum (von links oben nach rechts unten) entlang der Äquatorlinie, erkennt man schon eine *höhere* Symmetrie der oberhalb dieser zweiten Achse liegenden ortsaufgelösten Profile zu ihren jeweils unteren Profilen in gleichem Achsenabstand, je rechts und links von der schräg liegenden projezierten Pol- d.h. Symmetrieachse; wie sie für den Fall einer axialsymmetrischen Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung auftritt und schon oben beschrieben wurde. Die Profile jeweils links und rechts in gleichem senkrechtem Abstand zur (schräg orientierten) Polachse sind dann jedoch wegen der (wahrscheinlich starken) Rotation der Wolke stark asymmetrisch zueinander.

Die optisch dicke $J = 2 - 1$-[16] und $J = 3 - 2$-Linie aus Richtung des Wolkenkerngebiets von GF9-2 (mit $\tau \approx 10$)[16], wo die Säulendichte am größten ist, zeigt selbstabsorbierte Profile[16]mit zwei Peaks (in Abb. 36 und 37). Dabei werden alle die von Reipurth et al. (1996) klassifizierten Profiltypen I–IV beobachtet, die außerdem nach Wiesemeyer noch in zwei weitere Zweige aufgeteilt werden: Jene mit blau- (b) und rot-verschobener (r) Selbstabsorption, wie sie *beide* in

[15]Ist in diesem Abschnitt im allgemeinen von einer Symmetrieachse die Rede, ist dies immer in Bezug auf die Projektion auf die Himmelssphäre gemeint.

[16]nach Wiesemeyer (1997)

GF9-2 auftreten; bei einer rot-verschobenen Selbstabsorption ist der blaue Peak (jeweils links in den Abb.), bei einer blau-verschobenen der rote Peak (jeweils rechts), am stärksten.

Typ I-Pofile sind hierbei symmetrisch und nur schwach (wenn überhaupt) von einer Selbstabsorption beeinflußt.
Typ II-Profile haben zwei Peaks mit einem Sekundär-zu-Primärpeak-Verhältnis[17] von > 0.5 (durch ein schmales Absorptions*feature* verursacht durch (z.B.) das schwächer angeregte (fast) ruhende Gas im Wolkenbereich *vor* dem Kern in Sichtrichtung zum Beobachter).
Typ III-Profile zeigen ein Sekundär-zu-Primärpeak-Verhältnis von < 0.5, verursacht durch eine stärkere (Selbst-)Absorptionsbreite als beim Typ II.
Typ IV-Profile haben keinen Sekundärpeak, verursacht durch eine Absorption, die den gesamten (betroffenen) Emissionslinien-Flügel verdeckt.

Die Profile der $J = 2-1$- und $J = 3-2$-Linie aus dem Wolken*zentrum* von GF9-2 (in den Abb. 36 und 37, in der Mitte) sind dann vom Typ III(r) mit einer rot-verschobenen Selbstabsorption, d.h. einem stärkeren blauen und einem (< 0.5)-mal schwächeren roten Peak. Die Asymmetrie der CS(2-1)-Linienprofile ändert sich dann quer durch die Quelle zu allen übrigen Positionen: Zum einen werden die Spektren zu größeren Entfernungen vom Wolkenzentrum (senkrecht zur Blickrichtung) zunehmend symmetrischer (über den Typ II hin zum Typ I oder Typ IV) unter gleichzeitiger Abnahme des Intensitätsmaximums, gegenüber dem Profil aus Richtung des Zentrums. Zum andern haben die Spektren aus dem nordöstlichen Quadranten (in Abb. 36 links oben) stärkere *rote* Peaks (verursacht durch eine blau-verschobene Selbstabsorption oder durch eine erhöhte Säulendichte bei positiven "Line-of-sight"-Gechwindigkeiten), was beides einer *nicht*-sphärischen Symmetrie der Wolke[18] zugeschrieben wird. Die CS(3-2)-Linienprofile (in Abb. 37) sind den CS(2-1)-Profilen vergleichsweise sehr ähnlich, wobei die Anregung des $J = 3$-Niveaus auf einen kompakteren Wolkenkernbereich beschränkt ist, als die des $J = 2$-Niveaus (s. Achsenbeschriftung).

9.2 Vergleich mit den theoretischen Linienprofilen

Selbst die (mit der 1D- und 3D-NLTE-Strahlungstransport-Methode) berechneten CS(2-1)-Linienprofile aus unserem nur *sphärischen* kollabierenden Molekülwolken-Beispiel *ohne* Rotation, durchlaufen sämtliche verschiedene, ebenfalls beim Wolkenkerngebiet GF9-2 beobachteten und beschriebenen Typen IV–I (von innen nach außen), für unterschiedliche Entfernungen p vom Wolkenzentrum, wobei neben der vorwiegend blau-verschobenen ebenso gleichzeitig die rot-verschobene Selbstabsorption auftritt (vgl. Abb. 19, bzw. Abb. 10 und 11 jew. oben rechts, sowie vor allem Abb. 14 und 15): Das (mit dem 3D-Modell) berechnete Typ IV(r)-Profil der $J = 2-1$-Linie aus dem Wolkenzentrum hat einen ausgeprägten *blauen* Emissionspeak, während der rote Linienflügel (Peak) durch eine rot-verschobene Selbstabsorption stark unterdrückt ist. In größerer Entfernung vom Zentrum (ab $p \geq 0.5$ pc) für Sichtlinien, die den Wolkenkern nicht mehr durchqueren, zeigen dann die mit dem 3D-Modell ermittelten Profile durchweg (wenn überhaupt) eine *blau*-verschobene Selbstabsorption (mit Ausnahme der Typ II–I(r)-Profile aus dem 1D-Modell mit einer schwachen *rot*-verschobenen Selbstabsorption im Bereich $3.5 \leq p \leq 5.0$ pc, s. Abb. 15), d.h. einen größeren *roten* Peak. Dabei werden die Profile mit wachsender Entfernung

[17] Der Primärpeak ist dabei der größere von beiden.
[18] nach Wiesemeyer (1997)

vom Zentrum (genau wie bei der beobachteten $J = 2-1$-Linie aus GF9-2) zunehmend symmetrischer bei abnehmender Selbstabsorption (und gleichzeitiger Abschwächung der Intensität), d.h. erreichen schließlich den Typ I (für $p \geq 4.5$ pc), nachdem sie den Typ III(b) – im radialen Wolkenbereich $0.5 \leq p \leq 1.5$ pc – und Typ II(b) (bzw. auch Typ II(r) nach dem 1D-Modell) – im Entfernungsbereich $2.0 \leq p \leq 4.0$ pc – durchlaufen haben.

Die theoretischen CS(3-2)-Linienprofile aus der *sphärischen* Wolke sind den theoretischen CS(2-1)-Profilen (wie bei der beobachteten Wolke) wieder sehr ähnlich (vgl. Abb. 20, bzw. Abb. 10 und 11 jew. Mitte links, sowie Abb. 16 und 17): Die Profile erscheinen wieder asymmetrisch (im inneren Wolkenbereich) mit einem größeren *roten* und kleineren blauen Emissionspeak, d.h. einer *blau*-verschobenen Selbstabsorption, mit Ausnahme des Typ IV(r)-Profils (aus dem 3D-Modell) aus dem Zentrum mit einem großen *blauen* Peak *ohne* Sekundärpeak, d.h. einem selbstabsorbierten *roten* Linienflügel der zugrunde liegenden Emissionslinie. Die Asymmetrie der Profile der $J = 3-2$-Linie ändert sich auch hier dann wieder mit wachsender Entfernung p vom Wolkenzentrum über den Profiltyp III(b) und II(b) bis $p = 2.0$ pc, hin zum symmetrischen Profiltyp I ohne Selbstabsorption (schneller als bei der theoretischen $J = 2-1$-Linie) ab $p \geq 3.0$ pc im äußeren Wolkenbereich.

Die berechneten Profile der $J = 2-1$- und $J = 3-2$-Linie aus der sphärischen Wolke mit überhöhter Turbulenz (vgl. Abb. 41 bzw. 42, und Abb. 50, 51, bzw. Abb. 52 und 53 im Anhang D.1) sind nahe der Kernregion vergleichsweise schwächer asymmetrisch mit durchweg einem nur angedeuteten, etwas größeren *roten* Peak und einer schwachen blau-verschobenen Selbstabsorption (Typ II(b)-Profile), und werden schließlich früher als bei der Wolke mit niedriger Turbulenz *symmetrisch* (spätestens schon ab einer Entfernung von $p \geq 2.0$ pc vom Wolkenzentrum), d.h. zu Typ I-Profilen. Nur die (mit der 3D-Strahlungstransport-Methode bestimmten) Profile dieser Linien aus dem Wolken*kern* (für $p = 0$) zeigen eine *rot*-verschobene Selbstabsorption mit einem größeren *blauen* Primärpeak – wie beim anderen sphärischen Wolkenbeispiel – sind aber hier dagegen nicht so stark asymmetrisch und vom Typ II: Es werden also, mit zunehmender Entfernung p vom Wolkenzentrum, nicht mehr alle Profiltypen I–IV durchlaufen, jedoch treten auch hier wieder blau- *und* rot-verschobene Selbstabsorptionen in derselben Wolke nebeneinander auf.

Die theoretischen Selbstabsorptionsprofile der CS(2-1)-Linie aus dem axialsymmetrischen kollabierenden und *rotierenden* Wolkenbeispiel mit $v_{\mathrm{turb}} = 6.0 \times 10^5$ cm/s (vgl. Abb. 29 und 30 in Abschn. 8.2) wechseln wiederum – wie die beobachteten Spektren aus GF9-2 und die entsprechenden zuvor beschriebenen theoretischen Linien aus der sphärischen Wolke ohne Rotation – ihre Symmetrie ausgehend vom Wolkenzentrum und dem asymmetrischen Typ IV(b)[19] über den Profiltyp III(b) und II(b) hin zum symmetrischen Typ I *ohne* Selbstabsorption, mit zunehmender Entfernung von der Wolkenmitte (wie bei der Beobachtung). Neben der blau-verschobenen Selbstabsorption, treten also *nicht* gleichzeitig auch *rot*-verschobene Selbstabsorptionen auf, wie bei der beobachteten Wolke oder der theoretischen sphärischen Wolke, sondern der Primärpeak der $J = 2-1$-Linie ist allenorts überall *rot*-verschoben.

Die in jeweils gleicher Entfernung r zum Wolkenzentrum gegenüber liegenden, *berechneten* ortsaufgelösten Profile für $\vartheta = 89°$ (in Abb. 29 unten), die nahezu identisch sind, lassen eine fast sphärische Geschwindigkeits- und Dichteverteilung der eigentlich axialsymmetrischen Modellwolke vermuten. Erst *unterhalb* einer Entfernung von $r \leq 1$ pc erkennt man einen schwachen

[19] ... d.h. mit einem ausgeprägten *roten* Emissionspeak *ohne* Sekundärpeak, welcher letzteres durch eine blau-verschobene Selbstabsorption unterdrückt ist, im Gegensatz zum sphärischen 3D-Wolkenmodell und zum beobachteten Wolkenkern, wo das Intensitätsmaximum *blau*-verschoben ist.

Einfuß der azimutalen Wolkengeschwindigkeit auf die kernnahen Profile, an Orten jeweils symmetrisch zum Wolkenzentrum entlang der Äquatorlinie (vgl. Abb. 35). Nur entlang der Polachse haben die oberhalb und unterhalb des Wolkenzentrums jeweils in gleicher Entfernung gegenüber liegenden Profile leicht unterschiedliche Intensitätsmaxima, was sich durch den nicht exakt senkrechten Blick ($\vartheta = 89°$) auf die Pol*achse* einer *nicht* kugelsymmetrischen Wolke erklären läßt; denn selbst für eine axialsymmetrische Wolke müßten für $\vartheta = 90°$ auch diese Linienprofile identisch sein. Diese beiden, theoretisch beschriebenen Effekte auf die ortsabhängige Symmetrie der CS(2-1)-Linienprofilformen zum Wolkenzentrum entlang der Polachse bzw. des Äquators, lassen sich auch bei der GF9-2-Quelle in Abb. 36 in viel stärkerem Maße beobachten, wenn man die (senkrecht zur Sichtrichtung projezierte) Polachse in NW-SO-Richtung, bzw. den Äquator in senkrechter Richtung dazu, durch das Wolkenzentrum legt (was in der Abb. 36 gerade den Bilddiagonalen entspricht; s. obige Argumentation zu Beginn dieses Abschnitts zur Beschreibung der beobachteten CS(2-1)-Linienprofile), und eine axialsymmetrische Verteilung annimmt. Dann würde man (der Abb. 36 zufolge) schräg auf die zum Beobachter gekippte Polachse (mit $0 < \vartheta < 90°$) des stark rotierenden Molekülwolkenkerns GF9-2 blicken.

Im Gegensatz zu den (theoretischen und beobachteten) asymmetrischen Profilen der CS(2-1)-Linie sind die berechneten Linienprofile des $J = 3 - 2$-Übergangs aus der axialsymmetrischen Wolke fast alle *symmetrisch* (d.h. vom Typ I) *ohne* Selbstabsorption, bis auf Ausnahme des Profils aus Richtung des Zentrums (für $\vartheta = 1°$ und $89°$) mit einer schwachen blau-verschobenen Selbstabsorption im rechten Linienflügel. Vergleiche dazu auch die ausführliche Diskussion der theoretischen ortsaufgelösten CS-Linienprofile aus dem axialsymmetrischen Wolkenbeispiel in Abschnitt 8.2.3.

A 1D-Strahlungstransport im sphärisch bewegten Fall

A.1 Eine weitere Herleitung der implementierbaren Näherungsformel für die spezifische Intensität

Integrationsrichtung entlang einwärts gerichteter Strahlen mit $\mu_0 < 0$

In der Arbeit von Baschek et al. (1997) werden die exakten analytischen Lösungen der zeitunabhängigen Strahlungstransportgleichung sowohl für differentiell bewegte planparallele als auch sphärische Konfigurationen angegeben. Es wird davon ausgegangen, daß die Quellfunktion gegeben sei. Hiernach ist die invariante spezifische Intensität in sphärisch bewegten Medien am Radius r, in Strahlrichtung mit dem Richtungscosinus μ_0, zur Wellenlänge λ_0 gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{I}\left(r,\mu_0,\lambda_0\right) &= \tilde{I}\left(R,\mu_0^R,\lambda_0^R\right)\cdot e^{-\int_r^R \frac{\lambda_0\,\chi_0\left(r',g\left(r',\mu_0,\lambda_0\right)\right)}{g\left(r',\mu_0,\lambda_0\right)}\frac{r'\,dr'}{\sqrt{r'^2-r^2\,h^2\left(r',\mu_0\right)}}} \\ &+ \int_r^R e^{-\int_r^{r'} \frac{\lambda_0\,\chi_0\left(r'',g\left(r'',\mu_0,\lambda_0\right)\right)}{g\left(r'',\mu_0,\lambda_0\right)}\frac{r''\,dr''}{\sqrt{r''^2-r^2\,h^2\left(r'',\mu_0\right)}}} \\ &\cdot\frac{\lambda_0\,\tilde{\eta}_0\left(r',g\left(r',\mu_0,\lambda_0\right)\right)}{g\left(r',\mu_0,\lambda_0\right)}\frac{r'\,dr'}{\sqrt{r'^2-r^2\,h^2\left(r',\mu_0\right)}}\end{aligned} \tag{127}$$

mit

$$h\left(r,\mu_0\right) = \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{\gamma\left(1+\mu_0\,\beta\right)}\,, \tag{128}$$

$$g\left(r,\mu_0,\lambda_0\right) = \gamma\left(1+\mu_0\,\beta\right)\lambda_0\,, \tag{129}$$

$$\gamma\left(r\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta\left(r\right) = \frac{v_{\mathrm{r}}\left(r\right)}{c}\,.$$

Außerdem gilt nach Definition $\tilde{\eta} := \lambda^5\,\eta$ bzw. $\tilde{\eta_0}\left(\lambda_0\right) = \lambda_0^5\,\eta_0\left(\lambda_0\right)$, sowie nach der Energiegleichung ($\eta_\nu\,d\nu \stackrel{!}{=} \eta_\lambda\,d\lambda$)

$$\eta_\lambda\left(\lambda\right) = \frac{\nu^2}{c}\,\eta_\nu\left(\nu\right)\,,$$

so daß sich insgesamt

$$\tilde{\eta_0}\left(r,\mu_0,\lambda_0\right) = \frac{c^4}{\nu_0^3}\,\eta_0\left(r,\mu_0,\nu_0\right) \tag{130}$$

ergibt. Die Emissivität läßt sich auch mit Hilfe der Quellfunktion S ausdrücken zu

$$\eta_0\left(r,\mu_0,\nu_0\right) = \chi_0\left(r,\mu_0,\nu_0\right)S\left(r\right)\,. \tag{131}$$

Desweiteren gilt nach Definition

$$\tilde{I_0}\left(\lambda_0\right) = \frac{c^4}{\nu_0^3}\,I_0\left(\nu_0\right)\,. \tag{132}$$

Da nun laut Definition ebenso $\tilde{I} \equiv \tilde{I_0}$ ist, gilt die Gl. (127) auch für $\tilde{I_0}(r,\mu_0,\lambda_0)$. Wenn man also die Beziehungen (128) – (132) verwendet, folgt aus Gl. (127) für die Intensität $I_0(\nu_0)$ im mitbewegten System

$$I_0\left(r,\mu_0,\nu_0\right) = I_0\left(R,\mu_0^R,\nu_0^R\right)\cdot e^{-\int_r^R \chi_0\left(r',g\left(r',\mu_0,\nu_0\right)\right)\frac{1}{\gamma\left(1+\mu_0\beta\left(r'\right)\right)}\frac{r'}{\sqrt{r'^2-r^2\frac{1-\mu_0^2}{\gamma^2\left(1+\mu_0\beta\left(r'\right)\right)^2}}}dr'}$$
$$+\int_r^R e^{-\int_r^{r'} \chi_0\left(r'',g\left(r'',\mu_0,\nu_0\right)\right)\frac{1}{\gamma\left(1+\mu_0\beta\left(r''\right)\right)}\frac{r''}{\sqrt{r''^2-r^2\frac{1-\mu_0^2}{\gamma^2\left(1+\mu_0\beta\left(r''\right)\right)^2}}}dr''}$$
$$\cdot\chi_0\left(r',g\left(r',\mu_0,\nu_0\right)\right)\cdot S\left(r'\right)\cdot\frac{1}{\gamma\left(1+\mu_0\beta\left(r'\right)\right)}\frac{r'}{\sqrt{r'^2-r^2\frac{1-\mu_0^2}{\gamma^2\left(1+\mu_0\beta\left(r'\right)\right)^2}}}dr'\,.$$

Aus praktischen Gründen definieren wir nun die Funktion

$$f\left(r',p\right) := \frac{1}{\gamma\left(1+\mu_0(r')\beta\left(r'\right)\right)}\frac{r'}{\sqrt{r'^2-\frac{p^2}{\gamma^2\left(1+\mu_0(r')\beta\left(r'\right)\right)^2}}}\,, \tag{133}$$

und entwickeln diese nach β bis zur ersten Ordnung

$$\boxed{\begin{aligned} f\left(r',p\right) &\equiv \frac{r'}{\sqrt{r'^2-p^2}}-\frac{r'^3}{\sqrt{r'^2-p^2}^3}\,\mu_0(r')\,\beta(r')+O\left(\beta^2\right) \\ &= f_1\left(r',p\right)+f_2\left(r',p\right)\mu_0(r')\,\beta\left(r'\right)+O\left(\beta^2\right)\end{aligned}} \tag{134}$$

mit

$$p^2\left(r,\mu_0\right)\equiv(1-\mu_0^2(r))r^2 = \text{konstant (für } v\ll c).$$

Bei Unterteilung der sphärischen Wolke in Kugelschalen mit den Radien $R>\ldots>r_k>r_{k+1}>\ldots>r_{N_r}$ und $r_1=R$, $r_2=r_1-\Delta\,r_1$, $r_3=r_2-\Delta\,r_2$, $\ldots$, r_k, $\ldots$, r_{N_r}, (wobei $\Delta r_k>0$), ist danach die Intensitätsänderung nach Durchgang des Schalenintervalls *von* r_k *nach* r_{k+1} (d.h. für $\mu_0<0$ und $R\geq r_k>r_{k+1}\geq p$) gegeben durch

$$\begin{aligned} I_{0_{lu}}\left(r_{k+1},p,\mu_0(r_{k+1}),\nu_0\right) &= I_{0_{lu}}\left(r_k,p,\mu_0(r_k),\nu_0\right)\cdot e^{-\int_{r_{k+1}}^{r_k} f\left(r',p\right)\cdot\chi_{0_{lu}}\left(r',\mu_0(r'),\nu_0\right)\cdot dr'} \\ &+\int_{r=r_{k+1}}^{r_k} f\left(r,p\right)\cdot\chi_{0_{lu}}\left(r,\mu_0(r),\nu_0\right)\cdot S\left(r,\nu_{lu}\right) \\ &\qquad\cdot e^{-\int_{r_{k+1}}^{r} f\left(r',p\right)\cdot\chi_{0_{lu}}\left(r',\mu_0(r'),\nu_0\right)\cdot dr'}\cdot dr\,. \end{aligned} \tag{135}$$

Mit Hilfe der Definition[20]

$$dt := -f\left(r\right)\cdot\chi_0\left(r\right)\cdot dr\,,$$

folgt für den ersten Exponenten in Gl. (135) mittels einer Substitution

$$\int_{r=r_{k+1}}^{r_k} f\left(r\right)\cdot\chi_0\left(r\right)\cdot dr = \int_{t=t\left(r_k\right)}^{t\left(r_{k+1}\right)} dt = t\left(r_{k+1}\right)-t\left(r_k\right) =: \Delta\tau_{lu}(r_k,r_{k+1},p,\nu_0)\ >0\,,$$

[20] Es werden im folgenden zur besseren Übersicht in den Zwischenschritten zur Herleitung der Intensitätsformeln *nicht* immer alle Funktionsvariablen von f, χ_0 und S explizit angegeben. Es gelten die gleichen Funktions- und Größendefinitionen wie in Abschn. 4.

und für den zweiten Summanden

$$
\begin{aligned}
\int_{r=r_{k+1}}^{r_k} f(r)\cdot\chi_0(r)\cdot S(r)\cdot e^{-\int_{r_{k+1}}^{r} f(r')\cdot\chi_0(r')\cdot dr'}\cdot dr &= \int_{t=t(r_k)}^{t(r_{k+1})} S(t)\cdot e^{-\int_{t(r)}^{t(r_{k+1})} dt'} dt \\
&= \int_{t=t(r_k)}^{t(r_{k+1})} S(t)\cdot e^{-(t(r_{k+1})-t)}\cdot dt \\
\left\{\begin{array}{l}\text{Eine weitere Substitu-}\\ \text{tion } t' := t(r_{k+1}) - t\ ,\\ \text{mit dt' = - dt liefert} \ldots\end{array}\right\} &= -\int_{t'=t(r_{k+1})-t(r_k)}^{0} S(t')\cdot e^{-t'}\cdot dt' \\
&= \int_0^{\Delta\tau} S(t')\cdot e^{-t'}\cdot dt' \\
&=: \Delta Q_{lu}(r_k, r_{k+1}, p, \nu_0)\,.
\end{aligned}
$$

Der *allgemein* gültige Ausdruck für die Intensitätsänderung nach Durchgang durch das Schalenintervall von r_k nach r_{k+1}, welcher noch keine Näherungen enthält, lautet dann

$$
\boxed{\begin{aligned} I_{0_{lu}}(r_{k+1}, p, \mu_0(r_{k+1}), \nu_0) &= I_{0_{lu}}(r_k, p, \mu_0(r_k), \nu_0)\cdot e^{-\Delta\tau_{lu}(r_k, r_{k+1}, p, \nu_0)} \\ &\quad + \Delta Q_{lu}(r_k, r_{k+1}, p, \nu_0)\end{aligned}} \tag{136}
$$

mit der Definition von

$$
\Delta Q_{lu}(r_k, r_{k+1}, p, \nu_0) := \int_0^{\Delta\tau_{lu}} S(t', \nu_{lu})\cdot e^{-t'}\cdot dt'\,. \tag{137}
$$

Unter der **Annahme (1)**, daß die Funktion $S(t)\,e^{-t}$ stückweise (d.h. schalenweise) *linear* sei, liefert die Auswertung des Integrals Gl. (137), mittels der Trapezregel, den genäherten Ausdruck für

$$
\begin{aligned}
\Delta Q_{lu}(r_k, r_{k+1}, p, \nu_0) &\approx \frac{\Delta\tau}{2}\,\big(S(t'=\Delta\tau)\,e^{-\Delta\tau} + S(t'=0)\big) \\
&= \frac{1}{2}\,\Delta\tau_{lu}(r_k, r_{k+1}, p, \nu_0)\,\big(S(r_k, \nu_{lu})\,e^{-\Delta\tau_{lu}} + S(r_{k+1}, \nu_{lu})\big)\,.
\end{aligned} \tag{138}
$$

Nun bleibt nur noch die Berechnung von

$$
\Delta\tau_{lu}(r_k, r_{k+1}, p, \nu_0) := \int_{r=r_{k+1}}^{r_k} f(r,p)\cdot\hat{\chi}_{0_{lu}}(r)\cdot\Phi_{lu}\,\left(g\left(r, \mu_0(r), x_0(\nu_0)\right)\right)\cdot dr
$$

mit $p =$ konstant.

Mit der

Annahme (2a) daß die Produktfunktion $\mu_0\cdot\beta$ zwischen den Kugelschalen als *stückweise linear* angesehen werden kann, d.h.

$$
(\mu_0\beta)' = \frac{\mu_0(r_k)\cdot\beta(r_k) - \mu_0(r_{k+1})\cdot\beta(r_{k+1})}{\Delta\, r} = \text{konst}\,,
$$

wobei $\Delta r = r_k - r_{k+1}$ und $R \geq r_k > r_{k+1} \geq p$, und der

Annahme (2b) daß nur *nicht*relativistische Geschwindigkeiten betrachtet werden ($v \ll c$), so daß alle höheren Restglieder $O\left(\beta^2\right)$ in der Reihenentwicklung (134) der Funktion $f\left(\beta\left(r'\right)\right)$ vernachlässigt werden können

$$f\left(r', p, \mu_0(r'), \beta\left(r'\right)\right) \approx \frac{r'}{\sqrt{r'^2 - p^2}} - \frac{r'^3}{\sqrt{r'^2 - p^2}^3}\, \mu_0(r')\, \beta(r')\,,$$

sowie der

Annahme (3): $\chi_0\left(r\right)$ sei ebenfalls schalenweise *linear*, d.h.

$$\chi_0' = \frac{\chi_0\left(r_k\right) - \chi_0\left(r_{k+1}\right)}{r_k - r_{k+1}} = \frac{\hat{\chi}_0\left(r_k\right)\Phi(r_k) - \hat{\chi}_0\left(r_{k+1}\right)\Phi(r_{k+1})}{\Delta\, r} = \mathrm{konst}\,,$$

kann nun das Integral $\Delta\tau$ ausgewertet werden.

Eine partielle Integration liefert dann

$$\begin{aligned}
\Delta\tau = \int_{r_{k+1}}^{r_k} f\left(r\right)\cdot\chi_0\left(r\right)\cdot dr &= \left[F\left(r\right)\cdot\chi_0\left(r\right)\right]_{r=r_{k+1}}^{r_k} - \int_{r_{k+1}}^{r_k} F\left(r\right)\cdot\chi_0'\left(r\right)\cdot dr \\
&\approx \left[F\left(r\right)\cdot\chi_0\left(r\right)\right]_{r=r_{k+1}}^{r_k} - \chi_0'\cdot\int_{r_{k+1}}^{r_k} F\left(r\right)\cdot dr \\
&\approx F\left(r_k\right)\cdot\chi_0\left(r_k\right) - F\left(r_{k+1}\right)\cdot\chi_0\left(r_{k+1}\right) \\
&\quad + \frac{\chi_0\left(r_{k+1}\right) - \chi_0\left(r_k\right)}{2}\left(F\left(r_k\right) + F\left(r_{k+1}\right)\right)\,,
\end{aligned} \tag{139}$$

wobei beim letzten Integral zunächst die Annahme (3) und dann die Trapezregel angewendet wurde, und F die Stammfunktion

$$F\left(r\right) := \int f(r)\, dr = F_1(r) + \int f_2(r)\, \mu_0(r)\beta(r)\, dr \tag{140}$$

darstellt, worin

$$F_1\left(r\right) = \int f_1\left(r\right) dr = \sqrt{r^2 - p^2}\,, \tag{141}$$

und im folgenden

$$F_2\left(r\right) = \int f_2\left(r\right) dr = \frac{r^2 - 2p^2}{\sqrt{r^2 - p^2}} \tag{142}$$

sei.

Das Integral in Gl. (140), für die Integrationsgrenzen von r_{k+1} nach r_k, kann wiederum auf die gleiche Weise durch partielle Integration aufgelöst werden,

$$\begin{aligned}
\int_{r_{k+1}}^{r_k} f_2(r)\left(\mu_0(r)\beta(r)\right) dr &\approx \left[F_2(r)\left(\mu_0(r)\beta(r)\right)\right]_{r=r_{k+1}}^{r_k} - \left(\mu_0\beta\right)' \int_{r_{k+1}}^{r_k} F_2(r)\cdot dr \\
&\approx F_2(r_k)\left(\mu_0(r_k)\beta(r_k)\right) - F_2(r_{k+1})\left(\mu_0(r_{k+1})\beta(r_{k+1})\right) \\
&\quad + \frac{\mu_0(r_{k+1})\beta(r_{k+1}) - \mu_0(r_k)\beta(r_k)}{2}\left(F_2(r_k) + F_2(r_{k+1})\right)
\end{aligned} \tag{143}$$

wobei beim letzten Integral zunächst die Annahme (2a) und dann die Trapezregel angewendet wurde. Insgesamt erhält man also für die Funktion $F(r)$, zur Berechnung von $\Delta\tau$,

$$F(r) \approx F_1(r) + \frac{\mu_0(r_k)\beta(r_k) + \mu_0(r_{k+1})\beta(r_{k+1})}{2} \left(F_2(r_k) - F_2(r_{k+1})\right) = F_1(r) + \text{konst}\,.$$

Dieser Ausdruck für die beiden Schalenradien r_k und r_{k+1} in Gl. (139) eingesetzt (unter Verwendung von Gl. (141)), ergibt schließlich folgende einfache Näherung für die optische Tiefe

$$\boxed{\Delta\tau \approx \left(\sqrt{r_k^2 - p^2} - \sqrt{r_{k+1}^2 - p^2}\right) \frac{\chi_0(r_k,\nu_0) + \chi_0(r_{k+1},\nu_0)}{2}}\,, \tag{144}$$

mit der Abkürzung

$$\chi_0(r,\nu_0) := \chi_0(r,\mu_0(r),\beta(r),\nu_0) = \hat{\chi}_{0_{lu}}(r)\,\Phi_{lu}\,\left(g\left(r,\mu_0(r),\beta(r),x_0(\nu_0)\right)\right)\,.$$

A.2 Berechnung der gemittelten Intensität $\overline{J}_{lu}\,(r)$

Schließlich wird das Doppelintegral der benötigten *gemittelten* Intensität mittels der Gauß-Formel numerisch berechnet, was beliebig genau durch eine entsprechend hohe Diskretisierung des Winkel- und Frequenzraums erreicht werden kann.

In planaren und sphärischen Konfigurationen gilt (s. Mihalas 1978)

$$\overline{J}_{lu}\,(r) = \frac{1}{2}\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \int_{\mu_0=-1}^{+1} \Phi\,(\nu_0)\, I_0\,(r,\mu_0,\nu_0)\, d\mu_0\, d\nu_0\,. \tag{145}$$

Mit der Beziehung

$$(I_0)_\nu\, d\nu_0 \equiv (I_0)_x\, dx_0$$

sowie mit Hilfe der Transformation des Linien-Profils von $\Phi_\nu(\nu_0)$ nach $\Phi_x(x_0)$, welche sich aus der Normierungsbedingung für Φ,

$$\Phi_\nu(\nu_0)\, d\nu_0 \overset{!}{=} \Phi_x(x_0)\, dx_0\,,$$

ergibt, das heißt

$$\Phi\,(\nu_0) = \Phi(x_0)\,\frac{dx_0}{d\nu_0} = \frac{c}{\nu_{ij}}\,\frac{1}{v_{turb}}\,\Phi(x_0)\,, \tag{146}$$

mit der Ableitung von Gl. (26) nach der Frequenz

$$\frac{dx_0}{d\nu_0} = \frac{1}{\Delta\nu_D}\,,$$

kann das Integral über die Frequenzen ν_0 durch eine Substitution in ein Integral über x_0 überführt werden

$$\boxed{\overline{J}_{lu}\,(r) = \frac{1}{2}\,\frac{c}{\nu_{lu}}\,\frac{1}{v_{turb}\,(r)} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \Phi\,(x_0) \int_{-1}^{+1} I_0\,(r,\mu_0,x_0)\, d\mu_0\, dx_0}\quad . \tag{147}$$

Darin läßt sich nun die Winkelintegration über die Gaußsche Formel (s. Abramowitz & Stegun 1972)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} h(y)\,dy &= \sum_{i=1}^{N_m} w_i^{(y)}\, h(y_i) + R_m \\ &= \sum_{i=1}^{N_m/2} w_i^{(\pm y)}\, \{h(y_i) + h(-y_i)\} + R_m \end{aligned} \tag{148}$$

(worin bei dieser Darstellung schon ausgenutzt wurde, daß die Gewichte w_i und die zugehörigen Abszissenwerte y_i symmetrisch zur Mitte des Integrationsbereichs liegen, und es tatsächlich nur $N_m/2$ verschiedene Werte von beiden gibt) als Summe

$$\int_{-1}^{+1} I_0(r,\mu_0,x_0)\,d\mu_0 \approx \sum_{i=1}^{N_m/2} w_i^{(\pm\mu_0)}\, \{I_0(r,\mu_{0_i},x_0) + I_0(r,-\mu_{0_i},x_0)\} \tag{149}$$

schreiben, wobei die Abszissen- d.h. die diskreten Winkelwerte $\mu_{0_i} = cos\,\theta_i$ und zugehörigen Gewichte $w_i^{(\pm\mu_0)}$ zur Integralauswertung als Tabellenwerte *gegeben* sind, und der jeweils i-ten Nullstelle μ_{0_i} des Legrendre-Polynoms $P_m(\mu_0)$ entsprechen bzw. dem Gewichtungsfaktor

$$w_i^{(\pm\mu_0)} = \frac{2}{(1-\mu_{0_i}^2)\cdot(P_m'(\mu_{0_i}))^2}\,. \tag{150}$$

Ebenso läßt sich eine Diskretisierung des Frequenz- bzw. x_0-Raumes ausführen und das Integral über x_0 in Gl. (147) darstellen als

$$\int_{-x_{max}}^{x_{max}} \Phi(x_0)\, I_0(r,\mu_0,x_0)\,dx_0 \approx \sum_{j=1}^{N_n/2} W_j^{(\pm x)}\, \left\{I_0(r,\mu_0,x_{0_j}) + I_0(r,\mu_0,-x_{0_j})\right\}\,. \tag{151}$$

In der Praxis hat es sich bewährt, für die Integrationsgrenzen in Gl. (151) den Betrag $x_{max} = 3.5$ zu wählen, was einem $\nu_{min} = \nu_{lu} - 3.5\cdot\Delta\nu_D$ bzw. $\nu_{max} = \nu_{lu} + 3.5\cdot\Delta\nu_D$ entspricht.

Zur numerischen Berechnung des Integrals (151)

Die *allgemeine* Gaußsche Formel für *beliebige* Integrationsgrenzen a und b lautet (s. Abramowitz & Stegun 1972)

$$\int_a^b h(z)\,dz = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^{(z)}\, h(z_i) + R_n\,, \tag{152}$$

mit dem Restglied R_n und den Abszissenwerten

$$z_i = \left(\frac{b-a}{2}\right) y_i + \left(\frac{b+a}{2}\right)\,, \tag{153}$$

wobei y_i wiederum der i-ten Nullstelle des Legendre-Polynoms $P_n(y)$ entspricht, und der zum Abzissenwert gehörende Gewichtsfaktor identisch mit dem zum Wert y_i ist, wie er zur Berechnung des Integrals (148) mit den Grenzen von -1 bis $+1$ benötigt wird, d.h.

$$w_i^{(z)} \equiv w_i^{(y)} = \frac{2}{(1-y_i^2)\cdot(P_n'(y_i))^2}\,, \tag{154}$$

welcher zusammen mit den Nullstellen y_i in numerischen Tabellen (s. z.B. Abramowitz & Stegun 1972) zu finden ist.

Für beliebige und *symmetrisch* zu $z = 0$ liegende Integrationsgrenzen $a = -b$ und $+b$, vereinfacht sich Gl. (152), und man erhält (unter Ausnutzung, daß dann $w\,(+z_i) = w\,(-z_i)$ ist)

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{b} h\,(z)\,dz &= b \sum_{i=1}^{n} w_i^{(z)}\, h\,(z_i) + R_n \\ &= b \sum_{i=1}^{n/2} w_i^{(\pm z)}\, \{h\,(z_i) + h\,(-z_i)\} + R_n \\ &= b \sum_{i=1}^{n/2} w_i^{(\pm y)}\, \{h\,(b \cdot y_i) + h\,(-b \cdot y_i)\} + R_n\,, \end{aligned} \tag{155}$$

mit

$$z_i = b \cdot [y_i]_{(tab)} \qquad \text{und} \qquad w_i^{(\pm z)} = \left[w_i^{(\pm y_i)}\right]_{(tab)}\,. \tag{156}$$

Der Normierungsfaktor C in der Gauß-Funktion $C \cdot e^{-x_0^2}$ für das Absorptionsprofil $\Phi\,(x_0)$ läßt sich dann aus der Bedingung

$$\int_{-x_{max}}^{+x_{max}} \Phi\,(x_0)\,dx_0 \stackrel{!}{=} 1$$

bestimmen, wobei hier das Integral über x_0 auf der linken Seite der Definitionsgleichung für die Funktion $h\,(x_0) = C \cdot e^{-x_0^2}$ mit Hilfe der Beziehung (155) berechnet wird, d.h.

$$\int_{-x_{max}}^{+x_{max}} C \cdot e^{-x_0^2}\,dx_0 \approx x_{max}\,C \sum_{j=1}^{N_n/2} w_j^{(\pm x_0)} \left\{2 \cdot e^{-(x_{max} \cdot x_{0_j})^2}\right\} \stackrel{!}{=} 1\,,$$

und damit für den Faktor

$$C = \frac{1}{2\,x_{max} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{N_n/2} w_j^{(\pm x_0)}\; e^{-(x_{max} \cdot x_{0_j})^2}} \tag{157}$$

folgt; die x_{0_j}'s und deren Gewichte $w_j^{(\pm x_0)}$ entsprechen dabei den (tabellierten) Werten y_i und $w_i^{(\pm y_i)}$ in den Beziehungen (156) für eine n-Punkt Gauß-Näherung und ein zum Linienzentrum (bei $x_0 = 0$) symmetrisches Integrationsintervall.

Somit kann das Integral (151) über die Frequenz-Verschiebung x_0 von $-x_{max}$ bis x_{max} ausgewertet werden, indem die Gauß-Formel (155) jetzt auf die Funktion

$$h\,(x_0) = \Phi\,(x_0) \cdot I\,(x_0)$$

angewendet wird, so daß sich

$$\int_{-x_{max}}^{x_{max}} \Phi\,(x_0)\, I_0\,(r, \mu_0, x_0)\,dx_0$$

$$\begin{aligned}
&\approx \quad x_{max} \cdot \sum_{j=1}^{N_n/2} w_j^{(\pm x_0)} \left\{ \Phi\left(x_{max} \cdot x_{0_j}\right) I_0\left(x_{max} \cdot x_{0_j}\right) + \Phi\left(-x_{max} \cdot x_{0_j}\right) I_0\left(-x_{max} \cdot x_{0_j}\right) \right\} \\
&= \quad \frac{x_{max}}{2\, x_{max} \cdot \sum_{j=1}^{N_n/2} w_j^{(\pm x_0)}\, e^{-(x_{max} \cdot x_{0_j})^2}} \sum_{j=1}^{N_n/2} w_j^{(\pm x_0)}\, e^{-(x_{max} \cdot x_{0_j})^2} \cdot \left\{ I_0\left(x_{max} \cdot x_{0_j}\right) + I_0\left(-x_{max} \cdot x_{0_j}\right) \right\} \\
&=: \quad \sum_{j=1}^{N_n/2} W_j^{(\pm x_0')} \left\{ I_0\left(x_{0_j}'\right) + I_0\left(-x_{0_j}'\right) \right\}
\end{aligned}$$

ergibt, mit den neu definierten Gewichtsfaktoren

$$\boxed{W_j^{(\pm x_0')} := \frac{w_j^{(\pm x_0)}\, e^{-x_{0_j}'^2}}{2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{N_n/2} w_j^{(\pm x_0)}\, e^{-x_{0_j}'^2}}}\;; \tag{158}$$

wobei dann der Abszissenwert x_{0_j}', mit der j-ten Nullstelle x_{0_j} des Legendre-Polynoms $P_n(x)$, in folgender Beziehung

$$\boxed{x_{0_j}' = x_{max}\, x_{0_j}} \tag{159}$$

steht und für die Gewichte

$$\boxed{w_j^{(\pm x_0')} \equiv w_j\left(\pm x_{0_j}\right)} = \frac{2}{\left(1 - x_{0_j}^2\right)\, \left[P_n'\left(x_{0_j}\right)\right]} \tag{160}$$

gilt.

Somit sind die zu einer *beliebig* genauen Auswertung des Integrals (147) für die gemittelte Linien-Intensität des Übergangs $l \to u$ notwendigen Frequenz-Verschiebungen x_{0_j} und Winkel μ_{0_i}, sowie deren Gewichte w_j und w_i, alle bekannt bzw. berechenbar.

Setzt man nun die Näherungen (149) und (151) in die Gleichung (147) für die gemittelte Intensität $\overline{J}_{lu}$ ein, so folgt

$$\begin{aligned}
\overline{J}_{lu}(r) \quad &\approx \quad \frac{1}{2} \frac{c}{\nu_{lu}} \frac{1}{v_{turb}(r)} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \Phi(x_0) \left\{ \sum_{i=1}^{N_m/2} w_i^{(\pm\mu_0)} \left\{ I_0\left(r, \mu_{0_i}, x_0\right) + I_0\left(r, -\mu_{0_i}, x_0\right) \right\} \right\} dx_0 \\
&= \quad \frac{1}{2} \frac{c}{\nu_{lu}} \frac{1}{v_{turb}(r)} \sum_{i=1}^{N_m/2} w_i^{(\pm\mu_0)} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \Phi(x_0) \left\{ I_0\left(r, \mu_{0_i}, x_0\right) + I_0\left(r, -\mu_{0_i}, x_0\right) \right\} dx_0 \\
&= \quad \frac{1}{2} \frac{c}{\nu_{lu}} \frac{1}{v_{turb}(r)} \sum_{i=1}^{N_m/2} w_i^{(\pm\mu_0)} \left\{ \int_{-x_{max}}^{x_{max}} \Phi(x_0)\, I_0\left(r, \mu_{0_i}, x_0\right) dx_0 \right. \\
&\qquad \left. + \int_{-x_{max}}^{x_{max}} \Phi(x_0)\, I_0\left(r, -\mu_{0_i}, x_0\right) dx_0 \right\} \\
&= \quad \frac{1}{2} \frac{c}{\nu_{lu}} \frac{1}{v_{turb}(r)} \sum_{i=1}^{N_m/2} w_i^{(\pm\mu_0)} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{N_n/2} W_j^{(\pm x_0')} \left\{ I_0\left(r, \mu_{0_i}, x_{0_j}'\right) + I_0\left(r, \mu_{0_i}, -x_{0_j}'\right) \right\} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{N_n/2} W_j^{(\pm x_0')} \left\{ I_0\left(r, -\mu_{0_i}, x_{0_j}'\right) + I_0\left(r, -\mu_{0_i}, -x_{0_j}'\right) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

und schließlich (in Abhängigkeit der diskret gewählten Kugelschalradien r_k) die gemittelte Intensität am Ort r'_k

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{J}_{lu}\left(r'_k\right) \;=\; & \frac{1}{2}\frac{c}{\nu_{lu}}\frac{1}{v_{turb}\left(r_k\right)}\sum_{m=1}^{N_m/2}\sum_{n=1}^{N_n/2} w_m^{(\pm\mu_0^g)}\, W_n^{(\pm x'_0)} \cdot \Big\{ I_{0_{lu}}\left(r'_k,\mu^{(g)}_{0_m},x'_{0_n}\right) + I_{0_{lu}}\left(r'_k,\mu^{(g)}_{0_m},-x'_{0_n}\right) \\ & + I_{0_{lu}}\left(r'_k,-\mu^{(g)}_{0_m},x'_{0_n}\right) + I_{0_{lu}}\left(r'_k,-\mu^{(g)}_{0_m},-x'_{0_n}\right)\Big\}\end{aligned}} . \tag{161}$$

B Nicht-sphärische strahlungsgetriebene Sternwinde

B.1 Beobachtung von Sternwinden

Der Massenverlust von leuchtkräftigen heißen Sternen durch Sternwinde, welche zuerst durch UV-Satelliten durch ihre starken P Cygni-Profile entdeckt wurden, hat bedeutende Folgen für die Entwicklung massiver Sterne. Die Winde dieser Sterne sind eine wichtige Quelle chemisch angereicherten Materials für das interstellare Medium (s. z.B. Reviews, Wolf et al. 1999).

Analysen der Linienprofile und der Infrarotstrahlung implizieren enorme Massenverlust-Raten $\dot{\mathcal{M}}$ von 10^{-6} bis $10^{-5}\mathcal{M}_{\odot}$/Jahr bei O-Sternen, und wahrscheinlich bis zu $10^{-4}\mathcal{M}_{\odot}$/Jahr bei Wolf–Rayet-Sternen (vgl. Abbott et al. 1980 und 1981; Garmany et al. 1981). Diese Beobachtungen deuten auf transsonische Winde hin mit Flußgeschwindigkeiten, die von beinahe Null an der stellaren Photosphäre bis auf hohe Überschallwerte, innerhalb eines Sternradius von der Oberfläche entfernt, ansteigen. Bei O-Sternen sind die beobachteten Grenzgeschwindigkeiten typischerweise dreimal so groß wie die Entweichgeschwindigkeit, was etwa 1000 bis 1500 km/s für einen Hauptreihen-O-Stern entspricht.

In den letzten Jahren sind beträchtliche Fortschritte, sowohl in der theoretischen Modellierung als auch in der quantitativen Spektroskopie strahlungsgetriebener Winde von heißen Sternen, gemacht worden, die eine neue Sicht der Eigenschaften heißer Sternwinde enthüllt hat. Jedoch haben spektroskopische Zeitaufnahmen von UV-Satelliten und vom Erdboden aus (in den entsprechenden Wellenlängen) gezeigt, daß die zeitliche Variabilität eine allgemeine Charakteristik von Winden leuchtkräftiger heißer Sterne ist. Rotation und Pulsation könnte wahrscheinlich eine wichtige Rolle in der Verursachung dieser Variabilität spielen. Bislang wurden viele Beweise erbracht, daß diese Winde häufig nicht-sphärisch sind. In einigen Fällen können die asymmetrischen Ausflüsse direkt beobachtet werden (z.B. mit dem HST).

So machen es diese neuen Ergebnisse wünschenswert, die Windmodelle heißer Sterne für ein besseres physikalisches Verständnis des Vorganges dieser Wind-Variabilitäten und Aspherizitäten weiter zu entwickeln.

B.2 Bisherige Arbeiten zur Theorie von Sternwinden

Die beobachteten Grenz-Windgeschwindigkeiten von O-Sternen können nicht durch das thermische Windmodell (Lucy & Solomon 1970) beschrieben werden. Die wahrscheinlichste Methode mit welcher der Materiefluß erklärt werden kann ist, daß dieser durch einen Impulsübertrag auf das Gas von den intensiven Strahlungsfeldern dieser extrem hellen Sterne angetrieben wird, *besonders* durch die Strahlungskraft, welche auf starke Spektrallinien ausgeübt wird. Weil die Strahlungskraft von der Kontinuumsopazität allein die Schwerkraft nicht übersteigt, kann das Kontinuum selbst einen transsonischen Wind nicht antreiben.

Daß die Winde dieser Sterne vom Strahlungsdruck beherrscht werden, wurde schon durch das liniengetriebene Modell von Castor, Abbott and Klein (1975, hiernach CAK) vorgeschlagen, welches die beobachteten Massenverlustraten und Grenzgeschwindigkeiten vorhergesagt hat. Außerdem übersteigt die berechnete Linienkraft die Schwerkraft für eine große Vielzahl passender Bedingungen für die Hüllen früher (Typ-) Sterne (Lucy & Solomon 1970; CAK).

Wegen dieser wichtigen Bedeutung des Strahlungsdrucks beim Antrieb dieser Winde und der Notwendigkeit eines weiteren Vergleichs mit der Beobachtung, ist daher die Entwicklung einer detaillierteren und physikalisch konsisitenten Theorie angemessen.

Ein allgemeines Merkmal aller supersonischen Flüsse sind *kritische Punkte*. CAK haben gezeigt, daß die Lösung der Bewegungsgleichung im sphärisch symmetrischen Fall, d.h. die Windgeschwindigkeit $v(r)$, einen kritischen Punkt hat, der durch drei Singularitätsbedingungen definiert ist. Sie entwickelten analytische Ausdrücke für die kritische Punkt-Größen, Geschwindigkeit v_{c}, Ableitung $(r^2\, v\, dv/dr)_{\mathrm{c}}$, und eine Näherung für den kritischen Radius r_{c}, wobei sie ein Potenzgesetz, $g_{\mathrm{R,l}} \propto (r^2\, v\, dv/dr)^{\alpha}$ (mit α =konst), für die Linienbeschleunigung angenommen haben, um die erwünschte kritische und transsonische Windlösung zu finden. Ausgehend von diesen exakten Ausdrücken für die kritischen Punkt-Größen, waren sie dann in der Lage eine analytische *Näherung* für das Geschwindigkeitsgesetz in der *Über*schallregion des Windes anzugeben, indem sie den Radius bei welchem die Geschwindigkeit verschwindet als den Schall- (Sonic-) Radius r_{s} gewählt haben (welcher letzterer nahe beim photosphärischen Radius liegt). Um jedoch schließlich die vollständige und präzise Windlösung zu finden, war noch eine numerische Iteration notwendig, in welcher man die nichtlineare Differentialgleichung für die Geschwindigkeit *numerisch*, in jede Richtung vom kritischen Punkt ausgehend, integrieren mußte; wobei die charakterisierenden Größen des kritischen Radius durch eine Abschätzung von r_{c} gegeben sind. Nach der Integration konnte man dann überprüfen, ob der photosphärische Radius den gewünschten Wert hat; wenn nicht, konnte r_{c} entsprechend angepaßt und der Prozess wiederholt werden.

Die früheren Windmodelle von einem *rotierenden* Stern sind meistens eindimensionale Modelle des äquatorialen Flusses (gegen den polaren Fluß) gewesen, obwohl schon eine zweidimensionale numerische Berechnung von Poe (1987) durchgeführt wurde.

Das eindimensionale Modell von Friend & Abbott (1986, hiernach FA) untersuchte den Einfluß der Sternrotation auf die Hydrodynamik eines Sternwindes und löste die (Fluid-) Bewegungsgleichungen numerisch in der *Äquatorebene* unter Einschluß der Zentrifugalkräfte und Verwendung der CAK-Form für die Strahlungskräfte (korrigiert für die finite Winkelausdehnung einer stellaren Scheibe).

Bjorkman & Cassinelli (1993, hiernach BC) gaben eine analytische Näherung für die axialsymmetrische, zweidimensionale, supersonische Lösung (d.h. für das Geschwindigkeitsfeld und die Dichteverteilung) eines rotierenden strahlungsgetriebenen Windes an, welche aus dem eindimensionalen FA-Modell für den äquatorialen Fluß gewonnen wurde. Um die Stromlinienbahnen zu finden, rotierten sie einfach die 1D-Lösung von FA (für die Äquatorebene) hoch bis zur Anfangsbreite θ_0 der Stromlinie auf der Sternoberfläche und ersetzten die äquatoriale Rotationsgeschwindigkeit des Zentralsterns v_{rot} durch $v_{\mathrm{rot}} \sin\theta_0$. Sie argumentierten, daß im Überschallgebiet des

Windes nur zentrale Kräfte, die Gravitations- und Strahlungskraft, aktiv seien und Druckterme vernachlässigt werden können. Somit liegt die Stromlinie in einer Bahnebene, welche das Zentrum des Sterns, den Anfangsort, und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \approx v_{\rm rot} \sin\theta_0$ enthält. Jedoch sind die so erhaltenen supersonischen Lösungen für die Geschwindigkeit und Dichte als Funktion von θ_0 und Radius r angegeben, d.h. in einer nicht-expliziten Form: Zu einem gegebenen Ort (r, θ) muß man zuerst die Anfangsbreite θ_0 der Stromlinie finden, welche (letztere) durch diesen Ort geht, indem man zusätzliche Gleichungen iterativ zu lösen hat. Als Ergebnis konnten sie dann mittels ihres "Wind-Compressed Disk"-Modells (WCD) erklären, wie eine Rotation zur Erzeugung einer dichten äqutorialen Scheibe rund um z.B. Be-Sternen führen kann.

Petrenz & Puls (1996) machten Gebrauch vom einfachen BC-Modell und verbesserten es, um die Dichtestruktur rotierender O-Sternwinde zu simulieren, und den Einfluß der Sternrotation auf die H_α-Linienbildung in solchen Winden zu untersuchen.

Um das Problem überhaupt behandeln zu können, wird in meiner Arbeit ein radial gerichtetes Strahlungsfeld, ausgehend vom Zentralstern, und ein Massenfluß ohne Magnetfelder (ebenso wie in den oben zitierten Arbeiten) angenommen, während die Gegenwart einer differentiellen Windrotation voll in Betracht gezogen wird. Ferner werden nur stationäre Zustandslösungen untersucht.

Der entscheidende Punkt jedes liniengetriebenen Windmodells ist ein passender und genauer Ausdruck für die Strahlungskraft von Spektrallinien. Es ist die Abhängigkeit der Linienkraft vom lokalen Geschwindigkeitsgradienten, die diesen Winden ihren kennzeichnenden Charakter verleiht. In einigen Fällen können kleine Veränderungen der Kraftterme in der Bewegungsgleichung große Änderungen in der Windlösung hervorrufen (Abbott 1980). Abweichungen vom CAK-Geschwindigkeitsgesetz sind in frühen (Typ-) Sternen, wegen z.B. der Rotation, unvermeidlich.

B.3 Die Stromlinien aus dem Sternwind-Modell

Um die Flugbahn eines Materieelements, das am Polarwinkel θ_0 auf der Sternoberfläche mit der azimutalen Geschwindigkeit $v_\phi = v_\phi(R,\theta) = v_{\rm rot}\sin\theta$ entsteht, zu finden, und welche auf eine *Kegel*oberfläche mit halbem Öffnungswinkel θ_0 gebunden ist, erhalten wir eine Differentialgleichung für die Trajektorie, indem wir $\hat{v}_\phi$ durch $\hat{v}_{\rm r}$ dividieren (vgl. Gl. (83) und (108)), was

$$\frac{d\phi}{d\hat{r}} \equiv \frac{\hat{v}_\phi}{\hat{v}_{\rm r}} = \hat{v}_{\rm rot}\sin\theta_0 \frac{1}{\hat{r}} \sqrt{\frac{g_{1,2}(\theta_0)-1}{W_k\left((g_{1,2}(\theta_0)-1)\, e^{-f_{\rm c}(\hat{r},\theta_0)}\right)}}\,. \tag{162}$$

ergibt. Diese hat die Lösung

$$\begin{aligned}\phi(\hat{r},\theta_0) &= \hat{v}_{\rm rot}\sin\theta_0 \cdot \\ &\int_{\hat{r}=1}^{\hat{r}} \frac{1}{\hat{r}'} \sqrt{\frac{g_{1,2}(\theta_0)-1}{W_k\left((g_{1,2}(\theta_0)-1)\, e^{-f_{\rm c}(\hat{r}',\theta_0)}\right)}}\, d\hat{r}' + \phi_0\,. \end{aligned} \tag{163}$$

Mit $\hat{r} \to \infty$ wird die Teilchenbahn radial mit einem asymptotischen Wert für ϕ von

$$\phi_{\max}(v_{\rm rot},\theta_0) = \lim_{\hat{r}\to\infty} \phi(\hat{r},\theta_0) = \mathrm{const}\cdot \hat{v}_{\rm rot}\sin\theta_0 + \phi_0\,. \tag{164}$$

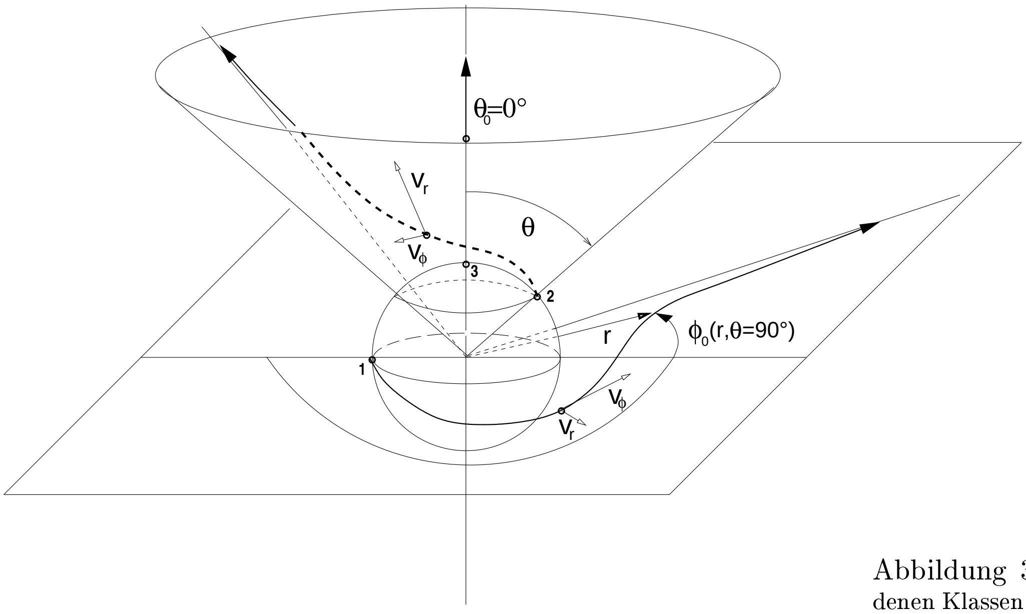


Abbildung 38: Die verschiedenen Klassen von Teilchenbahnen, d.h. Stromlinien aus dem Sternwind-Modell, beschrieben in Abschn. B.3.

Beachte, daß die Lage der Stromlinie $\phi(\hat{r}, \theta_0)$ auf dem Bahn*kegel* in Gl. (163) nicht mehr auf stellare Koordinaten transformiert werden muß. Infolge dessen haben wir drei Klassen von Trajektorien, welche in Abb. 38 dargestellt sind:

1. Fall (1) Trajektorien, welche am Äquator beginnen, dort in der Äquatorialebene verbleiben, und radial werden, je länger sich das Teilchen auf seiner Bahn bewegt,
2. Fall (2) Trajektorien mit irgend einer Anfangsbreite $0 < \theta_0 < \pi/2$ zwischen Pol und Äquator, gebunden auf einem Kegel mit halbem Öffnungswinkel θ_0, welche *schneller* radial werden während sie sich nach außen krümmen (vgl. $\sin \theta_0$ in Gl. (164)), und
3. Fall (3) Trajektorien, die nahe des Pols entstehen und welche fast radial sind;

wobei desweiteren zwei von diesen (Fall (1) und Fall(2)) selbst in zwei Unterklassen unterteilt werden können, d.h. Fall (a) Bahnkurven, die einen großen Wert von $\phi_{\max}$, und Fall (b) Bahnkurven, welche einen kleinen Wert haben, je nachdem, wie groß die Rotationsgeschwindigkeit $v_{\rm rot}$ des Zentralsterns in Gl. (164) zusätzlich ist. Dabei berühren oder kreuzen sich *keine* dieser Stromlinien zu irgend einem Polarwinkel. Jedes Teilchen bleibt in seiner Ebene mit konstantem Winkel θ_0 seiner Anfangsbreite, weil wir die polare Geschwindigkeit v_θ in den Annahmen unseres Modells vernachlässigt haben.

B.4 Die Strahlungskraft auf Spektrallinien in strahlungsgetriebenen Winden

Die auswärts gerichtete Beschleunigung des Gases, welche auf streuende *Sektrallinien* ausgeübt wird, die sich in der expandierenden Hülle über einer hydrostatischen Photosphäre bilden, ist

(der von allen Linien absorbierte Impuls pro Einheitsmasse)

$$g_{\mathrm{R,l}} = \sum_l \frac{1}{c} \int_0^\infty \chi_l^{(g)}(\nu)\, \mathcal{F}_\nu\, d\nu\,, \tag{165}$$

mit dem Linienabsorptionskoeffizient pro Gramm

$$\chi_l^{(g)}(\nu) = \chi_{l,0}^{(g)}\, \Phi(\nu - \nu_l)\,, \tag{166}$$

in welcher Φ das Absorptionsprofil, ν die Laborfrequenz, ν_l die Frequenz des Linienzentrums ist, und der monochromatische Fluß in radialer Richtung $\vec{e_{\mathrm{r}}}$ am Punkt $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$ (in der Hülle)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_{\mathrm{r}}(r,\theta,\vec{e_{\mathrm{r}}}) &= \frac{R^2}{r^2} \int I_\nu(\vec{r},\vec{n})\ (\vec{n}\cdot\vec{e_{\mathrm{r}}})\ d\Omega \\ &= \frac{1}{\hat{r}^2} \int_{4\pi} I_\nu((r,\theta,\phi),(\vartheta,\varphi)) \cos\vartheta d\Omega \end{aligned} \tag{167}$$

ist; wobei $I_\nu(\vec{r},\vec{n})$ die monochromatische Intensität ist, welche an der Stelle $\vec{r}$ in Richtung $\vec{n} = (\vartheta,\varphi)$ zeigt, und der infinitesimal kleine Raumwinkel von dort aus gemessen $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = -d\mu\, d\varphi$ ist, mit $\mu = \cos\vartheta$.

Das Integral (165) kann dann unter den folgenden *Vereinfachungen* analytisch ausgewertet werden:

1. Der Zentralstern kann vom Ort (r,θ,ϕ) fast als eine *Punkt*quelle für emittierende Wellen angesehen werden, so daß die Intensität für nur radial und nach außen strömende Strahlung an diesem Ortspunkt, ohne irgend einen Beitrag in φ–Richtung, ausgedrückt werden kann als
$$I_\nu((r,\theta,\phi),(\vartheta,\varphi)) \approx \frac{B_\nu(\nu)}{2\pi}\, \delta(\mu - 1)\, e^{-\tau_l(r,\theta,\nu)}\,, \tag{168}$$
d.h. wenn wir die Re-Emissionen ignorieren und annehmen, daß die einfallende photosphärische Intensität einfach exponentiell abgeschwächt wird, wenn sie sich an einer Linie streut. Die optische Linientiefe τ_l entlang der radialen Strecke in θ–Richtung zur beobachteten Frequenz ν, vom unteren Ausgangspunkt der Hülle (am Sternradius R) zum Testpunkt $\vec{r}$, ist
$$\tau_l(r,\theta,\nu) := \chi_{l,0}^{(g)} \int_R^r \rho(r',\theta) \Phi\left(\frac{\nu - (\nu_l - \Delta\nu_l)}{\Delta\nu_{\mathrm{D}}}\right) dr', \tag{169}$$
worin die Doppler-Verschiebung des Linienprofils berücksichtigt wurde, sowie mit der Dichteverteilung $\rho(r,\theta)$ aus Gl. (87) und dem rot-verschobenen Linienzentrum (für $\mu = 1$)
$$\Delta\nu_l = \left(\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right)\ \nu_l \equiv \frac{v_{\mathrm{r}}(r,\theta)}{c}\, \nu_l = \Delta\nu_{\mathrm{D}}\, \frac{v_{\mathrm{r}}(r,\theta)}{v_{\mathrm{th}}}\,,$$
wobei $\Delta\nu_{\mathrm{D}}$ die Doppler-Breite $\nu_l(v_{\mathrm{th}}/c)$ ist, bezogen auf H^+. Mit der Definition der dimensionslosen Frequenz-Verschiebung
$$x := \frac{\nu - \nu_l}{\Delta\nu_{\mathrm{D}}}\,, \tag{170}$$
ist die optische Linientiefe dann gegeben durch
$$\tau_l(r,\theta,x) := \chi_{l,0}^{(g)} \int_R^r \rho(r',\theta)\, \Phi\left(x + \frac{v_{\mathrm{r}}(r',\theta)}{v_{\mathrm{th}}}\right)\ dr'\,. \tag{171}$$

2. Der Integrand in Gl. (171) ist nahe an jenem Punkt der Hülle scharf *ge-peakt*, wo die Frequenz x in Resonanz mit der passenden Komponente der lokalen Geschwindigkeit ist. Daher kann Gl. (171) durch das Wechseln zur Frequenz im mitbewegten System,
$$x' = x + \frac{v_{\mathrm{r}}(r', \theta)}{v_{\mathrm{th}}} \,,$$
als neue Integrationsvariable vereinfacht werden, indem man dann alle langsam variierenden Faktoren im Integranden am Resonanzpunkt des Strahls auswertet. Dies ergibt den Ausdruck
$$\tau_l(r, \theta, x) \approx t_l \, y(x) \,, \tag{172}$$
mittels der neu definierten Größen
$$t_l \;:=\; \frac{\chi_{l,0}^{(g)} \, \rho(r,\theta) \, v_{\mathrm{th}}}{dv_{\mathrm{r}}/dr} \,, \tag{173}$$
$$y(x) \;:=\; \int_{-\infty}^{x} \Phi(x') \, dx' \,. \tag{174}$$
Dabei muß der Ausdruck t_l am Resonanzpunkt (r, θ) entlang des Strahls ausgewertet werden.

3. Die ursprünglich ungeschwächte Intensität, die von der Photosphäre des Zentralsterns kommt, in Gl. (168), kann ersetzt werden durch den konstanten Wert der Planck-Funktion zur Frequenz ν_l der betrachteten Linie, $B_\nu(\nu) \approx B_\nu(\nu_l)$.

Damit führt die Integration über ϑ und φ in Gl. (167), mit Hilfe der Gl. (168) und Vereinfachung 3, zu
$$\mathcal{F}_\nu(r, \theta, \nu) = \frac{B_\nu(\nu_l)}{\hat{r}^2} \exp(-\tau_l(r, \theta, \nu)) \,,$$
und der Beschleunigungsterm für die Strahlungskraft, Gl. (165), wird
$$g_{\mathrm{R,l}} = \frac{1}{c\,\hat{r}^2} \sum_l B_\nu(\nu_l) \, \chi_{l,0}^{(g)} \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\tau_l(r,\theta,\nu)\right) \, \Phi(\nu - \nu_l) \, d\nu \,. \tag{175}$$
Oder, wenn man das Integral in Gl. (175) durch ein Integral über x ersetzt, indem man Gl. (172) für $\tau_l(r, \theta, x)$ einsetzt, und aus der Definition der Profilfunktion
$$\Phi(\nu - \nu_l) \, d\nu = \Delta\nu_{\mathrm{D}} \, \Phi(x) \, dx \,,$$
ergibt sich
$$g_{\mathrm{R,l}} = \frac{1}{c\,\hat{r}^2} \sum_l B_\nu(\nu_l) \, \chi_{l,0}^{(g)} \, \Delta\nu_{\mathrm{D}} \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} \exp\left(-t_l \int_{-\infty}^{x} \Phi(x') \, dx'\right) \cdot \Phi(x) \, dx \,.$$

Nun ist eine weitere Vereinfachung möglich: Die Hauptbeiträge der Kraft rühren von Frequenzen her für welche der Auswertungspunkt der Kraft fast derselbe ist wie der Resonanzpunkt für jeden Strahl. Daher kann der Ausdruck t_l lokal ausgewertet werden. Dies führt dann, wegen $dy/dx \equiv \Phi(x)$, zu

$$g_{\mathrm{R,l}} = \frac{1}{c\,\hat{r}^2} \sum_l B_\nu\,(\nu_l)\,\chi_{l,0}^{(g)}\,\Delta\nu_{\mathrm{D}} \int_0^1 e^{-t_l y}\,dy\,,$$

und schließlich zum folgenden Ausdruck für die *liniengetriebene Beschleunigung* (vgl. Castor 1974 and Abbott 1980),

$$g_{\mathrm{R,l}} = \frac{1}{c\,\hat{r}^2} \sum_l B_\nu\,(\nu_l)\,\chi_{l,0}^{(g)}\,\Delta\nu_{\mathrm{D}}\,\frac{1}{t_l}\,\left(1 - e^{-t_l}\right)\,, \tag{176}$$

oder entsprechend zu

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{R,l}}(r,\theta,v_{\mathrm{r}},dv_{\mathrm{r}}/dr) &= \frac{1}{c^2\,\hat{r}^2}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{dv_{\mathrm{r}}}{dr}\cdot \\ \sum_l \nu_l\,B_\nu\,(\nu_l)\,&\left(1 - \exp\left(-\chi_{l,0}^{(g)}\,\rho\,\frac{v_{\mathrm{th}}}{dv_{\mathrm{r}}/dr}\right)\right)\,, \end{aligned} \tag{177}$$

mit der Dichteverteilung $\rho = \rho(r,\theta)$ in Gl. (87).

Eine Linie wird optisch dünn oder optisch dick genannt, je nachdem ob die Größe t_l kleiner oder größer als eins ist.

(a) Wenn wir l_1 optisch dünne Linien ($t_{l_1} \ll 1$) haben, sehen wir von Gl. (177), daß sich die Kraft pro Einheitsmasse reduziert auf

$$g_{\mathrm{R,l}} \approx \frac{g_{\mathrm{l,1}}}{\hat{r}^2}\,, \tag{178}$$

mit

$$g_{\mathrm{l,1}} := \frac{v_{\mathrm{th}}}{c^2} \sum_{l_1} \nu_l\,B_\nu\,(\nu_l)\,\chi_{l,0}^{(g)} \approx \mathrm{const}\,.$$

(b) Wenn wir zum anderen l_2 optisch dicke Linien ($t_{l_2} \gg 1$) haben, kann der Ausdruck in Klammern in Gl. (177) durch eins ersetzt werden, und die Kraft wird

$$g_{\mathrm{R,l}} \approx \frac{1}{c^2\,\hat{r}^2}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{dv_{\mathrm{r}}}{dr} \sum_{l_2} \nu_l\,B_\nu\,(\nu_l)$$

$$= \frac{4\,\pi\,R^2}{c^2\,\dot{M}(\theta)}\,v_{\mathrm{r}}\,\frac{dv_{\mathrm{r}}}{dr} \sum_{l_2} \nu_l\,B_\nu\,(\nu_l) \tag{179}$$

$$=: g_{\mathrm{l,2}}(\theta)\,v_{\mathrm{r}}\,\frac{dv_{\mathrm{r}}}{dr}\,, \tag{180}$$

mit dem dimensionslosen Beschleunigungsfaktor

$$g_{\mathrm{l,2}}(\theta) = \frac{4\,\pi\,R^2}{c^2\,\dot{M}(\theta)} \sum_{l_2} \nu_l\,B_\nu\,(\nu_l) =: \sum_{l_2} \hat{\gamma}_l(\theta)\,. \tag{181}$$

Insgesamt erhalten wir also, im speziellen Fall von l_1 optisch dünnen *und* l_2 optisch dicken Linien, die folgende Näherung für die Linienbeschleunigung (in der dimensionslosen Form)

$$\boxed{\hat{g}_{\mathrm{R,l}}(\hat{r},\theta,\hat{v}_{\mathrm{r}},d\hat{v}_{\mathrm{r}}/d\hat{r}) = \frac{\hat{g}_{\mathrm{l,1}}}{\hat{r}^2} + g_{\mathrm{l,2}}(\theta)\,\hat{v}_{\mathrm{r}}\frac{d\hat{v}_{\mathrm{r}}}{d\hat{r}}}. \tag{182}$$

Der allgemeine Ausdruck für die Linienbeschleunigung, Gl. (177), welcher für alle Arten von Linien gültig ist, kann auch mittels des Faktors $g_{\mathrm{l,2}}(\theta)$ für optisch dicke Linien, der in Gl. (181) definiert ist, umgeschrieben werden zu

$$\hat{g}_{\mathrm{R,l}} \equiv \hat{v}_{\mathrm{r}}\frac{d\hat{v}_{\mathrm{r}}}{d\hat{r}}\left(g_{\mathrm{l,2}}(\theta) - \sum_l \hat{\gamma}_l(\theta)\exp\left(-\chi_{l,0}\frac{R\,\hat{v}_{\mathrm{th}}}{d\hat{v}_{\mathrm{r}}/d\hat{r}}\right)\right). \tag{183}$$

Indem wir diese Gl. (183) in die Bewegungsgleichung (92) einsetzen, ergibt sich die allgemeine Differentialgleichung für die radiale Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}&\left(\left(1 - g_{\mathrm{l,2}}(\theta) + \sum_l \hat{\gamma}_l(\theta)\exp\left(-\chi_{l,0}\frac{R\,\hat{v}_{\mathrm{th}}}{d\hat{v}_{\mathrm{r}}/d\hat{r}}\right)\right)\hat{v}_{\mathrm{r}} - \frac{1}{\hat{v}_{\mathrm{r}}}\right)\\ &\cdot\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\hat{v}_{\mathrm{r}} = \frac{\hat{L}^2\,(\theta)}{\hat{r}^3} - \frac{\hat{v}^2_{\mathrm{crit}}}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}}\,,\end{aligned} \tag{184}$$

welche sich von der linken Seite der Gl. (96) nur durch einen zusätzlichen Korrekturfaktor

$$\sum_l \hat{\gamma}_l(\theta)\exp\left(-\chi_{l,0}\frac{R\,\hat{v}_{\mathrm{th}}}{d\hat{v}_{\mathrm{r}}/d\hat{r}}\right)$$

unterscheidet, und durch den verschwindenden Faktor $\hat{g}_{l,1} \equiv 0$ auf der rechten Seite. Jedoch kann diese Differentialgleichung in vorliegenden Fällen, wo die Linienkraft *nicht* durch die geschilderten Grenzfälle angenähert werden kann, dann nur noch *numerisch* gelöst werden.

Die physikalische Bedeutung unseres Ergebnisses, Gl. (176), im Sonderfall nur optisch *dünner* Linien (vgl. Gl. (178)) ist einfach, daß irgend ein Teil des optisch dünnen Wind-Materials an einem beliebigen Ort (r,θ) immer von unten (von der Photosphäre) durch das *un*geschwächte Kontinuum bestrahlt wird, d.h. $\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_c = B_\nu$. Die Linien sind immer und überall im expandierenden Windfluß ausreichend weit von ihren Ruhefrequenzen verschoben, um Kontinuumsstrahlung von der darunter liegenden Photosphäre zu absorbieren.

Natürlich überschätzen wir hierbei noch die Linienbeschleunigung, wenn wir Absorptionslinien, die durch Ionen in der darunter liegenden Photosphäre erzeugt werden, nicht berücksichtigen, in welchen $\mathcal{F}_\nu \ll \mathcal{F}_c$ ist. Da wir außerdem eine *radial* nach außen strömende Strahlung angenommen haben (s. (1.)), und wir die Winkelintegration über den finiten Raumwinkel, welcher durch die Photosphäre überstrichen wird, ignorieren, überschätzen wir folglich bei der Herleitung unseres Ausdrucks auch die Strahlungskraft in der Nähe der Photosphäre.

B.5 Anwendung der Strahlungshydrodynamik auf einen rotierenden Sternwind

In diesem Abschnitt wenden wir unsere theoretischen hydrodynamischen Ergebnisse auf den Fall eines rotierenden nicht-sphärischen Sternwinds von einem typischen O5-V Hauptreihenstern (vgl. Daten in Allen 1973) an.

Zuerst werden wieder die Parameter erklärt auf welchen unsere Modellrechnungen basieren, und nachfolgend die Modell-Ergebnisse beschrieben. Desweiteren wird eine physikalische Interpretation dieser Ergebnisse angegeben.

Unser Sternwind-Modell von einem typischen O5–V-Stern basiert auf folgenden Parametern:

- $T_{\rm eff} = 44500$ K$^{(\star)}$
- $\Gamma = 0.1$
- $g_{\rm l,1} = 2980$ cm/s^2
- $g_{\rm l,2} = 624/625 \lesssim 1$
- $R = 17.8\, R_{\odot}^{(\star)}$
- $M = 39.8\, M_{\odot}^{(\star)}$
- $\rho(R) = 10^{-9}$ g/cm^3
- $v_{\rm rot} = 120,\ 60$ km/s

$\star$ = Daten aus Allen (1973).

Daraus folgt, mit der Annahme 1, eine isotherme Schallgeschwindigkeit von 19.2 km/s.

Der gewählte Wert für die radiative Beschleunigung $g_{\rm l,1} = 2980$ cm/s^2 durch optisch *dünne* Linien, reduziert die effektive *Breakup*-Geschwindigkeit des inneren Sterns von $v_{\rm crit} = 620$ km/s (gewonnen aus $\Gamma = 0.1$ mit Gl. (89)) herunter auf einen Betrag von nur $v_{\rm crit,eff} = 124$ km/s (vgl. Gl. (101)), der noch übereinstimmt mit dem typisch beobachteten Mittelwert der äquatorialen Rotationsgeschwindigkeit für solche O5–V-Sterne ($\overline{v_{\rm rot}} = 180$ km/s). Um dann den Einfluß der Rotation untersuchen zu können, berechnen wir das Geschwindigkeits- und Dichtefeld für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten, (a) $v_{\rm rot} = 120$ km/s, welche damit fast die Breakup-Geschwindigkeit ist, und (b) $v_{\rm rot} = 60$ km/s, d.h. für ungefähr den halben kritischen Wert. Als eine weitere Folge nähert sich für diesen gewählten Betrag von $g_{\rm l,1}$ der kritische Radius $\hat{r}_{\rm c}$, und damit ebenso der Schallpunkt $\hat{r}_{\rm s}$, dem Stern bis auf ungefähr 20 bzw. 5 Sternradien (s. die genaueren Werte in Tabelle 8).

Der relativ hohe Wert für die Beschleunigung durch ungefähr 1000 optisch *dicke* Linien, mit $g_{\rm l,2} \lesssim 1$ (hier angenommen als Konstante mit der Breite θ, s. Anh. B.6), bewirkt den großen Betrag der Geschwindigkeit am kritischen Punkt $\hat{v}_{\rm r}(\hat{r}_c) = 25$ (vgl. Gl. (97)) und folglich eine hohe radiale Grenzgeschwindigkeit $\hat{v}_\infty$ von mehr als 100 Mach (vgl. Abb. 39, oberer Teil).

Da ein sphärisch symmetrischer Stern (s. Abschn. 6) angenommen wird, muß die Grenzbedingung für die Dichte an der Sternoberfläche überall mit der Breite konstant sein, mit einem typischen Wert von $\rho(R) = 10^{-9}$ g/cm^3.

Ferner erhält man die Massenverlust-Rate $\dot{M}\,(\theta)$ durch die Sternoberfläche zur Breite θ nach Gl. (84), mittels der radialen Windgeschwindigkeit $v_{\rm r}(R,\theta)$ aus Gl. (109) (s. Tab. 8): Für $v_{\rm rot} = 120$ km/s variiert sie stark mit der Breite θ zwischen $0.2 \times 10^{-16}\mathcal{M}_{\odot}$/y am Pol und

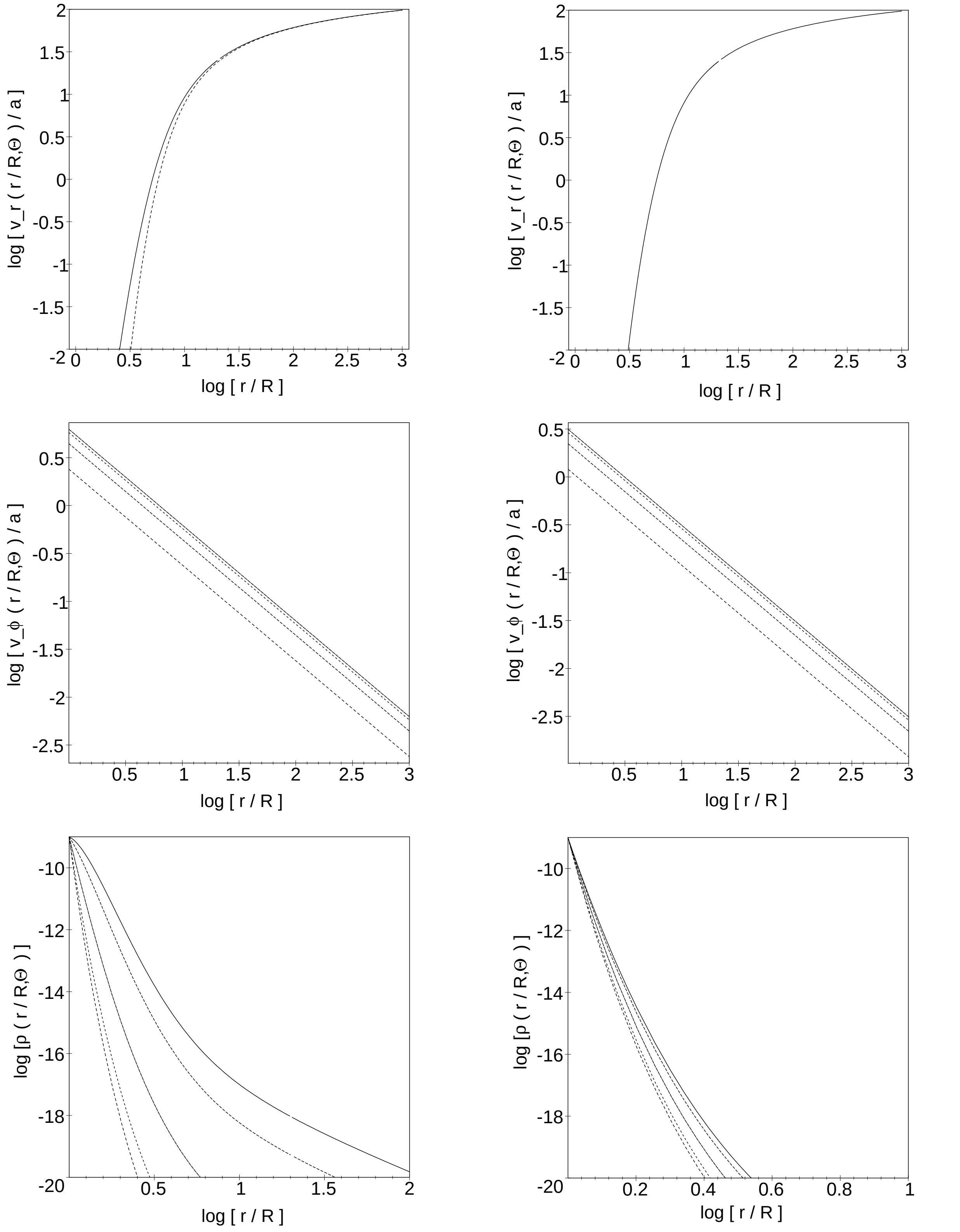


Abbildung 39: Betrag der Geschwindigkeitskomponenten und Dichteverteilung für einen Sternwind von einem O5–V-Stern (s. Modell-Parameter in Abschn. B.5), welcher mit $v_{\mathrm{rot}} = 120$ km/s (**links**) und $v_{\mathrm{rot}} = 60$ km/s (**rechts**) rotiert. **Oberer Teil:** Die radiale Geschw. $\hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r}, \theta)$ zu versch. Breiten $\theta = 0$ (s. gestr. Linie) und $\theta = \pi/2$ (durchgez. Linie), aufgetr. gegen die radiale Entfernung $\hat{r}$ (in Sternradien) für die zwei versch. stellaren Rotationsgeschwindigkeiten. Die Kurven, welche zu allen dazwischen liegenden Breiten gehören, liegen zwischen diesen (linke Seite); während diejenigen auf der rechten Seite nicht voneinander zu unterscheiden sind. **Mittlerer Teil:** Azimutale Geschw. $\hat{v}_{\phi}(\hat{r}, \theta)$ dargestellt für versch. Breiten ($\theta = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ und $\pi/2$, von der unteren zur oberen Linie) und Rotationsgeschwindigkeiten. **Unterer Teil:** Die 2-D-Dichteverteilung $\rho(\hat{r}, \theta)$, welche aus der radialen Geschw. zu verschiedenen Breiten, $\theta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ und $\pi/2$ (von unten nach oben), folgt.

Tabelle 8: Der kritische Radius $\hat{r}_{\mathrm{c}}$, Schallradius $\hat{r}_{\mathrm{s}}$, die Geschwindigkeit $\hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r}_{\mathrm{c}})$ am kritischen Radius, und der Massen-Fluß $\dot{M}\,(\theta)$, für verschiedene Breiten θ und äquatoriale Rotationsgeschwindigkeiten v_{rot} des inneren O5–V-Sterns, welche aus den Sternwind-Parametern in Abschn. B.5 resultieren.

v_{rot}	120 km/s		60 km/s
θ	0	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi/2$
$\hat{r}_{\mathrm{c}}$	20.98	20.00	20.74
$\hat{r}_{\mathrm{s}}$	5.74	5.07	5.59
$\hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r}_{\mathrm{c}})$	25.0	25.0	25.0
$\dot{M}\,(\theta)\,[M_{\odot}/y]$	$0.2{\times}10^{-16}$	$0.5{\times}10^{-8}$	$0.2{\times}10^{-14}$

$0.5 \times 10^{-8}\mathcal{M}_{\odot}$/y am Äquator (d.h. um 8 Größenordnungen!). Im Gegensatz zu einer Rotationsgeschwindigkeit von fast der halben Breakup-Geschwindigkeit (v_{rot} = 60 km/s), wo dieser Unterschied nur 2 Größenordnungen beträgt ($\dot{M}\,(\theta = \pi/2) = 0.2 \times 10^{-14}\mathcal{M}_{\odot}$/y).

Als nächstes untersuchen wir die Abhängigkeit des Betrages der Geschwindigkeitskomponenten, $\hat{v}_{\mathrm{r}}$ und $\hat{v}_{\phi}$, und der 2-D-Dichteverteilung ρ, von der radialen Entfernung $\hat{r}$ und Breite θ.

Wie man aus der Abb. 39 (oberer Teil) erkennt, unterscheidet sich der radiale Fluß zu verschiedenen Breiten nur merklich für Radien kleiner als der kritische Radius $\hat{r}_{\mathrm{c}}(\theta)$ und ist bei größeren Co-Breiten schneller. Dieser Unterschied ist für kleinere Rotationsgeschwindigkeiten schwächer (s. rechte Seite), wo diese Kurven nicht mehr unterscheidbar sind.

Im mittleren Teil von Abb. 39 verschwindet der Betrag der azimutalen Geschwindigkeitskomponente $\hat{v}_{\phi}(\hat{r}, \theta)$ für größere Radien $\hat{r}$ entsprechend Gl. (83), da $\hat{v}_{\phi}$ proportional zu $1/\hat{r}$ ist, und die Teilchen-Stromlinien völlig radial werden; außerdem ist $\hat{v}_{\phi}$ größer bei größeren Co-Breiten θ in der Nähe des Äquators, weil der Betrag dieser Komponente auch proportional zu $\sin\theta$ ist.

Die 2-D-Dichteverteilung $\rho(\hat{r}, \theta)$, welche aus der radialen Geschwindigkeit $\hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r}, \theta)$ zu verschiedenen Breiten resultiert (vgl. Gl. (87)), ist im unteren Teil von Abb. 39 dargestellt. Zu einer konstanten radialen Entfernung $\hat{r}$ finden wir eine starke Abnahme der Dichte in polaren Breiten und eine beträchtliche Vergrößerung nahe der Äquatorialebene. Dieser Dichteunterschied zwischen Pol und Äquator wird immer größer mit zunehmendem $\hat{r}$, und ist extremer für eine höhere Rotationsgeschwindigkeit v_{rot} = 120 km/s. Obwohl der Dichteunterschied eine ansteigende Funktion von $\hat{r}$ ist, konvergiert er zu einem fast konstanten Wert für große Entfernungen vom Stern (s. obere Kurven für äquatoriale Breiten im linken Diagramm).

Beachte, daß die starke Dichtevergrößerung um die Äquatorialebene durch unser Modell ohne irgend eine polare Geschwindigkeitskomponente $\hat{v}_{\theta}$ erklärt werden kann. Im BC-Modell wird dieser Dichteunterschied durch die Ablenkung des Wind-Materials zur Äquatorialebene hin verursacht, induziert durch diese Geschwindigkeitskomponente, welche sowohl mit der Entfernung zum Stern als auch mit der Rotationsrate zunimmt (vgl. Petrenz & Puls 1996). In *unserem* Modell kann dieses Phänomen hauptsächlich durch eine kleinere Steigung von $\hat{v}_{\mathrm{r}}$ für äquatoriale Breiten, zu einer betrachteten konstanten Entfernung $\hat{r}$ unterhalb des kritischen Radius $\log(\hat{r}_{\mathrm{c}}) = 1.3$, erklärt werden (vgl. Abb. 39, oberer Teil, und Gl. (87)).

B.6 Berechnung des vom Polarwinkel abhängigen Linienbeschleunigungsfaktors $g_{1,2}(\theta)$

In unserem Sternwind-Modell in Abschnitt B.5 haben wir den Linien-Beschleunigungsfaktor $g_{1,2}$ als unabhängig vom Polarwinkel θ angesetzt. Auf der anderen Seite zeigt unsere Formel für $g_{1,2}$, Gl. (181), eine umgekehrte Proportionalität zum Massenfluß $\dot{M}\,(\theta)$, der von θ abhängt. Um diese Inkonsistenz (in unseren Modell-Rechnungen) zu vermeiden, und um $g_{1,2}$ als eine Funktion von θ zu berechnen, könnte man die Gleichung

$$g_{1,2}(\theta) = \frac{G}{\rho(R)\, v_{\mathrm{r}}(R,\theta; g_{1,2}(\theta))}\,, \tag{185}$$

mit

$$G := \frac{1}{c^2} \sum_{l_2} \nu_l\, B_\nu\,(\nu_l) = \mathrm{const}\,,$$

iterativ für jedes $g_{1,2}$ zu jeder Breite θ lösen, weil die Lösung für die radiale Geschwindigkeit an der Sternoberfläche $v_{\mathrm{r}}(R,\theta)$ nach Gl. (109) dann wiederum von $g_{1,2}(\theta)$ abhängt. Gl. (185) folgt aus der Kombination von Gl. (181) mit Gl. (84). G ist eine Konstante, da wir annehmen, daß die Anzahl l_2 optisch dicker Linien erhalten bleibt.

Für gewöhnlich möchte man den Wert von $g_{1,2}$, z.B. in der Äquatorialebene für $\theta = \pi/2$, wissen, welcher für irgend eine beobachtete Grenzgeschwindigkeit $\hat{v}_{\mathrm{r}}(\hat{r} \to \infty)$ des gerade betrachteten Sternwindes verantwortlich ist. Dies kann durch Auswertung der Wind-Lösung, Gl. (109), erreicht werden, indem man den Wert von $g_{1,2}$ (worin hier $\hat{g}_{1,1}$, und damit ebenso der Ort $\hat{r}_{\mathrm{c}}(\theta = \pi/2)$ des kritischen Radius, fest ist) variiert, bis man die erwünschte Grenzgeschwindigkeit erhält. Als eine erste Schätzung für $g_{1,2}(\pi/2)$ kann man Gl. (97) für die Geschwindigkeit am kritischen Radius verwenden und diese einfach nach $g_{1,2}$ auflösen. Im nächsten Schritt können wir dann G bestimmen aus

$$G \equiv \rho(R)\, v_{\mathrm{r}}(R,\theta; g_{1,2}(\pi/2))\, g_{1,2}(\pi/2)\,.$$

Schließlich können wir, mit Hilfe des so gewonnenen Wertes von G, der Grenzbedingung $\rho(R)$, sowie Gl. (109), die Gl. (185) iterativ für $g_{1,2}(\theta)$ für alle Breiten außerhalb der Äquatorialebene lösen. Dann kann $g_{1,2}(\theta = \pi/2)$ als Startwert für jeden Iterationsprozess zu irgend einer der verbleibenden Breiten θ gebraucht werden.

B.7 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen aus dem Sternwind-Modell

In ihrem Wind-Modell geben Castor, Abbott & Klein (CAK, 1975) nur *exakte* Ausdrücke für die Größen am kritischen Punkt an, und leiten daraus eine analytische *Näherung* für das Geschwindigkeitsgesetz im *Über*schallgebiet des Windes ab, wobei sie davon ausgehen, daß der Schallradius r_{s} nahe am photosphärischen Radius liegt, und $v(r_{\mathrm{s}}) \approx 0$ sei. Schließlich wird die *präzise* und vollständige sub- und supersonische Windlösung *numerisch* durch einen iterativen Prozess gefunden, indem die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit integriert wird.

Im Gegensatz dazu sind wir in der Lage axialsymmetrische *analytische* Lösungen für die *zwei*dimensionale Wind-Geschwindigkeit und Dichte anzugeben, mittels unserer Näherung für die Beschleunigung durch Spektrallinien und indem wir unsere 2-D-Bewegungsgleichung nach

$v_\mathrm{r}(r,\theta)$ für jeden Polarwinkel θ lösen. Außerdem können wir einfache anlaytische Ausdrücke für den Ort $r_\mathrm{c}(\theta)$ und die Geschwindigkeit v_c des kritischen Punktes unserer Bewegungsgleichung angeben, durch welchen die kritische Windlösung geht. Aus diesen Formeln, für v_c und r_c, kann man leicht schließen, daß (mit unserer Linienkraft-Näherung) (1.) der Wert der Geschwindigkeit am kritischen Radius nur vom Proportionalitätsfaktor $g_{\mathrm{l},2}$ für die Beschleunigung von optisch *dicken* Linien abhängt, und mit $g_{\mathrm{l},2}$ wächst (d.h. die Grenzgeschwindigkeit $v_\mathrm{r}(r \to \infty)$ wird folglich ebenso größer), und (2.), daß die Lage von $r_\mathrm{c}(\theta)$ (zu irgend einer Breite) *nicht* von optisch dicken, sondern nur von der Beschleunigung $g_{\mathrm{l},1}$ durch optisch *dünne* Linien abhängt. Hiermit nähert sich $r_\mathrm{c}(\theta)$ der Sternoberfläche mit zunehmender Beschleunigung durch optisch *dünne* Linien. Die θ–Abhängigkeit von r_c kommt vom Zentrifugal-Beschleunigungsterm, während der kritische Radius für größere Co-Breiten in äquatorialen Regionen fällt. Desweiteren verschiebt sich r_c für einen schneller rotierenden Zentralstern weiter zur stellaren Photosphäre hin, wenn die windtreibende Linienkraft von optisch dünnen Linien konstant bleibt. Dasgleiche gilt auch für den Ort des Schallpunktes r_s, der immer unterhalb des kritischen Radius liegt.

Wie man aus unserem Ausdruck (182) für die Linien-Beschleunigung (und aus der Lösung $v_\mathrm{r} \approx 0$ nahe des Sterns) ersehen kann, sind die optisch dünnen Linien schon an der Sternoberfläche wirksam, während die Kraft von optisch dicken Linien am Stern nahezu Null ist, jedoch für größere Entfernungen vom Stern anwächst wegen des $v_\mathrm{r}\, dv_\mathrm{r}/dr$–Terms. Daher muß die gewöhnliche Formel für die Breakup-Geschwindigkeit des inneren Sterns nach der Beschleunigung durch optisch *dünne* Linien korrigiert werden. In unserem Wind-Beispiel reduziert der gewählte Wert für die radiative Beschleunigung $g_{\mathrm{l},1}$ die effektive Breakup-Geschwindigkeit des inneren Sterns von $v_\mathrm{crit} = 620$ km/s herab auf einen Betrag von nur $v_\mathrm{crit,eff} = 124$ km/s, d.h. noch in Übereinstimmung mit dem typischen, beobachteten Mittelwert der äquatorialen Rotationsgeschwindigkeit bei O5–V-Sternen. Damit setzt der Wert von $g_{\mathrm{l},1}$ eine obere Grenze für die Rotationsgeschwindigkeit, unter welcher ein Stern wirklich existieren kann, weil neben der nach außen gerichteten Beschleunigung durch die Kontinuumsstrahlung und Zentrifugalkraft, die Kraft von optisch dünnen Linien auch an der Sternoberfläche wirksam ist.

Schließlich zeigen die numerischen Ergebnisse, daß der Schallpunkt nicht notwendigerweise direkt oberhalb der Sternoberfläche liegen muß, wie in den meisten vohergehenden Sternwind-Modellen zur Vereinfachung angenommen wird (s. BC 1993). Man muß auch den *sub*sonischen Teil des strahlungsgetriebenen Flusses in Betracht ziehen, um in der Lage zu sein, die vollständige 2-D-Dichteverteilung zu berechnen.

Folglich ist es gerechtfertigt, wenn wir *nicht* eine Überschall-Näherung für die Wind-Lösung, wie im Falle von BC und deren angenommene freie Teilchenbahnen, verwenden. Stattdessen haben wir unsere 2-D-Windlösung $v_\mathrm{r}(r,\theta)$ durch analytische Lösung der r-Komponente der Impulsgleichung in einer nicht-viskosen Flüssigkeit im Falle eines stationären axialsymmtrischen Flusses hergeleitet, *ohne* die Druckkräfte (d.h. Gradienten) im *Unter*schallbereich zu vernachlässigen. Dies war mit Hilfe unseres Linienkraft-Terms möglich, indem wir nur die meridionale Geschwindigkeitskomponente im Vergleich zu den anderen Komponenten vernachlässigt haben. Dies dürfen wir auch gleich zu Beginn tun, wie Rechnungen mit dem BC-Modell gezeigt haben (vgl. Petrenz & Puls 1996).

An dieser Stelle wollen wir die Vorteile unseres Wind- bzw. Wolken-Modells, im Gegensatz zu jenem von BC, zusammenfassen: (i) Es wurde kein Gebrauch von Fittings an vorausgehende numerische Lösungen der Bewegungsgleichung gemacht. (ii) Die analytischen 2-D-Lösungen, v_r, v_ϕ, und ρ, sind als explizite Funktion des Ortes (r,θ) gegeben, und (iii) sie sind sowohl im subsonischen *und* supersonischen Bereich eines rotierenden strahlungsgetriebenen Windes gültig. (iv) Die Lösungen sind außerdem in einer allgemeineren Form angegeben, so daß sie auch dazu verwendet werden können *alle* möglichen Lösungstypen eines, z.B., Akkretionsflusses in einer kollabierenden protostellaren Wolken ebenso *analytisch* zu beschreiben. (v) Die Massenverlust-Rate $\dot{M}(\theta)$ (welche Variationen mit der Breite zuläßt), oder die Anfangsdichte $\rho(R)$ am Sternradius, geht als *freier* Parameter in die Lösungen ein, um an Beobachtungen angepaßt werden zu können.

Weitere Schlußfolgerungen und Ergebnisse: (vi) Es wurde eine neue Näherung für die Beschleunigung von optisch dünnen *und* dicken Spektrallinien enwickelt, und eine einfache Methode zur Berechnung der notwendigen Beschleunigungsparameter in unserem Linienkraft-Ausdruck angegeben, welche die beobachtete Grenzgeschwindigkeit eines Windes bewirken, selbst wenn man die verursachenden Spektrallinien *nicht* kennen sollte (s. Abschn. B.6). (vii) Der Schallpunkt muß gewöhnlich nicht nahe an der Sternoberfläche liegen. Man braucht dann auch den *sub*sonischen Teil der Windlösung, um die vollständige Dichteverteilung korrekt zu beschreiben. (viii) Unser Modell kann auch eine starke Dichte-Erhöhung eines Windes von einem typischen O5–V-Stern im Bereich der Äquatorialebene erklären, *ohne* Berücksichtigung irgend einer polaren Geschwindigkeitskomponente, im Gegensatz zum BC-Modell: Dieser Dichteunterschied zwischen Pol und Äquator, d.h. die Wind-Aspherizität, nimmt sowohl mit dem Abstand zum Stern als auch mit der Rotationsrate zu. Dies kann durch den resultierenden Betrag der radialen Geschwindigkeit $v_{\rm r}(r,\theta)$ verstanden werden, welcher merklich mit der Breite θ für höhere Rotationsgeschwindigkeiten, in Windregionen von unterhalb des kritischen Radius bis in Sternnähe, variiert. Folglich führt dies zu einem stärkeren Massenausstoß $\dot{M}(\theta)$ durch den Sternäquator als durch den Pol. (ix) Das entsprechende 1-D-Problem von Friend & Abbott (1986) für den Fluß in der *Äquatorebene* ist damit auch völlig analytisch, ohne irgend welche Einschränkungen in den Geschwindigkeitskomponenten (dort ist nämlich $v_\theta \equiv 0$ aus symmetrischen Gründen), gelöst; und ebenso das sphärische 1-D-Problem von CAK (wo es überhaupt keine meridionale Komponente gibt).

C Rotationsspektren zweiatomiger Moleküle

Dieser folgende Abschnitt ist, im Gegensatz zu den übrigen neu erarbeiteten Teilen dieses Anhangs, nur eine kurze Zusammenfassung der Abschnitte zu den Rotationsspektren zweiatomiger Moleküle aus dem Lehrbuch zur *Theorie der Molekülspektren* von Bingel (1967).

C.1 Reine Rotationsspektren

Bei reinen Rotations-Übergängen bleibt der Elektronen- und Schwingungszustand des Moleküls unverändert. Man betrachtet deshalb das Molekül in *erster Näherung* als **starr**.

Die Beschreibung der kräftefreien Bewegung eines starren Körpers in der klassischen Mechanik ist die folgende: Es gibt *drei* zueinander senkrechte und körperfeste Hauptträgheitsachsen a, b und c. Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen den Komponenten P_j des Drehimpulses und der Winkelgeschwindigkeit ω_j bezüglich dieser Achsen:

$$P_j = I_j\,\omega_j\,, \qquad j = a, b, c.$$

I_a, I_b, und I_c sind die Hauptträgheitsmomente, die sich aus den Massen und der Geometrie des Moleküls berechnen lassen:

Zweiatomige Moleküle: $I_b = I_c = I = M\,R^2$, mit $M = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2}$
und dem Kernabstand R sowie der reduzierten Masse M,

Lineare mehratomige Moleküle: $I_b = I_c = \sum_i M_i\, R_i^2$
mit den Kernmassen M_i und deren Abstand R_i vom Schwerpunkt.

Die Gesamtenergie H der *kräftefreien* Bewegung hat dann im **allgemeinen** die Form

$$H = T = \frac{P_a^2}{2I_a} + \frac{P_b^2}{2I_b} + \frac{P_c^2}{2I_c}\,, \tag{186}$$

wobei T die kinetische Energie der Rotation darstellt.

C.2 Näherung: Der starre Rotator

Hier gilt für die beiden Trägheitsmomente *senkrecht* zur Molekülachse: $I_b = I_c = I$, und für das Trägheitsmoment *parallel* zur Molekülachse: $I_a = 0$.

D.h. die Komponente P_a verschwindet und H hat die einfachere Form

$$H = T = \frac{1}{2I}\left({P_b}^2 + {P_c}^2\right) = \frac{P^2}{2I}\,, \tag{187}$$

mit dem **Gesamt**drehimpuls P.

Um sich die quantenmechanische Behandlung des starren Rotators mit der Schrödingergleichung zu ersparen, geht man zur quantenmechanischen Formulierung gemäß

$$\begin{aligned} P^2 &\to J(J+1)\,\hbar^2 \\ P_z &\to M_J\,\hbar \end{aligned}$$

über. Die **Rotationsquantenzahl** J kann dabei die Werte

$$J = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

durchlaufen, während die **magnetische Quantenzahl** M_J für ein festes J nur die (2J + 1) Werte

$$M_J = -J, -J+1, \ldots, 0, \ldots, J$$

annehmen kann.

Dies ergibt die quantenmechanischen **Rotationsenergien** (durch Einsetzen des Audrucks für P^2 in die Gl. (187) für H)

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} \cdot J(J+1) \qquad \text{(in erg)} \tag{188}$$

und die **Rotationsterme**

$$\boxed{F(J) = \frac{E_J}{hc} = B \cdot J(J+1)} \qquad (\text{in cm}^{-1}) \tag{189}$$

mit der Definition der **Rotationskonstanten** B

$$\boxed{B = \frac{h}{8\pi^2 cI} = 27.994 \times 10^{-40} \cdot \frac{1}{I}} \qquad (\text{in cm}^{-1})\,. \tag{190}$$

Die erlaubten Übergänge zwischen diesen Rotationstermen sind durch die **Auswahlregeln**

1. $\mu \neq 0$ (Permanentes Dipolmoment)
2. $\Delta J = J' - J'' = \pm 1$

eingeschränkt.

Zweiatomige *homo*nukleare Moleküle (Beispiel: O_2) sowie lineare mehratomige Moleküle mit einem *Symmetriezentrum* (Beispiel: C_2H_2) haben *kein* Dipolmoment. Sie besitzen *kein* Rotationsspektrum.

*Hetero*nukleare zweiatomige Moleküle (Beispiel: CO) und lineare mehratomige Moleküle *ohne* Symmetriezentrum (Beispiel: HCN) besitzen ein Dipolmoment.

Die **Wellenzahlen der Rotationsübergänge** berechnen sich dann (mit $J' = J'' + 1$) zu

$$\nu = F(J''+1) - F(J'') = B[(J''+1)(J''+2) - J''(J''+1)] = 2B(J''+1)\,, \tag{191}$$

mit der Quantenzahl J'' =0, 1, 2, ... des definitionsgemäß *unteren* Zustands $(J'' < J')$[21].

Man beobachtet jedoch eine geringe systematische Abweichung zwischen $\nu_{beob}(J'')$ und $\nu_{theor}(J'') = 2B(J''+1)$, was sich dadurch erklären läßt, daß das Molekül *nicht starr* ist, sondern in Wirklichkeit Schwingungen ausführen kann, bei denen sich der Kernabstand $R = R(t)$ gegenüber seinem Wert R_e im schwingungslosen Zustand verändert.

C.3 Korrektur: Der nichtstarre Rotator

Die auftretende Rückstellkraft $|\vec{F_R}|$ stellt sich dabei mit der durch die Rotation verursachten Zentrifugalkraft $|\vec{F_Z}|$ ins Gleichgewicht, d.h.

$$\begin{aligned} |F_Z(P,R)| &= |F_R(R)| \\ \frac{P^2}{MR^3} &= k\,(R - R_e)\,. \end{aligned} \tag{192}$$

Damit erhält die Gesamtenergie H noch einen *potentiellen* Anteil

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \frac{P^2}{2MR^2} + \frac{k}{2}(R-R_e)^2 \\ &= \frac{P^2}{2MR_e^{\,2}} - \frac{P^2}{MR_e^{\,3}}(R-R_e) + \frac{k}{2}(R-R_e)^2 \end{aligned}$$

[21] Bem.: Denn ΔJ =-1 ist als *reiner* Rotationsübergang nicht möglich!

und mit der Kernabstandsvergrößerung $(R - R_e)$ aus Gl. (192)

$$H = \frac{P^2}{2M{R_e}^2} - \frac{P^4}{2M^2{R_e}^6 k}\,.$$

Mit $P^2 \to J(J+1)\,\hbar^2$ folgt daraus für die Energieniveaus

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2M{R_e}^2}\,J(J+1) - \frac{\hbar^4}{8\pi^2 M^3 {R_e}^6 c^2 {\omega_e}^2}\,J^2(J+1)^2 \qquad \text{(in erg)}$$

sowie für die **Rotationsterme des nicht-starren Rotators**

$$\boxed{F(J) = \frac{E_J}{hc} = B \cdot J(J+1) - D \cdot J^2\,(J+1)^2} \qquad (\text{in cm}^{-1}) \tag{193}$$

wobei

$$D = \frac{4B^3}{{\omega_e}^2} \tag{194}$$

und

$$c\omega_e = \nu'_{vib} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \tag{195}$$

ist (ω_e = sog. "Wellenzahl der Schwingung").

Der Einfluß der Zentrifugalverzerrung äußert sich also in einem Zusatzglied für die Rotationsterme, dessen Koeffizient aber klein gegen B ist (s. Gl. (194)).

Mit den gleichen Auswahlregeln erhält man jetzt für die Wellenzahlen der erlaubten Übergänge (mit $J'' = J$ =unterer Zustand, und $J' = J+1$)

$$\begin{aligned} \nu &= F(J+1) - F(J) \\ &= B[(J+1)\,(J+2) - J\,(J+1)] - D[(J+1)^2\,(J+2)^2 - J^2\,(J+1)^2] \end{aligned}$$

und damit

$$\boxed{\nu = 2B\,(J+1) - 4D\,(J+1)^3}\,. \tag{196}$$

Die Abstände aufeinanderfolgender Rotationslinien $\Delta\nu$ sind also nicht mehr konstant, sondern nehmen mit J schwach ab.

Beispiel: Für HCl ist $B = 10.395 cm^{-1}$ und $D = 0.0004 cm^{-1}$.

C.4 Korrektur: Der schwingende nichtstarre Rotator

In Wirklichkeit kann die Rotationsbewegung eines Moleküls nicht getrennt von seiner Schwingungsbewegung – wie bisher – behandelt werden. Beide Bewegungsformen laufen in einem Molekül gleichzeitig ab.

Außer der schon berücksichtigten ersten Auswirkung dieser Wechselwirkung durch die Einführung der D-Glieder des *nichtstarren* Rotators – *die Zentrifugalverzerrung* – ist jetzt noch *die Rotationskonstante B nicht mehr konstant.* B und D hängen noch vom Schwingungszustand v ab $(B_v,\,D_v)$.

Für ein *zwei*atomiges Molekül gilt dann

$$B_v = \frac{h}{8\pi^2 Mc} \cdot \langle \frac{1}{R^2} \rangle_v \, ,$$

mit dem quantenmechanischen Mittelwert

$$\langle \frac{1}{R^2} \rangle_v = \int_0^{+\infty} \psi_v^* \, \frac{1}{R^2} \, \psi_v \, dR$$

über die zugehörige Eigenfunktion $\psi_v\,(R)$.

Die Rechnung ergibt dann

$$\boxed{\begin{array}{rcl} B_v & = & B_e - \alpha_e \left(v + \frac{1}{2}\right) + \ldots \\ D_v & = & D_e - \beta_e \left(v + \frac{1}{2}\right) \end{array}} \, , \qquad (197)$$

wobei im allgemeinen

$$\begin{array}{rcl} \alpha_e & \ll & B_e \\ \beta_e & \ll & D_e \ll B_e \end{array}$$

gilt.

D CS-Linienprofile kollabierender Molekülwolken mit hoher Turbulenzgeschwindigkeit

D.1 Numerische Ergebnisse zur sphärischen kollabierenden Wolke

D.1.1 Die ortsaufgelösten Linienprofile

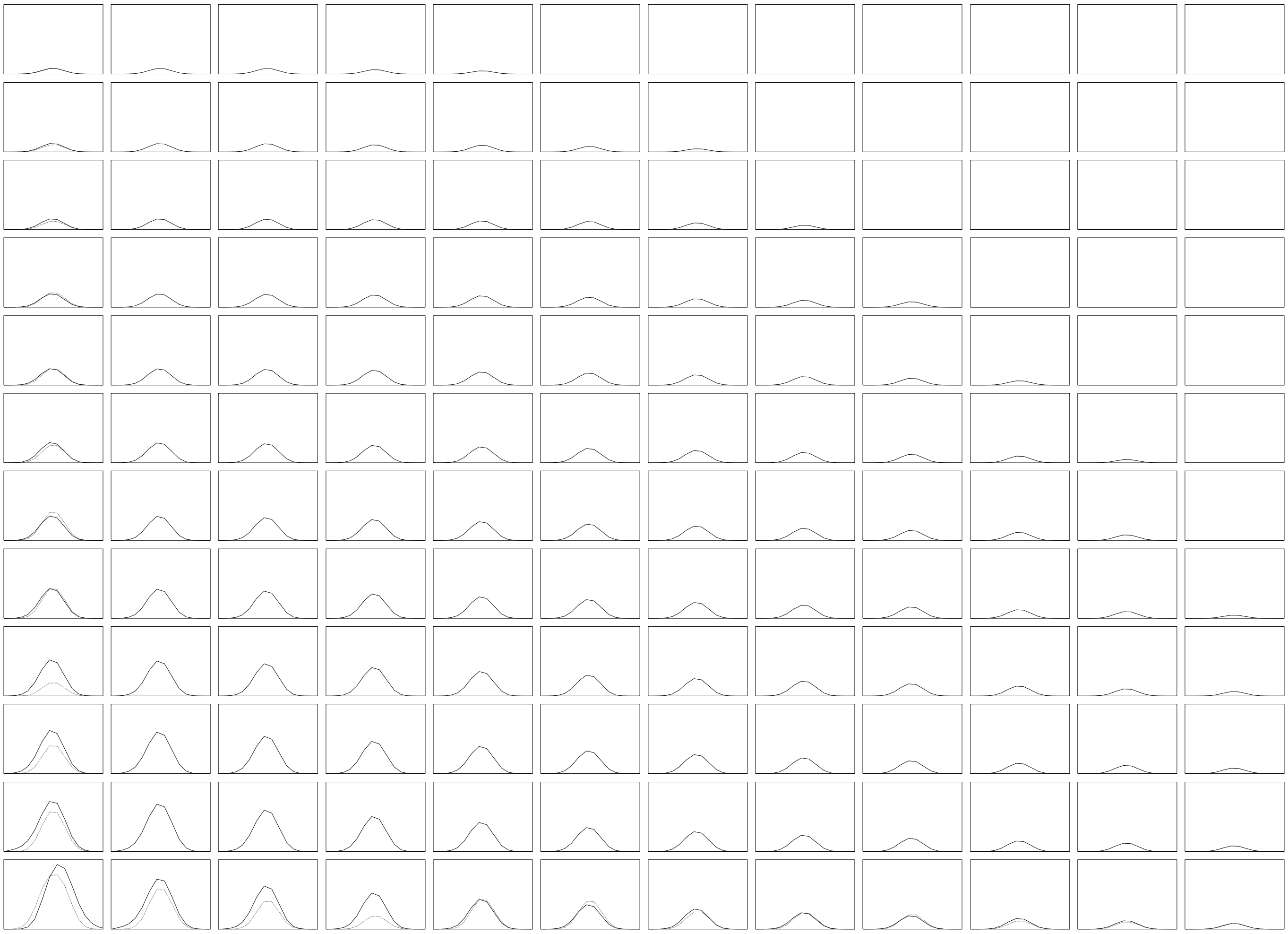


Abbildung 40: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 7×10^{-15} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 4.897 bis 4.901×10^{10} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

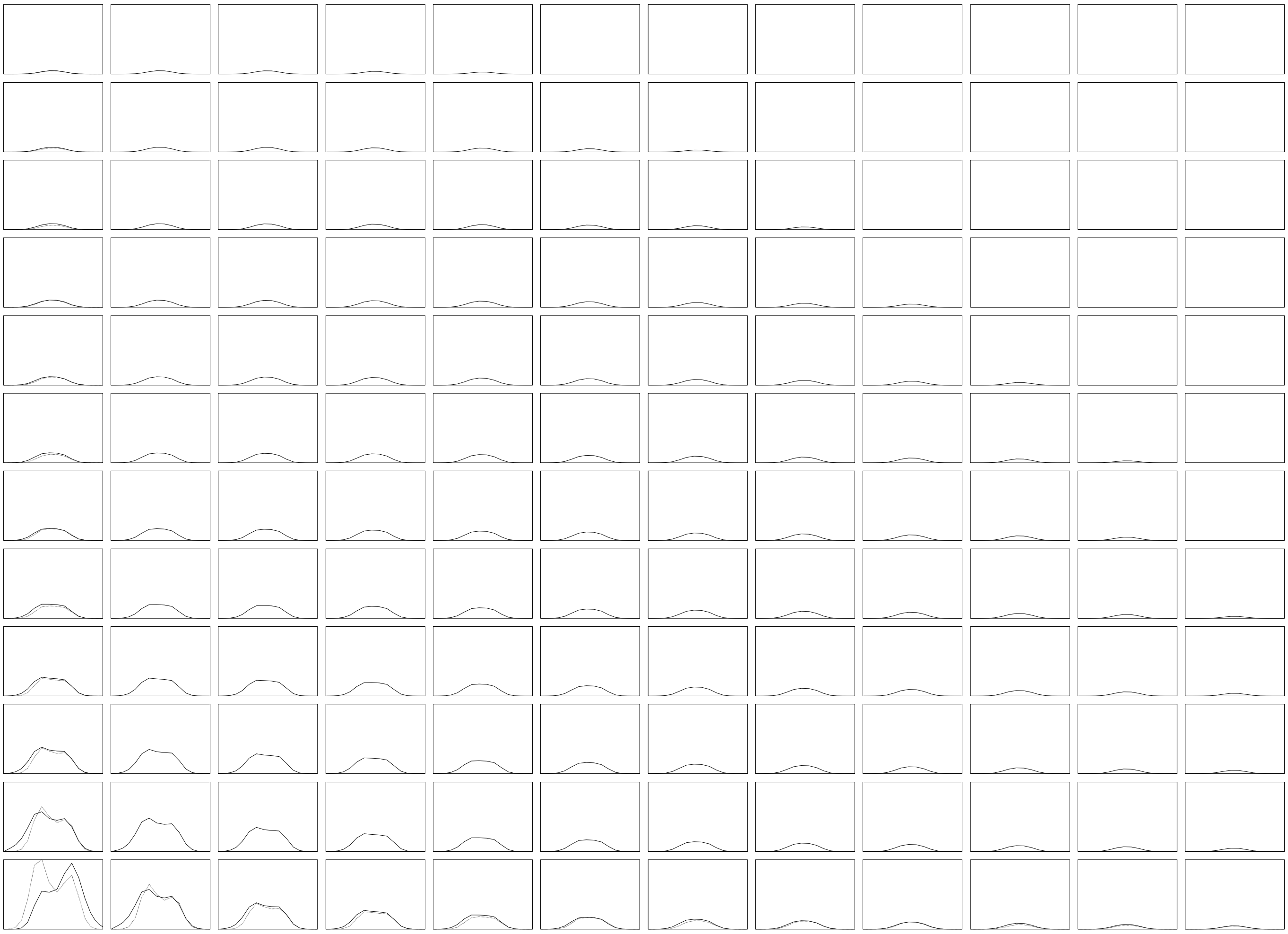


Abbildung 41: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 2×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 9.794 bis $9.802{\times}10^{10}$ Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

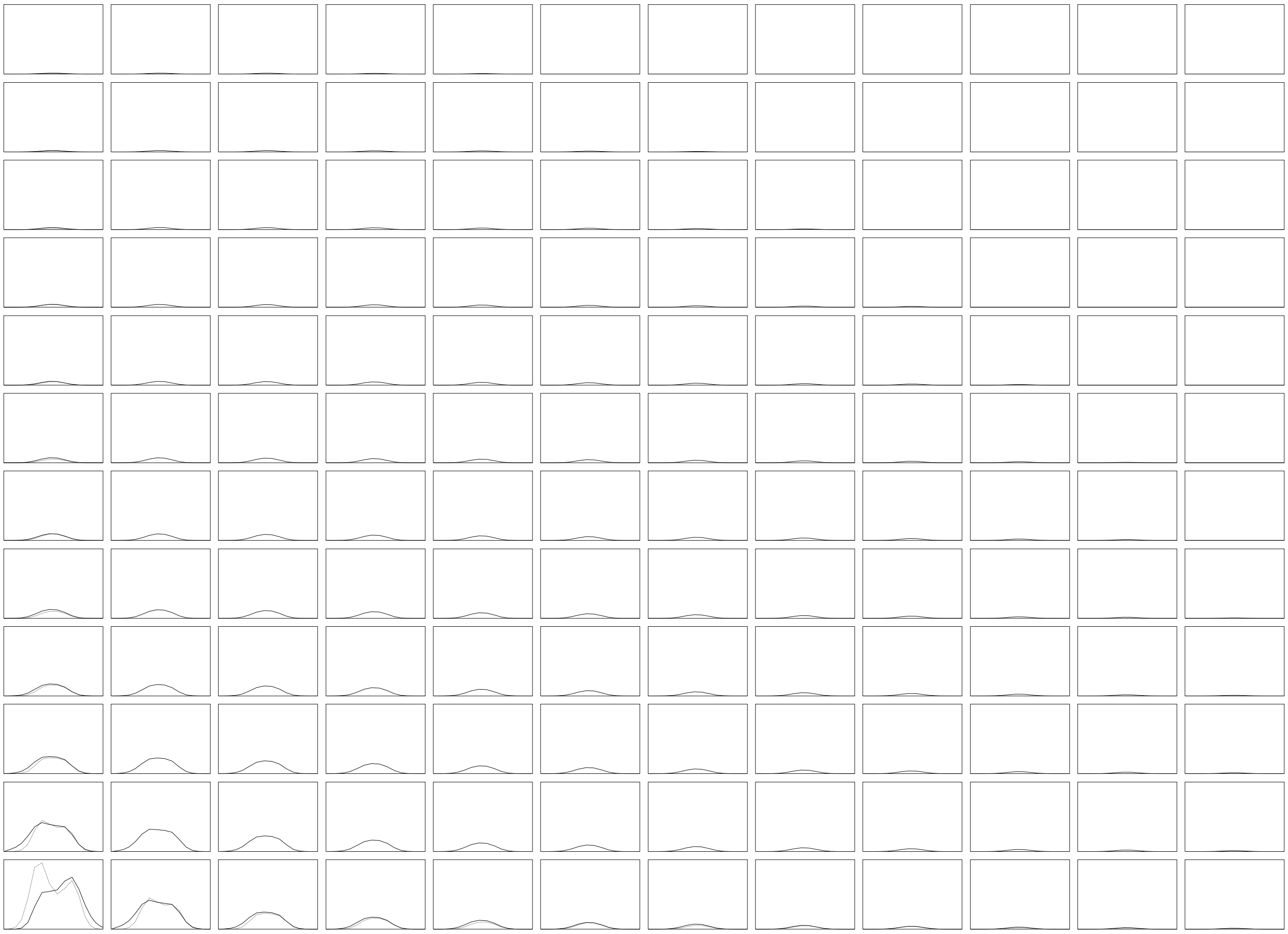


Abbildung 42: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 5×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.469 bis 1.4702×10^{11} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

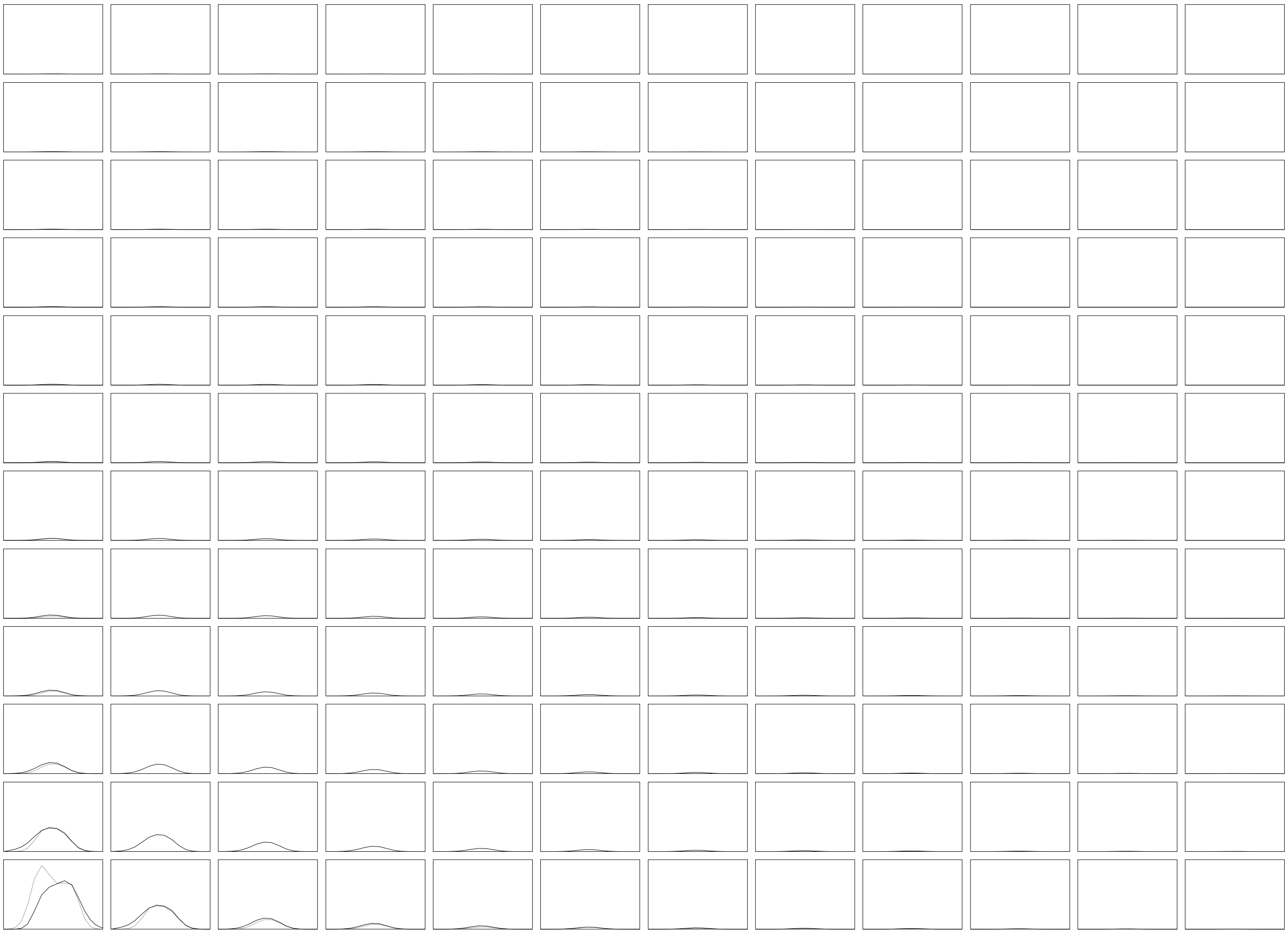


Abbildung 43: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 4 \rightarrow 3$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 5.5 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 9×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.9588 bis 1.9602×10^{11} Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

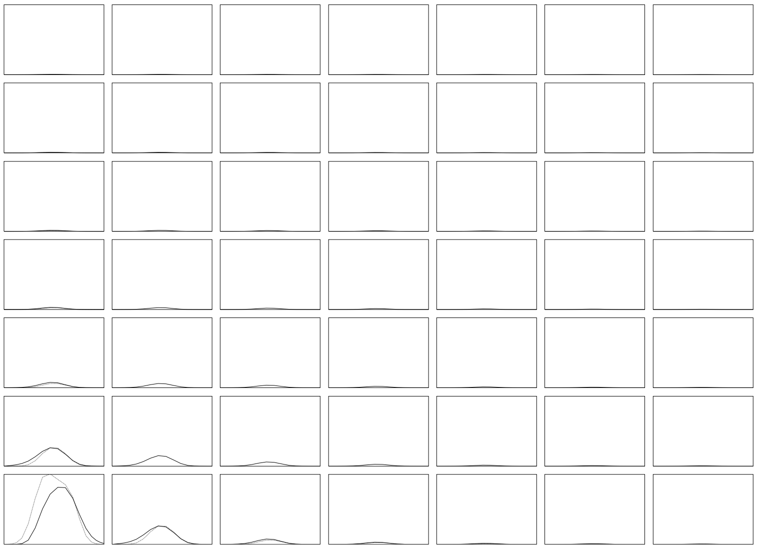


Abbildung 44: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 5 \rightarrow 4$-Linie in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (links unten) von $p = 0$ bis 3.0 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 9×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 2.4484 bis 2.4502$\times 10^{11}$ Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

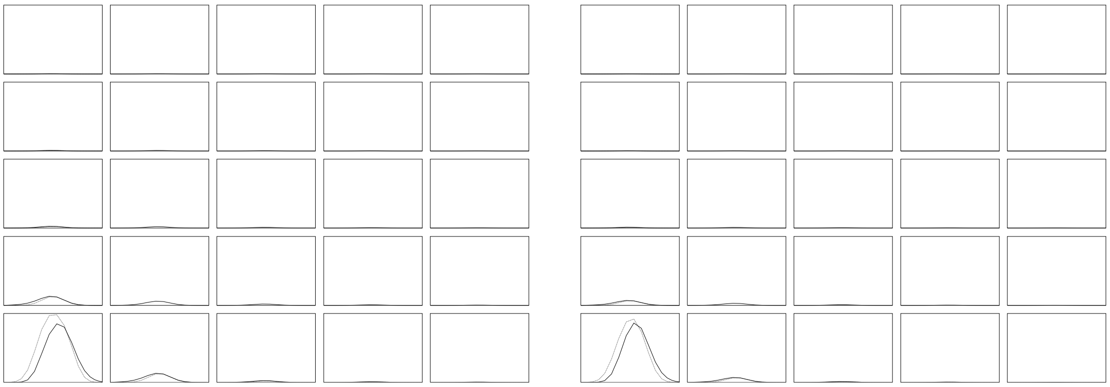


Abbildung 45: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s. Abszisse und Ordinate: Profile der $J = 6 \rightarrow 5$-Linie (links) und $J = 7 \rightarrow 6$-Linie (rechts) in den Abständen $\Delta p = 0.5$pc vom Wolkenzentrum (jew. links unten) von $p = 0$ bis 2.0 pc für den Blickwinkel $\vartheta = 90°$, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 9×10^{-14} bzw. von 0 bis 4.5×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 2.938 bis 2.9405$\times 10^{11}$ Hz bzw. 3.4275 bis 3.43$\times 10^{11}$ Hz aufgetragen sind. Diese, mit dem 3D-Code berechneten Profile, wurden mit denjenigen aus dem 1D-Code gewonnenen entlang den Ortsachsen überlagert. Dabei entsprechen die etwas dünner dargestellten Kurven den 1D-Modell-Daten.

D.1.2 Die Profile aus dem 1D-Modell

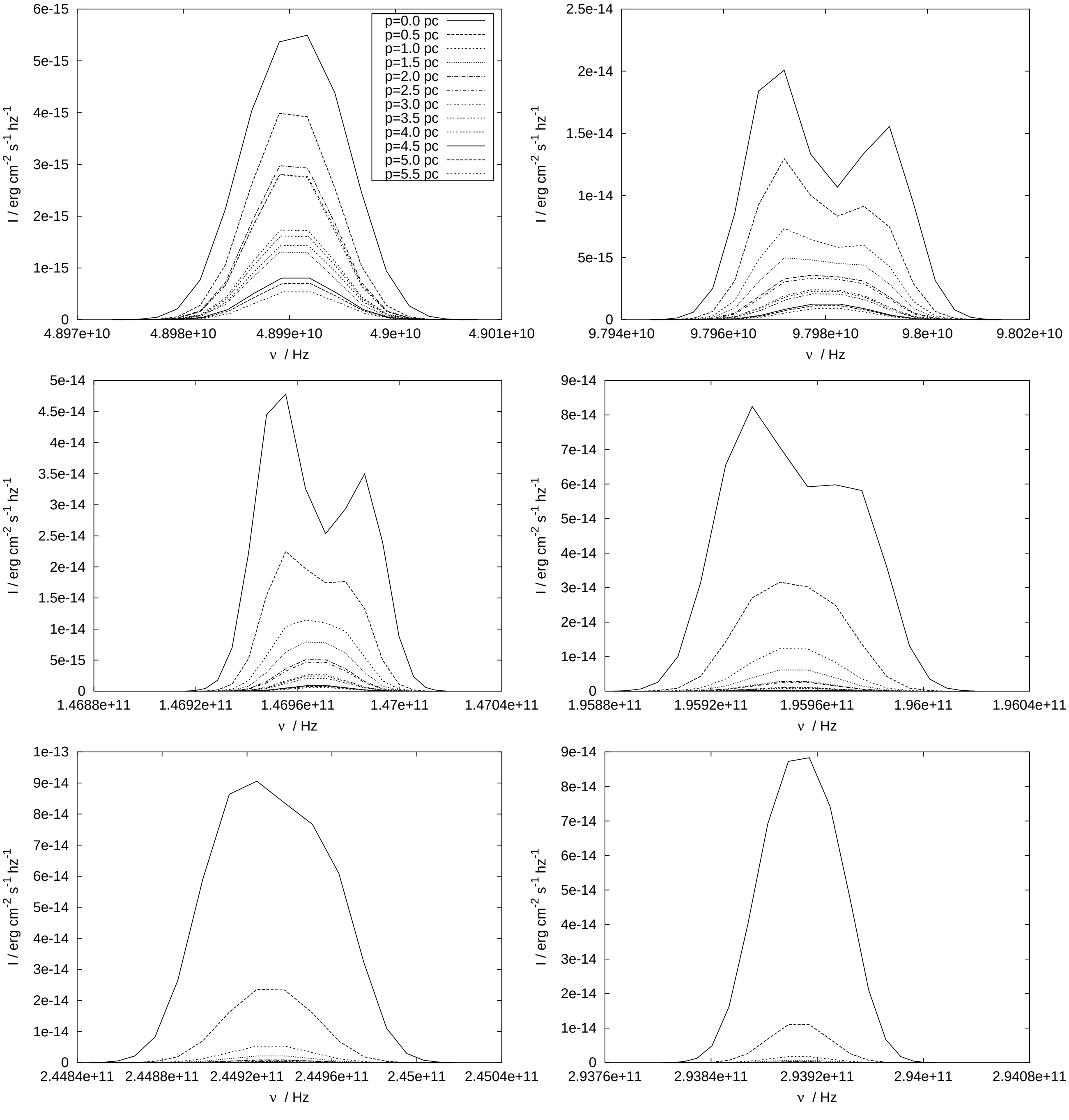


Abbildung 46: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0\times10^6$ cm/s: Mit dem 1D-Strahlungstransport-Modell berechnete Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie (links oben) bis $J = 6 \rightarrow 5$-Linie (rechts unten) für verschiedene Austrittsparameter p gemessen vom Zentrum der Wolke.

D.1.3 Die Profile aus dem 3D-Modell

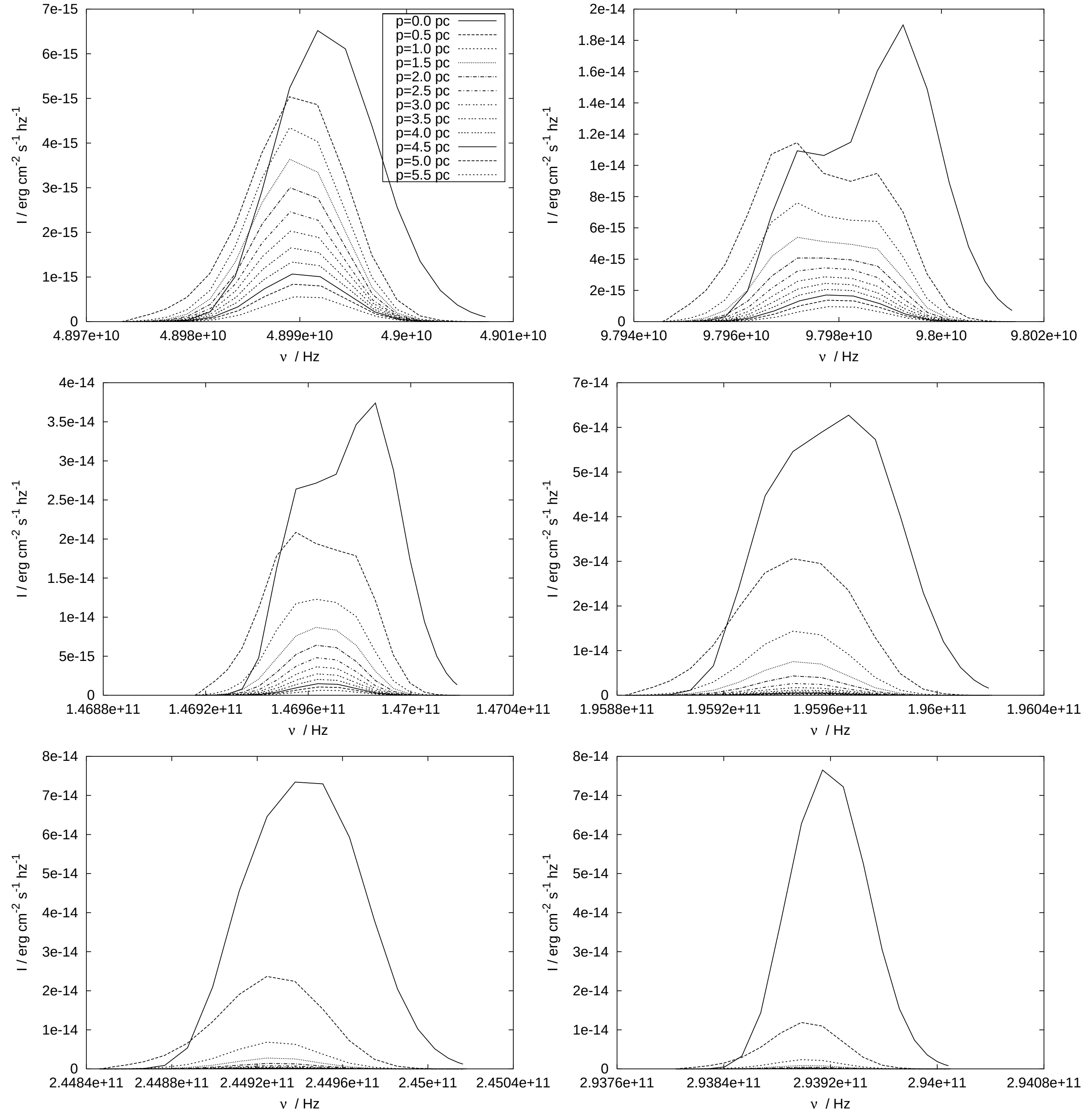


Abbildung 47: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Mit dem 3D-Strahlungstransport-Modell berechnete Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie (links oben) bis $J = 6 \rightarrow 5$-Linie (rechts unten) für verschiedene Austrittsparameter p gemessen vom Zentrum der Wolke.

D.1.4 Der Vergleich der Profile aus den verschiedenen Modellen

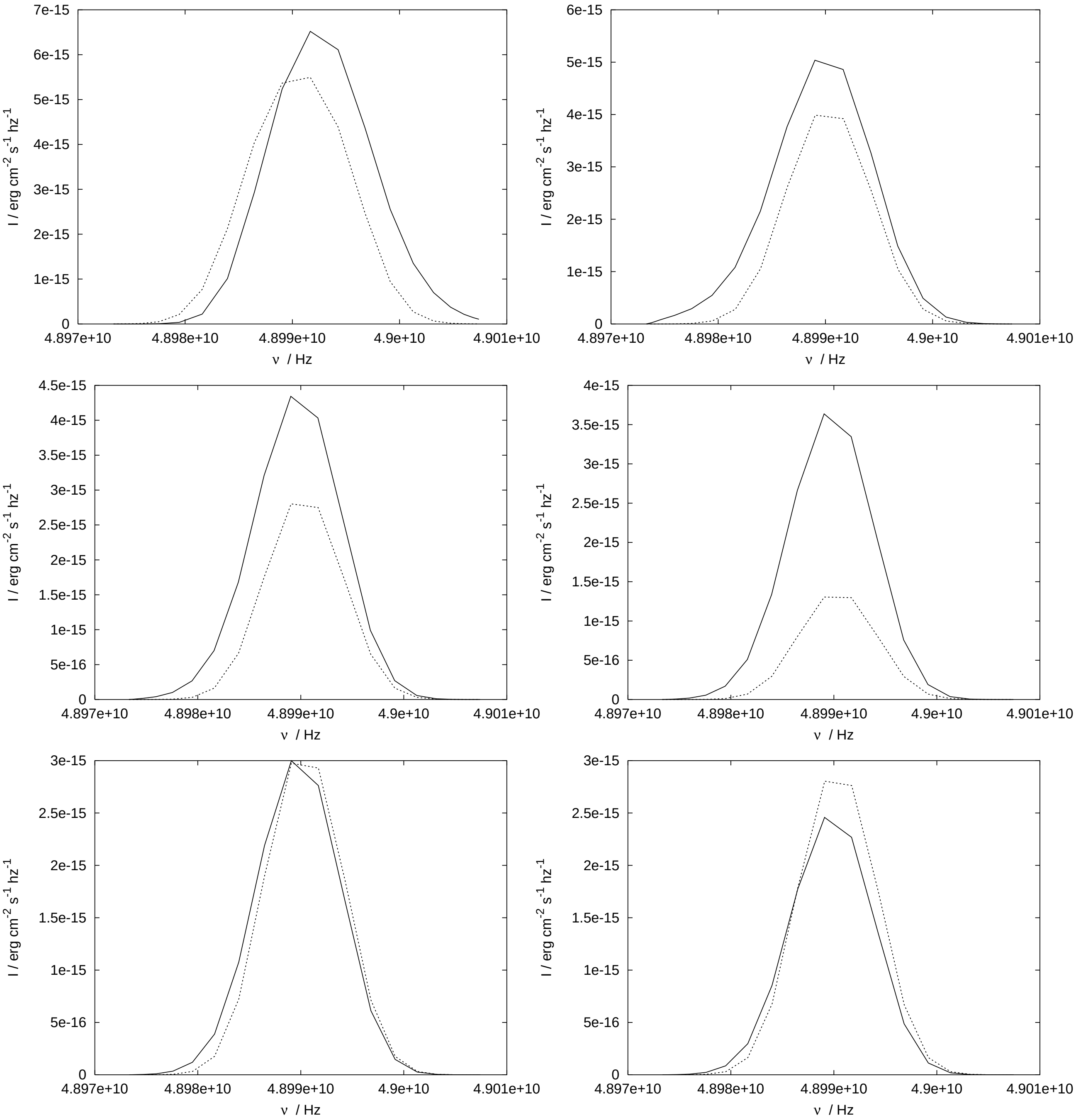


Abbildung 48: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 1 \to 0$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 0$ (links oben) bis $p = 2.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

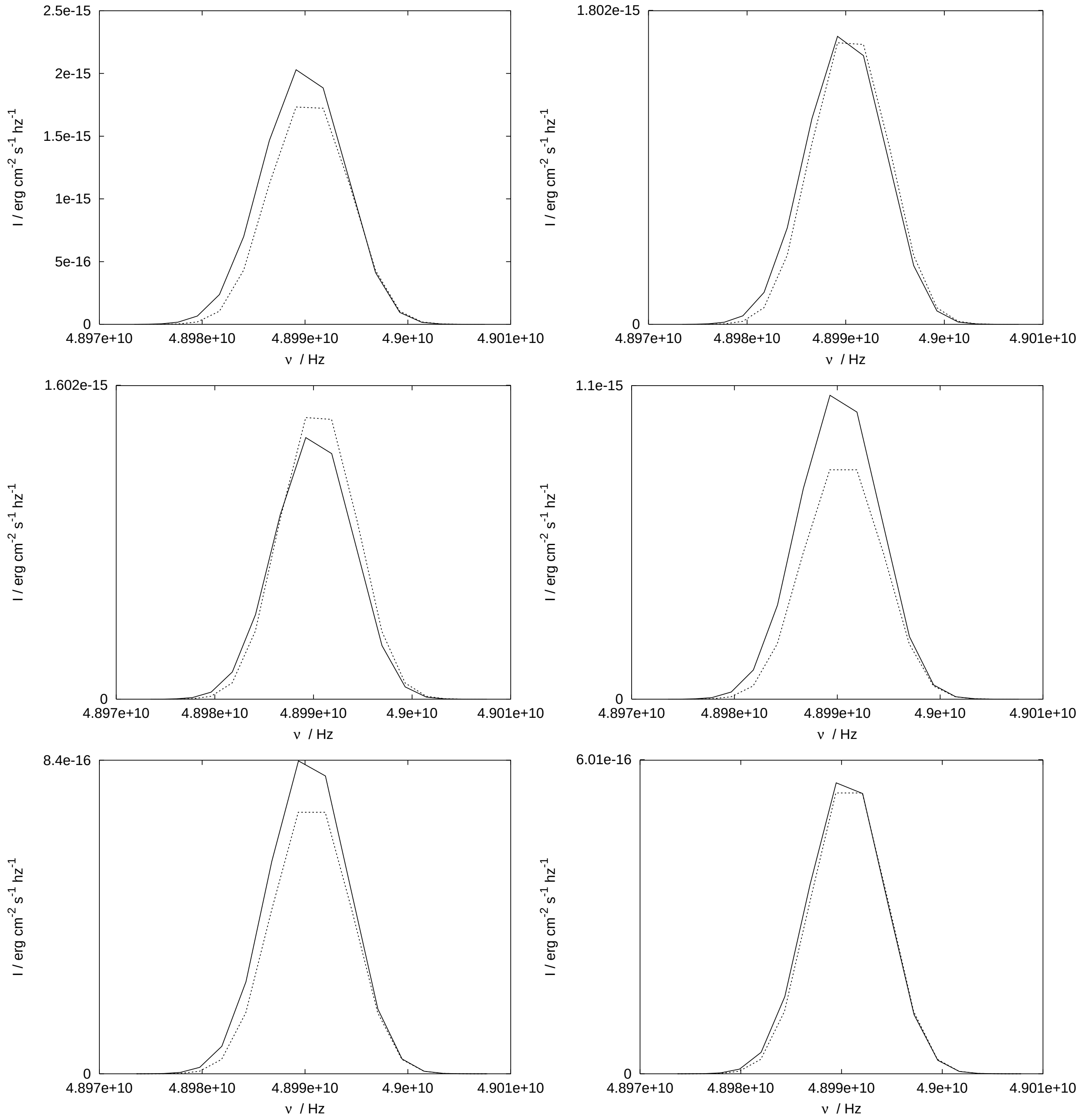


Abbildung 49: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 3.0$ (links oben) bis $p = 5.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

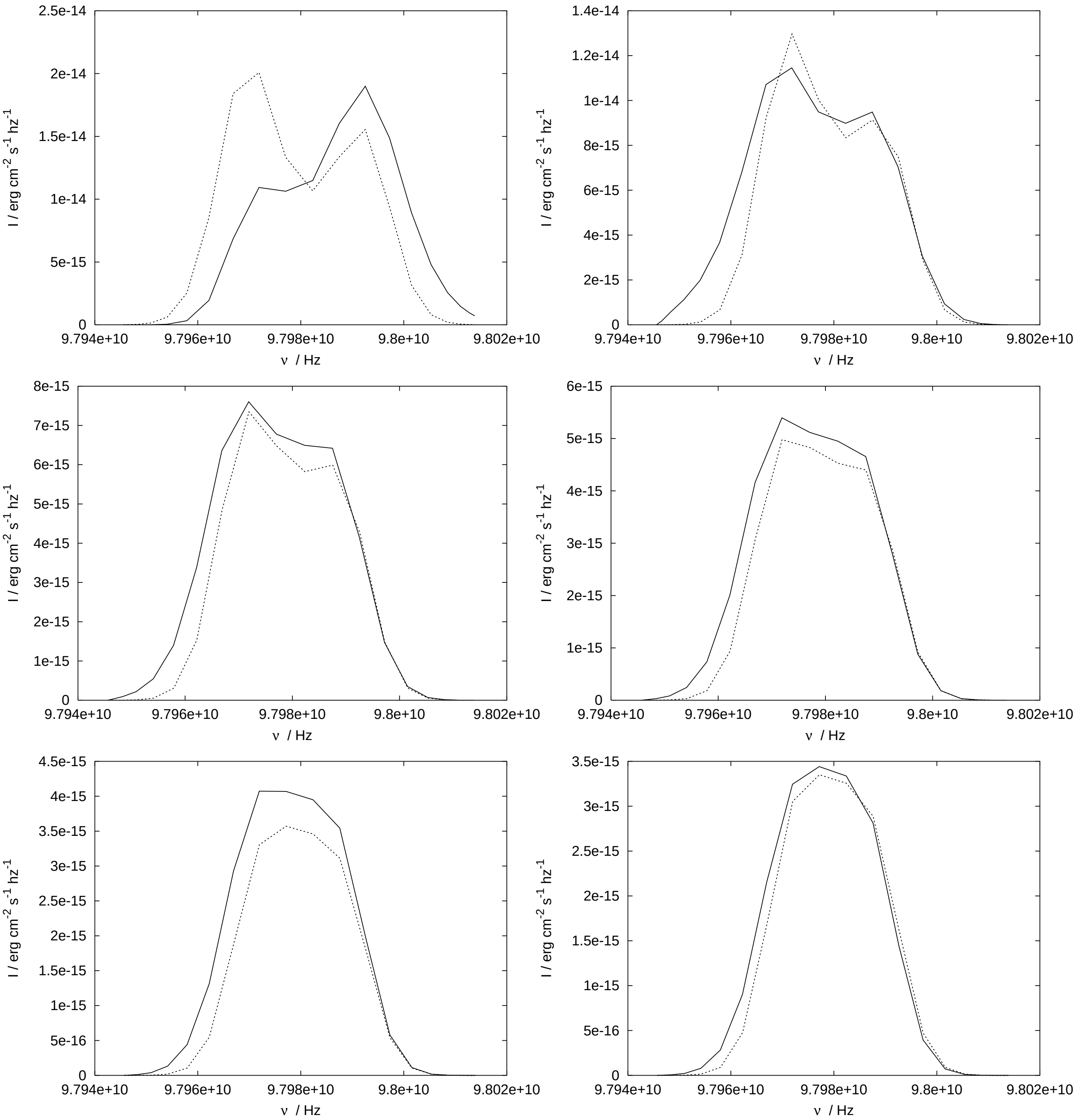


Abbildung 50: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 0$ (links oben) bis $p = 2.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

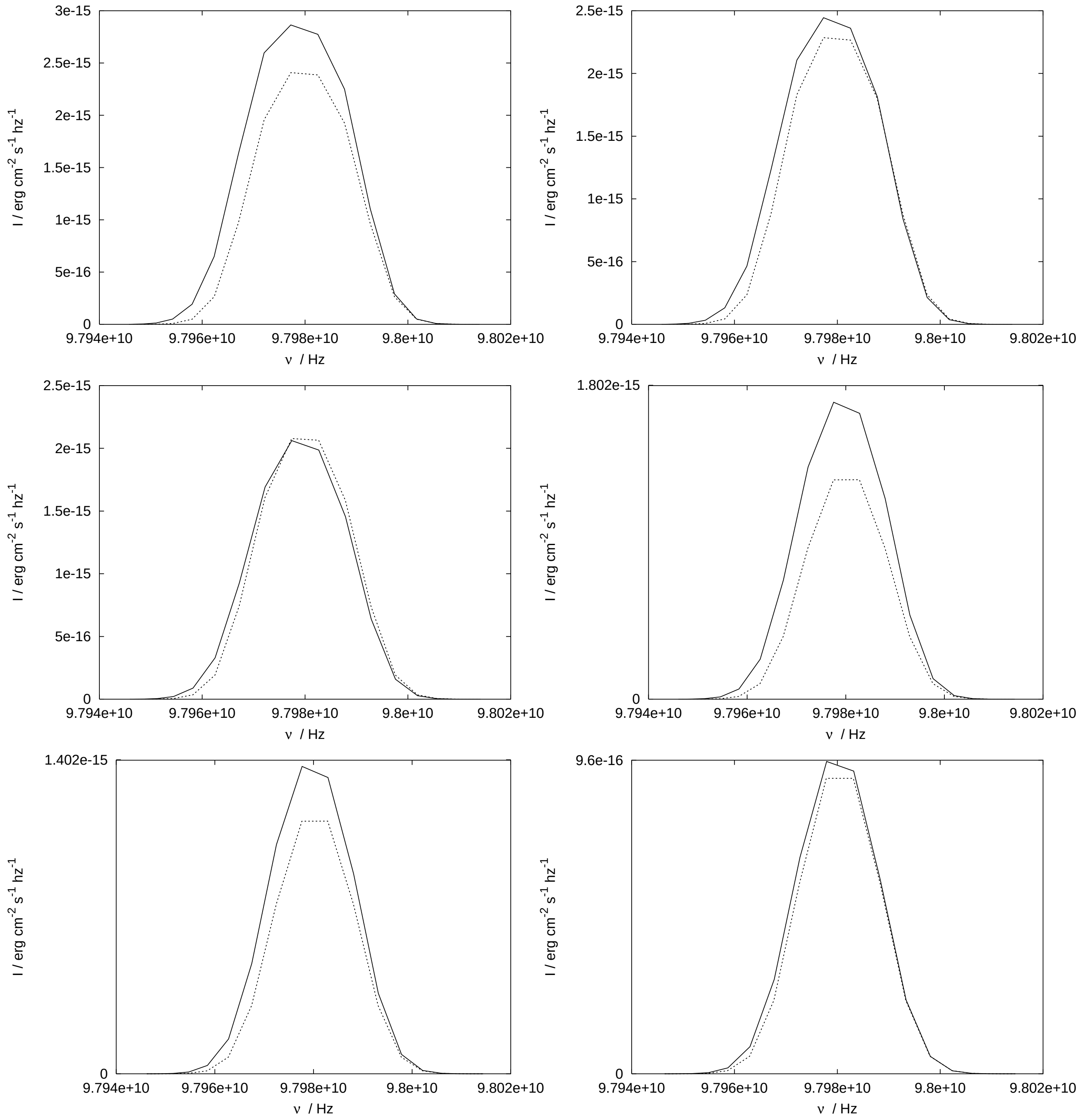


Abbildung 51: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 2 \to 1$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 3.0$ (links oben) bis $p = 5.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

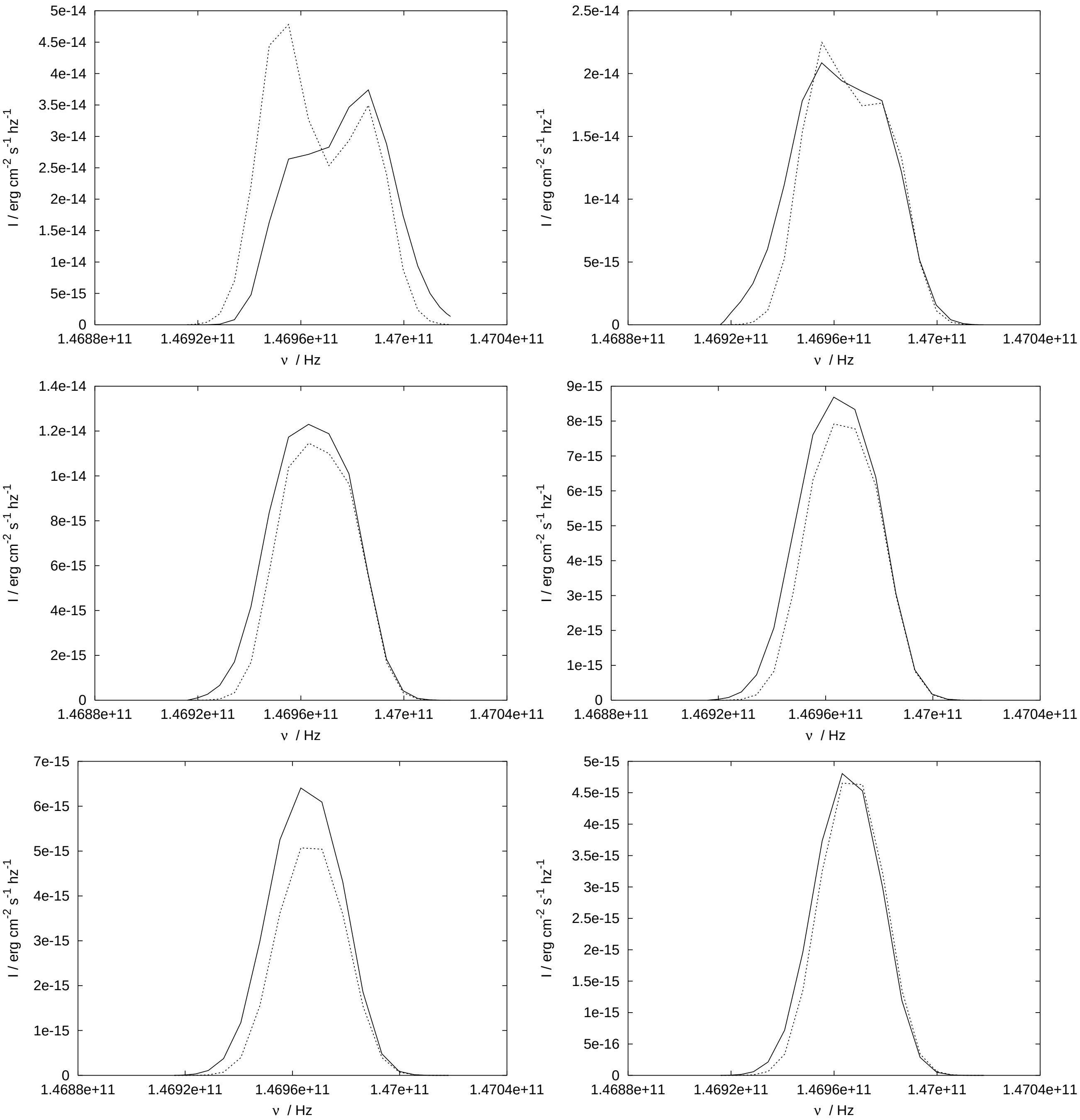


Abbildung 52: Sphärische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 0$ (links oben) bis $p = 2.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

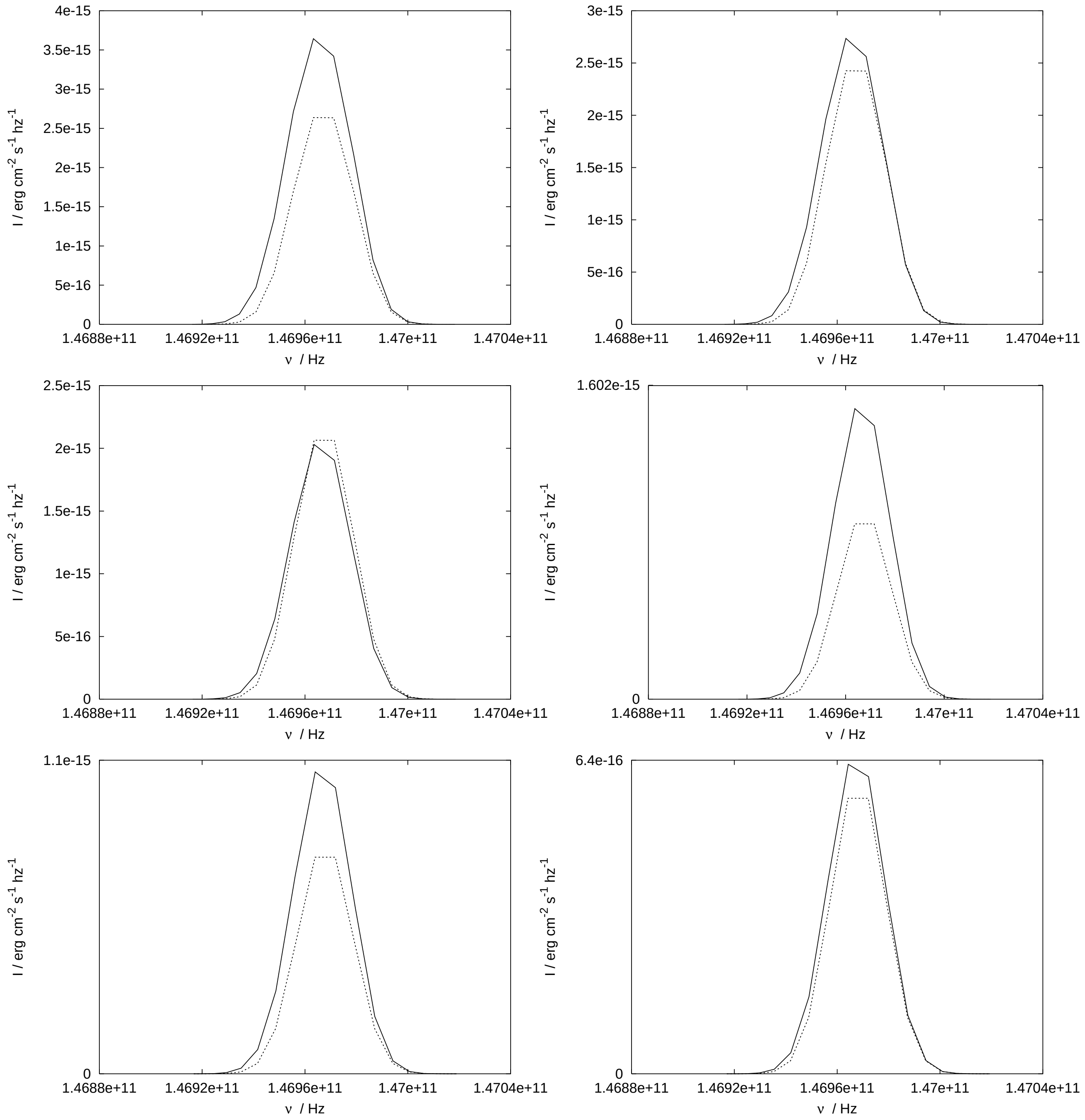


Abbildung 53: Sphärische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich desselben mit den verschiedenen Strahlungstransport-Modellen berechneten Profils der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie (1D: gestrichelte, 3D: durchgezogene Kurve) an jeweils verschiedenen Positionen der Wolke (für $p = 3.0$ (links oben) bis $p = 5.5$pc (rechts unten), in 0.5 pc-Schritten).

D.2 Numerische Ergebnisse zur axialsymmetrischen, rotierenden und kollabierenden Wolke

D.2.1 Die ortsaufgelösten Linienprofile

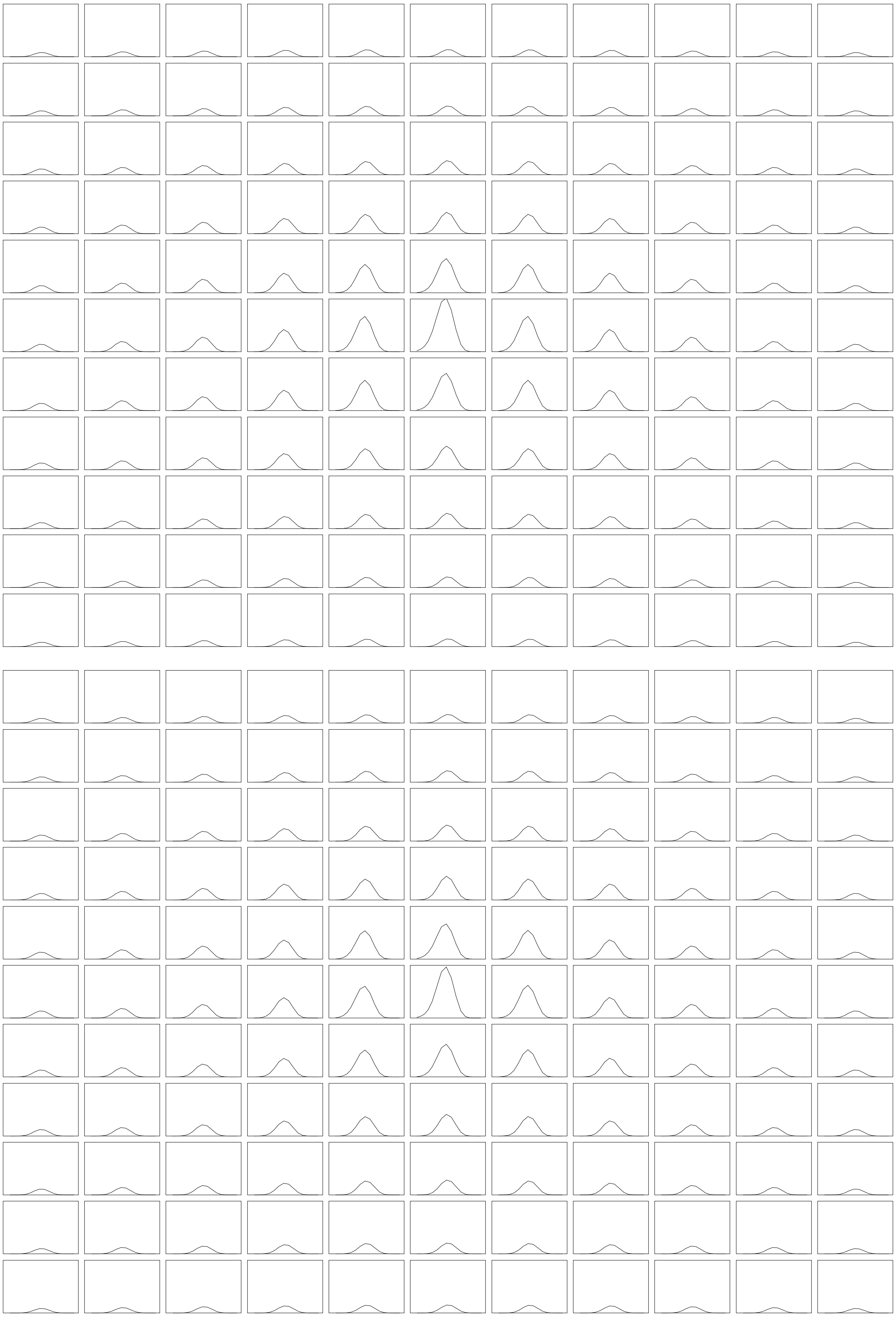


Abbildung 54: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie für den Blickwinkel $\vartheta = 1°$ (oben) bzw. 89° (unten). Jeweilige Abszisse und Ordinate: Profile in den Abständen von 1.0 pc vom Wolkenzentrum (Mitte) von -5.0 bis +5.0 pc, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 2.5×10^{-15} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 4.897 bis 4.901×10^{10} Hz aufgetragen sind.

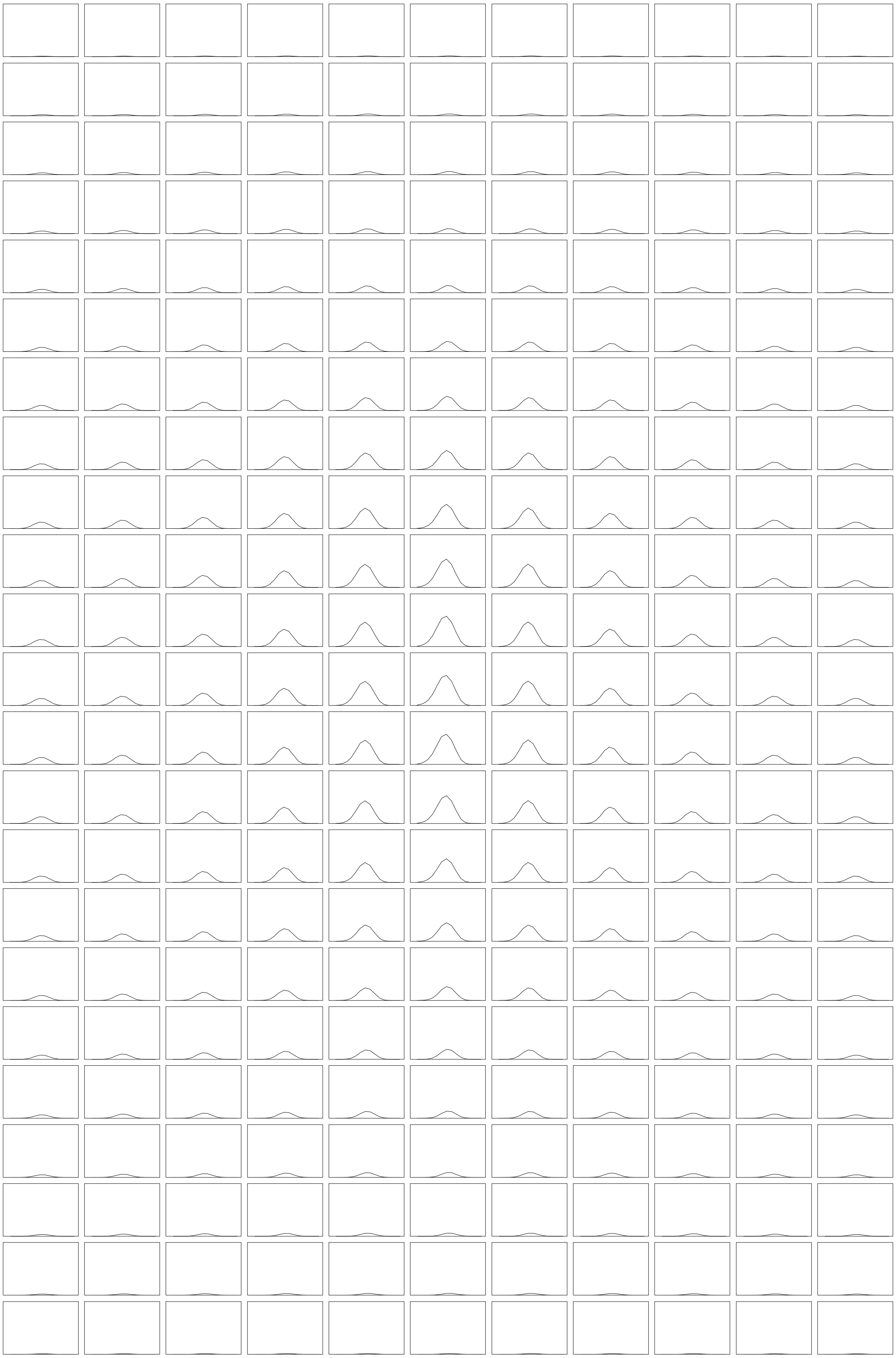


Abbildung 55: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Profile der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie in den Abständen von 1.0 pc (in beiden Achsenrichtungen) für eine schräge Aufsicht mit Blickwinkel $\vartheta = 45°$. Das Wolkenzentrum befindet sich in der Bildmitte. Es sind jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 2.5×10^{-15} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 4.897 bis 4.901×10^{10} Hz aufgetragen sind.

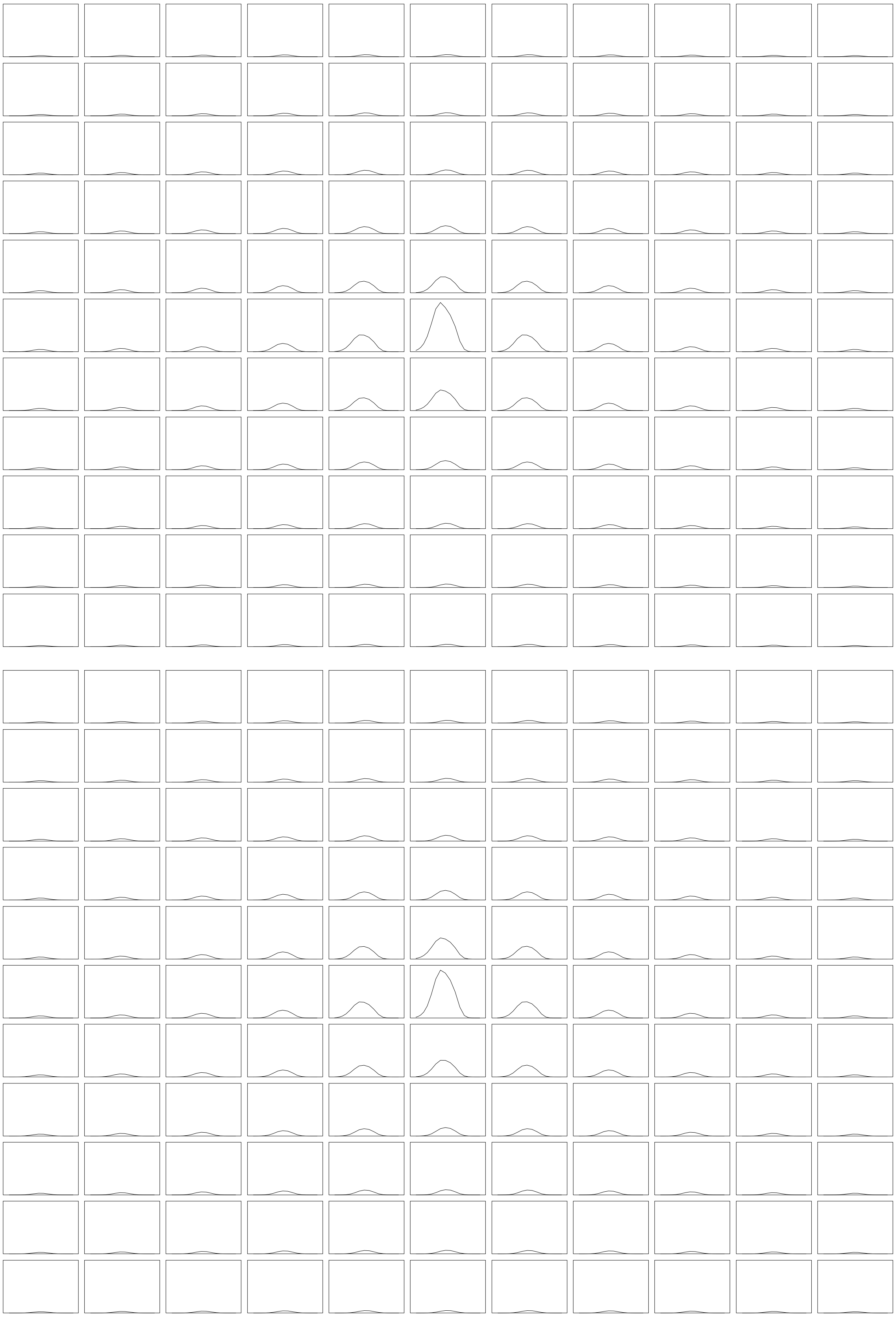


Abbildung 56: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Profile der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie für den Blickwinkel $\vartheta = 1^\circ$ (oben) bzw. 89° (unten). Jeweilige Abszisse und Ordinate: Profile in den Abständen von 1.0 pc vom Wolkenzentrum (Mitte) von -5.0 bis +5.0 pc, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 1.2×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 9.794 bis 9.802×10^{10} Hz aufgetragen sind.

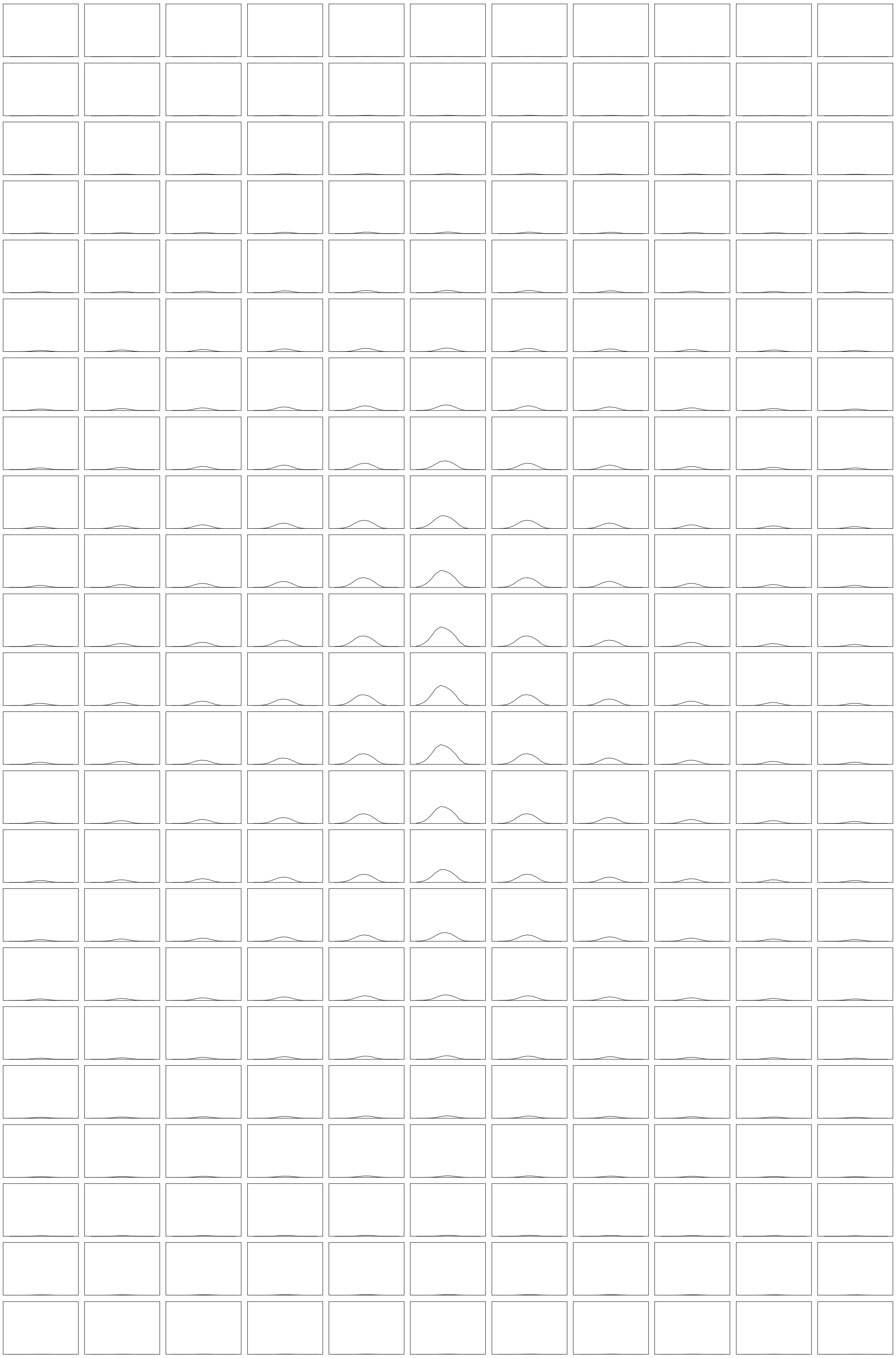


Abbildung 57: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Profile der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie in den Abständen von 1.0 pc (in beiden Achsenrichtungen) für eine schräge Aufsicht mit Blickwinkel $\vartheta = 45°$. Das Wolkenzentrum befindet sich in der Bildmitte. Es sind jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 1.2×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 9.794 bis 9.802×10^{10} Hz aufgetragen sind.

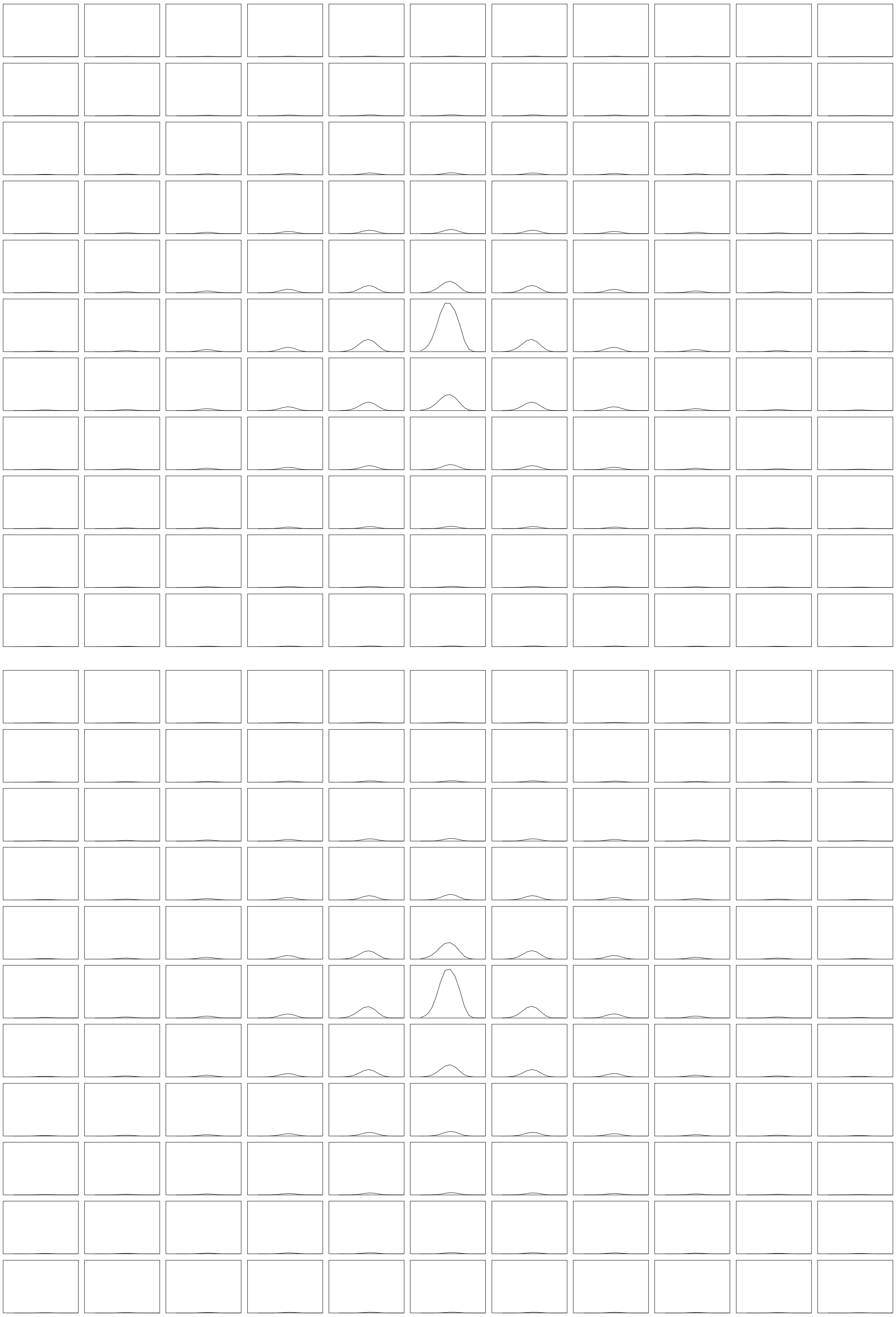


Abbildung 58: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\rm turb} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Profile der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie für den Blickwinkel $\vartheta = 1^\circ$ (oben) bzw. 89° (unten). Jeweilige Abszisse und Ordinate: Profile in den Abständen von 1.0 pc vom Wolkenzentrum (Mitte) von -5.0 bis +5.0 pc, wobei jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 2.5×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.469 bis 1.4702×10^{11} Hz aufgetragen sind.

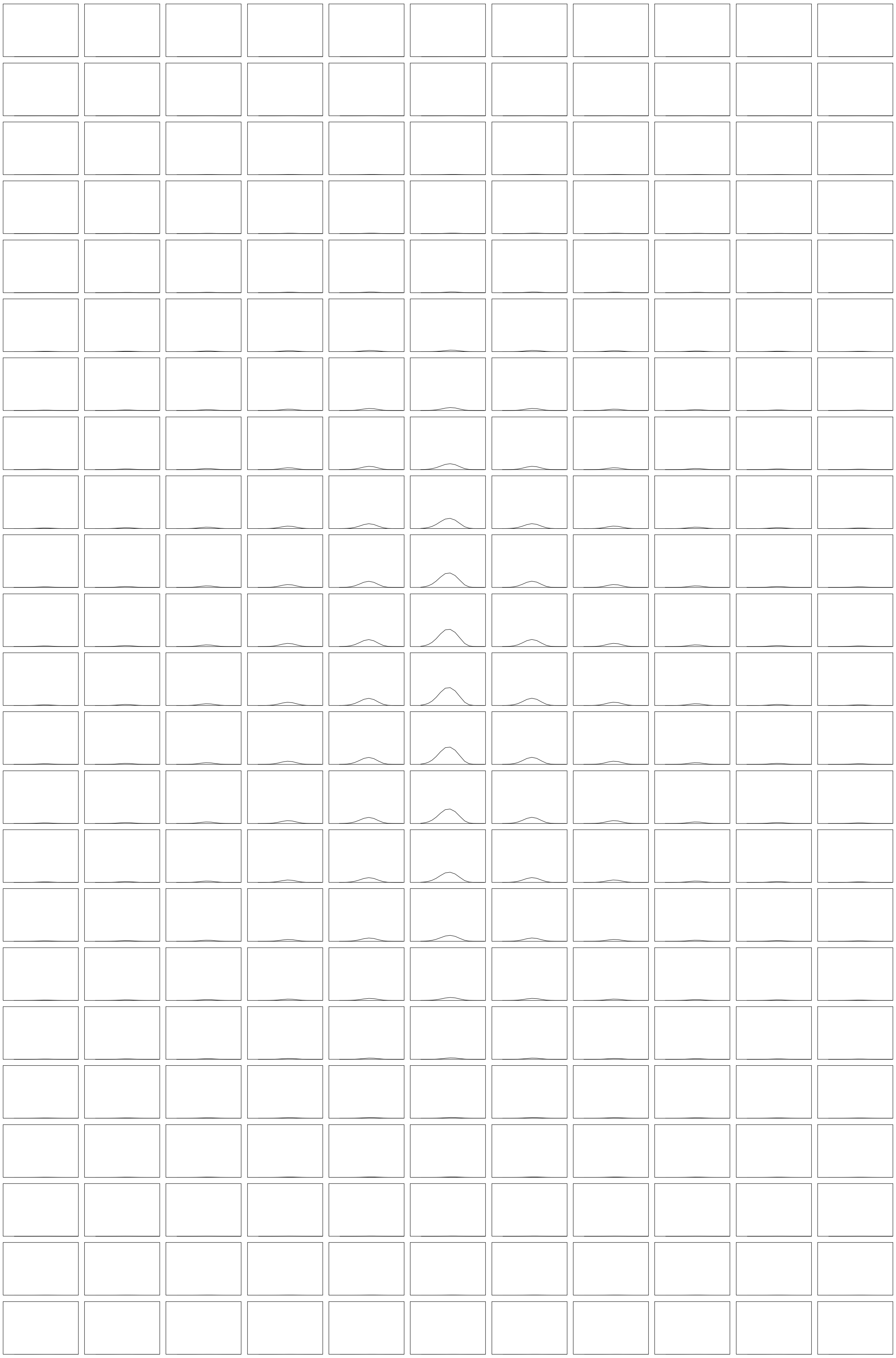


Abbildung 59: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Profile der $J = 3 \rightarrow 2$-Linie in den Abständen von 1.0 pc (in beiden Achsenrichtungen) für eine schräge Aufsicht mit Blickwinkel $\vartheta = 45°$. Das Wolkenzentrum befindet sich in der Bildmitte. Es sind jeweils die spezifischen Intensitäten von 0 bis 2.5×10^{-14} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} gegen die Frequenz im Bereich von 1.469 bis 1.4702×10^{11} Hz aufgetragen sind.

D.2.2 Der Vergleich der Intensitäten aus dem Wolkenzentrum für verschiedene Blickwinkel

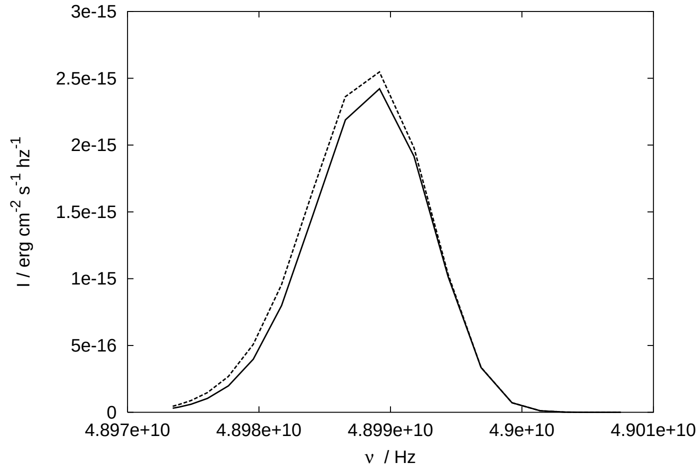


Abbildung 60: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich der Intensitätsverteilungen der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie aus dem Wolkenzentrum für die Blickwinkel $\vartheta = 1^\circ$ (gestrichelte Kurve) bzw. 89° (durchgezogene Kurve).

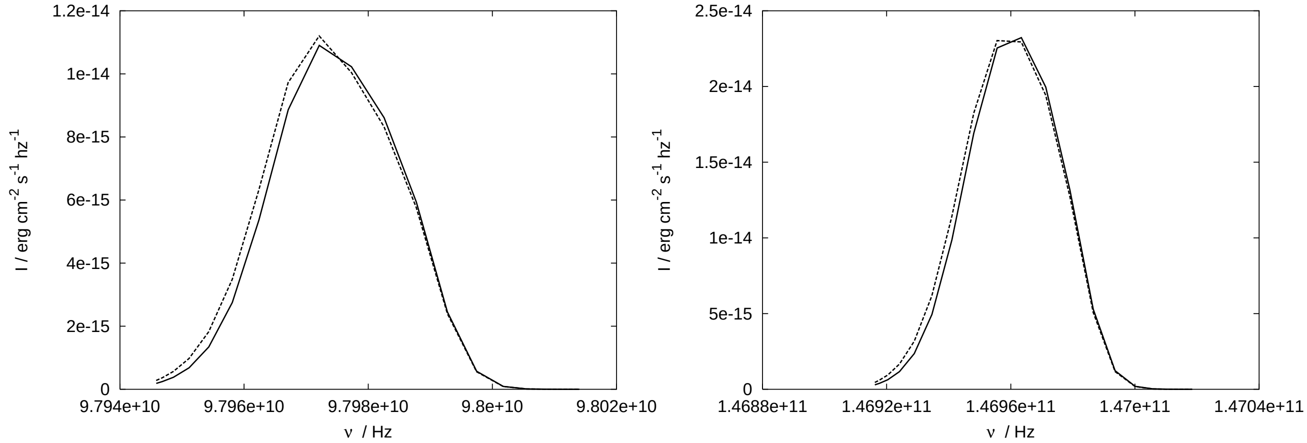


Abbildung 61: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Vergleich der Intensitätsverteilungen der $J = 2 \rightarrow 1$-Linie (links) bzw. $J = 3 \rightarrow 2$-Linie (rechts) aus dem Wolkenzentrum für die Blickwinkel $\vartheta = 1^\circ$ (gestrichelte Kurven) bzw. 89° (durchgezogene Kurven).

D.2.3 Der Einfluß der Rotation auf die Intensitätsverteilung

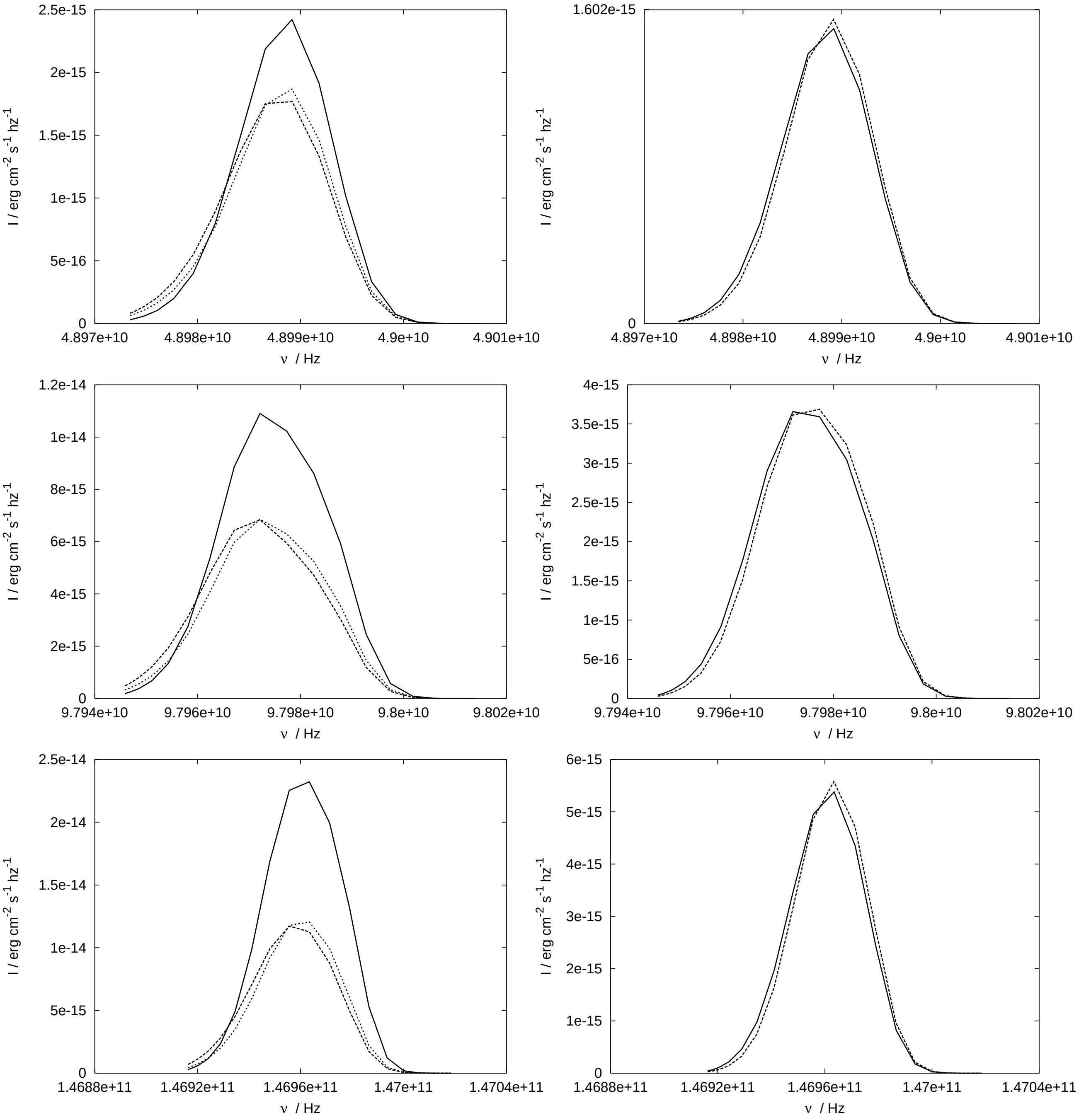


Abbildung 62: Axialsymmetrische Wolke mit $v_{\mathrm{turb}} = 3.0 \times 10^6$ cm/s: Der Einfluß der Rotation auf das Profil der $J = 1 \rightarrow 0$-Linie (oben), $J = 2 \rightarrow 1$-Linie (mitte) und $J = 3 \rightarrow 2$-Linie (unten), an Orten jeweils symmetrisch zum Zentrum für den konstanten Blickwinkel $\vartheta = 89°$ auf die Äquatorebene; links für $r = \pm 0.5$pc und rechts für $r = \pm 1.0$pc. Links ist jeweils die Intensität vom Wolkenzentrum zusätzlich zum Vergleich als durchgezogene Kurve dargestellt.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. R. Wehrse für die Vergabe des Dissertationsthemas, die zahlreichen sachbezogenen Diskussionen, und seine Hilfsbereitschaft während der Betreuung dieser Arbeit. Herrn Prof. B. Baschek gebührt ebenso mein Dank als weiterer Antragsteller des mit dieser Arbeit verbundenen DFG-Projekts.

Herrn Prof. J. Krautter sei vielmals für die Erstellung des Zweitgutachtens gedankt.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit.

Bei Herrn R. Kürschner möchte ich mich für seine technische und praktische Unterstützung in allen Computerangelegenheiten bedanken.

Meinem Kollegen Herrn J. Weinöhrl danke ich für die vielen netten auflockernden Gespräche auch über außerfachliche Themen in den Arbeitspausen.

Bei meinem Freund und Kollegen S. Els möchte ich mich für die freundschaftliche Unterstützung in der Endphase meiner Arbeit bedanken. Danken möchte ich auch meiner Kollegin S. Richling für manch nützlichen Tip in unseren Diskussionen, sowie Frau A. Ferrarotti für die freundliche Arbeitsatmosphäre.

Allen Mitarbeitern des Instituts für theoretische Astrophysik danke ich für die gute Arbeitsatmosphäre und stete Hilfsbereitschaft.

Nicht zuletzt gilt mein weiterer Dank meinen lieben Eltern, die mich auf jegliche Art immer bei meiner Arbeit unterstützt und mir das Studium ermöglicht haben.

Literatur

⋆ Abramowitz M., Stegun I.A., 1972, Handbook of mathematical functions, Dover Publications, INC., New York

⋆ Allen C.W., 1973, Astronomical Quantities, The Athlone Press, London

⋆ Abbott D.C., 1980, ApJ, 242, 1183

⋆ Abbott D.C., Bieging J.H., Churchwell E., Cassinelli J.P., 1980, ApJ, 238, 196

⋆ Abbott D.C., Bieging J.H., Churchwell E., 1981, ApJ, 250, 645

⋆ Abbott D.C., 1982, ApJ, 259, 282

⋆ André P., Ward-Thomson D., Barsony M., 2000, in Protostars and Planets IV, eds. Mannings V., Boss A.P., Russell S.S., Tucson: Univ. of Arizona Press, p. 59-96

⋆ Bachiller R., 1996, ARA&A, 34, 111-154

⋆ Baschek B., Efimov G.V., Waldenfels W. von, Wehrse R., 1997, A&A, 317, 630

⋆ Bate M.R., 1998, ApJ, 508, L95-L98

⋆ Benson P.J., Myers P.C., 1989, ApJS, 71, 89-108

⋆ Bingel W.A., 1967, Theorie der Molekülspektren, Verlag Chemie

⋆ Bjorkman J.E., Cassinelli J.P., 1993, ApJ, 409, 429

⋆ Blitz L., Thaddeus P., 1980, ApJ, 241, 676-696

⋆ Blitz L., Stark A.A., 1986, ApJ, 300, L89-L93

⋆ Blitz L., 1993, in Protostars and Planets III, eds. Levy E.H. & Lunine J.I., Tucson: Univ. of Arizona Press, p. 125-161

⋆ Blottiau P., Chièze J.P., Bouquet S., 1988, A&A, 207, 24-36

⋆ Bonnell I.A., Bate M.R., Clarke C.J., Pringle J.E., 1997, MNRAS, 285, 201-208

⋆ Boss A.P., Yorke H.W., 1995, ApJ 439, L55-L58 ,

⋆ Castor J.I., 1974, MNRAS, 169, 279

⋆ Castor J.I., Abbott D.C., Klein R.I., 1975, ApJ, 195, 157

⋆ Corless R.M, Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E., On the Lambert W Function, paper destributed as technical report in Maple V Share Library, Waterloo Maple Inc., and in The Maple Technical Newsletter, 1993, 9, 12–22

⋆ Dickel H.R., Auer L.H., 1994, ApJ, 437, 222

⋆ Foster P.N., Chevalier R.A., 1993, ApJ, 416, 303-311

- ⋆ Friend D.B., Abbott D.C., 1986, ApJ, 311, 701
- ⋆ Garmany C.D., Olson G.L., Conti P.S., van Steenberg M.E., 1981, ApJ, 250, 660
- ⋆ Green S., Chapman S., 1978, ApJS, 37, 169
- ⋆ Huber K.B., Herzberg G., 1979, Molecular Spectra and Molecular Structure, IV. Constants of Diatomic Molecules, van Nostrand Reinhold Company
- ⋆ Kahaner D., Moler C., Nash S., 1989, Numerical Methods and Software, Prentice-Hall, Inc.
- ⋆ Königl, Pudritz, 2000, in Protostars and Planets IV, eds. Mannings V., Boss A.P., Russell S.S., Tucson: Univ. of Arizona Press
- ⋆ Kramer C., Alves J., Lada C., Lada E., Sievers A., Ungerechts H., Walmsley M., 1989, A&A, 329, L33-L36
- ⋆ Kutner M.L., Tucker K.D., Chin G., Thaddeus P., 1977, ApJ, 215, 521-528
- ⋆ Larson R.B., 1969, MNRAS, 145, 271-295
- ⋆ Li Z.-Y., Shu F.H., 1996, ApJ, 472, 211-224
- ⋆ Li Z.-Y., Shu F.H., 1997, ApJ, 475, 237-250
- ⋆ Lucy L.B., Solomon P., 1970, ApJ, 159, 879
- ⋆ Mihalas D., 1978, Stellar Atmospheres, W.H. Freeman and Company, Second Edition, San Francisco
- ⋆ Mihalas D., Weibel Mihalas B., 1984, Foundations of Radiation Hydrodynamics, University Press, Oxford
- ⋆ Mouchovias T. Ch., 1991, in The Physics of Star Formation and Early Stellar Evolution, ed. Lada C.J., Kylafis N.D., (Dordrecht: Kluwer), p. 449-469
- ⋆ Myers P.C., Benson P.J., 1983, ApJ, 266, 309-320
- ⋆ Nakano T., 1998, ApJ, 494, 587-604
- ⋆ Olson L.O., Kunasz P.B., 1987, J.Q.R.S.T., 38, 325-336
- ⋆ Petrenz P., Puls J., 1996, A&A, 312, 195
- ⋆ Poe C.H., 1987, Ph.D. thesis, Univ. Wisconsin
- ⋆ Reipurth B., Pedrosa A., Lago M.T.V.T., 1996, A&A, 120, 229
- ⋆ Schneider S., Elmegreen B.G., 1979, ApJS, 41, 87
- ⋆ Shu F.H., Adams F.C., Lizano S., 1987, ARA&A, 25, 23-81
- ⋆ Shu F., Najita J., Galli D., Ostriker E., Lizano S., 1993, in Protostars and Planets III, eds. Levy E.H. & Lunine J.I., Tucson: Univ. of Arizona Press, p. 3-45

⋆ Stahler S.W., Walter F.M., 1993, in Protostars and Planets III, eds. Levy E.H. & Lunine J.I., Tucson: Univ. of Arizona Press, p. 405-428

⋆ Stenholm L.G., Störzer H., Wehrse R., 1991, J.Q.S.R.T., 45, 47

⋆ Turner et al., 1992, ApJ, 399, 114

⋆ Wehrse R., Baschek B., Waldenfels W. von, 2000, A&A, 359, 780

⋆ Wiesemeyer H., 1997, Doktorarbeit, Univ. Bonn

⋆ Whitworth A., Summers D., 1985, MNRAS, 214, 1-25

⋆ Williams J.P., McKee C.F., 1997, ApJ, 476, 166-183

⋆ Williams J.P., Blitz L., McKee C.F., 2000, in Protostars and Planets IV, eds. Mannings V., Boss A.P., Russell S.S., Tucson: Univ. of Arizona Press

⋆ Wolf B., Stahl O., Fullerton A.W., 1999, Proc. of the IAU Colloqium No. 169, Springer Verlag, Heidelberg

⋆ Yorke H.W., Henning Th., 1994, Opacity Problems in Protostellar Objects, in: Jørgensen, U.G. (ed.) IAU Coll. 146, Molecules in the Stellar Environment, Lecture Notes in Physics 428, Springer, Berlin, p. 186