Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg

Diplomarbeit

im Studiengang Physik

vorgelegt von

Godehard Sutmann

aus Oberhausen

1993

Lineare und nichtlineare Dynamik in adiabatischen sonnenähnlichen Sternatmosphären

Die Diplomarbeit wurde ausgeführt am

Institut für theoretische Astrophysik

unter Betreuung von

Herrn Prof. Dr. Peter Ulmschneider

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In jedem turbulenten Medium wird Schallenergie erzeugt. Viele Sterne im Hertzsprung–Russel–Diagramm (HRD) sind dadurch gekennzeichnet, daß sie in ihrer äußeren Schicht eine turbulente Konvektionszone besitzen und daher Schallenergie erzeugt wird, die in Form von Wellen in die Atmosphäre der Sterne transportiert wird. Durch den starken Dichte– und Druckgradienten (der Abfall erfolgt nahezu exponentiell) steigt die Geschwindigkeitsamplitude der Wellen mit der Höhe schnell an. Abhängig von der Größe der Amplitude und der Periode der Welle können sich Schockwellen bilden, durch die mechanische Energie (Schallenergie) in Wärme transformiert wird, wodurch ein nach außen positiver Temperaturgradient erzeugt werden kann. Diese Möglichkeit einer Heizung von Sternhüllen wurde zuerst von Biermann (1946, 1948) und Schwarzschild (1948) diskutiert.

Signifikante Beweise für die Existenz eines positiven Temperaturgradienten liefern Linienspektren von Ionen, die erst bei einer höheren Temperatur als der Effektivtemperatur eines Sternes entstehen. Ein weiterer Indikator für einen Temperaturanstieg sind *Emissionskerne* von Absorptionslinien. Grob gesprochen entstehen Absorptionslinien durch Resonanz zwischen dem Strahlungsfeld und den in der Sternatmosphäre existierenden Atomen und Ionen. Hierbei wird Licht aus dem Strahlungsfeld absorbiert und isotrop gestreut, wodurch es aus dem Sehstrahl Stern–Beobachter verschwindet und in dem Farbspektrum ein dunkler Absorptionsstreifen erscheint. Nach ihrem Entdecker werden dies die *Fraunhoferlinien* genannt. Gibt es ein Gebiet oberhalb der Photosphäre (Zone der thermischen Kontinuumsstrahlung ohne Linienemission), das heiß genug ist, um die Atome oder Ionen, die in der Photosphäre als Absorber wirken, thermisch anzuregen, so werden sie selber zu Emittern. D.h. man beobachtet eine Überlagerung von Absorption in der Photosphäre und Emission in der *Chromosphäre* (Gebiet, in dem Linienstrahlung entsteht). Bezogen auf die Sonne sieht man Linien, die in der Photosphäre als Fraunhoferlinien erscheinen, beispielsweise bei Sonnenfinsternissen in denen die gesamte Sonnenscheibe bedeckt ist, und nur die äußeren Schichten sichtbar sind, als Emissionslinien. Die wichtigsten chromosphärischen Linien für die Sonne sind die H_α–Linie (656 nm), die Ca II H– (3969 Å) und K–Linien (3933 Å), die Ca–Infrarot–Triplettlinien (8498 Å(X), 8542 Å(Y), 8662 Å(Z)) und die Mg II k–Linie (2796 Å). Ein weiterer Indikator für die Anwesenheit einer Chromosphäre ist ein Massenverlust

Abbildung 1.1: Beobachtetes Powerspectrum vom Zentrum der der Sonne in unterschiedlichen Höhenlagen. Jedes Powerspektrum ist der besseren Darstellbarkeit auf der y–Achse verschoben. (nach Deubner, 1976)

des Sternes, wobei ein zwingender Zusammenhang zwischen Massenverlust und der Existenz eines positiven Temperaturgradienten noch nicht gezeigt werden konnte.

Obwohl es unterschiedliche theoretische Überlegungen für die Erzugung eines positiven Temperaturgradienten in einer Sternatmosphäre gibt (Ulmschneider et al. 1991, Narain & Ulmschneider 1990), ist die am besten entwickelte Theorie die der *akustischen Heizung* (Ulmschneider 1970) die oben bereits erwähnt wurde. Innerhalb dieser Theorie konnte in jüngster Zeit die *basal flux line*, die eine untere Grenze für Linienstrahlungsflüsse für Sterne auf der Hauptreihe im HR–Diagramm darstellt, aus rein theoretischen Betrachtungen reproduziert werden (Buchholz & Ulmschneider 1993).

Ein Problem in diesem Zusammenhang stellt die Verteilung von akustischer Energie auf ein Spektrum von Frequenzen dar. Zwar gibt es theoretische Überlegungen für eine Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit der Frequenz (Steffen 1989, Musielak et al. 1993). Jedoch widersprechen sich diese Ansätze zum Einen, da einmal das Geschwindigkeitsmaximum bei kleinen Frequenzen (Steffen), das andere Mal das Geschwindigkeitsmaximum bei hohen Frequenzen gefunden wird. Zum Anderen wurden die bisherigen Rechnungen, die den chromosphärischen Temperaturanstieg beschreiben mit der Idealisierung durchgeführt, daß die Schallenergie auf einen Frequenzpunkt reduziert wurde (monochromatische Welle), wobei die Periode der Welle stets als klein angenommen wurde (für die Sonne $P \approx 40$ sec), um bereits in geringer Höhe Schockbildung und damit eine Transformation von mechanischer in thermische und radiative Energie zu erhalten. In diesem Punkt besteht eine Diskrepanz zwischen den theoretischen Überlegungen und der Beobachtung, da kurzperiodische Wellen nicht in ausreichendem Maße nachgewiesen werden (Deubner, 1976, s.Abb.(1.1)) . Der größte Teil des beobachteten Geschwindigkeitspowers liegt oberhalb von Perioden $P > 1$ min. Allerdings muß man beachten, daß die kurzperiodischen Oszillationen Wellenlängen der Größnordnung $\lambda \approx 250$ km besitzen, was unterhalb der Breite der Linienbeitragsfunktion liegt. Geschwindigkeitsschwankungen werden nämlich als Verschiebungen des Linienzentrums auf der Wellenlängenskala durch den Dopplereffekt bestimmt. Bewegt sich ein Gebiet, in dem eine Linie entsteht auf den Beobachter zu, so wird die Wellenlänge zum Blauen hin verschoben. Genauso wird die Linie zum Roten hin verschoben, wenn sich dieses Gebiet vom Beobachter entfernt. Die Beobachtung der Dopplerverschiebung wird somit für kleine Frequenzen einfach sein, da sich hierbei das gesamte Linienentstehungsgebiet innerhalb einer halben Wellenlänge befinden kann. Bei großen Frequenzen ist dies nicht möglich. Ist das Linienentstehungsgebiet nämlch größer als eine halbe Wellenlänge, so finden zwar in diesem Gebiet Auf– und Abbewegungen statt. Jedoch wird sich Linienentstehungsgebiet als Ganzes nicht auf den Beobahter zu bzw. fortbewegen. Dies bedeutet, daß kurze Wellenlängen sich nicht als Dopplerverschiebung bemerkbar machen können, sondern nur zu einer Verbreiterung der Linie führen werden.

Beobachtungen von Deubner (1990) (Abb.(1.2)) und Rutten & Uitenbroek (1991) der Ca8542–Linie des Infrarottripletts auf der Sonne zeigten, daß im Enstehungsgebiet dieser Linie eine ausgeprägte Oszillation mit der Periodizität von 3 min existiert. Beobachtungen von Kneer & Uexküll (1993) relativieren diese 3–min–Dominanz und finden in Beobachtungen der Mg b2–, der Ca K– und der H_α–Linien eine breite Geschwindigkeitsverteilung oberhalb von 3 min. Will man eine konsistente Beschreibung der chromosphärischen Heizung mit kurzperiodischen Wellen liefern, so muß man diese oszillatorischen Phänomene miteinschließen und eine Erklärung für die Transformation der kurzperiodischen Wellen in photosphärischer Höhe (0 km) in langperiodische Wellen in den Linienformationsgebieten (ca. 1300 für Ca K) liefern.

Ein Versuch hierzu wurde von Rammacher & Ulmschneider (1991) mit einer Rechnung gemacht, die mit einer monochromatischen Welle von $P = 30$ sec durchgeführt wurde. Sie konnten ein oszillatorisches Verhalten in den oberen Atmosphärenschichten beobachten, das nahe 3–min lag und durch das Verschmelzen von Schocks getriggert wurde. Die Autoren gaben diesem Mechanismus den Namen *shock–overtaking–pulsation* (sop). Jedoch wurde in dieser Rechnung kein Powerspektrum gezeigt, wodurch ein direkter Vergleich von Beobachtung und Theorie noch aussteht.

Ein anderer Versuch zur Erklärung der 3–min–Oszillation wurde von Fleck (1991) und Fleck & Schmitz (1991) unternommen, die die lineare Anregung von Atmosphären mit langperiodischen, evaneszenten Wellen ($P > 200$ sec) untersuchten. Hierbei fanden sie eine Anregung der Atmosphäre in der Cut–Off–Frequenz ($P_{cut} \approx 180$ sec) und machten die Verallgemeinerung, daß bei jedem Auftreten langperiodischer Wellen die akustische Grundschwingung angeregt wird. In einer späteren Arbeit (Fleck & Schmitz, 1993) wurden ebenso kurzperiodische Wellenspektren mit einer überlagerten evaneszenten Welle großer Amplitude betrachtet. Auch hier soll die langperiodische Welle für das Schwingungsverhalten nahe 3 min verantwortlich sein.

Abbildung 1.2: Geschwindigkeitsfluktuationen in der Ca8542–Linie an einem räumlich aufgelösten Punkt in der Mitte einer Granulationszelle (nach Deubner, 1990).

In der vorliegenden Arbeit sollen die beiden Erklärungsversuche eingehender betrachtet werden und es sollen hierzu systematische Untersuchungen des Einflusses der relevanten Parameter erfolgen.

Im zweiten Kapitel der Arbeit werden methodische Aspekte diskutiert wie sie im Zusammenhang der Arbeit relevant erscheinen.

Im dritten Kapitel soll die lineare Anregung von unterschiedlichen Atmosphärentypen mit monochromatischen Wellen einer Periode unterhalb der Cut–Off–Frequenz untersucht werden. Hierbei werden Daueranregungen wie auch Pulsanregungen vorgestellt, bei denen sich zeigt, daß die semiempirische VAL–Atmosphäre ein wesentlich anderes dynamisches Verhalten besitzt als eine isotherme Atmosphäre und besser durch eine polytrope Atmosphäre mit einem positiven Temperaturgradienten beschrieben werden kann. Hierdurch werden Ergebnisse, wie die von Fleck & Schmitz insofern relativiert, als daß die Schwingung bei der Cut–Off–Frequenz als Einschaltvorgang interpretiert werden muß, der bei einer realistischen Temperaturverteilung ein zu schnelles Abklingverhalten besitzt und somit nicht als realistisches Phänomen auf der Sonne interpretiert werden kann.

Im vierten Kapitel der Arbeit sollen nichtlineare Wellenphänomene systematisch studiert werden, wobei zum Einen großamplitudige monochromatische Wellen im Periodenbereich von 15 sec bis 100 sec und zum Anderen Wellenspektren unterschiedlicher

Form betrachtet werden. Ebenso wird der Einfluß evanescenter Wellen im Fall nichtlinearer Wellenausbreitung betrachtet. Hierbei wird sich zeigen, daß langperiodische Wellenphänomene in der oberen Chromosphärenschicht nicht zwingend mit langperiodischen Wellen in der Photosphäre assoziiert werden müssen. Vielmehr zeigt sich, daß die evaneszenten Wellen für die Dynamik der Chromosphäre nur eine vernachlässigende Bedeutung besitzen. Eine Oszillation nahe von 3 min kann allein durch Schallspektren in Frequenzbereichen oberhalb der Cut–Off–Frequenz erzeugt werden, wobei die Form des Spektrums eine untergeordnete Rolle spielt und es vielmehr auf den induzierten Energiefluß ankommt. Da Rechnungen zum chromosphärischen Temperaturanstieg bisher lediglich mit monochromatischen Wellen durchgeführt wurden (s. z.B. Ulmschneider et al. 1977a, Ulmschneider 1977b, Ulmschneider et al. 1978), wird ein qualitativer Vergleich zwischen dem dynamischen Verhalten von monochromatischen Wellen und Schallspektren durchgeführt. Es zeigt sich, daß monochromatische Wellen ihre Energie schneller verlieren, d.h. eine kleinere Dämpfungslänge besitzen als Schallspektren. Diese Tatsache kann direkt durch die Tendenz zur Periodenvergrößerung bei Schallspektren mit zunehmender Höhe interpretiert werden. Es zeigt sich weiterhin, daß Schallspektren keine Grenzschockstärke, wie es bei monochromatischen Wellen der Fall ist, sondern vielmehr eine Durchschnittsschockstärke besitzen, die unabhängig ist von der Energie.

Das fünfte Kapitel gibt einen Ausblick auf weitere, sich stellende Probleme.

Kapitel 2

Methodisches

Hier sollen Grundlagen vorgestellt werden, wie sie für die folgende Arbeit wichtig erscheinen. Zunächst sollen die physikalischen Grundgleichungen sowie die Beziehungen für den Energiefluß und die Energiedichte eingeführt werden. Im Anschluß sollen die charakteristischen Gleichungen abgeleitet werden, die für die numerische Integration in dem benutzten nichtlinearen Hydrodynamikprogramm die Grundlage bilden. Danach sollen unterschiedliche Typen von Atmosphären besprochen werden wie sie im Rahmen dieser Arbeit für Rechnungen benutzt wurden. Ebenso soll dargestellt werden, wie eine ruhende, beliebige Atmosphärenstruktur erzeugt werden kann, die als Startatmosphäre für Rechnungen dient.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden ruhende Atmosphären mit Schallspektren zum Schwingen angeregt. Es wird daher in diesem Kapitel die Methode besprochen, wie man ein Schallspektrum beliebiger Form und vorgegebenem Gesamtenergiefluß simulieren kann. Weiterhin soll kurz die Fourier–Analyse besprochen werden, die benutzt wurde, um das Schwingungsverhalten einer Atmosphäre zu studieren.

2.1 Grundgleichungen

Betrachtet man ein abgeschlossenes physikalisches System, so gelten in strengem Sinne die Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung. Die Änderung der Masse eines Volumens in diesem System, wird stets von einem Massenfluß durch die Oberfläche dieses Volumenelementes begleitet sein, vorausgesetzt, daß sich in dem Volumen keine Massenquellen oder -senken befinden. Aus dieser Betrachtung leitet sich direkt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\vec{u}\rho) \tag{2.1}$$

ab. Die Änderung des Bewegungszustandes eines Massenelementes wird durch äußere Kräfte oder Druckunterschiede verursacht. Als äußere Kraft wird i.a. die Gravitation wirken, der Druck wird, falls man magnetische Effekte oder Strahlungseffekte vernachlässigt, wie es in dieser Arbeit stets gemacht wird, der Gasdruck sein. Aus diesen

Überlegungen erhält man die *Eulergleichung*

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}, \tag{2.2}$$

mit

$$\vec{g} = g\vec{e_z}.$$

$\vec{e_z} = (0, 0, -1)$ stellt hierbei den Einheitsvektor in z-Richtung dar. Ein Gaselement wird i.a. Energie mit seiner Umgebung austauschen, d.h. entweder Energie aufnehmen oder abgeben. Dies kann durch unterschiedliche Mechanismen, wie Wärmeleitung, Viskositätseffekte, Strahlung, mechanische Effekte oder Joulesche Wärmeverluste geschehen. Alle diese Effekte werden i.a. die Entropie des Gaselementes verändern. Diese Gesamtänderung soll mit

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext}$$

bezeichnet werden. Mit Hilfe des ersten Hauptsatzes

$$TdS = dE - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

und Vernachlässigung von Dissoziations- und Ionisationseffekten, also

$$dE = c_v dT$$

mit

$$c_v = const,$$

kann durch zeitliche Differentiation die Änderung der Entropie beschrieben werden, als

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = (\gamma - 1)\rho T \left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext} \tag{2.3}$$

mit

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$$

2.2 Energiedichte und -flußdichte von Schallwellen

Die Energiedichte einer Schallwelle setzt sich aus Anteilen der inneren Energie ρE, der potentiellen Energie $\rho\phi$ und der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\rho u^2$ zusammen. Eine kleine Störung in einem ruhenden bzw. in einem sich gleichförmig bewegenden Gas wird eine Änderung der Energieterme bewirken. Diese schreiben wir als

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho', \\ E &= E_0 + E', \\ u &= u_0 + u', \end{aligned}$$

mit ρ_0, E_0, u_0 als den ungestörten Größen. Die gestrichenen Terme stellen die kleinen Störungen dar. Vernachlässigt man Terme kleiner als erster Ordnung und führt die Enthalpie

$$H = E + \frac{p}{\rho}$$

ein, so kann man die Energie W pro Volumeneinheit schreiben als (Landau,Lifschitz 1991)

$$W = \rho_0 E_0 + H_0 \rho' + \frac{1}{2}\frac{c^2 \rho'^2}{\rho_0} + \frac{1}{2}\rho u^2 + (\rho_0 + \rho')\phi. \tag{2.4}$$

Integriert man über das gesamte schallerfüllte Volumen, so entfallen die ersten beiden Terme in bezug auf die Wellenenergiedichte, da der erste Term die innere Energiedichte eines ruhenden Gases bedeutet und der zweite Term eine Änderung der Energie durch eine Massenänderung darstellt. Da

$$H_0 = E_0 + \frac{p_0}{\rho_0} = const, \tag{2.5}$$

kann man die Integration mit Hilfe des Gaußschen Satzes durchführen

$$\begin{aligned} \int_V H_0 \rho' dV &= H_0 \int_V \rho' dV \\ &= H_0 \int_\Gamma \vec{\nabla} \rho' \vec{n} d\sigma. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Γ ist die Oberfläche des Volumens, $\vec{n}$ ist der Normalenvektor der Oberfläche. Wählt man die Oberfläche des Volumens so groß, daß die Schallwelle vollständig darin enthalten ist, so ist die Massenänderung $\vec{\nabla}\rho$ durch die Oberfläche gleich Null, d.h. der zweite Term in (2.4) entfällt.

In einer linearen Welle hat man die Beziehung (Landau,Lifschitz 1991)

$$\rho' = \frac{u \rho_0}{c} \tag{2.7}$$

Der dritte Term in (2.4) lautet daher $\frac{1}{2}\rho_0 u^2$ und für die Energiedichte erhält man den Ausdruck

$$W = \rho_0 u^2 + \rho\phi \tag{2.8}$$

Der Ausdruck für die Energiestromdichte lautet (Landau,Lifschitz 1991)

$$\vec{j} = \rho \vec{u}(H + \frac{1}{2}u^2 + \phi). \tag{2.9}$$

Mit der Beziehung

$$H' = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) p' = \frac{p'}{\rho}$$

kann man den linearisierten Ausdruck für die Energiestromdichte schreiben

$$\vec{j} = H_0 \rho \vec{u} + p' \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} u^2 + \rho\phi\vec{u}. \tag{2.10}$$

In einem ruhenden Medium existiert auch bei Anwesenheit einer Schallwelle kein effektiver Massenfluß. Bei einer zeitlichen Mittelung bedeutet dies, daß das Integral über eine Oberfläche A

$$\frac{1}{T}\int_0^T \int_A \rho \vec{u} d\sigma dt \tag{2.11}$$

verschwindet. Integriert man Gl.(2.10) in dieser Weise, so bleibt lediglich der Ausdruck

$$\vec{j} = p'\vec{u} \tag{2.12}$$

übrig, da ϕ als konstant angenommen wird und zusammen mit H_0 vor das Integral gezogen werden kann. Weiterhin ist der Ausdruck $1/2\rho\vec{u}u^2$ eine Größe dritter Ordnung und kann daher vernachlässigt werden. Bildet man eine zeitliche Mittelung in Gl.(2.8), so entfällt der Term mit dem Gravitationspotential, da dieses wiederum als Konstante vor das Integral gezogen werden kann und ρ' bei einer angenommenen harmonischen Bewegung im Zeitmittel herausfällt.

Die Energiedichte und die Energiestromdichte kann man in Erhaltungsform schreiben

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0. \tag{2.13}$$

Mit dem Ausdruck für p'

$$p' = c\rho_0 u \tag{2.14}$$

kann daher die Bilanzgleichung auf die endgültige Form gebracht werden

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(c\rho_0 u^2 \cdot \vec{n}) = 0, \tag{2.15}$$

wobei $\vec{n}$ in Ausbreitungsrichtung der Welle zeigt. Hierbei wird $\vec{j}$ i.a. eine Funktion von der Frequenz ω sein mit der die Zustandsgrößen variieren

$$\vec{j} = \vec{j}(\omega). \tag{2.16}$$

Nimmt man nämlich eine harmonische Bewegung der Zustandsgrößen an, so wird zwischen ihnen i.a. eine Phasenverschiebung der Form $e^{i\Delta\varphi}$ bestehen, die abhängig ist von der Frequenz, mit der Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{p'}$. Da physikalisch relevant nur der Realteil $\cos\varphi$ der Phase ist, der somit in die Energiegleichung miteingehen muß, erhält man schließlich für die Energiestromdichte

$$\vec{j} = \frac{\int_0^T c\rho_0 u^2 \cdot \vec{n} dt}{\int_0^T dt} \cdot \cos\Delta\varphi. \tag{2.17}$$

Haben p' und u insbesondere eine Phasenmverschiebung von $\pi/2$, so wird keine Energie transportiert werden können.

2.3 Die Grundgleichungen in charakteristischer Form

Zur Behandlung der nicht-linearen Gleichungen verwenden wir die Metheode der Charakteristiken (Ulmschneider et.al. 1977, Ulmschneider et.al. 1978, Lister 1960) Um die charakteristischen Gleichungen zu finden, transformiert man zunächst in das Lagrange-System, in dem eine besonders einfache Formulierung der Gleichungen möglich ist. Die allgemeine Transformation von Differentialausdrücken vom Euler- in das Lagrangesystem lauten

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_a &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x + u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t. \end{aligned}$$

Aus diesen Transformationsvorschriften gewinnt man die Kontinuitäts-, Euler- und Energiegleichung im Lagrangesystem

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_a + \frac{\rho}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_t = 0, \tag{2.18}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_a + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t + g = 0, \tag{2.19}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_t = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext}, \tag{2.20}$$

mit

$$v_0\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \frac{\rho_0}{\rho}. \tag{2.21}$$

ρ, ρ_0 bezeichnen hier die Gasdichten im gestörten bzw. im ungestörten Zustand. Weiterhin werden der 1.Hauptsatz der Thermodynamik

$$TdS = dE - \frac{p}{\rho^2}d\rho, \tag{2.22}$$

sowie die ideale Gasgleichung

$$p = \rho\frac{\mathcal{R}T}{\mu} \tag{2.23}$$

vorausgestzt; letztere deshalb, da man es mit einem relativ dünnen Gas zu tun hat, in dem das mittlere Molekulargewicht μ konstant angenommen, sowie elektrostatische Wechselwirkung zwischen den Molekülen vernachlässigt wird. Ebenso können die Koeffizienten der Van-der-Waals-Gleichung, das Kovolumen und der Binnendruck, vernachlässigt werden, so daß sich die Zustandsgleichung auf (2.23) beschränkt. Betrachtet man im adiabatischen Fall die Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen

$$p\rho^{-\gamma} = const, \tag{2.24}$$

$$T\rho^{1-\gamma} = const, \tag{2.25}$$

so erhält man vermöge

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$$

für die Schallgeschwindigkeit die Beziehung

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R} T}{\mu}} \tag{2.26}$$

Die Grundgleichungen (s.o) sollen nun so umgeschrieben werden, daß die abhängigen Variabeln u, c und S werden. Dies liefert den Vorteil, daß im adiabatischen Falle mit $\frac{dS}{dt} = 0$ *eine* Integration von vornherein wegfällt, sowie daß man für u direkt eine linke Randbedingung (Geschwindigkeitsfunktion u der induzierten Welle (s.o.)) besitzt. Für ein ideales Gas hat man

$$dE = c_v dT. \tag{2.27}$$

Ionisation und Dissoziation sollen wiederum vernachlässigt werden. Im adiabatischen Falle mit $dS = 0$ schreibt sich der erste Hauptsatz als

$$c_v dT = \frac{p}{\rho^2} d\rho \tag{2.28}$$

Mit (2.25) hat man somit

$$\frac{dT}{d\rho} = (\gamma - 1)\frac{T}{\rho}. \tag{2.29}$$

Gleichung (2.28) läßt sich mit Hilfe von (2.29) auflösen zu

$$c_v = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{\mathcal{R}}{\mu}.$$

Um ein totales Differential in c zu finden, löst man (2.26) nach T auf und differenziert nach c, womit man

$$dT = \frac{2\mu}{\gamma \mathcal{R}} c dc \tag{2.30}$$

erhält. Dieses eingesetzt in (2.27) mit dem Ausdruck (2.22) liefert

$$d\rho = \rho \left(\frac{2}{\gamma - 1}\frac{dc}{c} - \frac{\mu}{\mathcal{R}} dS\right). \tag{2.31}$$

Bildet man das Differential dp mit Hilfe der Zustandsgleichung

$$dp = \frac{\mathcal{R}}{\mu}(\rho dT + T d\rho)$$

und setzt hierin (2.30) und (2.31) ein, so erhält man

$$dp = \rho \left(\frac{2c}{\gamma - 1} dc - \frac{\mu c^2}{\gamma \mathcal{R}} dS\right). \tag{2.32}$$

Setzt man nun (2.31) und (2.32) in die Kontinuitäts- und die Eulergleichung ein, so erhält man schließlich

$$\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_a - \frac{\mu c}{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_a + \frac{c}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_t = 0, \tag{2.33}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_a + \frac{2}{\gamma-1}\frac{c}{v}\frac{\partial c}{\partial a} - \frac{\mu c}{\gamma\mathcal{R}}\frac{c}{v}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_t + g = 0. \tag{2.34}$$

Dieses System von partiellen Differentialgleichungen soll nun zusammen mit (2.20) auf die charakteristische Form gebracht werden. Hierzu verwenden wir das Carakteristikenverfahren, das im Anhang D beschrieben wird.

Zunächst definieren wir die Koeffizientenmatrizen

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma-1} & -\frac{\mu c}{\mathcal{R}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c}{v} \\ \frac{2}{\gamma-1}\frac{c}{v} & -\frac{\mu c}{\gamma\mathcal{R}}\frac{c}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sowie den Koeffizientenvektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ -\left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext} \end{pmatrix}.$$

Die Zeit t wird als Kurvenparameter gewählt, d.h. $\alpha = 1$ (s.u.). Die Bedingung, um (2.33),(2.34) sowie (2.20) als gewöhnliche Differentialgleichung zusammenzufassen lautet

$$det(\beta a_{ij} - b_{ij}) = 0. \tag{2.35}$$

In der Darstellung von b_{ij} sieht man sofort, daß diese Matrix singulär ist. $\beta = 0$ stellt somit *eine* Lösung von (2.35) dar und die Zeit-Achse liefert eine charakteristische Richtung. Auswertung von (2.35) ergibt

$$\beta = \pm\frac{c}{v}. \tag{2.36}$$

Durch Bestimmung der Eigenvektoren $\vec{l}$ hat man

$$l_1\left(\pm\frac{c}{v}\right) = \pm l_2,$$

$$\frac{l_3}{l_1} = \frac{\mu c}{\mathcal{R}}\frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

D.h die Eigenvektoren $\vec{l}_\pm$ lauten

$$\vec{l}_\pm = \vec{l}\left(\pm\frac{c}{v}\right) = \lambda\left(1, \pm 1, \frac{\mu c}{\gamma\mathcal{R}}(\gamma-1)\right). \tag{2.37}$$

λ bezeichnet eine willkürliche Konstante, die hier gleich 1 gesetzt wird. Vermöge der Beziehung

$$m_j = \sum_{i=1}^{3} l_i a_{ij}$$

kann man die neuen Koeffizienten der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \frac{df_i}{dt} + l_j c_j = 0 \tag{2.38}$$

bestimmen. Diese ergeben sich daraus zu

$$\vec{m}_\pm = \vec{m}\left(\pm\frac{c}{v}\right) = \left(\frac{2}{\gamma-1}, -\frac{\mu c}{\gamma\mathcal{R}}, \pm 1\right). \tag{2.39}$$

Setzt man $\vec{l}$ und $\vec{m}$ in Gleichung (2.38) ein, so hat man die beiden charakteristischen Gleichungen

$$du + \frac{2}{\gamma-1}dc - \frac{\mu c}{\gamma\mathcal{R}}\left(dS + (\gamma-1)\left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext} dt\right) + gdt = 0, \tag{2.40}$$

$$du - \frac{2}{\gamma-1}dc + \frac{\mu c}{\gamma\mathcal{R}}\left(dS + (\gamma-1)\left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext}\right) + gdt = 0. \tag{2.41}$$

Für den Fall $\beta = da/dt = 0$ gewinnt man aus dem Gleichungssystem(2.18),(2.19),(2.20) die dritte charakteristische Gleichung

$$dS = \left(\left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext}\right) dt. \tag{2.42}$$

2.4 Die Anfangsatmosphäre

Um zu Beginn einer Rechnung einen definierten Zustand zu besitzen, ist es wichtig, eine ruhende Startatmosphäre zu erzeugen. Im Falle einer Rechnung, die die Behandlung von Strahlung mit einschließt, müssen im Anschluß der Erstellung einer *grauen* Atmosphäre Temperaturkorrekturen angbracht werden (Rammacher,1992), da sonst der Strahlungsdruck die Atmosphäre in einen Nichtgleichgewichtszustand mit starken Geschwindigkeitsfluktuationen hereinführt. Hierbei können die Störungen so stark sein, daß Schocks entstehen. Ohne Temperaturkorrekturen müßte zunächst eine sehr lange Zeit (einige Stunden) mit abgeschalteter Kolbensimulation gerechnet werden, bis die Atmosphäre sich stabilisiert hätte.

Behandelt man lediglich eine adiabatische Atmosphäre, also ohne Berücksichtigung von Strahlungseffekten, so kann man eine ruhende Atmosphäre konstruieren, in dem man in die Gleichungen (2.40,2.41) die Variation der Geschwindigkeit du und die externen Entropieverluste $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext}$ eliminiert. Für die ruhende Atmosphäre hat man somit die Grundgleichung

$$\frac{2}{\gamma - 1} dc - \frac{\mu c}{\gamma \mathcal{R}} dS + g dt = 0. \tag{2.43}$$

Für eine beliebige Temperaturverteilung, über die sich die Schallgeschwindigkeit c bestimmt, kann man somit die Entropie S berechnen

$$dS = \frac{\gamma \mathcal{R}}{\mu c_0} \left(\frac{2}{\gamma - 1} dc + \frac{g}{c_0} da \right), \tag{2.44}$$

wobei $da/dt = c_0$ eingeführt wurde. Durch numerische Integration von (2.44) kann die Atmosphäre also in einem ruhenden Zustand erzeugt werden.

Für den Verlauf der Arbeit wurden unterschiedliche Atmosphärentypen konstruiert.

2.4.1 Die Strahlungsgleichgewichtsatmosphären mit H^-–, Mg– bzw. Ca–Kühlung

Ausgehend von einer grauen Gleichgewichtsatmosphäre mit der Temperaturverteilung

$$T(\tau) = T_{eff} \sqrt[4]{\frac{3}{4}(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}})} \tag{2.45}$$

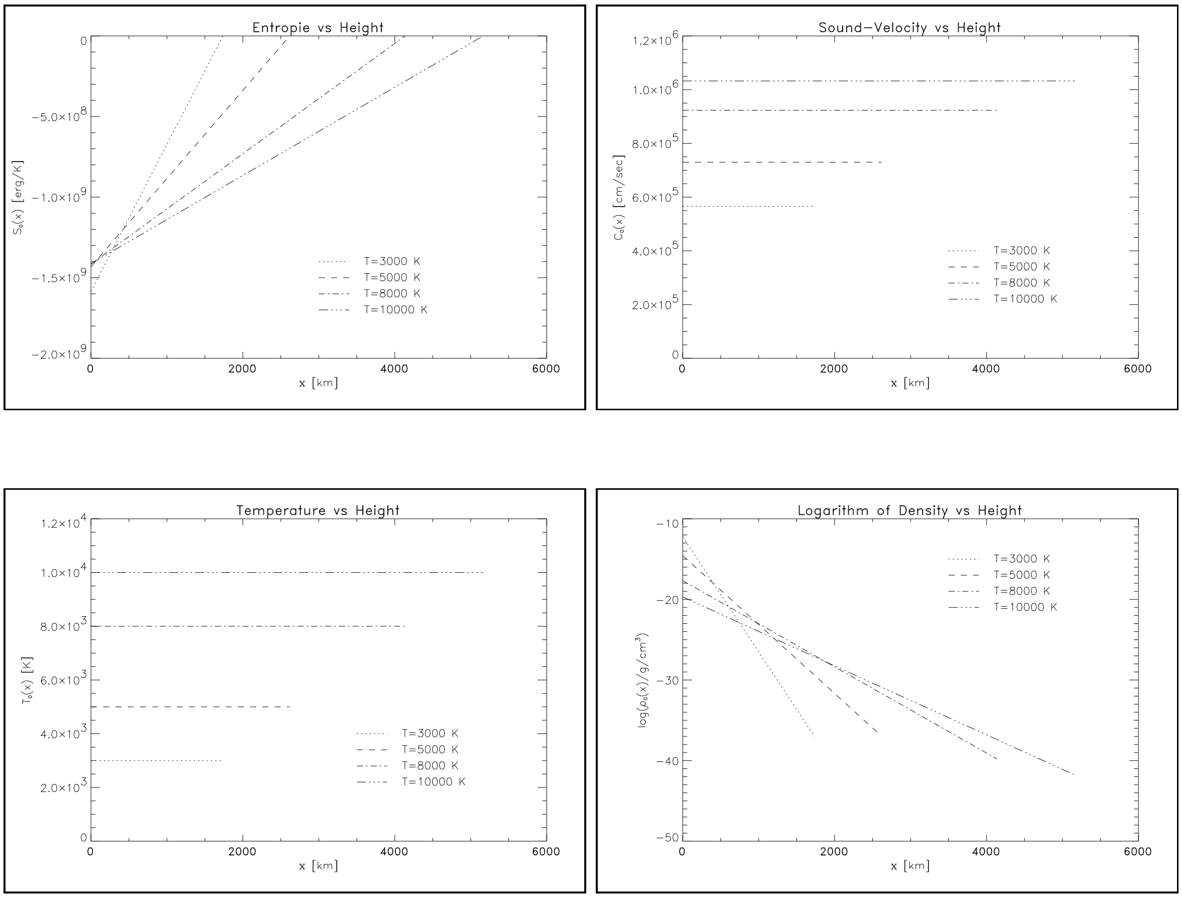
werden die Kühlungsraten für die H^-–, Mg– und Ca–Ionen miteinbezogen, was bedeutet, daß die externen Entropieverluste $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext}$ berücksichtigt werden müssen. Das Kriterium für die Stabilität einer solchen Atmosphäre ist, daß $dF/dz = 0$ gilt, d.h. der Strahlungsfluß darf sich im Verlauf der Höhe nicht durch Emission oder Absorption ändern. Zur Berechnung der korrekten Temperaturverteilung die einen solchen Zustand beschreibt, wird die *Unsöld–Korrektur* verwendet. Eine genauere Beschreibung der Strahlungsbehandlung findet sich bei Cuntz et al. (1993).

2.4.2 Die Isotherme Atmosphäre

Mit einer konstanten Temperatur ist auch die Schallgeschwindigkeit eine Konstante. Der Term dc in Gleichung (2.44) verschwindet also und somit ist diese Atmosphäre besonders einfach zu berechnen. Da viele Eigenschaften einer isothermen Atmosphäre analytisch beschreibbar sind, ist dieser Typ bevorzugt in theoretischen Untersuchungen behandelt worden. Der Druck- bzw. Dichteverlauf gehorchen dem einfachen Skalengesetz

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}}, \tag{2.46}$$

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}}, \tag{2.47}$$



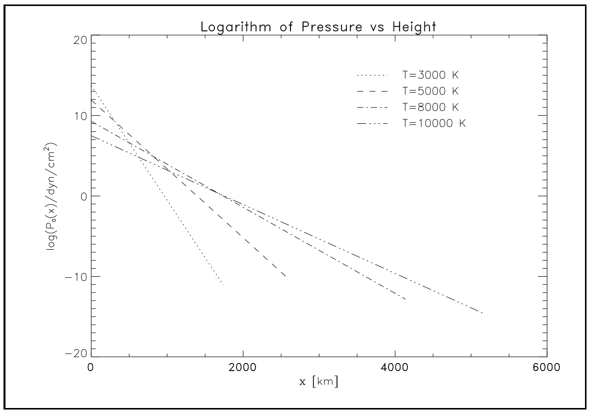


Abbildung 2.1: Isotherme Atmosphären unterschiedlicher Temperatur mit $g = g_{sun}$

mit

$$H = \frac{c^2}{\gamma g} \tag{2.48}$$

Abb.(2.1) zeigt hierzu den Verlauf der physikalischen Parameter für unterschiedliche isotherme Schichtungen.

2.4.3 Die Polytrope Atmosphäre

Eine Atmosphäre, die einen konstanten Temperaturgradienten besitzt, also

$$T(z) = T_0 + \alpha z. \tag{2.49}$$

nennt man eine polytrope Atmosphäre (Lamb, 1908, (nicht zu verwechseln mit einem polytropen Gas, für das die Beziehung $(p/\rho)^n$ =const gilt, mit n als Polytropenindex). Mit Hilfe der hydrostatischen Druckgleichung

$$dp = -\rho g dz \tag{2.50}$$

und der idealen Gasgleichung

$$dp = \frac{\mathcal{R}}{\mu}(T d\rho + \rho dT) \tag{2.51}$$

erhält man die Differentialgleichung in ρ

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\mu}{\mathcal{R}}\left(1 + \frac{\mu g}{\alpha \mathcal{R}}\right)\frac{dT}{T}. \tag{2.52}$$

Hieraus erhält man die Funktionen für die Dichte ρ und den Druck p in Abhängigkeit der Höhe z (Möller,1973)

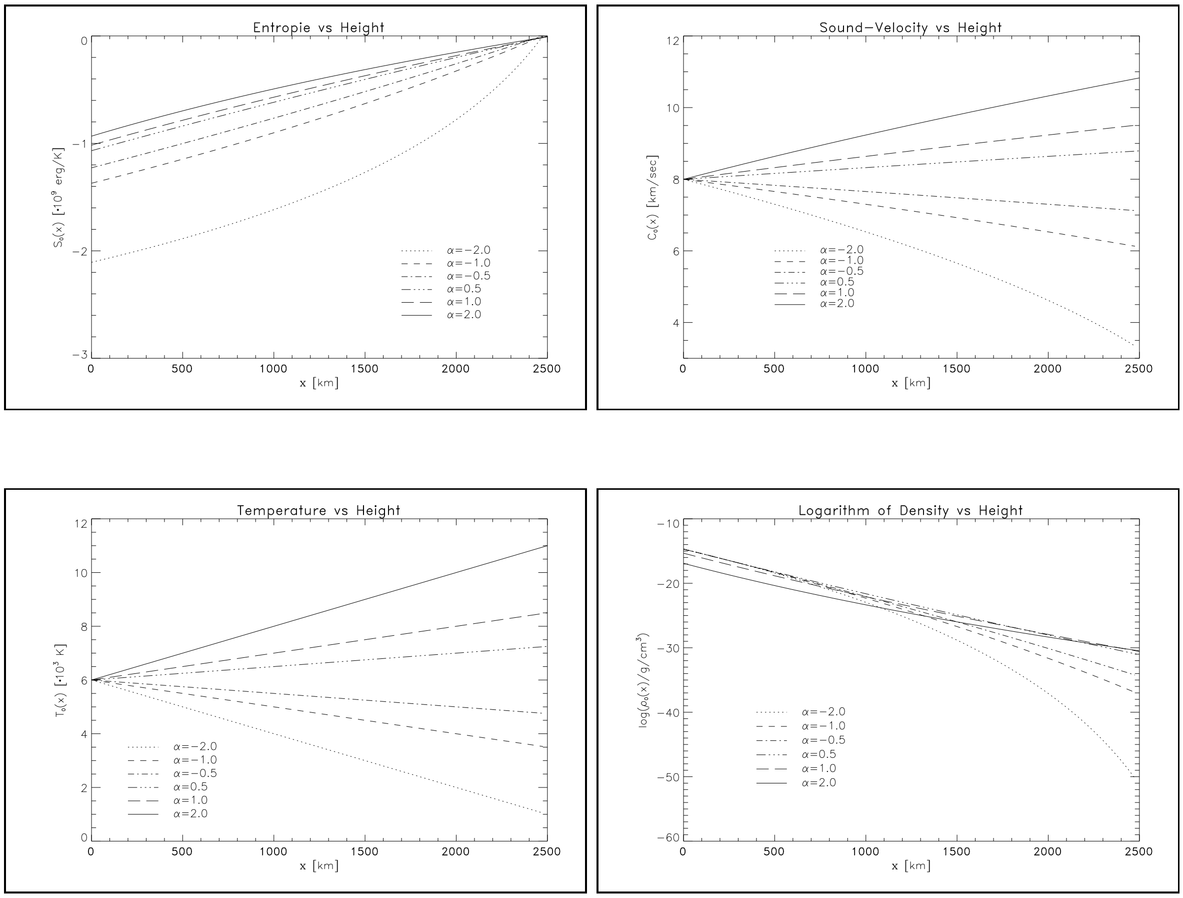
$$p(z) = p_0 \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{-\frac{\mu g}{\alpha \mathcal{R}}} = \left(1 + \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{-\frac{\mu g}{\alpha \mathcal{R}}} \tag{2.53}$$

$$\rho(z) = \frac{\mu}{\mathcal{R}T}\left(1 + \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{-\frac{\mu g}{\alpha \mathcal{R}}} = \frac{\mu}{\mathcal{R}T_0}\left(1 + \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{-\left(\frac{\mu g}{\alpha \mathcal{R}}+1\right)} \tag{2.54}$$

Abb.() zeigt den Funktionsverlauf der physikalischen Parameter für unterschiedliche Werte des Temperaturgradienten ($\alpha = [-2, 2]$).

2.4.4 Die VAL-Atmosphäre

Vernazza, Everett und Loeser (VAL) konstruierten anhand von Skylab-Daten, die vor allem im UV-Bereich erstellt wurden, mehrere Atmosphärenmodelle (A-F) für unterschiedliche Gebiete auf der Sonne (Vernazza et al.1981). Es zeigt sich nämlich, daß die Sonnenoberfläche nicht gleichmäßig strukturiert ist, sondern eine Netzwerkstruktur besitzt, die unterschiedliche Helligkeiten aufweist. Das Modell C beschreibt die *durchschnittliche ruhige* Sonne, was ungefähr 30% der Sonnenoberfläche ausmacht.



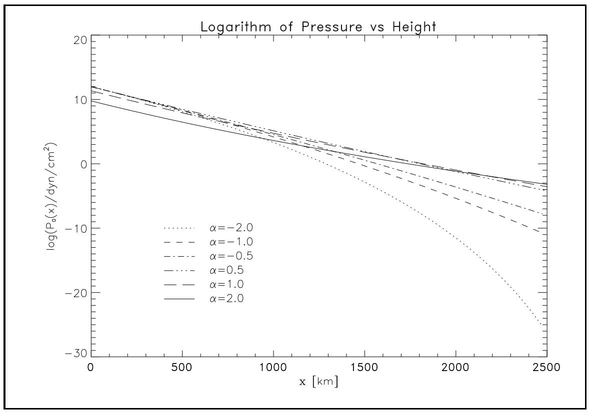


Abbildung 2.2: Polytrope Atmosphären mit unterschiedlichem Temperaturgradienten α und $g = g_{sun}$

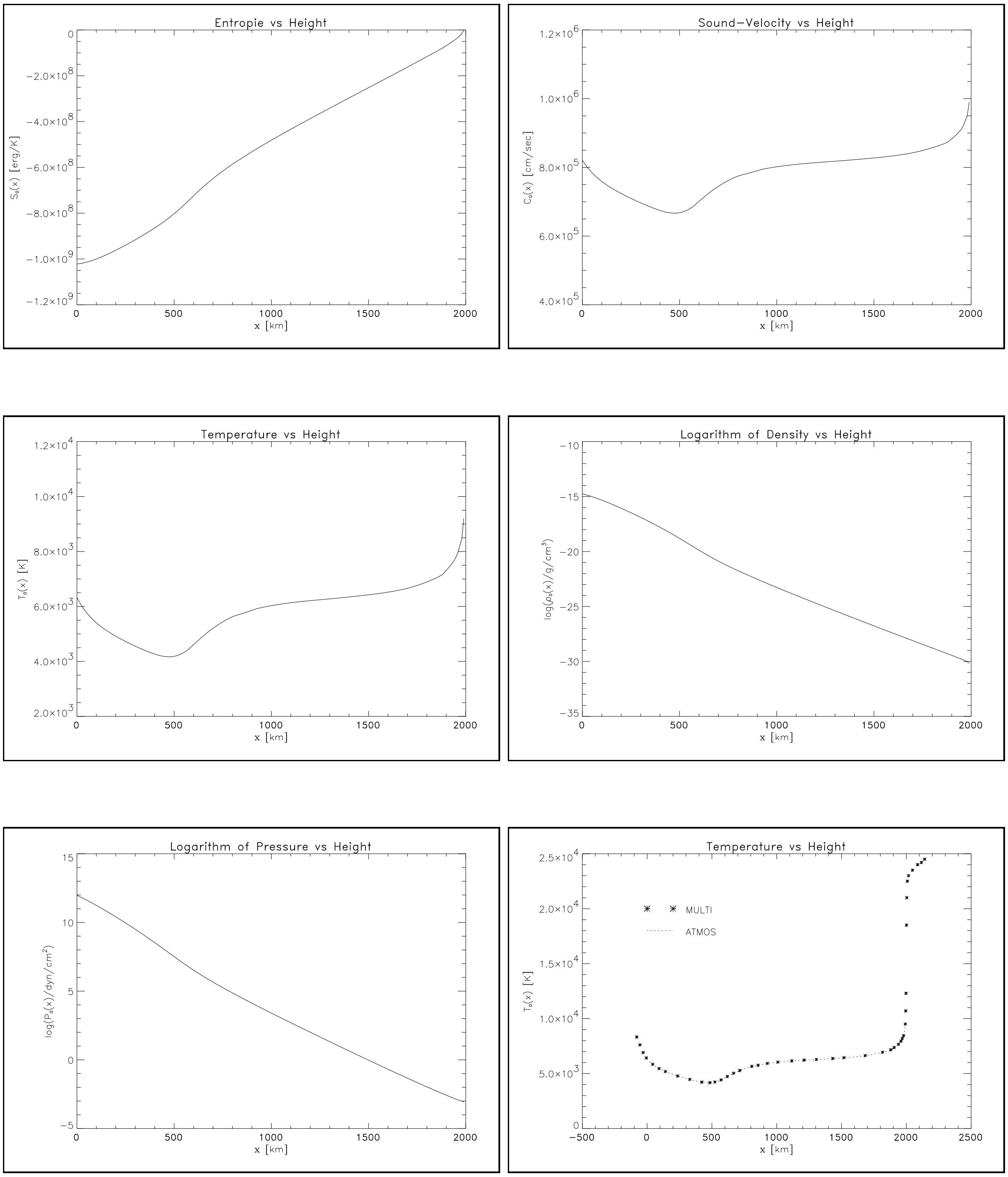


Abbildung 2.3: Die VAL–Atmosphäre. Aufgetragen ist bis zu der Höhe, die für die Rechnung benuzt wurde. Unten rechts ist die gesamte Temperaturstruktur der Atmosphäre dargestellt mit den interpolierten Daten aus dem Programm ATMOS.

Zur Konstruktion eines solchen Modelles setzt man zunächst eine beliebige Temperaturverteilung $T(h)$ und eine feste Mikroturbulenzgeschwindigkeit $v_{mic}(h)$ voraus. Mit Hilfe der Hydrostatischen Grundgleichung und zunächst der Annahme von LTE können die Anzahldichten der wichtigsten Atome und Ionen (H, HI, He, HeII, C, Si, Fe, Mg, Al) bestimmt werden. Hierauf können die Strahlungsfelder in den Linien und Kontinua berechnet werden, worauf die statistischen Gleichungen und Transportgleichungen gelöst werden können, was den Abweichungsparameter b liefert, mit dem dann in einem nächsten Schritt eine NLTE-Rechnung gestartet werden kann. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis man zu einer konvergenten Lösung gelangt, die mit der Beobachtung verglichen werden kann.

2.5 Spektrengenerierung

In diesem Kapitel sollen verschiedene Möglichkeiten vorgestellt werden Frequenzspektren zu erzeugen. Für das benutzte Hydrodynamik-Programm stellte sich das Problem in der Simulation einer polychromatischen Kolbenbewegung. Hierzu sollen drei unterschiedliche Verfahren vorgestellt werden: die Modulation (Meinke,Gundlach 1962), die eine Möglichkeit darstellt mit einer einkomponentigen Darstellung ein Frequenzspektrum mit zum Teil unendlich vielen Frequenzanteilen zu erzeugen, die stochstische Frequenzgenerierung, die einen Wellenzug mit wechselnder Frequenz erzeugt und die Fouriersynthese, die das Superpositionsprinzip linearer Partialwellen ausnutzt.

2.5.1 Modulation

Betrachtet man eine Funktion

$$u = A \cdot \sin(\omega t + \varphi), \tag{2.55}$$

so kann u neben der Zeit t eine Funktion von der Amplitude A,der Kreisfrequenz ω und der Phase φ sein. I.a. wird also gelten

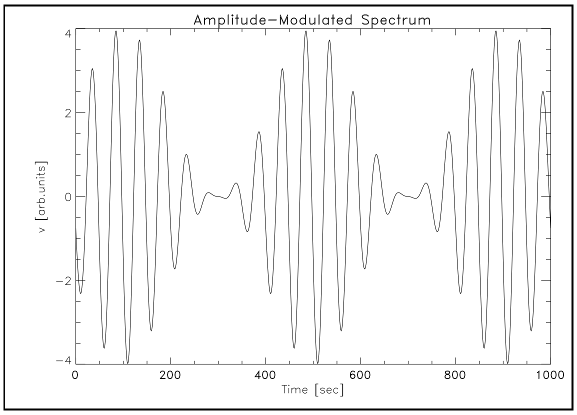
$$u = u(A, \omega, \varphi, t). \tag{2.56}$$

Besitzt u neben der Zeit eine funktionale Abhängigkeit von einer oder mehreren Variabeln, so nennt man u eine modulierte Funktion. Je nachdem welche Größe variiert wird spricht man von Amplituden-, Frequenz- oder Phasenmodulation.Alle Modulationsarten besitzen die Eigenschaft, daß sie eine Erweiterung des Informationsgehaltes gegenüber der nichtmodulierten Funktion darstellen. In unserem Zusammenhang ist es interessant, wie man eine polychromatische Funktion erzeugt. Hierzu sollen die drei Modulationsarten kurz dargestellt werden.

Amplitudenmodulation

Bei der Amplitudenmodulation wählt man eine zeitlich veränderliche Amplitude beispielsweise der Form

$$A(t) = A_0 \left[1 + a \sin(\omega_a t + \varphi_a)\right]. \tag{2.57}$$



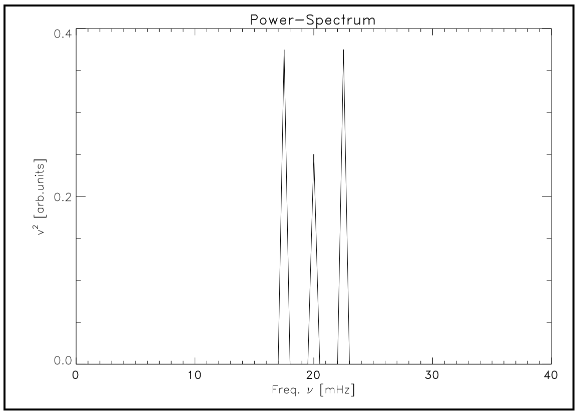


Abbildung 2.4: Amplitudenmoduliertes Spektrum

mit ω_a und φ_a beliebig vorgegeben aber konstant gehaltenem a wird als Modulationsgrad bezeichnet. Setzt man $A(t)$ in (2.55) ein, so erhält man mit Hilfe von trigonometrischen Umformungen den erweiterten Ausdruck

$$\begin{aligned} u(t) &= A_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{a}{2} A_0 \cos\left[(\omega - \omega_a)t + (\varphi - \varphi_a)\right] \\ &\quad - \frac{a}{2} A_0 \cos\left[(\omega + \omega_a)t + (\varphi + \varphi_a)\right]. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Zusätzlich zur Hauptfrequenz ω treten also, zu dieser symmetrisch liegende, Frequenzen auf, deren Amplitude von dem Modulationsgrad a abhängt (vgl. Abb.(2.4)).

Phasenmodulation

Die Phasenmodulation zeichnet sich daduch aus, daß in (2.55) die Phase φ zeitlich veränderlich gewählt wird, beispielsweise durch die Beziehung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_\varphi t). \tag{2.59}$$

Als Gesamtfunktion u ergibt sich daher

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0 \sin \omega_\varphi t). \tag{2.60}$$

φ_0 wird hier in Analogie zur Amplitudenmodulation der *Phasenhub* genannt. Diese Beziehung läßt sich mit Hilfe von Besselschen Funktionen erster Gattung J_n von der Ordnung n als Überlagerung harmonischer Schwingungen in eine unendliche Reihe mit der Amplitude J_n umschreiben

$$u(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\varphi_0) \sin(\omega + n\omega_\varphi)t. \tag{2.61}$$

Neben der Zentralfrequenz ω liegen somit symmetrisch verteilt unendlich viele Frequenzen, deren Amplitude, ähnlich wie bei der Amplitudenmodulation, nicht von der Frequenz, sondern, von φ_0, dem Phasenhub abhängt; diesmal nur nicht direkt proportional sondern funktional über die Besselfunktionen (vgl. Abb.(2.5))

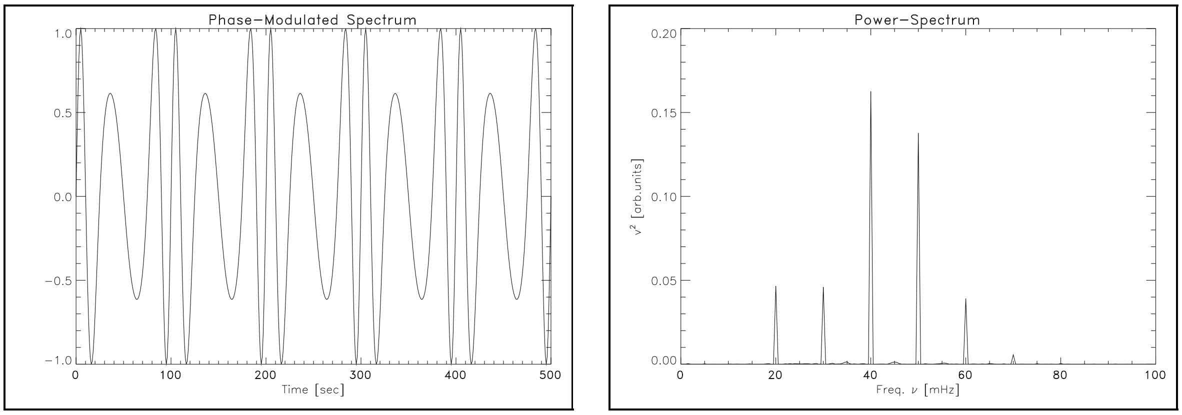


Abbildung 2.5: Phasenmoduliertes Spektrum

Frequenzmodulation

Bei der Frequenzmodulation wird nun die Frequenz selber zeitlich veränderlich gewählt. Da nun in die Signalfunktion (2.55) ein Produkt zweier zeitlich variabler Ausdrücke eingeht wird nicht direkt dieses Produkt betrachtet, sondern an die Stelle des Ausdrucks ωt tritt ein Integral, vermöge der Beziehung

$$\omega t \to \int_0^t \Omega(t')dt', \tag{2.62}$$

mit

$$\Omega(t) = \omega_0(1 + k\cos\omega_\Omega t). \tag{2.63}$$

Integration von (2.62) und Einsetzen in (2.55) liefert

$$u(t) = A\sin(\omega_0 t + k\frac{\omega_0}{\omega_\Omega}\sin\omega_\Omega t). \tag{2.64}$$

Auch dieser Ausdruck kann mit Hilfe von Besselschen Funktionen J_n in eine unenedliche Reihe umgeformt werden

$$u(t) = A\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k\frac{\omega_0}{\omega_\Omega})\sin(\omega_0 + n\omega_\Omega t). \tag{2.65}$$

Anders als bei der Phasen- bzw. Amplitudenmodulation liegen zwar unendlich viele Frequenzen symmetrisch zu ω_0, aber die Amplituden der Partialschwingungen, die superponiert werden, hängen sowohl von der Modulationsfrequenz ω_Ω sowie vom Frequenzhub k ab (vgl. Abb.(2.6)).

2.5.2 Stochastische Frequenzgenerierung

Eine Quasi-Frequenzmodulation liefert die stochstische Erzeugung von Frequenzen. Hierbei wird mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators, der eine Zahl Z_{ran} im Intervall

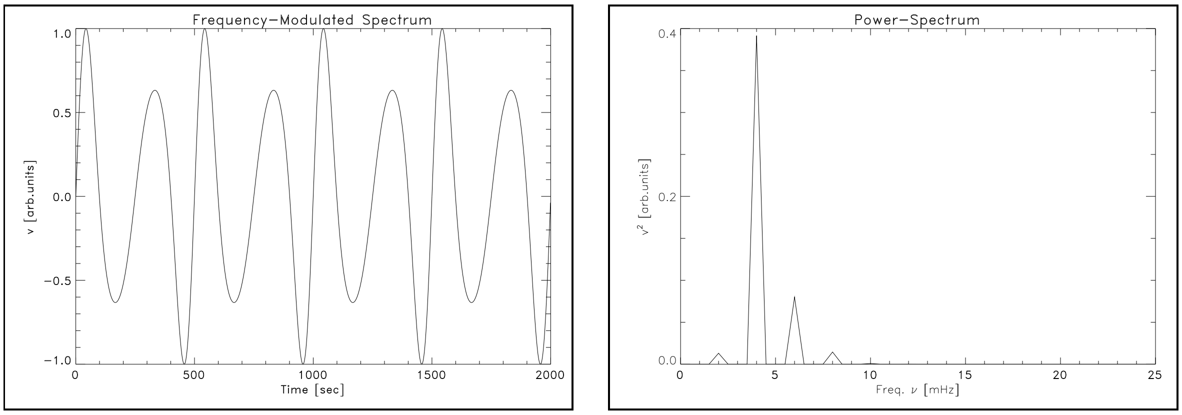


Abbildung 2.6: Frequenzmoduliertes Spektrum

$[0,1]$ erzeugt und einer vorgegebenen Maximalfrequenz ω_{max} eine neue Frequenz ω_z erzeugt. (2.55) besitzt hierbei die Form

$$u(t)|_{t\in[T,T_z]} = A\sin\left(\omega_z(t)|_{t\in[T,T_z]}\, t + \varphi\right), \tag{2.66}$$

mit

$$\omega_z = Z_{ran}\omega_{max}, \tag{2.67}$$

$$T_z = \frac{2\pi}{\omega_z}. \tag{2.68}$$

Die Frequenz ω_{z_i} wird somit für die Zeit ihrer Periodendauer T_{z_i} beibehalten um dann gegen die neue, stochastisch generierte, Frequenz $\omega_{z_{i+1}}$ ausgetauscht zu werden. Das Resultat ist ein Wellenzug, der sich aus beliebigen Frequenzen $\omega \in [0,\omega_{max}]$ zusammensetzt.

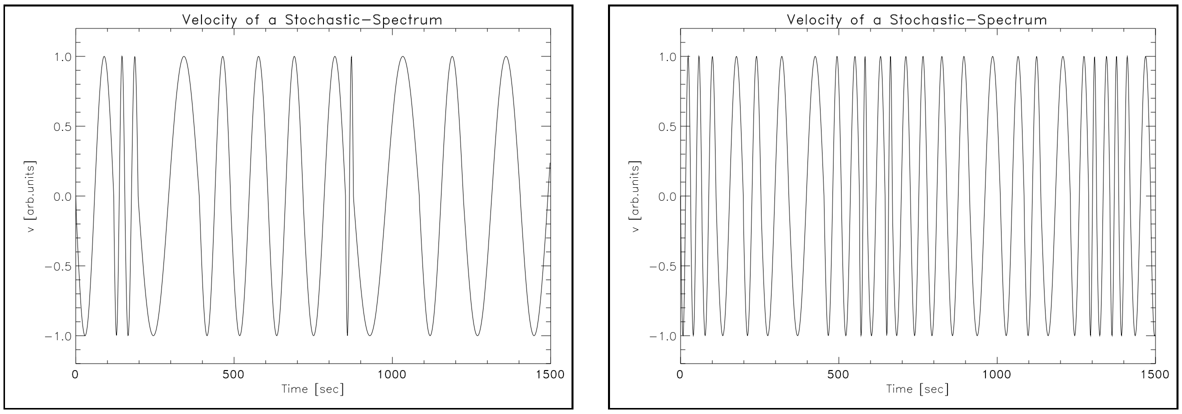


Abbildung 2.7: Stochastisches Spektrum. Links mit Zufallszahlen aus dem Intervall [0,1], rechts sind die Zahlen gaußverteilt um 0,5

2.5.3 Fouriersynthese

Besitzt die Modulation eine einfache Funktion zur Erzeugung eines ganzen Frequenzspektrums, so wird bei der Fouriersynthese direkt ein Reihenansatz gewählt, der erlaubt beliebige Frequenzen und Amplituden auszuwählen. Die Partialwellen, die superponiert werden können somit alle individuell erzeugt werden. Die Signalfunktion u hat bei diesem Verfahren somit die Form

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \tag{2.69}$$

mit $N, A_n, \omega_n, \varphi_n$ beliebig aber fest gewählt. Der Vorteil bei diesem Verfahren, gegenüber den anderen bisher betrachteten ist der, daß man sich durch Wahl eines $\omega-$Intervalls ein bestimmtes Frequenzband ausgrenzen und durch Wahl der A_n jede beliebige Amplitudenverteilung vorgeben kann. Durch zufallsverteilte φ_n kann weiterhin ein nichtkorreliertes Schwingungsverhalten der Partialwellen erzeugt werden. Wählt man jedoch φ_n für alle Frequenzen identisch

$$\varphi_n = \varphi_0 = const\ \forall\ n \in [1, N],$$

mit der Amplitudenfunktion

$$A_n = (-1)^n A_0,$$

so wird eine Art Puls erzeugt. In unserem Programm wurde eine solche Funktion eingebaut, die jedem anderen Spektrum beliebig überlagert werden kann, um das Verhalten einer Atmosphäre auf starke, plötzliche Änderungen zu untersuchen.

2.5.4 Amplitudenwahl

Für alle bisher besprochenen Spektrumsfunktionen stellt sich die Frage nach der Frequenz- wie auch der Amplitudenauswahl. Bei der Frequenz kommt es ganz darauf an, welches Frequenzband man untersuchen möchte. Will man, wie in dieser Arbeit, ein photosphärisches Schallspektrum simulieren, so muß man sich auf Arbeiten berufen, die Schallerzeugung in stellaren Konvektionszonen behandeln (Stein 1967, 1968, Bohn 1981, 1984, Musielak et.al. 1993, Theurer 1993). Aus diesen Arbeiten geht hervor, daß Schall in relevantem Maße in dem Intervall

$$\omega \in [\omega_{cut}, 10\omega_{cut}]$$

erzeugt wird, wobei ω_{cut} die akustische *Cut-Off-Frequenz* der Photosphäre bedeutet. Ebenso geht aus diesen Arbeiten ein Amplitudenverlauf in Abhängigkeit der Frequenz hervor. Um für das Rechenverfahren die Amplitudenwerte einer jeden Partialwelle nicht aus Tabellen interpolieren zu müssen (wobei beachtet werden muß, daß der Gesamtenergiefluß noch abhängig ist von der Anzahl der Partialwellen), wählen wir die Form einer Gaußkurve, die den qualitativen Verlauf der Schallspektren wiedergibt und die ihr Maximum bei der fünfachen Cut-Off-Frequenz besitzt. Die Energieflußfunktion $F(\omega)$ besitzt bei uns somit folgende Form

$$F(\omega) = \mathcal{N} F_M \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma})^2\right\}, \tag{2.70}$$

mit

$$\omega_0 = 5\omega_{cut},$$
$$\sigma = 2\omega_{cut}.$$

$\mathcal{N}$ stellt den Normalisierungsfaktor der Gaußfunktion dar und F_M ist der mechanische Gesamtenergiefluß. Diese Formel besagt, daß an jede Frequenz ein fester Energiefluß gekoppelt ist. Neueste Arbeiten über die Schallerzeugung in turbulenten Medien (Musielak et al., 1993) sagen für die Sonne einen mechanischen Gesamtenergiefluß von

$$F_M \approx 1 \cdot 10^8 erg/cm^2 sec$$

in Photosphärenhöhe voraus. Eine Aufgabe besteht also darin, auf die Partialwellen soviel Energie zu verteilen, daß in der Summe der Gesamtfluß F_M herauskommt. Am Fußpunkt der Atmosphäre betrachten wir die induzierten Störungen als klein ($u \ll c$), so daß wir die linearisierten Gleichungen heranziehen können. Im theoretischen Teil haben wir gesehen, daß man den Energiefluß als das Integral

$$F_M = \frac{\displaystyle\int_0^T \rho c u^2 dt}{\displaystyle\int_0^T dt} \cdot \cos\alpha \tag{2.71}$$

schreiben kann. Um im zeitlichen Mittel diesen Energiefluß durch Partialwellenüberlagerung zu erhalten, muß gelten

$$\overline{F_M(t)} = \rho c \cdot \overline{u(t)^2} \cdot \cos\alpha. \tag{2.72}$$

ρ und c sind unabhängig von partiellen Überlagerungen und werden im folgenden für die betrachtete Höhe (Photosphärenniveau) als konstant angenommen. Wählt man für die Geschwindigkeitsfunktion u nun die Form

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \tag{2.73}$$

so folgt für den Energiefluß

$$F_M(t) = \rho c \cdot \left\{\sum_{n=1}^{N} u_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)\right\}^2 \cdot \cos\alpha_n. \tag{2.74}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems für trigonometrische Funktionen läßt sich dieser Ausdruck auf die Form

$$F_M(t) = \rho c \cdot \left\{\sum_{n=1}^{N} u_n \left(\sin(\omega_n t)\cos\varphi_n + \cos(\omega_n t)\sin\varphi_n\right) \cdot \cos\alpha_n\right\} \tag{2.75}$$

bringen. Der mittlere Gesamtenergiefluß berechnet sich über das Integral

$$\begin{aligned}\overline{F_M(t)} &= \frac{1}{T}\int_0^T F_M(t)dt \\ &= \frac{\rho c}{T}\cdot\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\sin(\omega_n t)\cdot\cos\varphi_n + \cos(\omega_n t)\cdot\sin\varphi_n\right)\right]^2 \cdot \cos\alpha_n dt \qquad (2.76)\end{aligned}$$

Wertet man die Summe unter dem Integral aus, so bekommt man gemischte Terme der Form $\sin(\omega_k t)\sin(\omega_l t)\cdot\cos\varphi_k\cos\varphi_l$. Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega_k t)\sin(\omega_l t)\cdot\cos\varphi_k\cos\varphi_l dt = \frac{1}{2}\delta_{kl}\cdot\cos\varphi_k\cos\varphi_l,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega_k t)\cos(\omega_l t)\cdot\sin\varphi_k\sin\varphi_l dt = \frac{1}{2}\delta_{kl}\cdot\sin\varphi_k\sin\varphi_l,$$

läßt sich das Integral vereinfachen

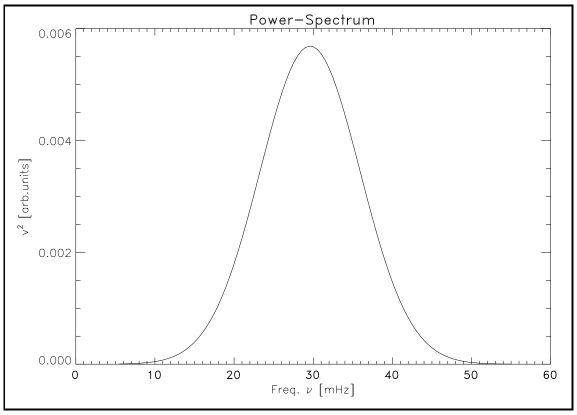
$$\begin{aligned}\overline{F_M(t)} &= \frac{\rho c}{T}\cdot\int_0^T \sum_{n=1}^{N} u_n^2\left(\sin^2(\omega_n t)\cos^2\varphi_n + \cos^2(\omega_n t)\cdot\sin^2\varphi_n\right)\cdot\cos\alpha_n dt \\ &= \frac{\rho c}{T}\cdot\sum_{n=1}^{N} u_n^2\cdot\cos\alpha_n\left\{\cos^2\varphi_n\int_0^T \sin^2\omega_n t dt + \sin^2\varphi_n\int_0^T\cos^2\omega_n t dt\right\} \\ &= \frac{\rho c}{T}\cdot\sum_{n=1}^{N} u_n^2\cdot\cos\alpha_n\left\{\cos^2\varphi_n\cdot\frac{1}{2}T + \sin^2\varphi_n\cdot\frac{1}{2}T\right\} \\ &= \frac{1}{2}\rho c\cdot\sum_{n=1}^{N} u_n^2\cdot\cos\alpha_n \qquad (2.77)\end{aligned}$$

und daher

$$\overline{F_M(t)} = \sum_{n=1}^{N} F_n. \qquad (2.78)$$

Dieses Ergebnis besagt, daß die Energie, die in dem Frequenzspektrum steckt, sich additiv aus der Energie der Partialwellen zusammensetzt, egal welche Phasenbeziehung (vorausgesetzt, daß $\varphi_n = const$) zwischen den Wellen herrscht. Wenn wir uns jedoch Gleichung (2.77, 2.78) anschauen, so wird deutlich, daß dieses Ergebnis nur dann exakt erfüllt ist, wenn die Zeit T, über die integriert wird, ein Vielfaches der Gesamtperiode ist, d.i. die Zeit, in der jede Frequenz ein Vielfaches ihrer eigenen Periodendauer besitzt, da nur über eine Periode integriert die Orthogonalitätsrelationen erfüllt sind. Betrachtet man beispielsweise ein äquidistantes Spektrum im Frequenzraum mit $\Delta\nu = 0.5mHz$, so kann man die Periode einer Partialwelle n ausdrücken durch

$$P_n = \frac{1}{n\nu_0} = \frac{P_0}{n}.$$



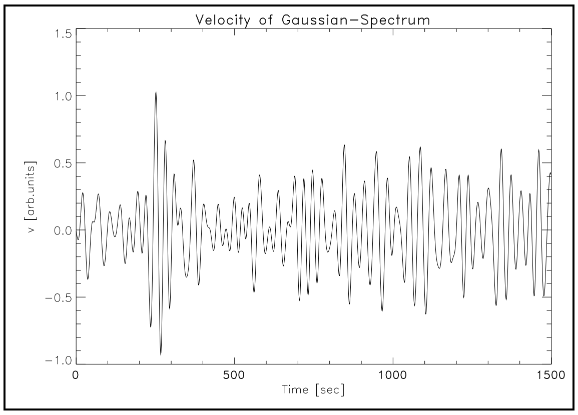


Abbildung 2.8: Gaußverteiltes Spektrum.

D.h. P_0 wird eine gemeinsame Periode einer jeden Partialwelle darstellen und die Wellenform wird nach $P_0 = \frac{1}{\nu_0} = 2000 sec$ identisch wiederholt werden. Bei einer Rechenzeit von $2500 sec$ wird also in jedem Falle eine Periode des Wellenpaketes enthalten sein. Gleichng (2.77) zeigt nun, daß man durch die Wahl der Geschwindigkeitsamplituden einen gewünschten Gesamtenergiefluß erzeugen kann. Gibt man sich eine Flußfunktion

$$F_n(\omega) = \mathcal{N} F_M \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{n\Delta\omega + \omega_{cut} - \omega_0}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{2.79}$$

mit

$$\mathcal{N} = \left[\sum_{n=0}^{N} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{n\Delta\omega + \omega_{cut} - \omega_0}{\sigma}\right)^2\right\}\right]^{-1} \tag{2.80}$$

analog zu (2.70) vor, so kann man die Partialwellenamplitude u_n berechnen zu

$$u_n = \sqrt{\frac{2F_n}{\rho c}}. \tag{2.81}$$

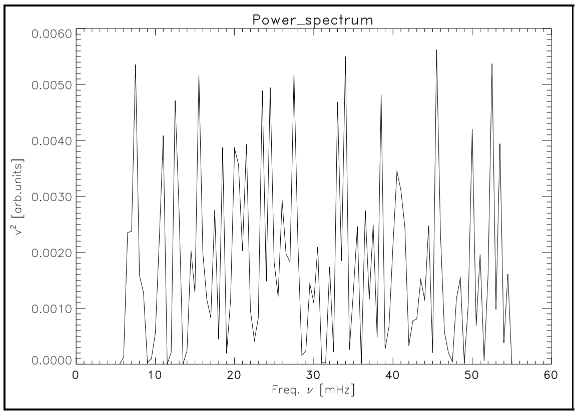
Abb.(2.8) zeigt ein so erzeugtes Spektrum.

Zu qualitativen Studien, ob eine Atmosphäre in ihrer Struktur von der Form des induzierten Spektrums abhängt, wurden noch die im folgenden zu besprechenden Amplitudenfunktionen gewählt.

Zufallsverteilung der Amplituden

Die Frequenzen sind bei dieser Amplitudenwahl durch nichts gegeneinander ausgezeichnet. Die Amplitude wird vielmehr durch einen Zufallszahlengenerator der Frequenz $\omega \in [\omega_{cut}, 10\omega_{cut}]$ zugewiesen. Da der Gesamtenergiefluß aber wieder vorgegeben sein soll, muß für die Partialflüsse gelten

$$F_i = \frac{F_M}{N} \cdot \frac{Z_i}{\overline{\overline{Z}}}, \tag{2.82}$$



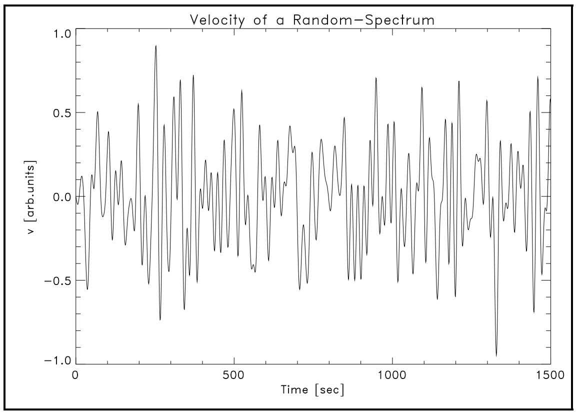


Abbildung 2.9: Zufallsverteiltes Spektrum.

mit $\overline{Z}$ als arithmetischem Mittel der Zufallszahlen

$$\overline{Z} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N} Z_i = \frac{1}{N} \cdot Z_{sum}$$

und daher gilt für die Geschwindigkeitsamplituden der Partialwellen

$$u_i = \sqrt{\frac{2F_M}{\rho_0 c_0} \cdot \frac{Z_i}{Z_{sum}}}. \tag{2.83}$$

Ein solches Spektrum ist in Abb.(2.9) dargestellt.

Konstante Amplitudenverteilung (Boxspektrum)

Bei dieser Art von Amplitudenzuweisung werden die Frequenzen als vollkommen gleichberechtigt behandelt. D.h. jeder Frequenz wird somit dieselbe Amplitude zugewiesen. Die Funktion u lautet in diesem Falle also

$$u(t) = u_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \tag{2.84}$$

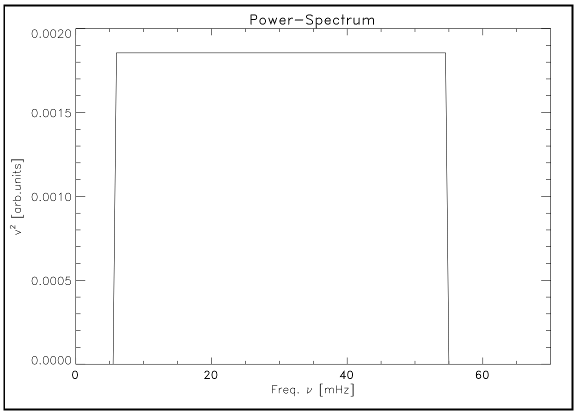
(vgl. Abb.(2.10)) mit

$$u_0 = \sqrt{\frac{2F_M}{N\rho_0 c_0}}, \tag{2.85}$$

$$\varphi_i = Z_i \cdot 2\pi, \tag{2.86}$$

Überlagerung evaneszenter Wellen

Da evaneszente Wellen keine Energie transportieren, müssen diese nicht in die Energieflußfunktion $F(\omega)$ miteinbezogen werden. Um also das Verhalten eines beliebigen



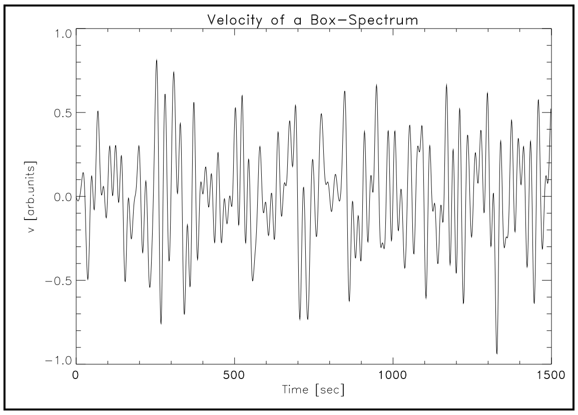


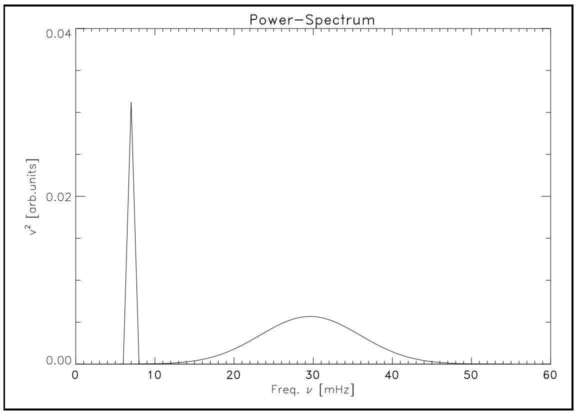
Abbildung 2.10: Spektrum mit konstanter Amplitudenwahl.

der oben betrachteten Spektren mit langperiodischer Überlagerung zu studieren, muß also nur ein weiterer Geschwindigkeitsbeitrag zu den Spektren hinzuaddiert werden. Daher schreibt sich (2.73) als

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n) + \sum_{m=1}^{M} u_m \cdot \sin(\Omega_m t + \varphi_m), \tag{2.87}$$

(vgl. Abb.(2.11)) mit

$$\begin{aligned} \omega_n &\in [\omega_{cut}, 10 \cdot \omega_{cut}], \\ \Omega_m &\in [0, \omega_{cut}]. \end{aligned}$$



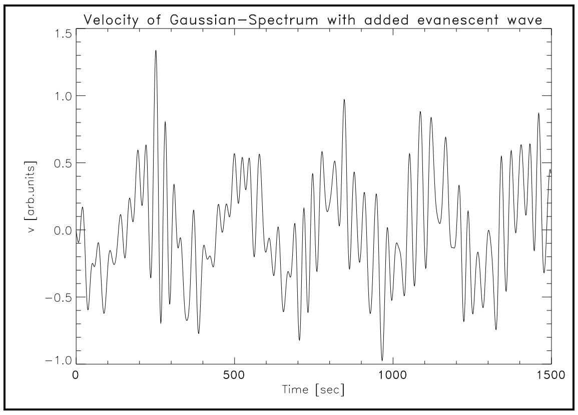
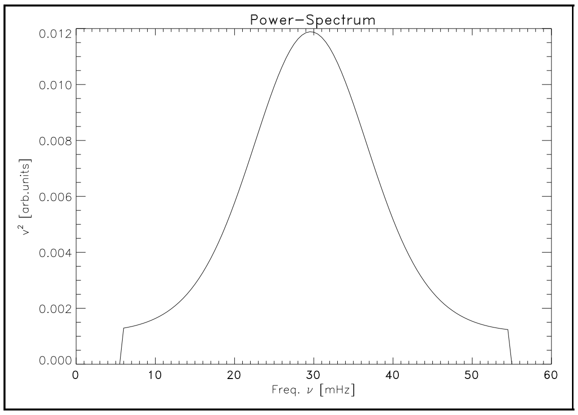


Abbildung 2.11: Gaußverteiltes Spektrum mit überlagerter evaneszenter Welle (5–min–Oszillation). Die Amplitude der langperiodischen Welle ist stark verkleinert dargestellt.



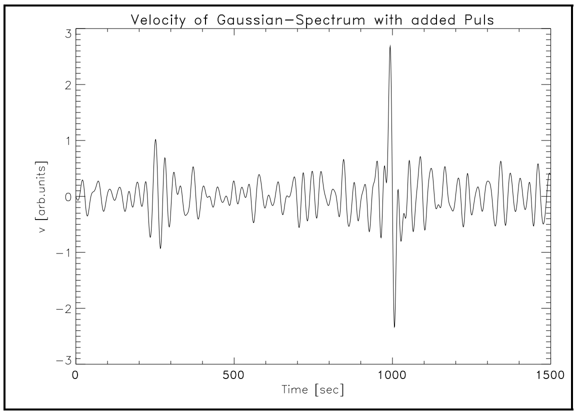


Abbildung 2.12: Gaußverteiltes Spektrum mit überlagerter Pulsfunktion.

Pulsüberlagerung

Um die Auswirkung eines überlagerten, sehr starken Geschwindigkeitsbeitrages auf das Verhalten einer Atmosphäre zu studieren, kann man einem beliebigen Spektrum die oben bereits beschriebene Pulsfunktion überlagern. Da die überlagerten Wellen ebenfalls Energie transportieren, muß dieser Beitrag für den Gesamtenergiefluß berücksichtigt werden, d.h. einem gaußverteilten Spektrum beispielsweise müssen mit Pulsüberlagerung kleinere Geschwindigkeitsamplituden zugeordnet werden und damit eine kleinere Gesamtenergie wie im Falle ohne Überlagerung, um denselben Energiefluß zu induzieren. Der Geschwindigkeitsbeitrag in diesem Falle lautet

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n) + u_0 \cdot \sum_{m=1}^{M} (-1)^m \cdot \sin(\omega_m t + \varphi_0). \qquad (2.88)$$

Abb.(2.12) zeigt ein solches pulsübelagertes Gaußspektrum.

2.6 Die Fourier-Analyse

Die Fouriertransformation stellt ein mächtiges Hilfsmittel dar in der Analyse von Zeitserien. Mit ihr können verborgene Periodizitäten in den Daten aufgedeckt werden, sowie Phasenbeziehungen zwischen unterschiedlichen abhängigen Variabeln, wie z.B. Geschwindigkeit und Druck, studiert werden. Im folgenden sollen kurz die notwendigen Schritte skizziert werden, die zur Fourier-Analyse diskreter Werte benötigt werden, sowie einige Mittel, wie z.B. Datenfenster, die zur korrekten Behandlung von Zeitreihen hilfreich sind. (Zur ausführlicheren Darstellung der Fourier-Analyse siehe z.B. Bracewell(1965), Broult und White (1971), Brigham(1974)). Ebenso wird das programmtechnische Verfahren skizziert, wie es in der vorliegenden Arbeit für die Fourier–Analyse verwendet wird.

2.6.1 Fourier-Reihen

Ist eine beliebige stetige Funktion $h(t)$ auf einem beschränkten Zeitintervall I vorgegeben, so kann man diese Funktion nach orthogonalen Funktionen entwickeln. Speziell kann man nach harmonischen Funktionen entwickeln, wodurch man die *Fourier-Reihe*

$$h(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right\}, \tag{2.89}$$

erhält.Hierbei sind die Koeffizienten a_n, b_n durch Multiplikation von links mit $\cos(m\omega t)$ bzw. $\sin(m\omega t)$ und Integration von 0 bis T_0 zu berechnen, wobei T_0 die Länge des Zeitintervalls I und somit die Periodendauer der Funktion $h(t)$ darstellt. ω_0 ist die maximal auflösbare Frequenz $2\pi/T_0$. Daß über eine volle Periode der Funktion $h(t)$ integriert wird ist insofern wichtig, als daß nur in diesem Falle die Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt \\
&= \begin{cases} \left. \dfrac{\sin((n-m)\omega t)}{2(n-m)} + \dfrac{\sin((n+m)\omega t)}{2(n+m)} \right|_0^T & : \quad m \neq n \\ & : \\ \left. \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4n\omega} \sin(2n\omega t) \right|_0^T & : \quad m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & : \quad T = T_0 \quad , \quad m \neq n \\ & : \\ \dfrac{1}{2}T_0 & : \quad T = T_0 \quad , \quad m = n \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt \\
&= \begin{cases} \left. \dfrac{\sin((n-m)\omega t)}{2(n-m)} - \dfrac{\sin((n+m)\omega t)}{2(n+m)} \right|_0^T & : \quad m \neq n \\ & : \\ \left. \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4n\omega} \sin(2n\omega t) \right|_0^T & : \quad m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & : \quad T = T_0 \quad , \quad m \neq n \\ & : \\ \dfrac{1}{2}T_0 & : \quad T = T_0 \quad , \quad m = n \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

der harmonischen Funktionen gültig sind. Beachtet man dies, so erhält man die Koeffizienten a_m und b_m

$$a_m = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} h(t)\cos(m\omega_0 t)dt, \tag{2.92}$$

$$b_m = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} h(t)\sin(m\omega_0 t)dt. \tag{2.93}$$

2.6.2 Sampling und das Faltungstheorem

Bei einer rechnerorientierten Fourier-Transformation kann man stets nur eine endliche Anzahl von Punkten einer Funktion $h(t)$ berücksichtigen. Ist $h(t)$ insbesondere eine kontinuierliche Funktion, so muß man sie diskretisieren. Dies bedeutet, daß man sie an endlich vielen Stellen *abgreifen* muß. Mathematisch heißt dies, daß man $h(t)$ mit $\delta-$Funktionen multipliziert, die eine gewisse Schrittweite auf der Funktion bestimmen. Die kontinuierliche Funktion wird *gesampelt*, wodurch sich die diskretisierte Funktion

$$\hat{h}(t) = \int_0^t h(t') \cdot \sum_{n=1}^{N} \delta(t' - nT)dt' \tag{2.94}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} h(nT) \cdot \int_0^t \delta(t' - nT)dt' \tag{2.95}$$

ergibt. Die Fouriertransformierte von $\hat{h}$ lautet

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int h(t) \sum \delta(t - nT) \cdot e^{i\omega t} dt \\ &= \int\int H(\omega') \cdot \sum \delta(t - nT) \cdot e^{i(\omega-\omega')t} dt d\omega' \\ &= \int H(\omega') \cdot \sum \delta(\omega - \omega' - \frac{2\pi n}{T}) d\omega' \end{aligned}$$

Das letzte Integral entspricht der Faltung zweier Funktionen, d.h. die Multiplikation zweier Funktionen im Ortsraum entspricht der Faltung zweier Funktionen im Frequenzraum. Faltet man speziell eine Funktion y mit der Shah-Funktion $\sum \delta(\omega - \omega' - \frac{n}{T})$, so entspricht dies einer unendlichen periodischen Fortsetzung der Fouriertransformierten von h auf der Frequenzachse.

Bei dem Samplen einer Funktion ist darauf zu achten, daß die Abtastrate T nicht zu groß gewählt wird. Aus obiger Betrachtung folgt nämlich, daß $f = 1/T$ dasjenige Intervall ist, mit der die Fouriertransformierte auf der Frequenzachse periodisch wiederholt wird. Ist T groß, so ist f klein, was dazu führen kann, daß es im Frequenzraum Überlappungen gibt, die einen Fehler ('Alias') induzieren, (s.Abb.(2.13)). Dieses Überlappen kann jedoch verhindert werden, wenn die Samplingrate höchstens so gewählt wird, daß

$$T_{min} = \frac{1}{2f_{max}} \tag{2.96}$$

Abbildung 2.13: Fourier–Transformation, die unzureichend gesampelt wurde, wobei ein Überlappen der Funktionen im Frequenzraum auftritt (Alias).

wobei f_{max} die am höchsten auftretende Frequenz in der Funktion bedeutet (der Faktor 2 rührt daher, daß man mindestens zwei Punkte braucht, um eine Periode festlegen zu können - positive,negative Amplitude). $1/T_{min}$ wird auch die *Nyquist-Frequenz* genant. Wichtig in diesem Zusammenhang ist, daß eine Funktion nur dann eine Bijektion besitzt, wenn sie ein begrenztes Frequenzband besitzt, d.h., daß es eine minimale und eine maximale Frequenz gibt, da es nur dann möglich ist alle Fourierkoeffizienten unterhlb der Nyquist-Frequenz zu bestimmen.

2.6.3 Die diskrete Fouriertransformation

In der Praxis hat man es nie mit einer unendlich ausgedehnten Funktion zu tun. Die Funktion $h(t)$, die man analysieren möchte, muß daher unendlich periodisch fortgesetzt werden. I.a. treten hierbei zwei Fehler auf:

i) durch das Sampling wird ein Alias induziert, falls das Signal nicht band– limitiert ist.

ii) das Ausgrenzen eines Funktionsintervalls entspricht der Multiplikation der ursprünglichen Funktion mit einer Kastenfunktion, die 1 ist auf dem betrachteten Funktionsintervall und sonst 0. Nach dem Faltungstheorem entspricht dieser Multiplikation im Ortsraum einer Faltung im Frequenzraum, und durch diese Faltung kann das Ergebnis weiter verzerrt werden.

Zur Vermeidung dieser Fehler kann man

i) die Sample-Rate vergrößern, d.h. mehr Punkte der Funktion abtasten und damit die Nyquist- Frequenz vergrößern und

ii) die Kastenfunktion vergrößern. Je größer man diese Funktion wählt, desto stärker wird sich ihre Fourier-Transformierte einer $\delta-$Funktion annähern, was im Endeffekt den Fehler eliminiert.

Zur digitalen Umsetzbarkeit der Fouriertransformation fehlt noch ein Schritt. Um diesen zu erläutern gehen wir von einer kontinuierlichen Funktion im Ortsraum aus, die eine kontinuierliche Fouriertransformation besitzt. Die Schritte, die bisher besprochen wurden sind die folgenden. Die Funktion $h(t)$ wird durch Multiplikation mit $\delta-$Funktionen diskretisiert. Dies entspricht im Frequenzraum einer Faltung, welche $H(\omega)$ als kontinuierliche Funktion unendlich periodisch fortsetzt. Die Multiplikation von $\hat{h}$ mit der Kastenfunktion $x(t)$ entspricht im Frequenzraum wiederum einer Faltung der Fouriertransformierten $X(\omega)$ mit $H(\omega)$. Um im Frequenzraum eine diskrete Funktion zu erhalten, muß man, wie anfangs im Ortsraum, die kontinuierliche Funktion mit $\delta-$Impulsen multiplizieren. Diese Multiplikation erzeugt diesmal eine Faltung im Ortsraum, wodurch die diskretisierte Funktion im Ortsraum ebenfalls unendlich periodisch fortgestzt wird. Insgesamt ergibt sich also folgendes Bild für die resultierende Funktion $\tilde{h}(t)$ im Ortsraum

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}(t) &= \{h(t) \cdot \Delta^0(t) \cdot x(t)\} * \Delta^1(t) \\
&= T_0 \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} h(nT)\delta(t - rT_0 - nT) \right\}
\end{aligned}
$$

Abbildung 2.14: Darstellung der Arbeitsschritte, um eine analytische Funktion mit ihrer analytischen Fouriertransformtion (a) im Orts– wie Frequenzraum zu diskretisieren (g). Hierbei ist zu beachten, daß einer Multilikation im Ortsraum einer Faltung im Frequenzraum (c) entspricht nd umgekehrt (g).

mit $h(t)$ als der ursprünglichen Funktion, $\Delta^0(t)$ als Sample-Funktion, $x(t)$ als Kastenfunktion und $\Delta^1(t)$ als Fouriertransformierte der Sample-Funktion im Frequenzraum. Unter Beachtung, daß nur über eine Periode T_0 integriert wird und somit die $r-$Summation herausfällt, berechnen sich die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n zu

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}\left\{\sum_k h(kT)\delta(t-kT)\right\}\cdot\cos\left(\frac{n2\pi t}{T_0}\right)dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}\left\{\sum_k h(kT)\delta(t-kT)\right\}\cdot\sin\left(\frac{n2\pi t}{T_0}\right)dt \end{aligned}$$

Das beschriebene Verfahren zeigt Abb.(2.14), wobei links die Funktion im Ortsraum, rechts die assoziierte Funktion im Frequnzraum dargestellt ist.

2.6.4 Datenfenster

Ein Fehler, der auftreten kann ist, daß die Funktion $y(t)$ nicht stetig periodisch ist, d.h. daß bei der periodischen Fortsetzung Sprungstellen aneinander gehängt werden. Gegen diesen möglichen Fehler hilft die Apodisation. D.h. man multipliziert y mit einer Funktion, die am Anfang und Ende des Datenfensters auf Null abfällt. Beispiele solcher Funktionen sind die Hanning- , die Parzen- und die Welch-Funktion

$$\begin{aligned} x_{Hanning}(t) &= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)\right\} \\ x_{Parzen}(t) &= 1-\left|\frac{t-\frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)}\right| \\ x_{Welch}(t) &= 1-\left(\frac{t-\frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)}\right)^2 \end{aligned}$$

Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß y zwar in jedem Falle periodisch gemacht wird, daß jedoch Information in der Amplitude verloren geht. Hier muß man abwägen, welcher Fehler eher in Kauf genommen werden kann.

2.6.5 Programmablauf

Um eine Fourieranalyse durchführen zu können ist es erforderlich an einem festen Raumpunkt die gewünschten zu analysierenden Daten in äquidistanten Zeitschritten zu besitzen. Der Hydrodynamik-Code, mit dem diese Arbeit erstellt wurde, arbeitet jedoch im Lagrange–Gitter, d.h. die Gitterpunkte auf denen die physikalischen Variabeln berechnet werden bewegen sich mit den Gasteilchen. Um eine Fourier–Analyse also sinnvoll werden zu lassen, muß von dem Lagrange–Gitter auf ein raumfestes Eulergitter interpoliert werden. Zu diesem Zwecke wurde die Subroutine EQIDIS geschrieben, die jede gewünschte Variable auf ein äquidistantes raumfestes Gitter interpoliert. Eine

Schwierigkeit stellt hierbei der Umgang mit den Schockpunkten dar, die beim Charakteristikenverfahren – entgegen allen Finite–Difference–Verfahren – als echte Diskontinuität gerechnet werden (zwei Funktionswerte an einem Raumpunkt). Würde man unbedacht über eine solche Diskontinuität hinweginterpolieren, so gäbe es durch *Überschwinger* starke Verfälschungen im Ergebnis. Um dem vorzubeugen wurde aus dem Lagrange–Gitter zunächst in das sequentielle Gitter transformiert, das dadurch entsteht, daß man die Schockwellen ins reguläre Gitter einfügt und dem Vor– und Nachschockpunkt einen eigenen Index zuweist. Um auf einen äquidistanten Eulerpunkt zu interpolieren, wurden jeweils zwei Gitterpunkte links und rechts neben diesem Punkt betrachtet. Als Kriterium für eine *normale* Interpolation diente das Größenverhältnis zweier benachbarter Intervalle. Liegen z.B. die zwei Gitterpunkte eines Schockes dicht an einem Eulerpunkt, so wird man nicht ohne weiteres z.B. parabolisch auf diesen Punkt interpolieren können. War in den drei in Frage kommenden Intervallen um den Eulerpunkt das Verhältnis größer als 0,3 (kleineres Intervall/größeres Intervall), so wurde mit der Methode der gewichteten Parabeln interpoliert (Kurucz, p.15, 1970). War dieses Verhältnis in einem der äußeren Intervalle kleiner als 0,3 so wurde mit einer einfachen Parabel, abhängig von den Intervallverhältnissen, links oder rechts des Eulerpunktes, interpoliert. Lag der Eulerpunkt dicht zwischen Lagrangegitterpunkt und Schockpunkt, so wurde linear interpoliert (zur Effizienz der Interpolationsmethoden siehe auch Hammer & Ulmschneider 1978).

Da der Zeitschritt programmintern geregelt wird, muß dasselbe Verfahren im Anschluß an die hydrodynamischen Rechnungen auf die Zeitschritte angewandt werden. Hierzu wurden die räumlich äquidistant liegenden Funktionswerte einer physikalischen Größe (in der Regel die Geschwindigkeit) in das Programm INTPOL.F eingelesen und mit demselben Verfahren wie im Wellenprogramm äquidistant in der Zeit interpoliert. Hierbei wurde das Zeitintervall $\Delta t = 1$ sec gewählt, was bei einem Gesamtzeitintervall von $T = 2000$ sec eine Frequenzauflösung von $\Delta\nu = 0,5$ mHz bedeutet. Die zeitlich wie räumlich äquidistanten Daten werden daraufhin mit dem Graphikprogramm PV–WAVE fourieranalysiert. Parallel hierzu wurden ebenfalls andere Fourierroutinen getestet (Press et al. 1986, Bracewell 1965, Bloomfield 1976), die jedoch ein identisches Ergebnis lieferten (zu beachten ist jedoch, daß in PV–WAVE ein Algorithmus für die *Fast–Fourier–Transform* (FFT) verwendet wird, der es erlaubt beliebige Zeitintervalle zu analysieren und sich nicht auf Intervalle der Form $T = 2^n$ beschränkt).

Die Höhenintervalle wurden zu $\Delta x = 100$ km gewählt. Da die Ausdehnung der Chromosphäre auf der Sonne auf ca. 2000 km geschätzt wird, wurde in unseren Rechnungen als äußerste Höhe für die Fourier–Analyse $x_{max} = 2000$ km gewählt.

Hierbei ist zu beachten, daß die Startatmosphären (H^-–, Mg–Atmsophären) teilweise eine Ausdehnung haben, die kleiner ist als 2000 km. Bei den Rechnungen zeigte sich jedoch in jedem Fall eine Ausdehnung der Atmosphäre nach kurzer Zeit (die erste einlaufende Welle entwickelt sich stets zu einem großen Schock, der die Atmosphäre bereits nahe 2000 km ausdehnt). Bei fast allen Rechnungen konnte das Zeitintervall $t \in [500, 2500]$ sec für die Fourieranalyse in 2000 km Höhe zugrundegelegt werden.

Kapitel 3

Lineare Wellenausbreitung

Untersucht werden soll das Verhalten unterschiedlicher Atmosphärentypen auf lineare Anregungen. Hierbei wird eine einfache Atmosphärenstruktur betrachtet, die ein mittleres Molekulargewicht von $\mu = 1,3$ und einen konstanten Adiabatenexponenten $\gamma = 5/3$ besitzt. Die physikalischen Größen am unteren Rand der Atmosphäre werden entsprechend einer optischen Tiefe $\tau_{5000} = 1$ in einer Strahlungsgleichgewichtsatmosphäre angenommen. Vernachlässigt werden sollen alle Strahlungseffekte, da lediglich das rein hydrodynamische Verhalten im Vordergrund stehen soll.

Die numerischen Rechnungen werden lediglich in einer Dimension (z–Richtung) durchgeführt. Beobachtungen zeigen (Cram,1978), daß - im Falle der Sonne - der Schwerpunkt des Powers der horizontalen Wellenzahl im $k_x - \omega -$ Diagramm bei $k_x \leq 1 \cdot 10^{-6} m$ liegt, also einer Wellenlänge von $\lambda \approx 6000$ km entspricht. Da diese Ausdehnung ca. 3 mal größer ist als die betrachtete Atmosphärenhöhe, kann in erster Näherung die horizontale Richtung als homogen betrachtet werden.

3.1 Die linearen Gleichungen

Das System von partiellen Differentialgleichungen (2.1 – 2.3) läßt sich unter der Annahme von kleinen Störungen in der Geschwindigkeit $\vec{u}$, der Dichte ρ und des Druckes p linearisieren. Für den Fall einer isothermen Atmosphäre lassen sich durch einfache mathematische Umformungen unter Vernachlässigung von Anfangs– und Randbedingungen eine Dispersionsrelation $k(\omega)$, sowie die Phasenbeziehungen zwischen den Zustandsgrößen ableiten. Mit Hilfe der Dispersionsrelation können die Phasen– und die Gruppengeschwindigkeit abgeleitet werden.

Berücksichtigt man explizit die Anfangs– und Randbedingungen, so ergibt sich eine kompliziertere Lösungsstruktur in vertikaler Richtung.

3.1.1 Die Dispersionsrelation

Die Grundgleichungen schreiben wir in linearisierter Form wobei nur Terme nullter und erster Ordnung Berücksichtigung finden. Dichte, Druck und Geschwindigkeit seien gegeben in der Form

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho', \\ p &= p_0 + p', \\ \vec{u} &= (u_x, 0, u_z), \end{aligned}$$

wobei die gestrichenen Größen, sowie $\vec{u}$ Größen erster Ordnung seien. Mit der hydrostatischen Grundgleichung

$$dp = -\rho g dz,$$

schreibt sich das Gleichungssystem (2.1 – 2.3)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{3.1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \tag{3.2}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0, \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial t} + u_z \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) - c^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) = 0. \tag{3.4}$$

Zur Lösung wählt man einen ebenen Wellenansatz für die Größen erster Ordnung

$$\rho' = \rho_0 \mathcal{R} \mathcal{A} e^{i(\omega t - K_x x - K_z z)}, \tag{3.5}$$

$$p' = p_0 \mathcal{P} \mathcal{A} e^{i(\omega t - K_x x - K_z z)}, \tag{3.6}$$

$$u_x = \mathcal{U}_x \mathcal{A} e^{i(\omega t - K_x x - K_z z)}, \tag{3.7}$$

$$u_z = \mathcal{U}_z \mathcal{A} e^{i(\omega t - K_x x - K_z z)}. \tag{3.8}$$

wobei $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{U}_x$ und $\mathcal{U}_z$ Polarisationsfaktoren sind, d.h. komplexe Zahlen, die die Phaseninformation relativ zueinander beinhalten (Hines, 1960). Um die relative Amplitude der Zustandsgrößen zueinander zu bestimmen, wählen wir $\mathcal{A}$ als eine beliebige konstante Amplitude. Führt man die Differentiationen einzeln aus, so wird man auf das homogene Gleichungssystem

$$A_{ij} \cdot \vec{V}_{pol} = 0 \tag{3.9}$$

geführt, mit

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} i\omega & -iK_x & -\left(\frac{\gamma g}{c^2} + iK_z\right) & 0 \\ 0 & i\omega & 0 & -\frac{iK_x c^2}{\gamma} \\ g & 0 & i\omega & -\frac{c^2}{\gamma}\left(\frac{\gamma g}{c^2} + iK_z\right) \\ -i\omega c^2 & 0 & g(\gamma - 1) & i\frac{\omega c^2}{\gamma} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

und

$$\vec{V}_{pol} = \begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{U}_x \\ \mathcal{U}_z \\ \mathcal{P} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Für (3.10) wurde verwendet, daß in einer isothermen Atmosphäre gilt

$$\rho_0(z) = \rho_{00} e^{-\frac{z}{H}}, \tag{3.12}$$

$$p_0(z) = p_{00} e^{-\frac{z}{H}}, \tag{3.13}$$

mit der Skalenhöhe

$$H = \frac{c^2}{\gamma g},$$

sowie

$$c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dieses Gleichungssystem eine nicht–triviale Lösung besitzt, ist das Verschwinden der Koeffizientendeterminante, also

$$det(A_{ij}) = 0. \tag{3.14}$$

Diese wird mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes

$$det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{4} A_{ij} A^{ij}$$

berechnet, wobei A^{ij} die Adjunkte der Matrix A_{ij} ist, die dadurch entsteht, daß man die i-te Zeile und j-te Spalte der Matrix streicht und mit $(-1)^{i+j}$ multipliziert; j ist ein beliebiger aber konstant gehaltener Index. Wir wählen $j = 2$ und erhalten für die Determinante

$$\begin{aligned} det(A_{ij}) &= iK_x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -iK_x \frac{c^2}{\gamma} \\ g & i\omega & -\frac{c^2}{\gamma}(\frac{\gamma g}{c^2} + iK_z) \\ -i\omega c^2 & g(\gamma - 1) & i\omega \frac{c^2}{\gamma} \end{vmatrix} \\ &\quad + i\omega \cdot \begin{vmatrix} i\omega & -(\frac{\gamma g}{c^2} + iK_z) & 0 \\ g & i\omega & -\frac{c^2}{\gamma}(\frac{\gamma g}{c^2} + iK_z) \\ -i\omega c^2 & g(\gamma - 1) & i\omega \frac{c^2}{\gamma} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\omega^4 c^2}{\gamma} - \frac{\omega^2 c^4}{\gamma} \left(\frac{\gamma g}{c^2} + iK_z \right)^2 - \omega^2 c^2 g \left(\frac{\gamma g}{c^2} + iK_z \right) \\ &\quad + \frac{K_x^2 c^2 g^2}{\gamma}(\gamma - 1) - \frac{\omega^2 K_x^2 c^4}{\gamma} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Die Säkulargleichung

$$\omega^4 - \omega^2 c^2 (K_x^2 + K_z^2) + g^2(\gamma - 1)K_x^2 + i\gamma g \omega^2 K_z = 0 \tag{3.16}$$

liefert somit eine Dispersionsrelation zwischen $\vec{K}$ und ω. Zur Auswertung dieser Gleichung betrachten wir zunächst K_z als Variable und ω sowie K_x als freien Parameter. Gleichung (3.16) läßt sich in die quadratische Gleichung in K_z

$$K_z^2 - i\frac{\gamma g}{c^2} K_z - \frac{\omega^2}{c^2} - K_x^2 \left(\frac{g^2(\gamma - 1)}{\omega^2 c^2} - 1 \right) = 0 \tag{3.17}$$

umformen, die als Lösungen

$$K_{z_{1,2}} = i\frac{\gamma g}{2c^2} \pm \sqrt{-\frac{\gamma^2 g^2}{4c^4} + \frac{\omega^2}{c^2} + K_x^2 \left(\frac{g^2(\gamma - 1)}{\omega^2 c^2} - 1 \right)} \tag{3.18}$$

besitzt. Zur Auswertung dieser Gleichung definieren wir

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_A^2}{\omega^2} \right) + k_x^2 \left(\frac{\omega_B^2}{\omega^2} - 1 \right)}, \tag{3.19}$$

was mit

$$\omega_A = \frac{\gamma g}{2c}, \tag{3.20}$$

$$\omega_B = \frac{g}{c}\sqrt{\gamma - 1}, \tag{3.21}$$

$$k_x = K_x \tag{3.22}$$

dem Wurzelausdruck entspricht. Gleichung (3.18) kann somit in der Form

$$K_{z_1} = +k_z + ib_z \qquad K_{z_2} = -k_z + ib_z \tag{3.23}$$

geschrieben werden, wobei $b_z = \gamma g / 2c^2$ eingeführt wurde.

Wir betrachten nun die Gleichung in k_z (3.19). Diese besitzt zwei Lösungsfamilien in ω, für die die Diskriminante von $k_z \geq 0$ und damit k_z reell ist. Wird die Diskriminante negativ, so bedeutet dies, daß k_z imaginär und somit K_z rein imaginär wird, was in den Gleichungen (3.5 – 3.8) zu einer exponentiellen Dämpfung bzw. Aufsteilung der Amplitude führt. Wählt man in Gl.(3.23) K_{z_1} , also das positive Vorzeichen, so würde dies einer exponentiellen Aufsteilung mit der Höhe bedeuten, was keiner physikalisch sinnvollen Situation entspricht. Daher wählt man das negative Vorzeichen und betrachtet lediglich K_{z_2} als physikalisch relevant.

Der Imaginärteil b_z stellt in jedem Falle eine Aufsteilung der Amplitude mit zunehmender Höhe dar. Dieses ist als Konsequenz der Energieerhaltung zu verstehen: nimmt die Dichte mit der Höhe exponentiell ab, so muß die Geschwindigkeit entsprechend zunehmen, um die kinetische Energie $\frac{1}{2}\rho v^2$ zu erhalten. Wird k_z imaginär, so

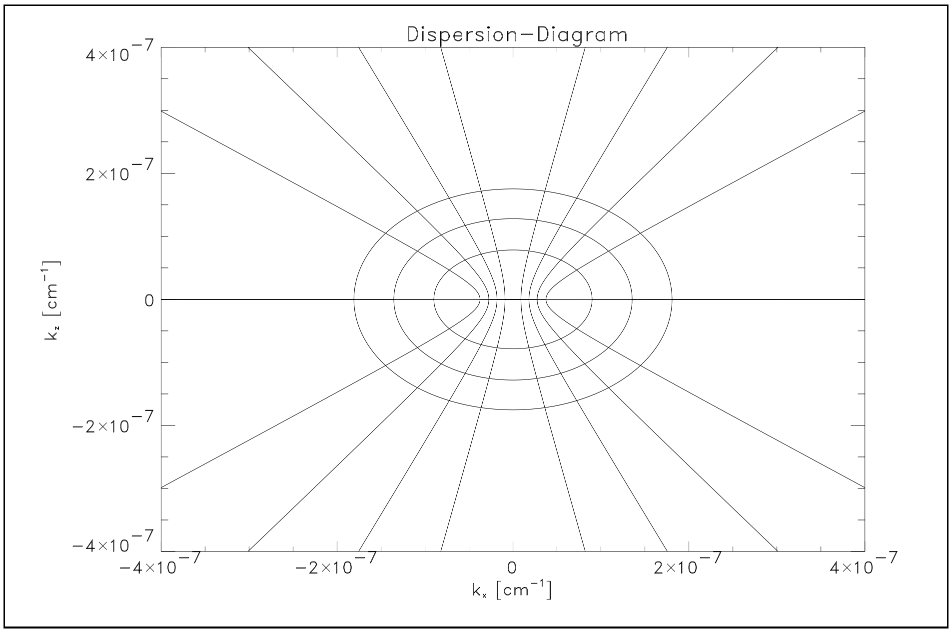


Abbildung 3.1: Dispersionsrelation zwischen k_x und k_z. Die Ellipsen entsprechen akustischen Wellen, die Hyperbeln den Schwerewellen

wird zunächst diese Aufsteilung verringert. Überwiegt k_z über b_z, so wird die Amplitude der Welle exponentiell gedämpft. In jedem Falle ist die Bewegung in $z-$Richtung, bei rein imginärem K_z, keine periodische mehr, d.h. die Wellen verlieren ihren propagierenden Charakter und werden *evaneszente* Wellen. Die Abb.(3.1) und (3.2) zeigen hierzu das Dispersionsdiagramm $k_z(k_x)$. Akustische Wellen werden dabei als Ellipsen, Schwerewellen als Hyperbeln dargestellt. Hierbei ist in Abb.(3.2) das normalisierte Diagramm aufgetragen, was dadurch entsteht, daß man $n_{x,z} = k_{x,z}c/\omega$ aufträgt. Da die auftretenden Frequenzen bei Schwerewellen stets kleiner sind ($\omega < \omega_B$) als bei akustischen Wellen ($\omega > \omega_A$), werden die Hyperbeln aus dem Bereich der Ellipsen herausgedrängt.

Betrachtet man Gleichung (3.16) als biquadratische Gleichung in ω mit k_x und k_z als freien Parametern, so kann man durch die Substitution

$$\Omega = \omega^2 \tag{3.24}$$

die quadratische Gleichung in Ω

$$\Omega^2 - \Omega c^2(K_x^2 + K_z^2) + g^2(\gamma - 1)K_x^2 + i\gamma g\Omega K_z = 0 \tag{3.25}$$

lösen. Setzt man hier für K_x und K_z ein, so hat man

$$\Omega^2 - \left[c^2(k_x^2 + k_z^2 - b_z^2 + 2ik_zb_z - i\gamma g(k_z + ib_z)\right] + g^2(\gamma - 1)k_x^2 = 0. \tag{3.26}$$

Setzt man für b_z ein, so fällt der Imaginärteil heraus und unter Berücksichtigung der

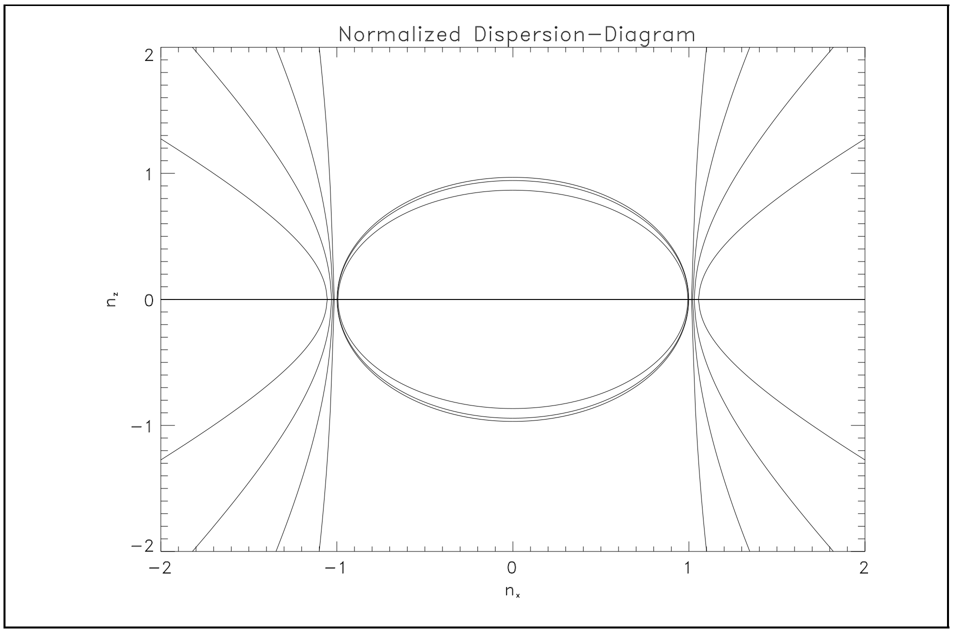


Abbildung 3.2: Normalisiertes Dispersionsdiagramm mit $n_x = \frac{k_x c}{\omega}$ und $n_z = \frac{k_z c}{\omega}$. Die Grenze auf der n_x–Achse für Schwerewellen liegt bei $\pm\frac{\omega_A}{\omega_B}$.

Definition für ω_B hat man

$$\Omega = \frac{1}{2}c^2(k_x^2 + k_z^2 + b_z^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^4(k_x^2 + k_z^2 + b_z^2)^2 - c^2\omega_B^2 k_x^2}. \tag{3.27}$$

Da ω eine positive Zahl sein soll, wird nur die positive Wurzel von (3.27) berücksichtigt, was

$$\omega = +\sqrt{\frac{1}{2}c^2(k_x^2 + k_z^2 + b_z^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^4(k_x^2 + k_z^2 + b_z^2)^2 - c^2\omega_B^2 k_x^2}} \tag{3.28}$$

liefert. Abb.(3.4) zeigt den Funktionsverlauf der Diskriminanten der inneren Wurzel von Gl.(3.28). Man sieht, daß es nur positive Funktionswerte gibt, d.h. ω nimmt nur reelle Werte an, so daß eine zeitliche Dämpfung oder Aufsteilung der Amplitude ausgeschlossen ist.

Eine Analyse der Gleichung (3.19) zeigt, daß es insgesamt drei voneinander getrennte Bereiche im $k_x, \omega-$Diagramm gibt. Nehmen wir an, daß $k_x = 0$ ist, so ist die minimale Frequenz, bis zu der k_z reell ist gerade ω_A. Deshalb wird ω_A auch die *akustische Cut–Off–Frequenz* gennant. Nimmt k_x in der Größe zu, so muß ω bei reellem k_z wachsen. Gibt es also Komponenten einer Welle in $x-$ und $z-$Richtung, so steigt die Frequenz, bei denen akustische Wellen propagieren können mit steigendem k_x.

Bei Frequenzen, die kleiner sind als ω_B, ist der erste Klammerausdruck in Gl.(3.19) stets positiv, der zweite stets negativ. Ob k_z imaginär oder reell ist wird also von k_x abhängen. Strebt ω gegen Null, so geht der zweite Klammerausdruck ebenfalls gegen

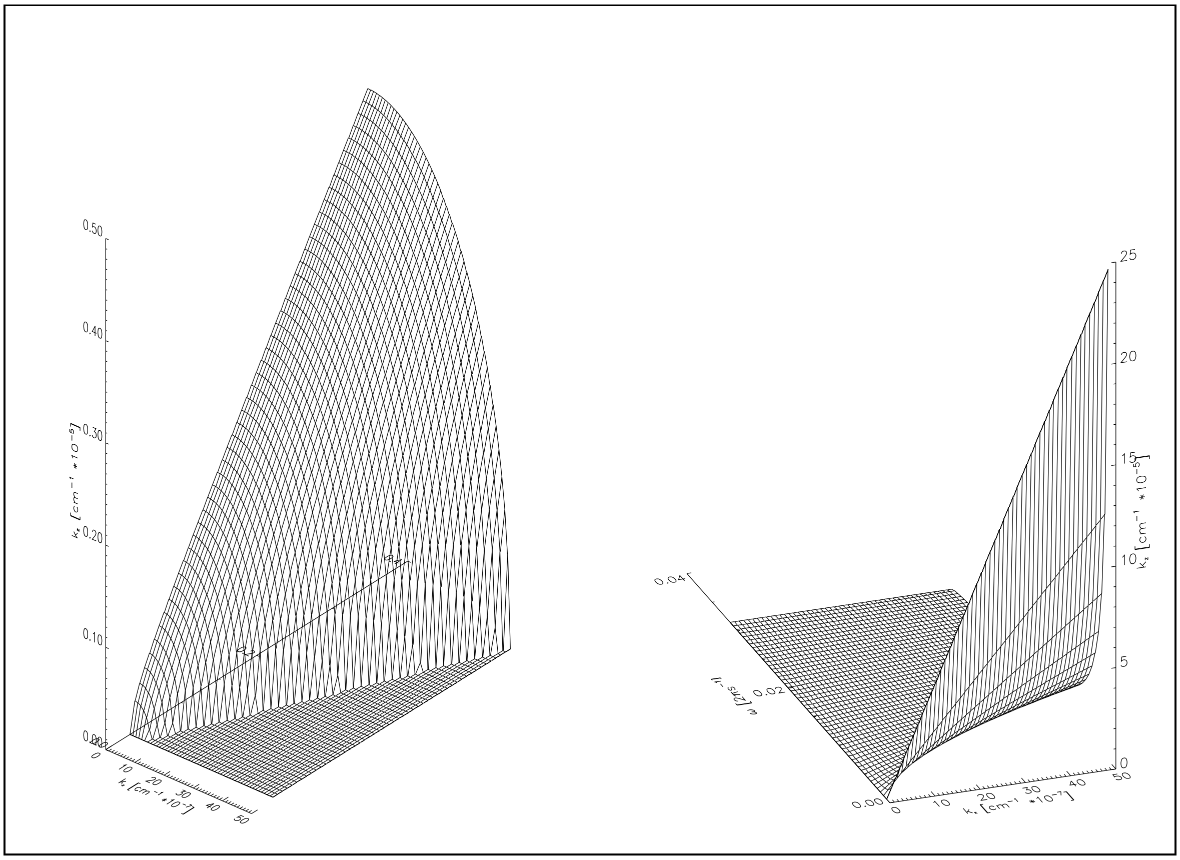


Abbildung 3.3: Dispersionsdiagramm k_x, k_z, ω. Aufgetragen ist der positive Quadrant der Wellenzahlen. Links sind die Frequenzen oberhalb der Cut–Off–Frequenz, rechts unterhalb der Brunt–Väisäla– Frequenz aufgetragen.

Null, der erste bleibt stets positiv. In diesem Falle ist k_z also reell. Strebt ω gegen ω_B, so wird k_z nur dann reell sein, wenn k_x sehr große Werte annimmt. ω_B wird also für tiefe Frequenzen und große k_x eine obere Grenzfrequenz darstellen, die die *Brunt–Väisälä–Frequenz* genannt wird. Unterhalb ω_B ist k_z somit stets reell und ein Propagieren von Wellen ist möglich. Die Abb.(3.5) und (3.6) zeigen hierzu das *diagnostische Diagramm*, das die Auftragung $\omega(k_x)$ mit k_z als Parameter zeigt. In Abb.(3.6) ist hierbei als Abszissenauftragung $k_x c/\omega$ gewählt worden, um das diagnostische Diagramm für verschiedene isotherme Atmosphären im selben Wertebereich darstellen zu können. Abb.(3.3) stellt in der dreidimensionalen Auftragung $k_z(k_x, \omega)$ eine Zusammenfassung der Abb.(3.1) und (3.5) dar. Der Übersichtlichkeit halber wurden dabei die Bereiche der akustischen Wellen und der Schwerewellen getrennt voneinander dargestellt.

Aus der Definition für ω_A und ω_B wird deutlich, daß stets gilt

$$\omega_A > \omega_B,$$

da γ kleiner als 2 ist. D.h., daß es ein Gebiet im k_x, ω–Diagramm gibt, in dem k_z stets, egal wie man k_x wählt, imaginär ist. Es werden somit zwei Gebiete in denen

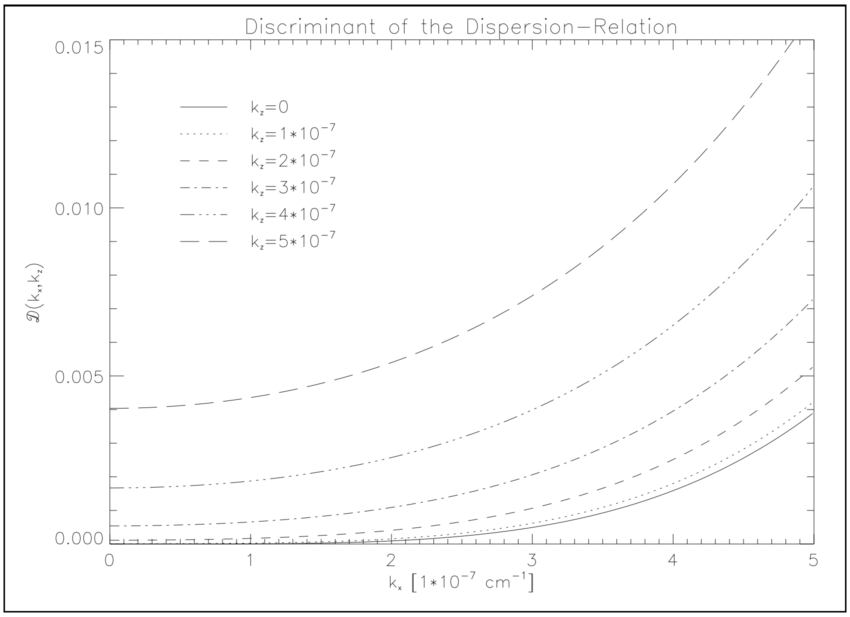


Abbildung 3.4: Funktionsverlauf der Diskriminanten aus Gleichung (3.28), wodurch ein reelles ω festgelegt wird.

Wellenpropagation möglich ist, durch ein Gebiet der evaneszenten Wellen getrennt werden.

3.1.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Die Phase $\varphi = \omega t - kx$ einer ebenen Welle beschreibt deren zeitlich- räumlichen Zustand. In allen Koordinaten x, t, in denen die Phase denselben Wert besitzt, d.h.

$$\omega t - kx = const \tag{3.29}$$

wird die Welle in demselben Zustand sein. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Zustand in $x-$ Richtung ändert, d.h. die Geschwindigkeit mit der die Phase *transportiert* wird, ist durch die zeitliche Ableitung gegeben

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{3.30}$$

Diese Geschwindigkeit wird daher auch die *Phasengeschwindigkeit* v_{ph} genannt. Für die Ableitung der Phasengeschwindigkeit wurde lediglich *eine* Partialwelle zugrundegelegt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird somit nur für streng monochromatische Wellen in nichtdispersiven Medien die Phasengeschwindigkeit sein. Berücksichtigt man superponierte Wellen sowie Dispersion, so muß man zur Fourierdarstellung übergehen (Stratton,1941;Sommerfeld,1944).

Es sei nun k ein freier Parameter, der in einem kleinen Intervall um ein k_0 variieren kann und es gelte $\omega = \omega(k)$. Dann läßt sich beispielsweise die Geschwindigkeitsampli-

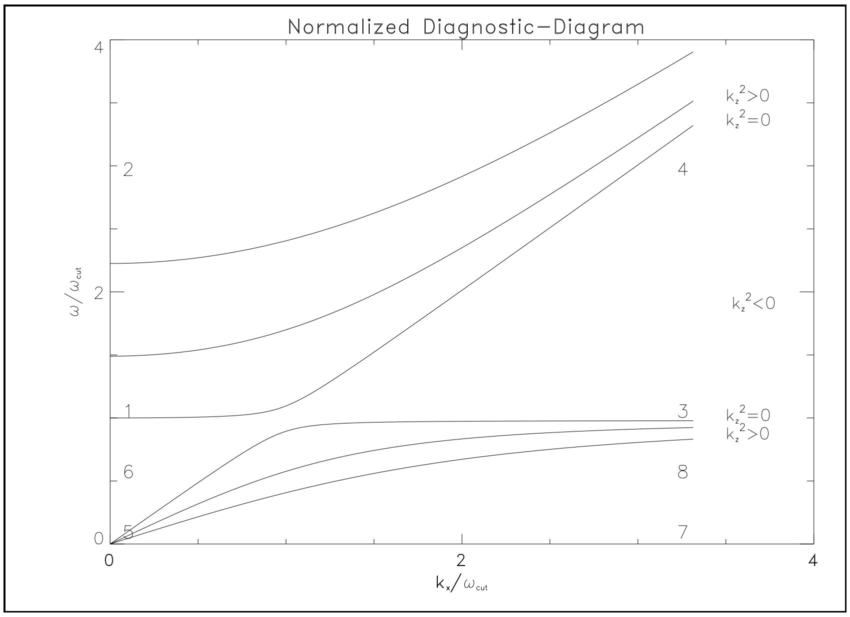


Abbildung 3.5: Normalisiertes Dispersionsdiagramm. Die Kurven mit $k_z = 0$ trennen die Gebiete der propagierenden und der evaneszenten Wellen. (Die Zahlen in dem Diagramm beziehen sich auf spätere Graphiken.)

tude u eines Wellenpaketes, das um k_0 zentriert ist, durch das Integral

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k) e^{-i(\omega(k)t-kx)} dk \tag{3.31}$$

darstellen. Wenn die Verteilung $k(\omega)$ um k_0 nicht zu scharf ist, läßt sich ω um $\omega_0 = \omega(k_0)$ entwickeln

$$\omega = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} (k - k_0). \tag{3.32}$$

Einsetzen in (31) liefert

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k) \cdot \\ &\quad \exp\left\{-i\left(\omega_0 t + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} (k-k_0)t - [(k-k_0)+k_0]x\right)\right\} dk, \qquad (3.33) \\ &= \frac{\exp\{-i(\omega_0 t - k_0 x)\}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k) \cdot \end{aligned}$$

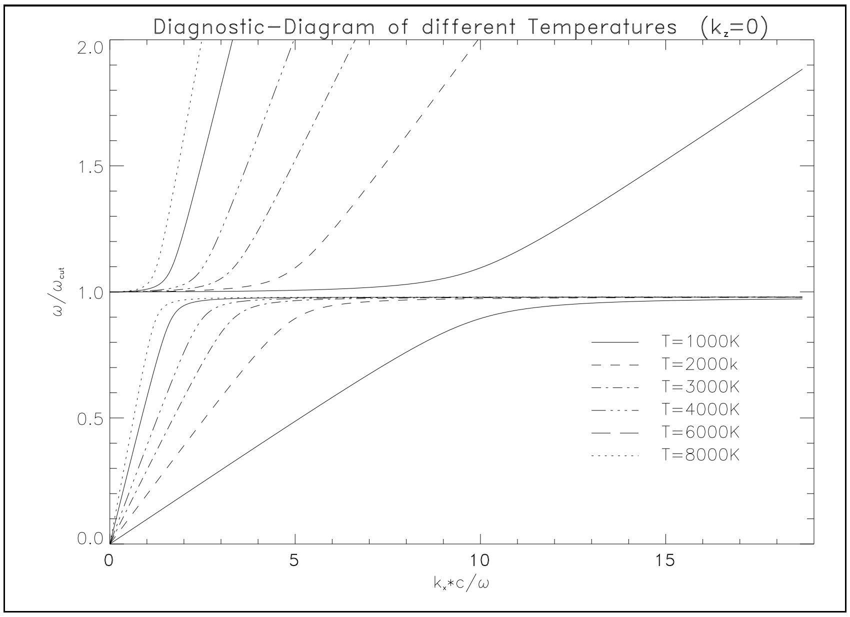


Abbildung 3.6: Normalisiertes Dispersionsdiagramm für isotherme Atmosphären unterschiedlicher Temperatur

$$\exp\left\{-i\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}(k-k_0)t-(k-k_0)x\right)\right\}dk. \tag{3.34}$$

Mit der Substitution $k' = k - k_0$ folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\exp\{-i(\omega_0 t - k_0 x)\}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\Delta k}^{\Delta k} a(k_0+k') \cdot \\ &\qquad \exp\left\{-ik'\left(\left.\frac{d\omega}{dk'}\right|_{k_0} t - x\right)\right\} dk' \qquad (3.35) \\ &= \mathcal{A}(x,t)\cdot\exp\{-i(\omega_0 t - kx)\}, \qquad (3.36) \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{A}(x,t) = \int\limits_{-\Delta k}^{\Delta k} a(k_0+k')\cdot\exp\left\{-ik'\left(\left.\frac{d\omega}{dk'}\right|_{k_0} t - x\right)\right\}dk'. \tag{3.37}$$

Gleichung (3.35) ist somit aufzufassen als zusammengesetzter Ausdruck. Das Integral beschreibt das Verhalten der Amplitude des Wellenpaketes, während der Faktor vor dem Integral den Zustand am Punkt $k = k_0$ beschreibt, also das Zentrum des Wellenpaketes. Um die Punkte gleicher Phase zu finden, setzen wir den Exponenten des Integranden wiederum konstant

$$k\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t - x\right) = const \tag{3.38}$$

und differenzieren x nach der Zeit t

$$\frac{dx}{dt} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}. \tag{3.39}$$

D.h. das Wellenpaket bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_{gr} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$, weshalb v_{gr} auch die *Gruppengeschwindigkeit* genannt wird. Die Energie eines Wellenpaketes wird mit derselben Geschwindigkeit transportiert werden. Aus der Herleitung für die Gruppengeschwindigkeit werden jedoch bereits die Grenzen für diesen Begriff deutlich. Die Verteilung von $k(\omega)$ darf nicht zu scharf sein (die Verteilungskurve muß differenzierbar sein) und in dem Wellenpaket dürfen die Wellenzahlen nur in einem kleinen Intervall um k_0 enthalten sein.

Falls das Medium nicht dispergierend ist, so ist die Gruppengeschwindigkeit gleich der Phasengeschwindigkeit, d.h. das Wellenpaket behält seine Form, da alle Partialwellen mit derselben Geschwindigkeit propagieren.

Die Begriffe der Phasen– und Gruppengeschwindigkeit lassen sich auf mehrere Dimensionen erweitern. Die Phasengeschwindigkeit ist hier definiert als

$$\vec{v}_{ph} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \cdot \vec{e}_{\vec{k}}, \tag{3.40}$$

wobei $\vec{e}_{\vec{k}}$ den Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle bedeutet. Die Gruppengeschwindigkeit lautet

$$\vec{v}_{gr} = \vec{\nabla}_k \omega. \tag{3.41}$$

Lösen wir Gleichung (3.19) nach k_x bzw. k_z auf, so erhalten wir für die Phasengeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} v_{ph_x} &= \frac{\omega}{k_x} \\ &= \frac{\omega\sqrt{\left(\frac{\omega_B^2}{\omega^2} - 1\right)}}{\sqrt{k_z^2 - \left(1 - \frac{\omega_A^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}}}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} v_{ph_z} &= \frac{\omega}{k_z} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_A^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2} + k_x^2\left(\frac{\omega_B^2}{\omega^2} - 1\right)}}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Betrachtet man den Grenzfall $k_x \to 0$, so strebt die Phasengeschwindigkeit in $x-$Richtung gegen unendlich, und die Auslenkung der Gasteilchen erfolgt gleichphasig. D.h. ein

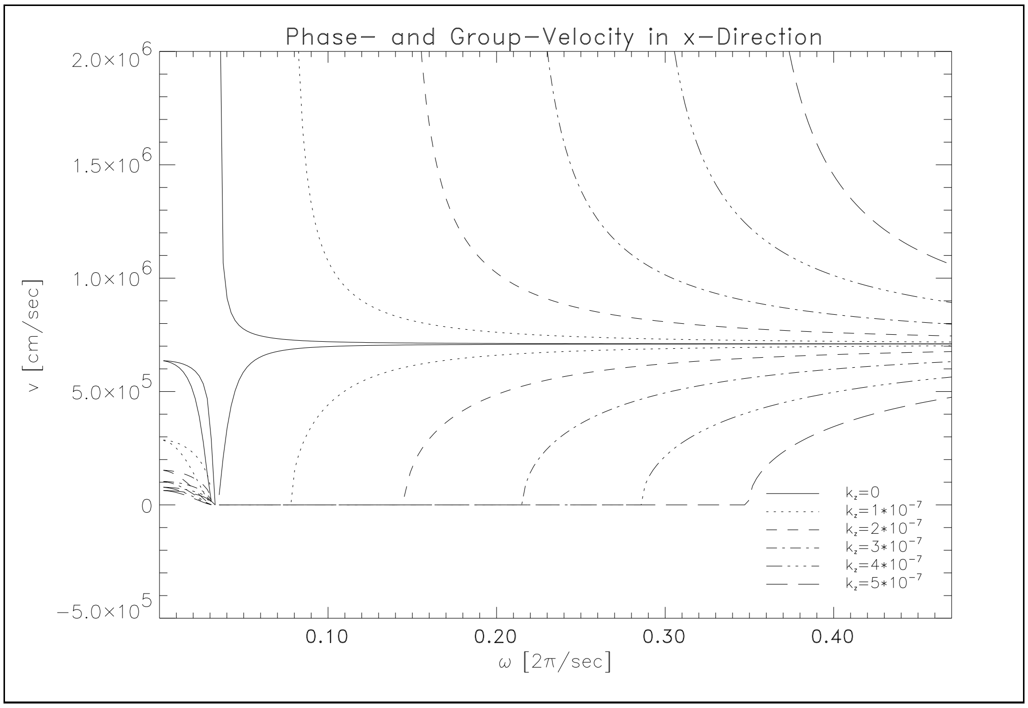


Abbildung 3.7: Phasen– und Gruppengeschwindigkeit in x–Richtung. Man beachte, daß die maximale Phasen– und Gruppengeschwindigkeit für Schwerewellen $c \cdot \omega_B/\omega_A$ ist.

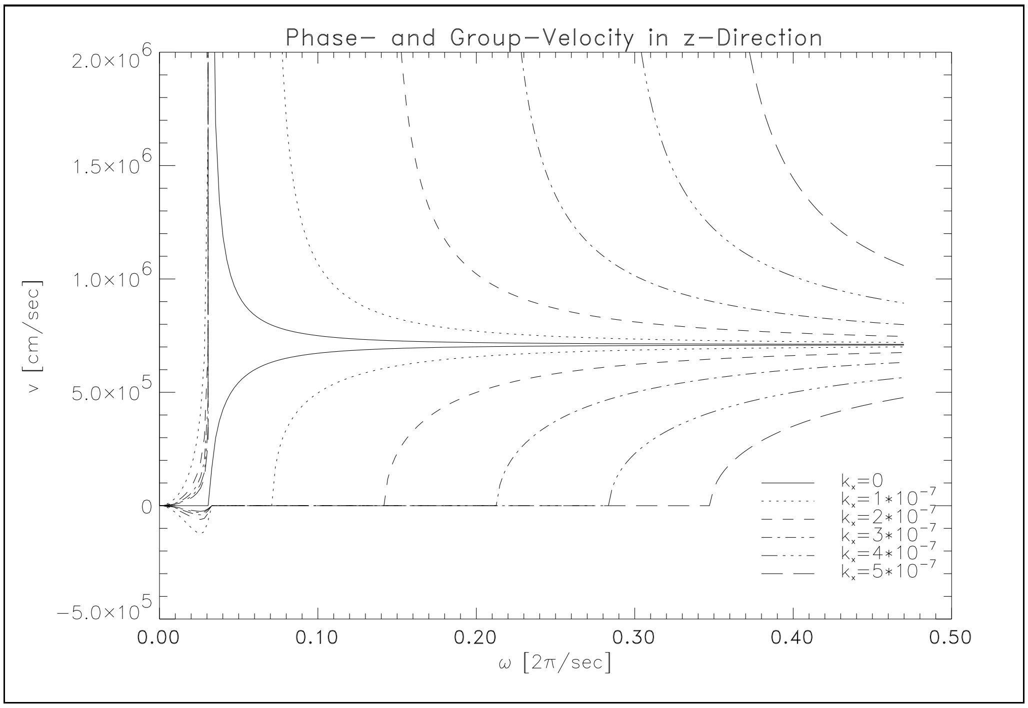


Abbildung 3.8: Phasen– und Gruppengeschwindigkeit in z–Richtung

räumliches Pattern ist nur noch in $z-$Richtung vorhanden. Für die Phasengeschwindigkeit in $z-$Richtung gilt in diesem Falle

$$v_{ph_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_A^2}{\omega^2}}}. \tag{3.44}$$

Strebt die Frequenz gegen die Cut-Off-Frequenz ω_A, so divergiert auch die Phasengeschwindigkeit in $z-$Richtung. Bei der Cut-Off-Frequenz schwingt die ganze Atmosphäre somit gleichphasig in $z-$Richtung auf und ab.

Betrachtet man den Fall, daß ω sehr kleine Werte annimmt, d.h. ω liegt unterhalb von ω_B, so kann man die Näherung

$$k_z = k_x \sqrt{\left(\frac{\omega_b^2}{\omega^2} - 1\right)} \tag{3.45}$$

machen. Beachtet man, daß der Winkel ϑ, unter dem sich eine Welle relativ zur Flächennormalen ausbreitet gegeben ist durch (Hargreaves,1992)

$$\vartheta = \arctan \frac{k_z}{k_x}, \tag{3.46}$$

so wird klar, daß die Ausbreitungsrichtung einer Schwerewelle von der Frequenz ω abhängt. Vergleicht man dieses Ergebnis mit Abb.(3.1), so wird deutlich, daß die Ausbreitungsrichtung gegeben ist durch die Asymptoten der Hyperbellinien. Im Falle von hohen Frequenzen, und damit akustischen Wellen, ist dies nicht der Fall. Hier kann man die Näherung (3.45) nicht machen und es gilt

$$\vartheta = \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_A^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2} + k_x^2 \left(\frac{\omega_B^2}{\omega^2} - 1\right)}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_B^2}{\omega^2} - 1\right)^{-1} \left(k_z^2 - \left(1 - \frac{\omega_A^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\right)}} \right\}. \tag{3.47}$$

Um den Ausdruck für die Gruppengeschwindigkeit abzuleiten, definieren wir

$$F = \omega^4 - \omega_A^2\omega^2 - (\omega^2 - \omega_B^2)c^2k_x^2 - \omega^2c^2k_z^2, \tag{3.48}$$

womit sich $\vec{v}_{gr}$ vermöge

$$\vec{v}_{gr} = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial k_x}}{\frac{\partial F}{\partial \omega}}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial k_z}}{\frac{\partial F}{\partial \omega}} \right) \tag{3.49}$$

berechnet. Führt man die Differentiationen einzeln aus, so hat man

$$\frac{\partial F}{\partial k_x} = -2(\omega^2 - \omega_B^2)c^2k_x^2, \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial F}{\partial k_z} = -2\omega^2c^2k_z, \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = 4\omega^3 - 2\omega_A^2\omega - 2\omega c^2k_x^2 - 2\omega c^2k_z^2, \tag{3.52}$$

womit man schließlich die Komponenten der Gruppengeschwindigkeit in $x-$ und in $z-$Richtung erhält

$$v_{gr_x} = \frac{(\omega^2 - \omega_B^2)c^2 k_x}{\omega(2\omega^2 - \omega_A^2 - (k_x^2 + k_z^2)c^2)}, \tag{3.53}$$

$$v_{gr_z} = \frac{\omega^2 c^2 k_z}{\omega(2\omega^2 - \omega_A^2 - (k_x^2 + k_z^2)c^2)}. \tag{3.54}$$

An diesen Gleichungen erkennt man, daß im Falle von $\omega = \omega_B$ die Gruppengeschwindigkeit in $x-$Richtung verschwindet und damit auch der Energietransport, was nicht verwunderlich ist, da in diesem Falle auch die Wellenpropagation verschwindet und die Atmosphäre an allen Orten gleichphasig schwingt. Dasselbe gilt in $z-$Richtung für die akustische Cut–Off–Frequenz. In diesem Falle verschwindet k_z bzw. k_z wird bei nichtverschwindendem k_x imaginär, was ebenfalls zu verschwindender Gruppengeschwindigkeit führt. Abb.(3.7) und (3.8) zeigt hierzu die Verläufe der Phasen– und Gruppengeschwindigkeiten in x– wie in z–Richtung.

3.1.3 Phasenbeziehungen

Um die Phasenbeziehung zwischen ρ, p, u_x, u_z zu finden, müssen die Komponenten des Polarisationsvektors $\vec{V}_{pol}$ bestimmt werden. Ist die Matrix A_{ij} singularisiert worden, so errechnen sich die Komponenten V_j des Vektors vermöge (Boas, 1966)

$$V_j = \alpha A^{ij}, \tag{3.55}$$

wobei A^{ij} wiederum die Adjunkte der Matrix A_{ij} und α eine beliebige Konstante bedeuten, die man, um $\mathcal{U}_z$ rein reell zu erhalten, zu

$$i\frac{\gamma}{c^2}$$

wählt. Wählen wir den Zeilenindex $i = 3$, so liefert die Auswertung von Gleichung (3.55) für die Polarisationsfaktoren

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= i\frac{\gamma}{c^2}\begin{vmatrix} -ik_x & -\left(ik_z + \frac{\gamma g}{2c^2}\right) & 0 \\ i\omega & 0 & -ik_x\frac{c^2}{\gamma} \\ 0 & g(\gamma-1) & i\omega\frac{c^2}{\gamma} \end{vmatrix} \\
&= i\left(k_x^2 g(\gamma-1) - i\omega^2 k_z - \omega^2\frac{\gamma g}{2c^2}\right), \\
\mathcal{U}_x &= -i\frac{\gamma}{c^2}\begin{vmatrix} i\omega & -\left(ik_z + \frac{\gamma g}{2c^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -ik_x\frac{c^2}{\gamma} \\ -i\omega c^2 & g(\gamma-1) & i\omega\frac{c^2}{\gamma} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= k_x\left(i\omega g(\gamma-1) - i\omega c^2\left(ik_z+\frac{\gamma g}{2c^2}\right)\right),$$

$$\mathcal{U}_z = i\frac{\gamma}{c^2}\begin{vmatrix} i\omega & -ik_x & 0 \\ 0 & i\omega & -ik_x\frac{c^2}{\gamma} \\ -i\omega c^2 & 0 & i\omega\frac{c^2}{\gamma}\end{vmatrix}$$

$$= i\frac{\gamma}{c^2}\cdot\left(-i\omega^3\frac{c^2}{\gamma}+i\omega k_x^2\frac{c^4}{\gamma}\right),$$

$$\mathcal{P} = -i\frac{\gamma}{c^2}\begin{vmatrix} i\omega & -ik_x & -\left(ik_z+\frac{\gamma g}{2c^2}\right) \\ 0 & i\omega & 0 \\ -i\omega c^2 & 0 & g(\gamma-1)\end{vmatrix}$$

$$= \frac{\omega\gamma}{c^2}\left(i\omega g(\gamma-1) - i\omega c^2\left(ik_z+\frac{\gamma g}{2c^2}\right)\right).$$

Zusammenfassend können wir die Polarisationsfaktoren somit schreiben

$$\mathcal{R} = k_z\omega^2 + i\left(k_x^2(\gamma-1)g - \omega^2\frac{\gamma g}{2c^2}\right), \tag{3.56}$$

$$\mathcal{U}_x = k_xk_z\omega c^2 + i\left(k_x\omega(\frac{\gamma}{2}-1)g\right), \tag{3.57}$$

$$\mathcal{U}_z = \omega^3 - k_x^2\omega c^2, \tag{3.58}$$

$$\mathcal{P} = \omega^2k_z\gamma - i\left(\omega^2\gamma\frac{g}{c^2}(\frac{\gamma}{2}-1)\right). \tag{3.59}$$

Mit Hilfe der idealen Gasgleichung, aus der man die Beziehung

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

ableiten kann, findet man ebenso für die Temperaturstörung T mit Hilfe des Ansatzes

$$T' = T_0\mathcal{T}\mathcal{A}e^{i(\omega t - K_xx - K_zz)} \tag{3.60}$$

den Polarisationsfaktor. Es gilt

$$\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial T'}{\partial t}+\vec{v}\vec{\nabla}T_0\right) = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p'}{\partial t}+\vec{v}\vec{\nabla}p_0\right) - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\vec{v}\vec{\nabla}\rho_0\right)$$

Die Gradienten in dieser Gleichung fallen heraus: auf der linken Seite wegen der isothermen Annahme, auf der rechten Seite, da gilt

$$\frac{1}{p_0}\vec{\nabla}p_0 = \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\rho_0 = -\frac{1}{H}\vec{e}_z.$$

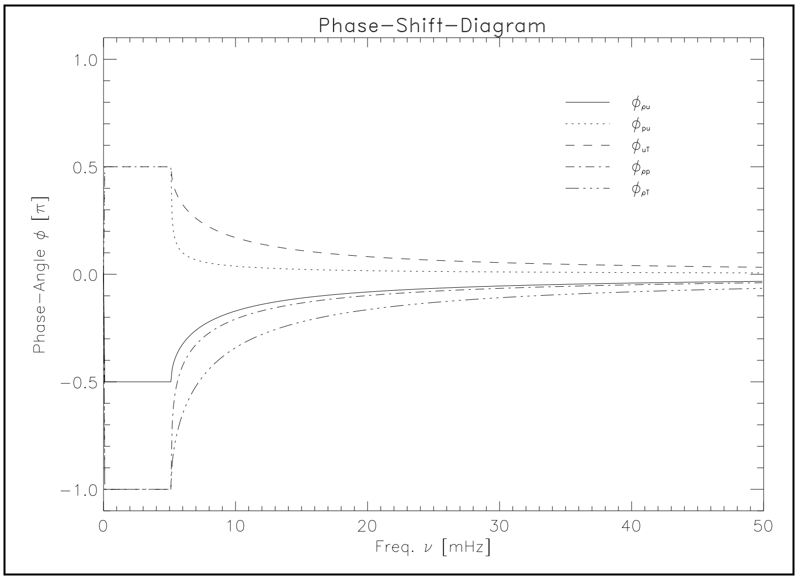


Abbildung 3.9: Die relativen Phasenwinkel ϕ zwischen den Zustandsgrößen in Abhängigkeit der Frequenz ν.

Setzt man die zeitlichen Ableitungen mit Hilfe des Ansatzes (3.60) ein, so hat man

$$i\omega\mathcal{T} = i\omega\mathcal{P} - i\omega\mathcal{R}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathcal{P} - \mathcal{R}, \\ &= \omega^2 k_z(\gamma - 1) + i\left(g(\gamma - 1)\left(\frac{\omega^2\gamma}{2c^2} - k_x^2\right)\right). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Abb.(3.9) zeigt hierzu die Phasenbeziehungen ϕ zwischen den Zustandsgrößen. Da die absoluten Phasen keine Information darstellen, sind die Phasendifferenzen $\phi_{\rho u} = \phi_\rho - \phi_u$ aufgetragen, wobei ϕ definiert ist als

$$\phi(var) = \arccos\left(\frac{\Re(var)}{|var|}\right),$$

wobei var für einen der Polarisationsfaktoren $\mathcal{R}, \mathcal{U}_x, \mathcal{U}_z, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ steht.

3.1.4 Räumliche Auslenkung

Besitzt man die Komponenten der Geschwindigkeit u_x und u_z eines Gaspartikels in x- und z-Richtung, so kann man durch eine zeitliche Integration dieser Gleichungen den Weg (ξ, ζ) bestimmen, den ein Gasteilchen zurücklegt, wenn eine Welle über es hinwegstreicht. Hierzu integrieren wir die Gleichungen (3.7, 3.8) mit den Polarisationsfaktoren

(3.57),(3.58).

$$
\begin{aligned}
\xi(k_x,\omega,t) &= \int_0^t u_x(k_x,\omega,t')dt' \\
&= \frac{1}{i\omega}\left(\mathcal{U}_x\mathcal{A}e^{i(\omega t-k_xx-k_zz)}e^{\frac{\gamma g}{2c^2}z}\right)\Big|_0^t \\
&= k_x\mathcal{A}\left(\left(g\frac{\gamma}{2}-1\right)-ik_zc^2\right)\left(e^{i\omega t}-1\right)e^{-i(k_xx+k_zz)}e^{\frac{\gamma g}{2c^2}z} \\
\zeta(k_x,\omega,t) &= \int_0^t u_z(k_x,\omega,t')dt' \\
&= \frac{1}{i}\mathcal{A}(\omega^2-k_x^2c^2)e^{i(\omega t-k_xx-k_zz)}e^{\frac{\gamma g}{2c^2}z}\Big|_0^t \\
&= i\mathcal{A}(k_x^2c^2-\omega^2)\left(e^{i\omega t}-1\right)e^{-i(k_xx+k_zz)}e^{\frac{\gamma g}{2c^2}z}
\end{aligned}
$$

Berücksichtigt man, daß eine komplexe Zahl $\mathsf{z}=\mathsf{x}+\mathsf{iy}$ in Exponentenschreibweise

$$
\mathsf{z}=\sqrt{\mathsf{x}^2+\mathsf{y}^2}\cdot\exp\left\{i\cdot\arccos\left(\frac{\mathsf{x}}{\sqrt{\mathsf{x}^2+\mathsf{y}^2}}\right)\right\}
$$

dargestellt werden kann und daß k_z entweder rein reell oder rein imäginär ist, so ergeben sich die Auslenkungen zu

$$
\begin{aligned}
\xi(k_x,\omega,t) &= \mathcal{A}\cdot k_x\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)g+\Im(k_z)c^2\right)^2+\Re(k_z)^2c^4}\cdot \\
&\quad (e^{i\omega t}-1)\cdot\exp\left\{-i\left(k_xx+\Re(k_z)z-\varphi_\xi\right)+\left(\Im(k_z)+\frac{\gamma g}{2c^2}\right)z\right\} \quad (3.62) \\
\zeta(k_x,\omega,t) &= \mathcal{A}\cdot(k_x^2c^2-\omega^2)\cdot \\
&\quad (e^{i\omega t}-1)\cdot\exp\left\{-i\left(k_xx+\Re(k_z)z-\varphi_\zeta\right)+\left(\Im(k_z)+\frac{\gamma g}{2c^2}\right)z\right\} \quad (3.63)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\varphi_\xi &= \arccos\left(\frac{(\frac{\gamma}{2}-1)g+\Im(k_z)c^2}{\sqrt{\left((\frac{\gamma}{2}-1)g+\Im(k_z)c^2\right)^2+\Re(k_z)^2c^4}}\right), \quad (3.64) \\
\varphi_\zeta &= \arccos(0)=\frac{\pi}{2}. \quad (3.65)
\end{aligned}
$$

Der physikalisch relevante Realteil der Auslenkungen lautet

$$\begin{aligned}
\xi(k_x,\omega,t) &= \mathcal{X}\cdot\{\cos\omega t\cdot\cos(k_x x+\Re(k_z)z-\varphi_\xi) \\
&\quad +\sin\omega t\cdot\sin(k_x x+\Re(k_z)z-\varphi_\xi) \\
&\quad -\cos(k_x x+\Re(k_z)z-\varphi_\xi)\}\cdot e^{\left(\Im(k_z)+\frac{\gamma g}{2c^2}\right)z}, \qquad (3.66)\\
\zeta(k_x,\omega,t) &= \mathcal{Z}\cdot\{\cos\omega t\cdot\cos(k_x x+\Re(k_z)z-\varphi_\zeta) \\
&\quad +\sin\omega t\cdot\sin(k_x x+\Re(k_z)z-\varphi_\zeta) \\
&\quad -\cos(k_x x+\Re(k_z)z-\varphi_\zeta)\}\cdot e^{\left(\Im(k_z)+\frac{\gamma g}{2c^2}\right)z}, \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{X} = \mathcal{A}\cdot k_x\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)g+\Im(k_z)c^2\right)^2+\Re(k_z)^2c^4} \qquad (3.68)$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A}(k_x^2c^2-\omega^2) \qquad (3.69)$$

In Abb.(3.12) sind die Bewegungen eines Gasteilchens über eine Periode hinweg in unterschiedlichen Gebieten im diagnostischen Diagramm (Abb.(3.5)) dargestellt, wobei sich das Teilchen am Fußpunkt der Atmosphäre befindet. Hierbei wurde die Auslenkung der Teilchen, wie sie sich aus den Gleichungen (3.66) und (3.67) ergibt auf die willkürliche Amplitude A normiert. Qualitativ ergeben sich sehr unterschiedliche Verhaltensweisen: in Gebieten, in denen die Wellen evaneszenten Charakter besitzen ist die Bewegung stark elliptisch, während sie in Propagationsgebieten eher linear ist. Die Abb.(3.10) und (3.11) zeigen dieselben Orte im diagnostischen Diagramm, jedoch in Abhängigkeit der Atmosphärenhöhe, wobei $k_x = 0$ gesetzt wurde.

3.1.5 Der allgemeine Ausdruck für die Geschwindigkeit

Wir gehen aus von der Wellengleichung in u, die sich aus den linearisierten Gleichungen (3.1 – 3.4) ableiten läßt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma g\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \qquad (3.70)$$

(Für die Ableitung siehe Anhang A). Um diese Gleichung auf Normalform zu bringen, machen wir den Ansatz

$$u(z,t) = v(z,t)\cdot e^{\lambda z}. \qquad (3.71)$$

Der Parameter λ wird so bestimmt, daß in der resultierenden Gleichung die erste Ableitung in v sich heraushebt. (3.70) lautet dann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\lambda\frac{\partial v}{\partial z} + \lambda^2 v\right) + \gamma g\left(\lambda v + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0. \qquad (3.72)$$

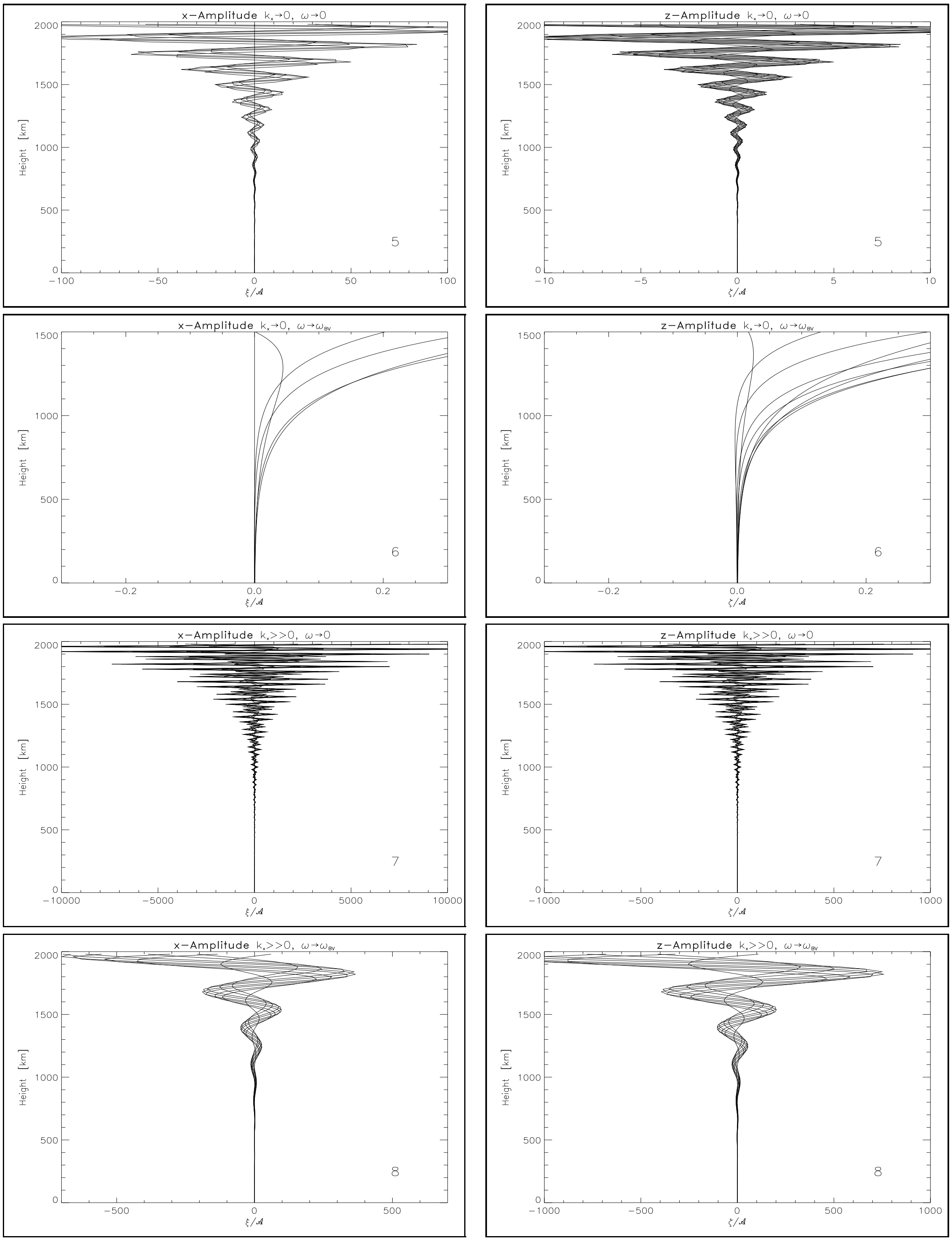


Abbildung 3.10: Die Auslenkung eines Gasteilchens beim Passieren einer Schwerewelle in unterschiedlichen Bereichen im diagnostischen Diagramm. In dieser und den folgenden Abbildungen sind jeweils die Amplituden $\frac{\xi}{\mathcal{A}}$, sowie $\frac{\zeta}{\mathcal{A}}$ aufgetragen. Die übereinandergeplotteten Kurven bezeichnen unterschiedliche Zeitpunkte. Die Zahlen in den Graphiken beziehen sich auf Abb.(3.5) und markieren den Ort im diagnostischen Diagramm.

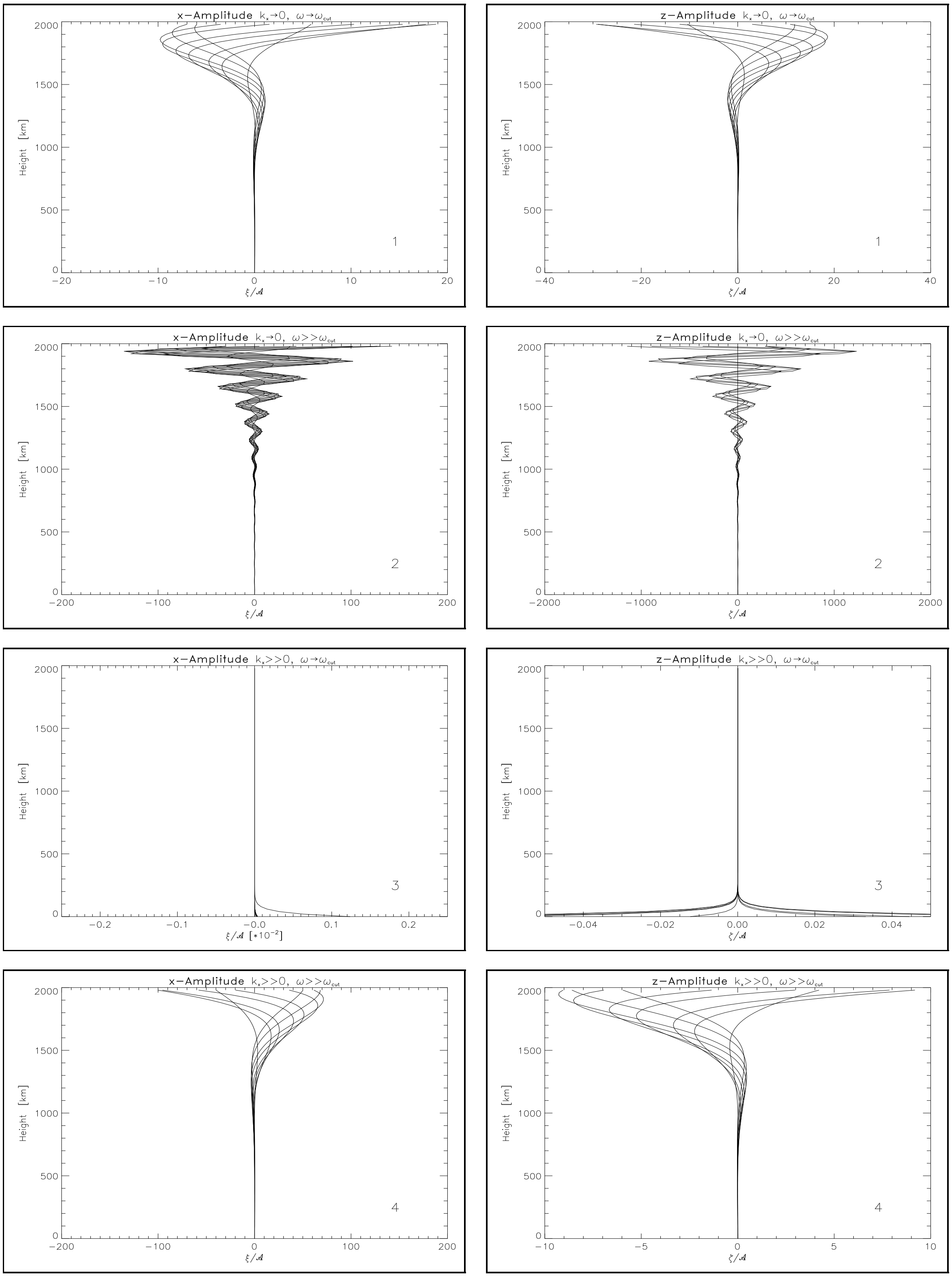


Abbildung 3.11: Die Auslenkung eines Gasteilchens beim Passieren einer akustischen Welle in unterschiedlichen Bereichen des diagnostischen Diagramms.

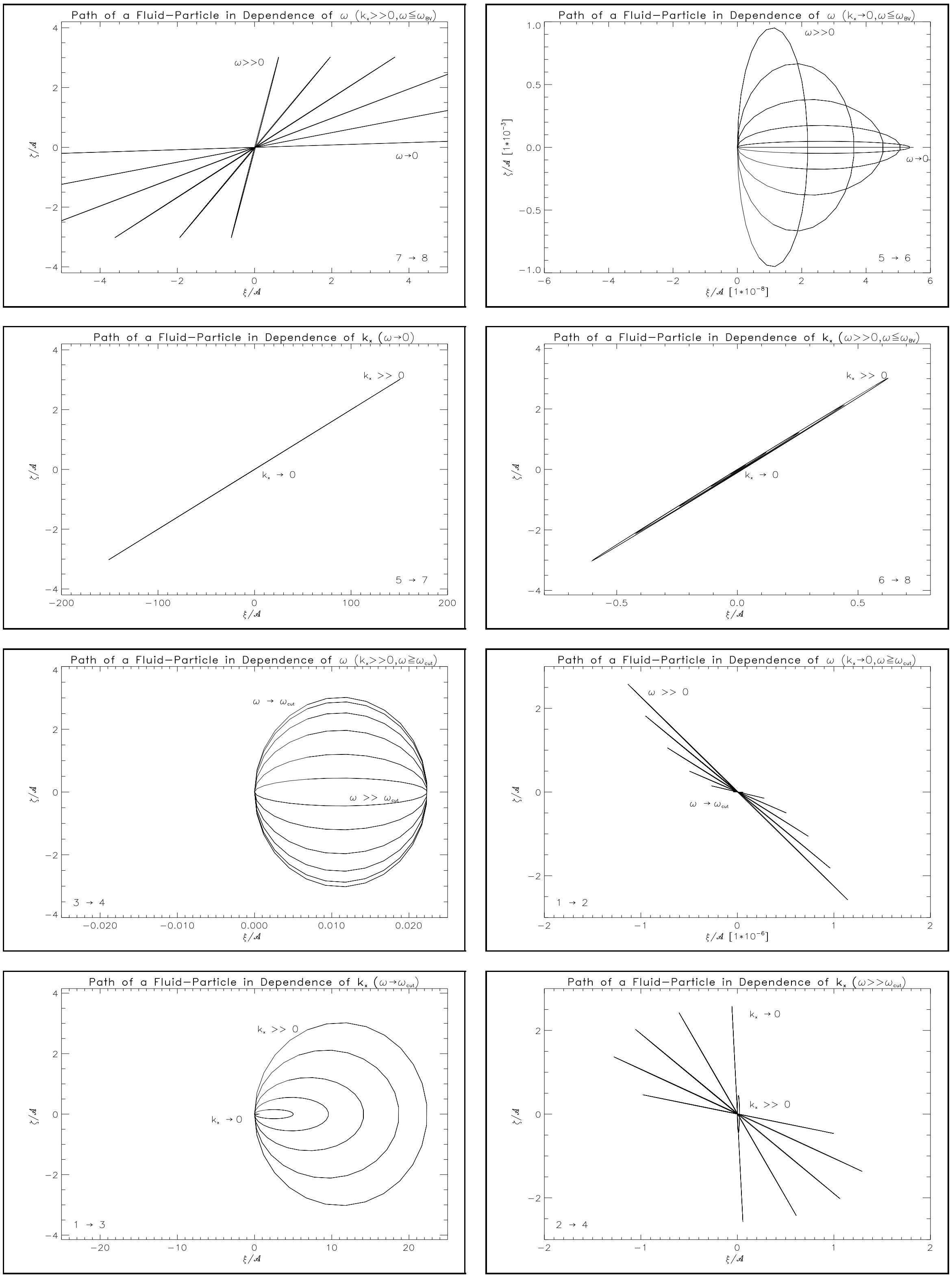


Abbildung 3.12: Die Auslenkung eines Gasteilchens in der unteren Atmosphäre ($x = 0, z = 0$) beim Passieren einer akustischen Welle in unterschiedlichen Bereichen des diagnostischen Diagramms. Geplottet ist jeweils eine Periode.

Hieraus folgt als Bedingungsgleichung für λ

$$-2\lambda c^2 + \gamma g = 0,$$

woraus

$$\lambda = \frac{\gamma g}{2c^2}. \tag{3.73}$$

Die resultierende Gleichung in v kann somit geschrieben werden

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Bv = 0, \tag{3.74}$$

mit

$$A = \frac{1}{c^2}, \tag{3.75}$$

$$B = \left(\frac{\gamma g}{2c^2}\right)^2. \tag{3.76}$$

Der Form nach ist dies die bekannte Telegraphengleichung, die in der Elektrotechnik die Ausbreitung von Strömen und Spannungen entlang von Leitern beschreibt. Unter Vorgabe von Anfangs– und Randbedingungen kann diese Differentialgleichung gelöst werden.

Die Atmosphäre sei zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe. Ebenso verschwinde die zeitliche Ableitung , d.h.

$$\lim_{t\to 0} v(z,t) = 0 \quad , \quad \lim_{t\to 0} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{3.77}$$

Wir wollen uns hier auf den Fall einer unendlich ausgedehnten Atmosphäre beschränken und geben die Randbedingungen als

$$\lim_{z\to 0} v(z,t) = Q_0(t) \quad , \quad \lim_{z\to\infty} v(z,t) = 0 \tag{3.78}$$

vor, wobei Q_0 zunächst eine beliebige Randerregung sein kann. Mit diesen eingeführten Bedingungen kann man in Gleichung (3.72) in der Zeitkomponente eine Laplacetransformation durchführen, um die Struktur der Gleichung zu vereinfachen. Findet man in der *Bildgleichung* $\mathcal{L}\{(3.74)\} = 0$ eine Lösung, so kann man durch Rücktransformation (falls diese existiert) die Lösung der Ursprungsgleichung erhalten. Sei

$$\mathcal{L}\{v(z,t)\} = w(z,s) \tag{3.79}$$

die Laplacetransformierte von v, dann reduziert sich Gleichung (3.74) auf

$$\frac{\partial^2 w(z,s)}{\partial z^2} - (As^2 - B)w(z,s) = 0. \tag{3.80}$$

Diese Gleichung besitzt als allgemeine Lösung

$$w(z,s) = q_0(s)e^{-\sqrt{As^2+B}z} + q_1(s)e^{+\sqrt{As^2+B}z} \tag{3.81}$$

wobei q_0 und q_1 durch die Anfangs– und Randbedingungen zu bestimmen sind. Bei einer unendlich ausgedehnten Atmosphäre verschwindet die Geschwindigkeit im Unendlichen, d.h. Reflexionen werden ausgeschlossen. Da der zweite Term in (3.81) eine rücklaufende Welle beschreibt, muß $q_1 = 0$ gelten.

Ein Problem entsteht mit der Rückübersetzung von w, da eine Exponentialfunktion keine Laplace–Transformierte besitzt. Um eine Rückübersetzung von (3.81) zu finden, schreiben wir daher den $e-$Faktor in der Form (Doetsch,1970,p.315)

$$e^{-\sqrt{As^2+Bz}} = e^{-\sqrt{A}sz} - \sqrt{B}z \cdot \int\limits_{\sqrt{A}z}^{\infty} e^{-st} \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\sqrt{t^2 - Az^2}\right)}{\sqrt{t^2 - Az^2}} dt \tag{3.82}$$

Definiert man

$$W(z,t) = -\sqrt{B}z \cdot \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\sqrt{t^2 - Az^2}\right)}{\sqrt{t^2 - Az^2}} \cdot H(t - \sqrt{A}z), \tag{3.83}$$

wobei H die Heavyside-Stufenfunktion ist, die definiert ist als

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 1 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$$

so kann man das Integral als Laplace-Transformation auffassen. Um auf (3.81) zurückzukommen, multiplizieren wir (3.82) mit q_0

$$\begin{aligned} w(z,s) &= q_0(s) e^{-\sqrt{As^2+Bz}} \\ &= q_0(s) e^{-\sqrt{A}sz} + q_0 \mathcal{L}\{W(x,t)\} \\ &= q_0(s) e^{-\sqrt{A}sz} + \mathcal{L}\{Q_0(t)\} \cdot \mathcal{L}\{W(x,t)\} \end{aligned} \tag{3.84}$$

Der erste Summand beinhaltet noch eine Exponentialfunktion, jedoch von einfacherer Struktur als in (3.81). Es zeigt sich, daß man sie mit Hilfe des *Verschiebungssatzes* zurückübersetzen kann (zu den wichtigsten Eigenschaften und Regeln der Laplace–Transformation siehe Anhang B)

$$\mathcal{L}\{q_0 e^{-\sqrt{A}sz}\} = Q_0(t - \sqrt{A}z) \cdot H(t - \sqrt{A}z) \tag{3.85}$$

Der zweite Summand besteht aus einer Multiplikation zweier Laplace- Transformierter. Wie bei der Fourier–Transformation entspricht auch bei der Laplace–Transformation einer Multiplikation im Bildraum einer Faltung im Ursprungsraum, also

$$\begin{aligned} v(z,t) &= Q_0(t - \sqrt{A}z) + \int\limits_0^t Q_0(t-\tau) \cdot W(z,\tau) d\tau \\ &= Q_0(t - \sqrt{A}z) \\ &\quad - \int\limits_0^t Q_0(t-\tau) \cdot \sqrt{B}z \cdot \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot \sqrt{\tau^2 - Az^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - Az^2}} \cdot H(\tau - \sqrt{A}z) d\tau. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Das Integral ist nicht analytisch lösbar. Jedoch kann es für sehr große Zeiten $t >> \sqrt{A}z$ entwickelt werden.

Als untere Randbedingung wollen wir nun eine harmonische Bewegung annehmen

$$Q_0 = V_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

Das Integral in (3.86) kann als Überlagerung von zwei unendlich ausgedehnten Wellenzügen im Intervall $[0,\infty]$ und $[t,\infty]$ beschrieben werden. Die Lösung in v kann dann geschrieben werden als (Kalkofen et al.,1993)

$$\begin{aligned}
v(z,t) &= V_0 e^{i\omega(t-\sqrt{A}z)} - \\
&\quad - \int_0^\infty \cdot e^{i\omega(t-\tau)} \sqrt{B}z \cdot \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot \sqrt{\tau^2 - Az^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - Az^2}} \cdot H(\tau - \sqrt{A}z) d\tau + \\
&\quad + \int_t^\infty e^{i\omega(t-\tau)} \cdot \sqrt{B}z \cdot \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot \sqrt{\tau^2 - Az^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - Az^2}} \cdot H(\tau - \sqrt{A}z) d\tau + \\
&= V_0 \cdot \int_0^\infty e^{i\omega(t-\tau)} \left\{ \delta(\tau - \sqrt{A}z) - \sqrt{B}z \cdot \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot \sqrt{\tau^2 - Az^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - Az^2}} \cdot H(\tau - \sqrt{A}z) \right\} d\tau \\
&\quad + V_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} (AB)^{\frac{1}{4}} z \int_t^\infty e^{i\omega(t-\tau)} \frac{\cos(\sqrt{\frac{B}{A}}\tau - \frac{3}{4}\pi)}{\tau^{\frac{3}{2}}} d\tau \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde das zweite Integral durch den asymptotischen Ausdruck der Besselfunktion für große Zeiten geschrieben. Das erste Integral kann bestimmt werden (Gradshteyn, Ryshik, 1980, eqn. 6.677) und liefert den Ausdruck

$$e^{i(\omega t - \sqrt{A(\omega^2 - B)}z)}.$$

Das zweite Integral läßt sich in Potenzen von t entwickeln (zur Ableitung der Entwicklung siehe Anhang C). Der dominante Term in der Reihe lautet

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (AB)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{z}{t^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(\frac{B}{A} - \omega^2)} \left(-\frac{B}{A} \sin(\sqrt{\frac{B}{A}}t - \frac{3}{4}\pi) + i\omega \cos(\sqrt{\frac{B}{A}}t - \frac{3}{4}\pi) \right)$$

Setzen wir für A und B ein und fügen den Skalenfaktor $\exp\{\lambda z\}$ ein, so ergibt sich als resultierender Ausdruck für u

$$\begin{aligned}
u(z,t) &= V_0 \left\{ e^{i(\omega t - \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_A^2} z)} \right. \\
&\quad - \sqrt{\frac{\gamma g}{\pi c^3}} \cdot \frac{z}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(\omega_A^2 - \omega^2)} \\
&\quad \left. \cdot \left(- \sin(\omega_A t - \frac{3}{4}\pi) + i\omega \cos(\omega_A t - \frac{3}{4}\pi) \right) \right\} \cdot e^{\frac{\gamma g}{2c^2} z}. \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

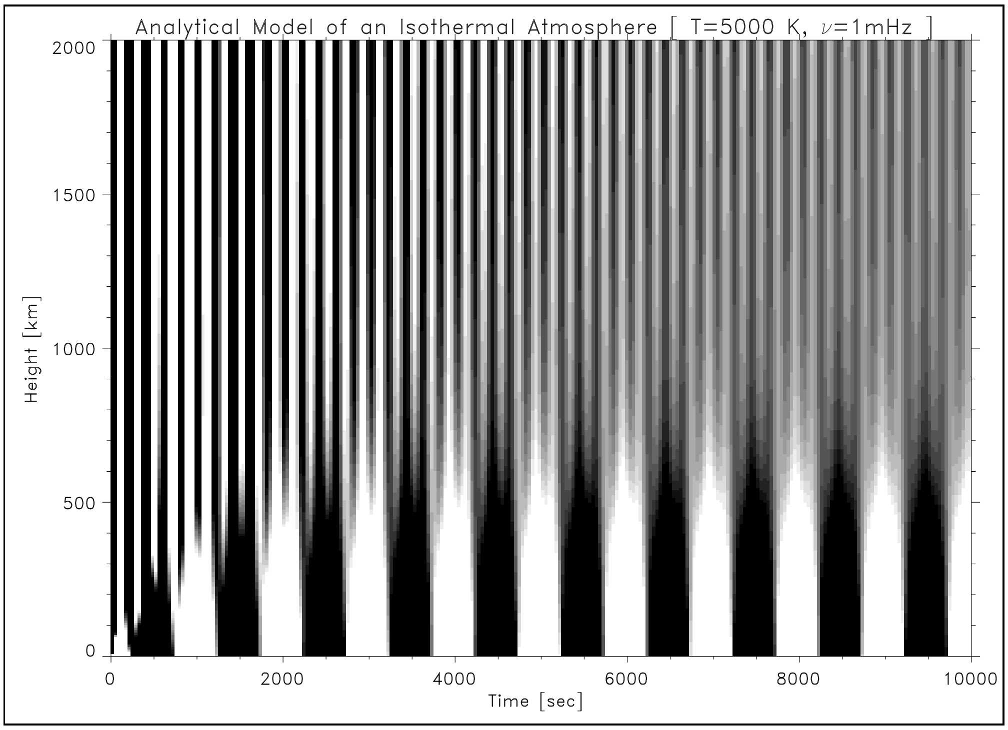


Abbildung 3.13: Grauplott der analytischen Rechnung für eine Frequenz von 1 mHz. Weiß bedeutet eine positive, schwarz eine negative Geschwindigkeit.

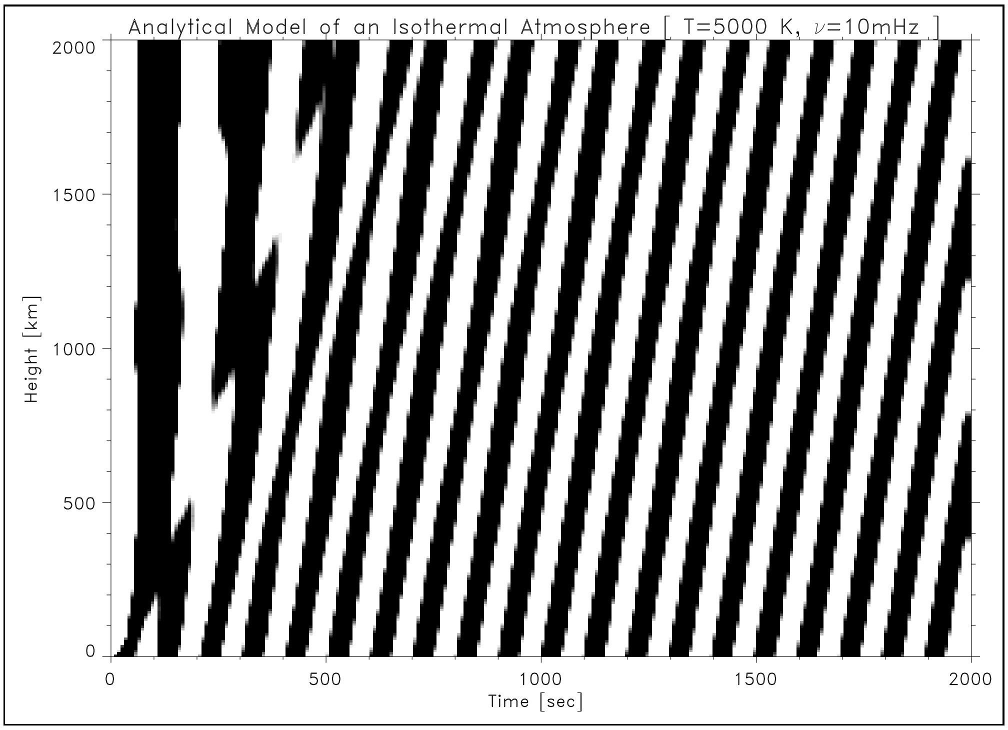


Abbildung 3.14: Die gleiche Darstellung wie in Abb.(3.13) für eine Frequenz von 10 mHz.

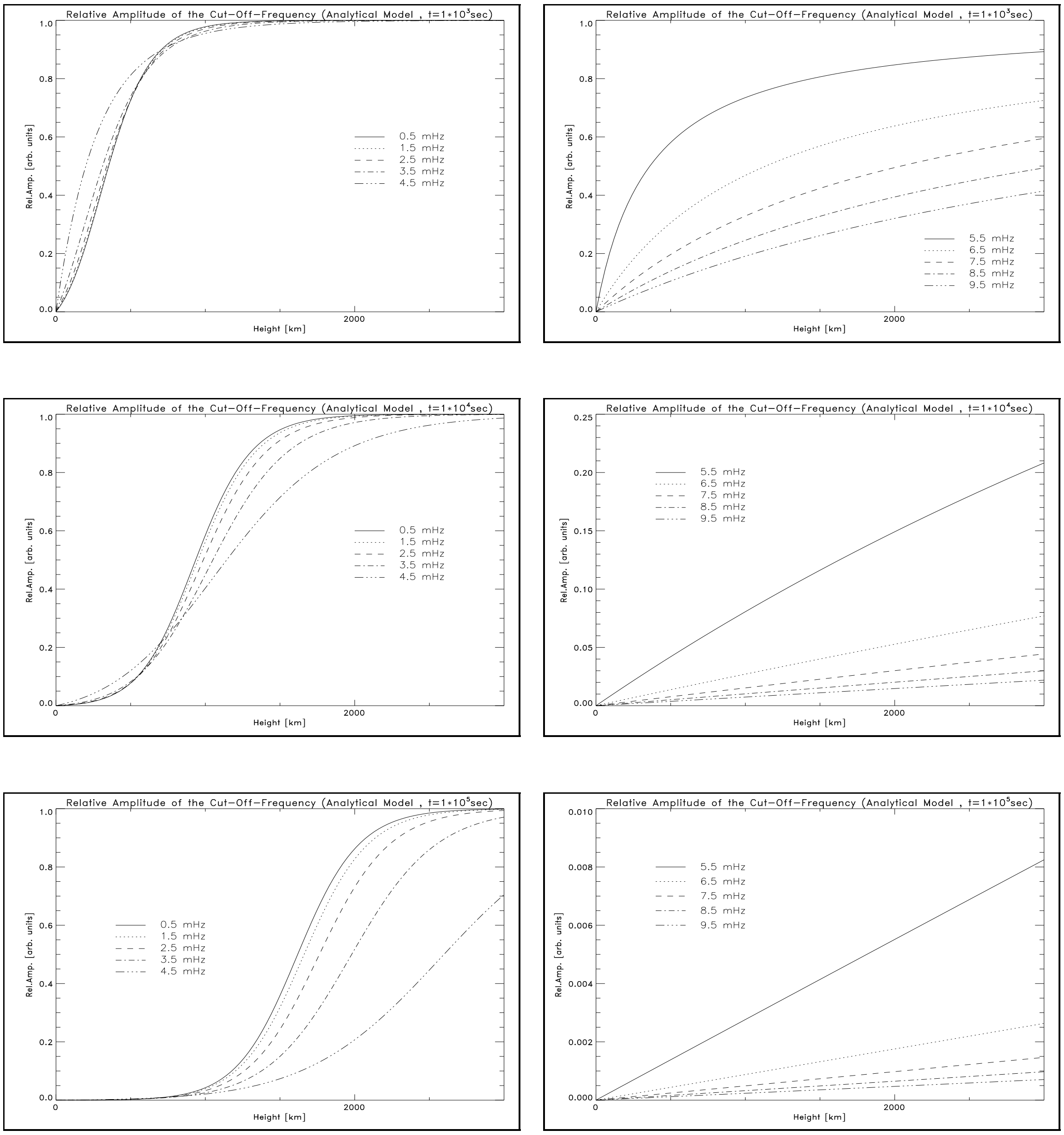


Abbildung 3.15: Darstellung des relativen Anteiles der Cut–Off– Frequenz zu der induzierten Schwingung. Die linke Spalte zeigt Frequenzen unterhalb, die rechte Spalte Frequenzen oberhalb der Cut–Off–Frequenz. Von oben nach unten sind die relativen Anteile zu den Zeiten $1 \cdot 10^3$ sec,$1 \cdot 10^4$ sec und $1 \cdot 10^5$ sec aufgetragen.

Die resultierende Geschwindigkeitsamplitude setzt sich somit aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Ausdruck beschreibt in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz ω eine propagierende oder evaneszente Welle. Der zweite Summand stellt eine Schwingung mit der Cut-Off-Frequenz ω_A dar, die sich der von außen induzierten Schwingung überlagert und für große Zeiten ein asymptotisches Abklingverhalten wie $t^{-\frac{3}{2}}$ besitzt. Da der Nenner jedoch die Differenz $\omega_A^2 - \omega^2$ enthält, dürfte die Entwicklung (3.88) nur für Fälle eine gute Näherung sein, bei denen die Anregungsfrequenz nicht zu nahe bei der Cut–Off–Frequenz liegt. Streng der Formel nach würde es sonst zu einer *Resonanzkatastrophe* kommen, bei der die Geschwindigkeitsamplitude u unendlich wachsen würde. Zu den analytischen Rechnungen zeigen die Abb.(3.13) und (3.14) das Geschwindigkeitsfeld einer isothermen Atmosphäre. Die Darstellung ist so gewählt, daß weiße Flächen negative Geschwindigkeiten, schwarze Flächen positive Geschwindigkeiten darstellen. Hierbei zeigt Abb.(3.13) eine Rechnung mit einer Wellenfrequenz $\nu = 1$ mHz. Deutlich erkennt man in dieser Darstellung die Änderung der Frequenz in ca. 500 km Höhe in die Cut–Off-Frequenz der Atmosphäre ($\nu = 5$ mHz). Die Parallelität der Wellen in Höhenrichtung entsteht durch die unendlich große Phasengeschwindigkeit, die für stehende Wellen charakteristisch ist. Im Gegensatz hierzu zeigt Abb.(3.14) eine Rechnung mit einer 10 mHz–Welle, d.h. einer Frequenz oberhalb der Cut–Off–Frequenz. Nach wenigen Wellenperioden überwiegt die erregende Frequenz über die freie Schwingung der Atmosphäre. Der nun schräge Verlauf der Wellenlinien erklärt sich durch den propagierenden Charakter der Wellen. Für eine Betrachtung der qualitativen Entwicklung der Amplitude der Cut–Off–Frequenz zeigt Abb.(3.15) den relativen Anteil der Amplitude der freien Schwingung im Verhältnis zur erzwungenen Schwingung für Anregungsfrequenzen unterhalb (links) und oberhalb der Cut–Off–Frequenz (rechts). Es zeigt sich, daß nach $1 \cdot 10^5$ sec die freie Schwingung im Fall kleiner Frequenzen immer noch einen beträchtlichen Anteil gegenüber der erzwungenen Schwingung besitzt, während sie bei hohen Frequenzen schon vollkommen vernachlässigbar ist (relativer Anteil $\sim 0.1\%$).

3.2 Numerische Rechnungen

Um das Schwingungsverhalten einer Atmosphärenstruktur von komplizerterer Gestalt als der isothermen Schichtung zu untersuchen, wurden neben isothermen auch polytrope Atmosphären mit sowohl positiven als auch negativen Temperaturgradienten, sowie die semiempirische VAL-C-Atmosphäre mit langperiodischen Wellen angeregt. Diese wurden am unteren Rand der Atmosphäre durch eine sinusförmige Kolbenbewegung simuliert. Hierbei wurde zum einen eine dauernde Sinusbewegung, zum anderen ein Puls untersucht, der durch ein Anhalten des Kolbens nach eine Periode erzeugt wurde. Die Periode der Wellen wurde jeweils so gewählt, daß sie oberhalb der entsprechenden *Cut-Off-Frequenz* der am niedrigsten auftretenden Temperatur lag. Motiviert durch die analytischen Ergebnisse der isothermen Atmosphäre (s.o.), ist zu erwarten, daß sich die Periode der induzierten Welle zu kürzeren Perioden hin verändern wird.

Um das Temperaturprofil der Startatmosphäre aufrecht zu erhalten, wurde die Amplitude der induzierten Welle so klein gewählt (die Machzahl lag zwischen $2.5 \cdot 10^{-4}$ und $4 \cdot 10^{-4}$), daß sich im Höhenverlauf der Atmosphäre keine Schocks bilden konnten, die eine Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie und damit eine Temperaturänderung bewirkt hätten. In einer nichthomogenen Schichtung, wie sie in einem Gravitationsfeld vorliegt, kommt es zwar immer zu einer Verzerrung des Wellenprofils was zu Schockbildung führt. Jedoch ist die Höhe in der sich ein Schock ausbilden wird, abhängig von der Periode und der Amplitude einer Welle. Langperiodische Wellen mit kleinen Amplituden werden erst sehr spät, kurzperiodische Wellen mit großen Amplituden bereits sehr früh Diskontinuitäten ausbilden. Durch Kombination von Periode und Amplitude kann man somit Wellentypen finden, bei denen sich erst außerhalb des Rechenbereiches einer Atmosphäre Schocks entwickeln werden. Mit den gewählten Geschwindigkeitsamplituden zeigte sich die Temperaturschichtung für alle untersuchten Modelle stabil. Die Ausdehnungen der Atmosphären wurden bei den isothermen Schichtungen zu 20 Skalenhöhen gewählt. Bei den polytropen Atmosphären wurden 2000 km, bei der VAL-C-Atmosphäre 1900 km zugrundegelegt. Bei der Diskussion der Modelle soll im folgenden jeweils zunächst die lineare Daueranregung und anschließend die Pulsanregung besprochen werden.

3.2.1 Die isotherme Atmosphäre

Die Daueranregung: Es wurden drei verschiedene Temperaturschichtungen - T= 3000K, 5000K, 8000K (Modell A,B,C respektive) - untersucht, wobei die Schwerebeschleunigung jeweils gleich der auf der Sonne gewählt wurde. Da die analytischen Rechnungen lediglich das Langzeitverhalten der Oszillationen hinreichend gut beschreiben, ist es von Interesse zu sehen wie sich eine Atmosphäre zu Beginn einer Rechnung auf eine Störung verhält. Die numerischen Rechnungen zeigten, daß alle Modelle qualitativ dasselbe Ergebnis liefern. Im folgenden soll daher Modell B repräsentativ behandelt werden. Weiterhin ist die Frage, für welche Zeit die asymptotische Näherung eine gute Näherung darstellt. Vergleiche mit den numerischen Ergebnissen sollen dies zeigen.

In Abb.(3.19) erkennt man, daß in 4 Skalenhöhen bei Modell B eine leichte Störung auftritt, die jedoch nach 1 – 2 Perioden bereits wieder verklungen ist. Zurück bleibt die induzierte Schwingung.

In 8 Skalenhöhen zeigt sich diese Störung bereits viel stärker ausgeprägt. Das ursprüngliche Wellenprofil besitzt bereits Einschnite, die sich als neue Schwingungsform entwickeln wollen. Um den Nullpunkt herum oszilliert diese Schwingung jedoch nur die ersten 100 Sekunden. Später *reitet* sie auf der Grundschwingung und ist nach ca. 6000 Sekunden wieder gänzlich verschwunden. Es verbleibt eine Schwingung in der Grundperiode, allerdings mit einem asymmetrischen Profil. Würde man die Rechnung noch weiter führen, so würde sich das Wellenprofil insgesamt wieder *erholen* und die erzwungene Schwingung würde zurückbleiben.

In 12 Skalenhöhen hat sich für die ersten 3000 Sekunden bereits eine neue Schwingungsform nahe der Cut–Off–Frequenz ausgebildet. Im Langzeitverhalten erkennt man wiederum eine abklingende Amplitude, die sich der erzwungenen Schwingung überlagert.

Geht man zu größeren Höhen über (16, 20 Skalenhöhen), so zeigt sich über den gesamten Rechenzeitraum eine Schwingung in der Cut–Off–Frequenz, deren Amplitude leicht fallenden Charakter besitzt, wie man dies aus den analytischen Überlegungen auch erwarten würde.

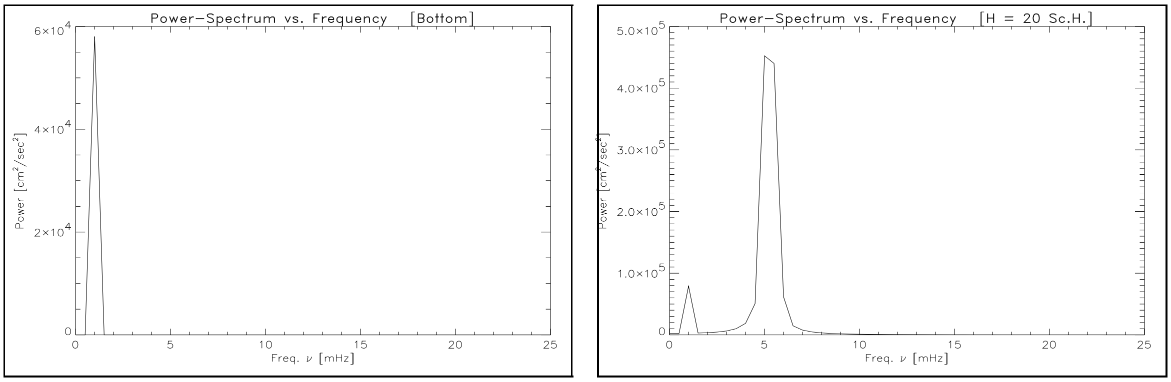


Abbildung 3.16: Powerspektrum der isothemen Atmosphäre am unteren und oberen Rand im Zeitintervall $t \in [7000, 9000]$ sec.

Auffallend ist die große Amplitude der ersten Wellen, die in die ruhende Atmosphäre laufen, sowie ein kleiner Wellenberg, der zwischen der 4. und 5. Periode liegt. Eine ähnliche Asymmetrie der Wellenform findet sich zischen dem 14. und 15. Wellenberg. Diese Asymmetrien scheinen von einer Schwebung zweier benachbarter Frequenzen herzurühren. Deutlich erkennt man ab ca. 3000 Sekunden die Form eines Wellenpaketes, welches sich zu späteren Zeiten in eine reine Sinusschwingung umwandelt, d.h. daß die eine Schwebungsfrequenz sehr viel stärker gedämpft wird als die andere. Es stellt sich die Frage, wo dieser kürzerperiodische Anteil seinen Ursprung besitzt. Mißt man die ersten Wellenberge aus, so erkennt man, daß eine zunächst noch kürzer periodische Welle sich in ca. 5 Perioden kontinuierlich in die Cut–Off–Periode einschwingt. Die Amplitude dieser Schwingung scheint einen ungefähr exponentiellen Abfall zu besitzen. D.h. die Cut–Off–Frequenz stellt sich erst nach einer gewissen Zeit ungestört ein. In Abb.(3.17) sieht man, daß die erste Welle, die in Atmosphäre einläuft sich in ca. 700 km in positive und negative Amplituden auffächert. Im weiteren Höhenverlauf wird die Periode der am weitesten links liegenden Welle kontinuierlich verringert. Qualitativ kann dies verständlich gemacht werden: Betrachtet man die Schwingungsformen, die sich zu späteren Zeiten ausbilden, so erkennt man stehende Wellen, die sich durch eine unendlich große Phasengeschwindigkeit auszeichnen, d.h. das Geschwindigkeitsprofil liegt parallel zur Höhenachse. Induziert man eine Welle in eine ruhende Atmosphäre, so verstreicht die Zeit $t = H/c$, bis die Welle den oberen Rand der Atmosphäre in der Höhe H erreicht hat. Deutlich wird dies an dem grauen Dreieck links in Abb.(3.17), das die Geschwindigkeit Null (ruhende Atmosphäre) bezeichnet. Beim Einschalten muß somit jede Welle, unabhängig von der Wellenlänge, propagierenden Charakter besitzen. Liegt die Anregungsperiode oberhalb der Cut–Off–Periode, so versucht die Atmosphäre darauf zu reagieren, indem sie diese in eine stehende Welle transformiert. Dieser Transformationsprozeß erfolgt kontinuierlich, wodurch am oberen Rand eine Stauchung der

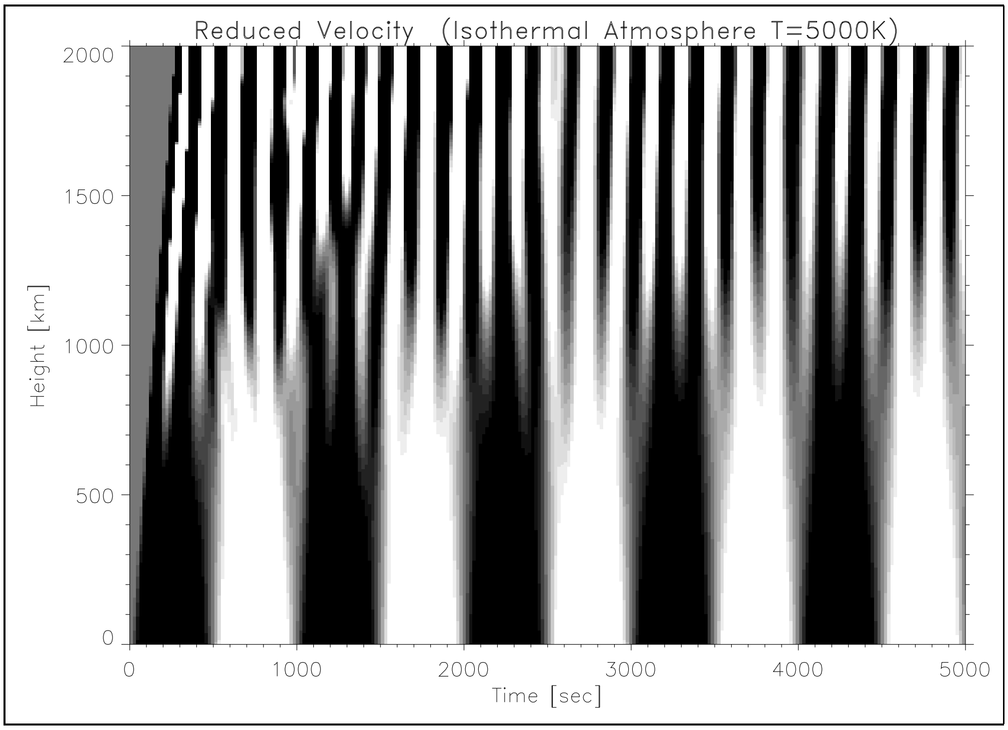


Abbildung 3.17: Geschwindigkeitsprofil der isothermen Atmosphäre bei der Daueranregung als Grauplott dargestellt.

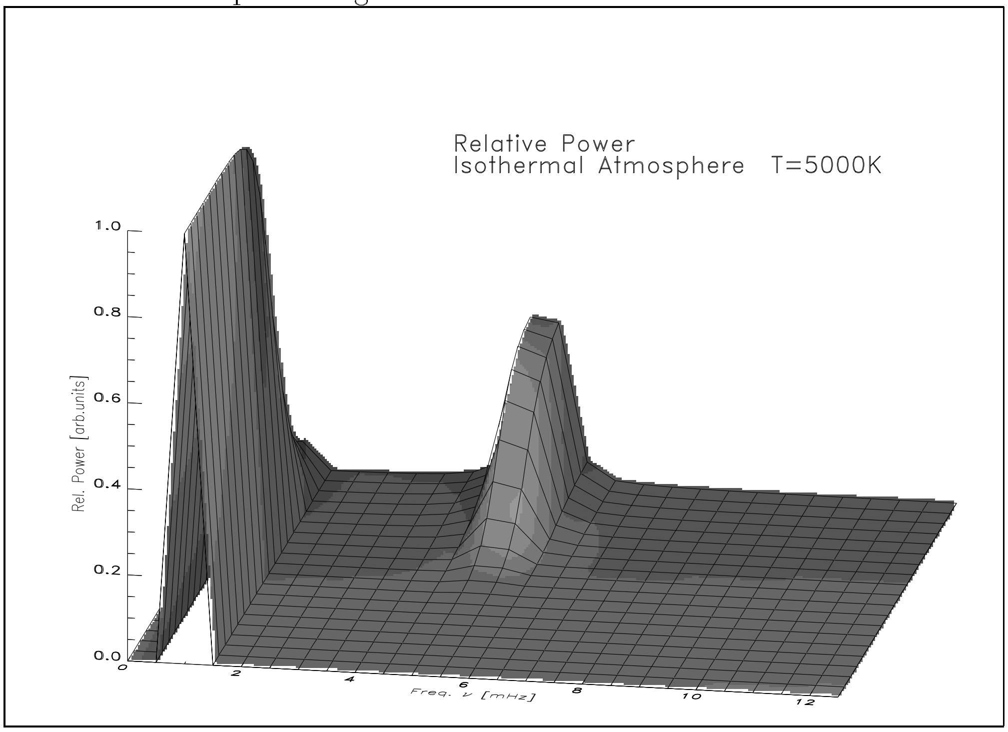


Abbildung 3.18: Das relative Powerspektrum der isothermen Atmosphäre bei der Daueranregung in Abhängigkeit der Höhe. Hierbei ist das Power in jeder Höhe auf 1 normiert worden. (Jede horizontale Linie bezeichnet hierbei eine Skalenhöhe).

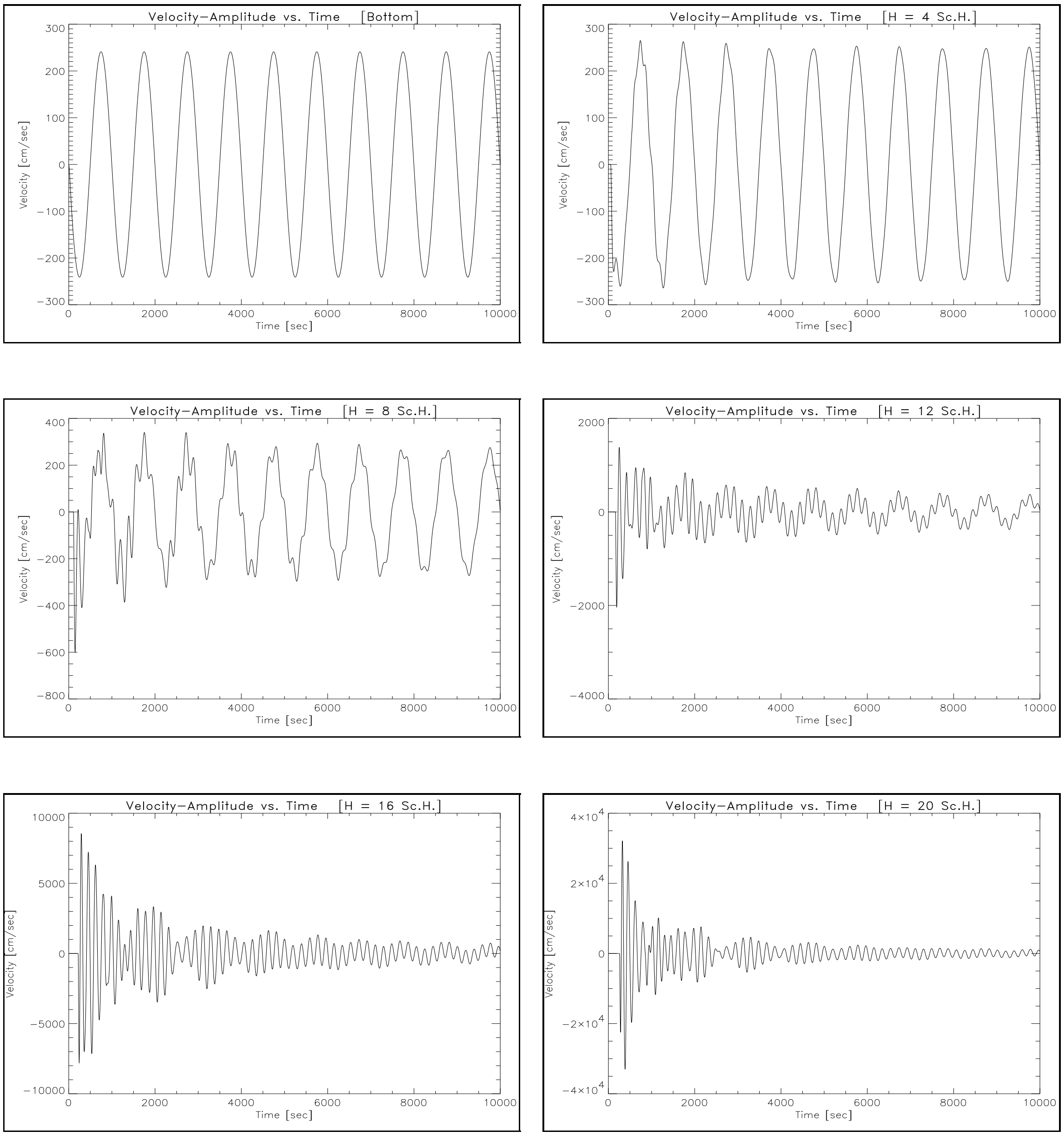


Abbildung 3.19: Geschwindigkeitsprofil der isothermen Atmosphäre in Abhängigkeit der Zeit in 4, 8, 12, 16 und 20 Skalenhöhen.

ersten Perioden beobachtet wird.

Die Pulsanregung: Wiederum soll hier eine isotherme Schichtung der Temperatur T=5000K als repräsentativ betrachtet werden. Angeregt wurde dieses Modell (im folgenden Modell D) mit einer 300 sec Schwingung, die nach einer Periode abgeschaltet wurde. Abb.(3.22) zeigt den Geschwindigkeitsverlauf mit der absoluten Amplitude in Abhängigkeit der Höhe. Abb.(3.20) zeigt den Geschwindigkeitsverlauf als Grauplott, wobei die Geschwindigkeit, der besseren Darstellbarkeit wegen, mit einem Skalenfaktor reduziert wurde.

Was an diesen Abbildungen auffällt ist, daß bereits am unteren Punkt der Atmosphäre nach Ausschalten der induzierten Störung sich eine freie Schwingung in der Cut–Off–Frequenz ausbildet. Der Puls wirkt sozusagen als Glockenschlegel, der die Atmosphäre in ihrer Eigenfrequenz anregt. Auffällig ist jedoch wiederum das höherfrequente Verhalten der Oszillation zu Beginn der Rechnung. Dies kann zum einen wiederum durch den Einschaltvorgang erklärt werden. Zum anderen ist das Abschalten der Welle, wodurch der Puls simuliert wird, so im Programm implementiert, daß die Kolbenbewegung auf die Geschwindigkeit Null gesetzt wird, wenn die Rechenzeit größer ist als die Wellenperiode. Da die Periode jedoch im allgemeinen kein Vielfaches des Zeitschrittes Δt sein wird, der programmintern durch die Courant–Bedingung geregelt wird, schwingt die Welle noch ein kurzes Stückchen in den negativen Geschwindigkeitsbereich und wird dann abrubbt auf Null gesetzt. Dieser Sprung induziert einen Stoß, der sich als kurzperiodische, kleinamplitudige Welle fortpflanzt und mit den langperiodischen Anteilen interferiert. Auf dem Grauplott ist ebenfalls eine zweite kurzperiodische Welle mit abgeschwächter Amplitude zu erkennen, die nach ca. 1300 sec den oberen Rand erreicht. Diese scheint von einer zweimaligen Reflexion (einmal oberer, einmal unterer Rand) zu stammen, die von der nicht perfekt arbeitenden oberen transmittierenden Randbedingung herrührt. In dem Grauplott erkennt man sehr gut den propagierenden Charakter dieser kurzperiodischen Welle, während die langperiodischen Anteile nahezu stehende Wellen ausbilden, was man durch die zur Zeitachse fast vertikal und parallel verlaufenden Streifen erkennt. Hierdurch bekommt man ein ungefähres Maß dafür, wie lange eine numerisch bedingte Störung resistent bleibt. Nach ca. 3000 sec ist die Störung verklungen. Zurück bleibt das Eigenschwingungsverhalten der Atmosphäre, dessen Abklingverhalten einer anderen Zeitskala gehorcht.

3.2.2 Die polytrope Atmosphäre

Es wurden ebenfalls drei unterschiedliche polytrope Atmosphären untersucht: Eine mit einem negativen Temperaturgradienten ($\alpha = -1.0$, Modell E), sowie zwei weitere mit einem positiven Gradienten ($\alpha = 0.5$, Modell F, sowie $\alpha = 1.0$, Modell G). Da sich die Atmosphären mit positiven und negativen Gradienten gänzlich unterschiedlich verhalten, sollen sie getrennt voneinander behandelt werden.

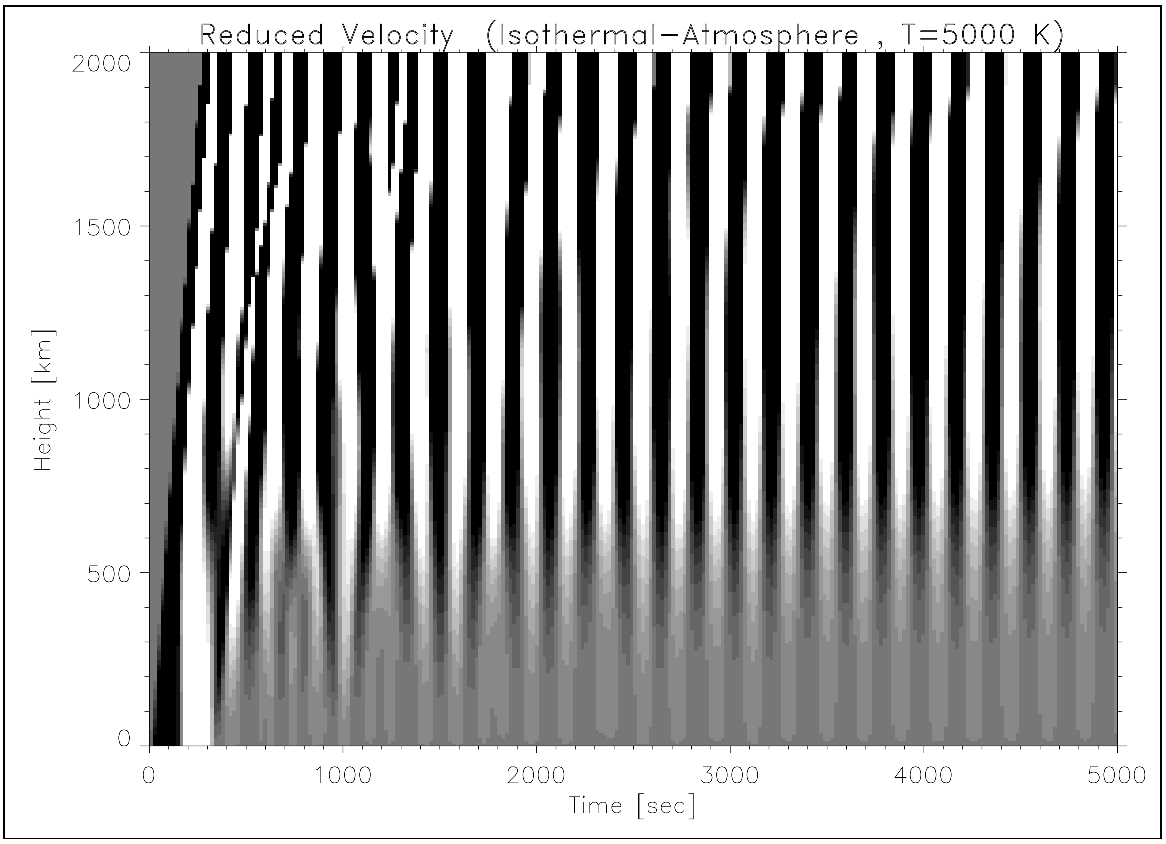


Abbildung 3.20: Geschwindigkeitsprofil wie in Abb.(3.17) für die Pulsanregung der isothermen Atmosphäre.

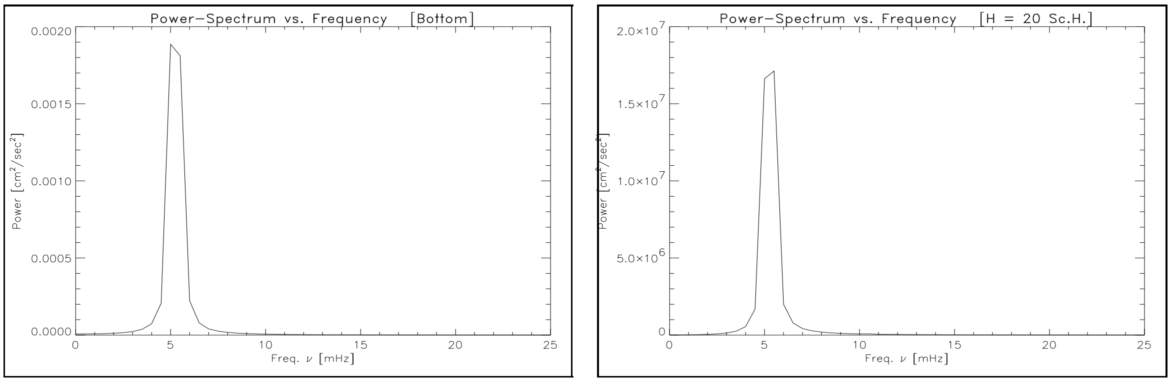


Abbildung 3.21: Powerspektrum der Pulsanregung in der isothermen Atmosphäre.

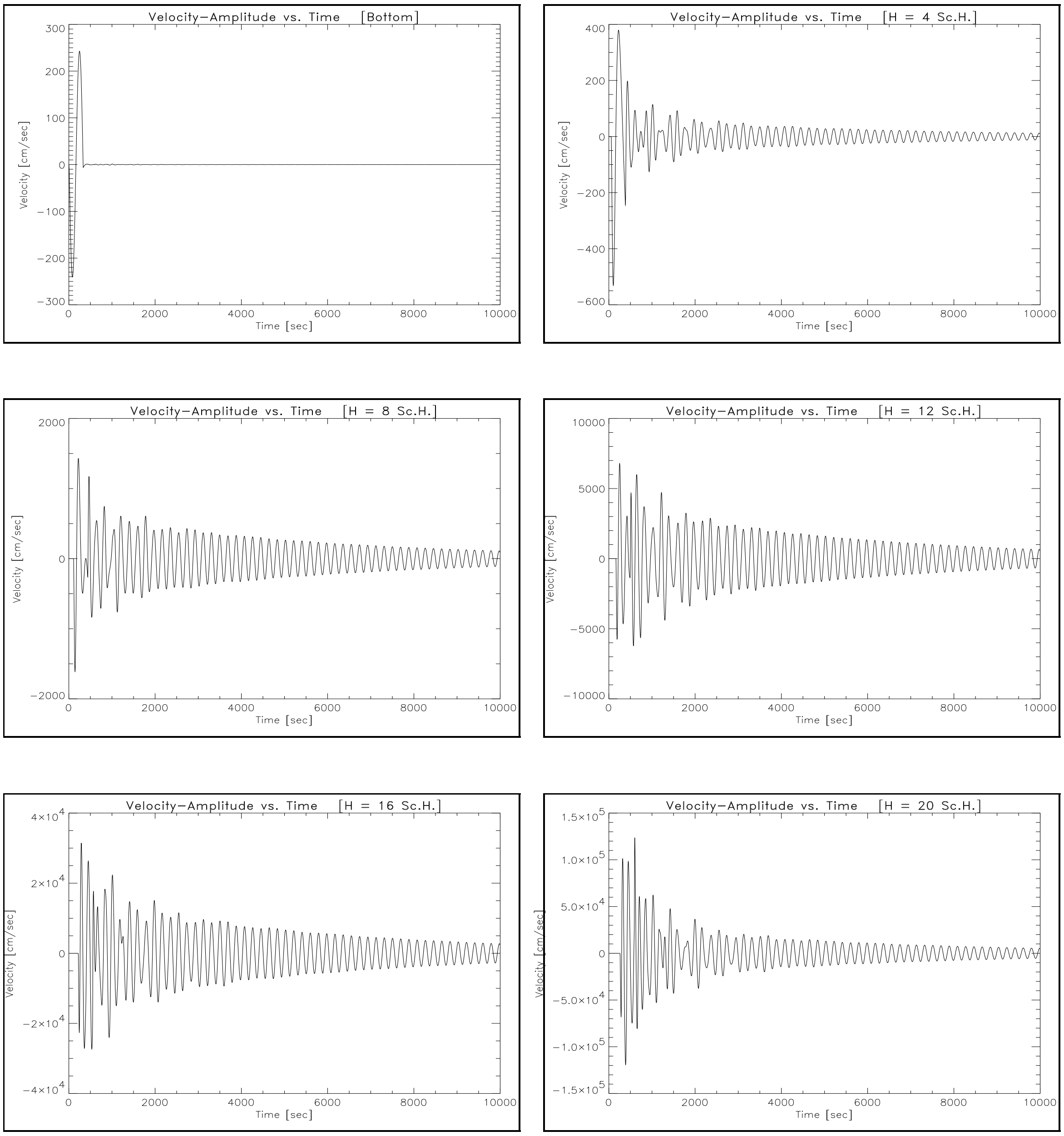


Abbildung 3.22: Geschwindigkeitsprofil der Pulsanregung in der isothermen Atmosphäre.

i) Der negative Gradient

Die Daueranregung: Abb. (3.26) zeigt den Geschwindigkeitsverlauf in dieser Atmosphäre in 6 unterschiedlichen Höhen. Induziert wird eine Welle, deren Periode (330 sec) oberhalb der *Cut–Off–Periode* liegt, die man der am höchsten auftretenden Temperatur in der Atmosphäre zuordnen könnte. Am Fußpunkt wurde eine Temperatur von 6000K vorgegeben, der eine *Cut–Off–Periode* von 220 sec entspricht. (Im folgenden soll stets von der *Cut–Off–Frequenz* bzw. *Cut–Off–Periode* nicht im strengen Sinne die Rede sein, da diese Begriffe nur für eine streng isotherme Schichtung definiert sind. Jedoch soll die Analogie dazu dienen ein ungefähres Maß dafür zu bekommen, was für ein Schwingungsverhalten man zu erwarten hat.) Man wird also annehmen, daß sich die Frequenz der Schwingung im Höhenverlauf der Atmosphäre ändern wird.

Im Gegensatz zur isothermen Atmosphäre fällt auf, daß in 400 km Höhe zwar auch eine leichte Deformation des Wellenprofiles einsetzt, sich jedoch ein langperiodischer Anteil überlagert, der nur sehr leicht abklingt. Es resultiert eine Sinusschwingung in der Erregerfrequenz, die auf einer Welle mit einer ungefähren Periode von P=1000 sec *reitet*.

In 800 km Höhe scheint sich eine kürzere Periode ausbilden zu wollen. Die Einschnitte, die sich in der induzierten Welle bilden, besitzen jedoch ebenfalls abklingenden Charakter.

Erst in 1200 km hat sich diese kurze Periode durchgesetzt, wobei sich kleine Amplituden mit großen abwechseln.

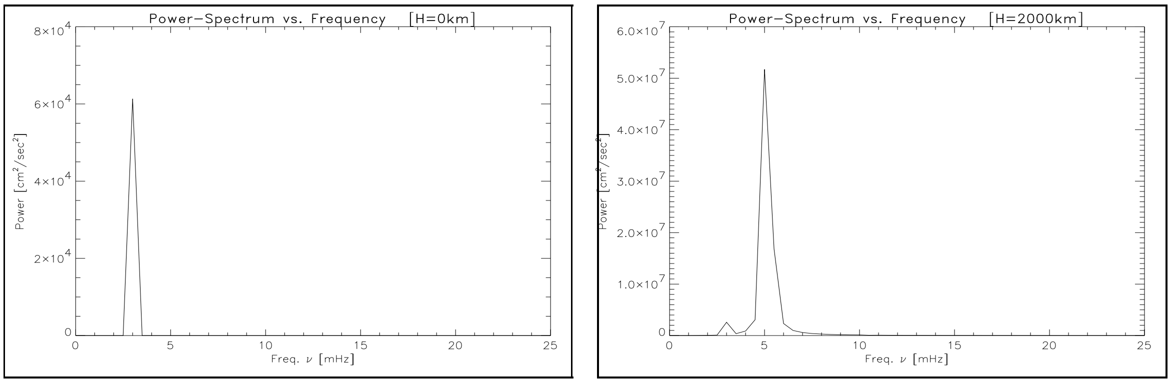


Abbildung 3.23: Powerspektrum am unteren und oberen Rand der polytropen Atmosphäre mit negativem Gradienten (Modell E).

Geht man zu noch größeren Höhen über, so erkennt man deutlich, ähnlich wie bei der isothermen Atmosphäre einen Wellenpaketcharakter. Auch hier (siehe z.B. 2000 km Höhe) lösen sich zunächst sehr kurzperiodische Anteile in die zeitlich resistente Schwingung auf. Betrachtet man das relative Powerspektrum (s.Abb.(3.24)), in dem das Power in jeder Höhe auf 1 normiert ist, im Intervall $t \in [500, 2500]$ sec, so erkennt man, daß in der obersten Atmosphäre zwei Schwingungen mit 5 mHz und 6 mHz nebeneinander existieren, wobei die 5 mHz–Schwingung einen abfallenden Charakter gegenüber der 6 mHz–Schwingung besitzt. Neben diesen beiden dominanten Amplitu-

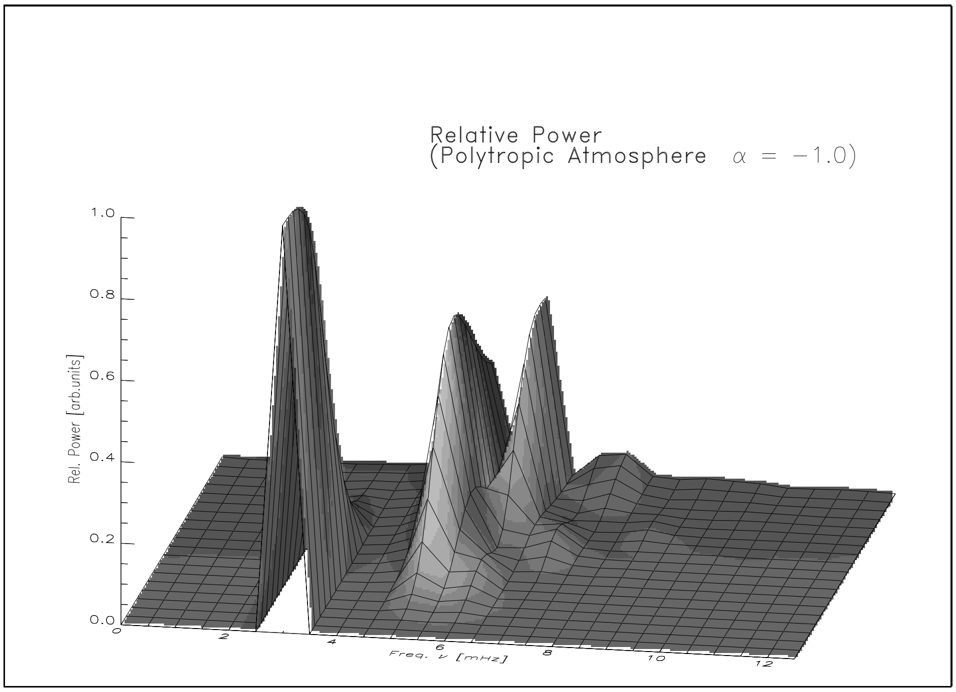


Abbildung 3.24: Darstellung wie in Abb.(3.18) für die polytrope Atmosphäre mit negativem Temperaturgradienten im Zeitintervall $t \in [500, 2500]$ sec. (Eine horizontale Linie entspricht hier einer Höhe von 100 km).

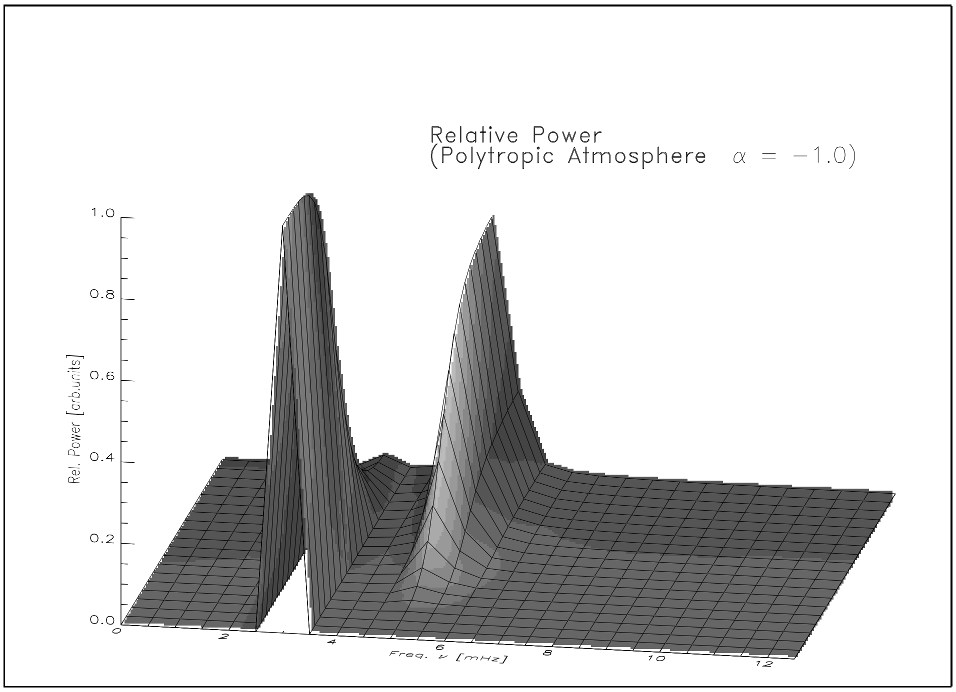


Abbildung 3.25: Dieselbe Darstellung wie oben für das Zeitintervall $t \in [7000, 9000]$ sec.

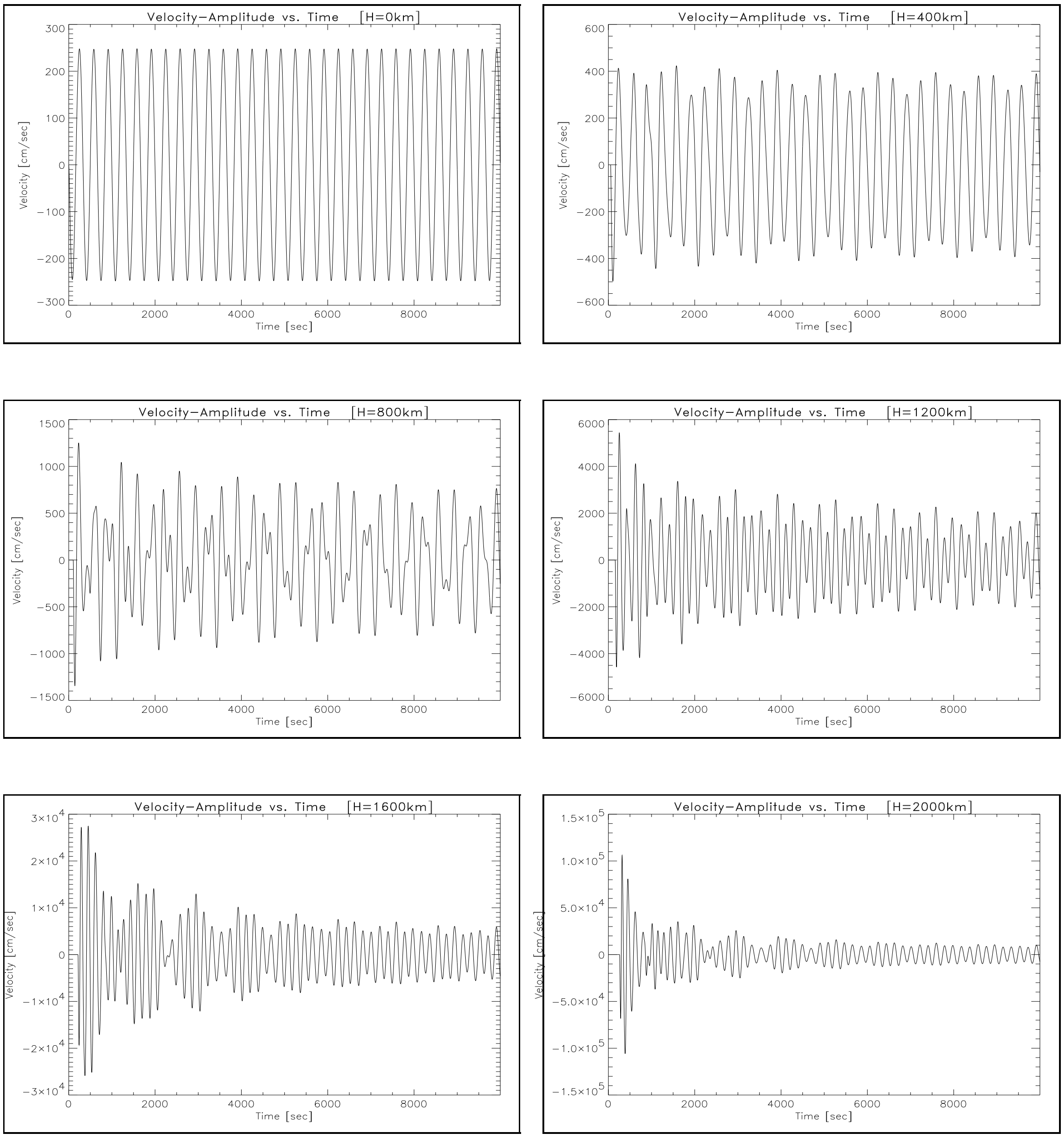
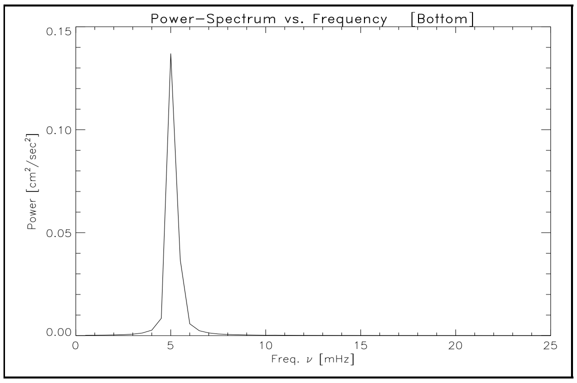


Abbildung 3.26: Geschwindigkeitsverlauf von Modell E als Funktion der Zeit in verschiedenen Höhen.



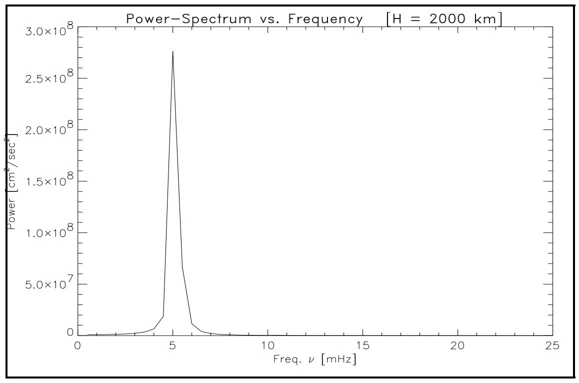


Abbildung 3.27: Powerspektrum am unteren und am oberen Rand der Atmosphäre aus Modell H bei der Pulsanregung.

den existiert noch ein kleiner Anteil im Bereich um 7 mHz. Die Grundschwingung von 3 mHz ist im oberen Bereich gänzlich verschwunden.

Ein anderes Bild bietet sich, wenn man das Langzeitverhalten studiert. Abb.(3.25) zeigt das relative Power im Intervall $t \in [7000, 9000]$ sec. Die 6 mHz– sowie die höherfrequenten Schwingungen sind in der hohen Atmosphäre vollständig verschwunden. Zurück geblieben ist eine 5 mHz–Schwingung. Ebenfalls auffällig ist, das die in die Atmosphäre induzierte 3 mHz–Welle erst in einer größeren Höhe (ca.600 km gegenüber ca.400 km im ersten Zeitintervall) ihren dominanten Charakter verliert, sowie, daß sie noch eine geringe Amplitude am oberen Rand besitzt. Erstaunlich ist in Abb.(3.25) die Ähnlichkeit zu einer isothermen Schichtung. Die Frequenz, die resultiert, entspricht näherungsweise der Cut–Off–Frequenz der Fußpunkttemperatur. Interessant ist ebenfalls das absolute Power im späten Zeitintervall. Zum einen erkennt man zwar deutlich das Zurücktreten der induzierten Welle gegenüber der 5 mHz–Oszillation, zum anderen jedoch ein Wachsen der Geschwindigkeitsamplitude (von ca.250cm/sec auf 1500cm/sec) im Höhenverlauf der Atmosphäre, d.h. daß die exponentielle Aufsteilung der Amplitude durch den Skalenfaktor über eine exponentielle Dämpfung aufgrund des evanezenten Charakters überwiegt.

Die Pulsanregung: (Modell H) Abb.(3.28) zeigt den Geschwindigkeitsverlauf als zeitliches Profil in mehreren Höhen. Qualitativ scheint keine Änderung gegenüber der isothermen Atmosphäre eingetreten zu sein. Auch hier resultiert eine Eigenschwingung der gesamten Atmosphäre, die sich mit der Höhe aufsteilt und in der Zeit sehr langsam verklingt. Abb.(3.27) zeigt das Powerspektrum, daß bei derselben Frequenz wie im Fall der Daueranregung sein Maximum besitzt..

ii) Der positive Gradient

Die Daueranregung: Für die Modelle F, G wurde als Fußpunkttemperatur ebenfalls 6000 K gewählt. Einem positiven Temperaturgradienten von $\alpha = 0.5$ bzw. $\alpha = 1.0$ entsprechen Temperaturen von 7000 K bzw. 8000 K am oberen Rand für eine Ausdeh-

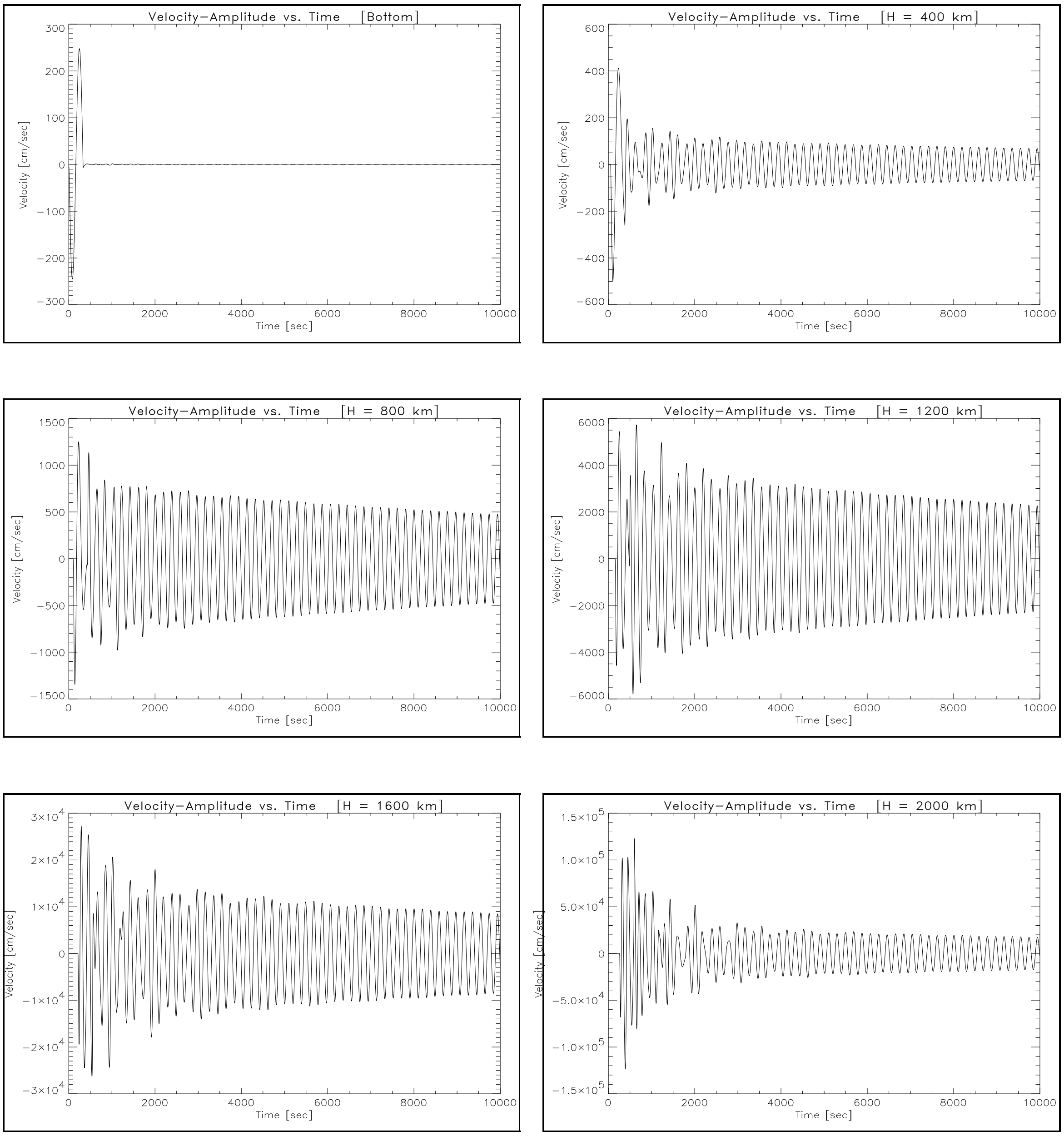


Abbildung 3.28: Geschwindigkeitsverlauf bei der Pulsanregung in der polytropen Atmosphäre mit negativem Temperaturgradienten.

nung von 2000 km. Mit diesen Temperaturen kann man *Cut–Off–Perioden* von 240 sec bzw. 250 sec assoziieren. Für die induzierte Welle wurden wiederun 3 mHz (P=330 sec) als Anregungsfrequenz gewählt, welche unterhalb jeder auftretenden Grenzfrequenz liegt. Abb.(3.32) zeigt den Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit der Höhe von Modell G. Ähnlich wie bei der isothermen Atmosphäre wird in geringer Höhe (400 km) eine Anfangsstörung sehr schnell kompensiert. Nach ca. 3000 sec hat man praktisch wieder eine symmetrisch verlaufende Sinusschwingung. Dieses starke Abklingverhalten der Störung beobachtet man im gesamten Verlauf der Atmosphäre. Die zunächst einsetzende Störung, die wie bei den anderen Atmosphärentypen zunächst von kurzperiodischen Anteilen ausgeht und bei der von der induzierten Welle nichts mehr zu erkennen ist, löst sich langsam auf. Die ersten 3000 sec besitzt die Wellenform ein ähnliches Aussehen wie bei den Modellen A-C und E. Vollständig unterschiedlich zu den vorhergehenden Modellen ist jedoch das Abklingverhalten der Störung. Nach ca. 3000 sec ist die am Fußpunkt induzierte Periodizität wieder hergestellt und nach ca. 7000 sec besitzt die Welle wieder einen vollkommen symmetrischen Verlauf um den Geschwindigkeitsnullpunkt.

Wie bei Modell E beobachtet man im Powerspektrum aus dem Zeitintervall $t \in [500, 2500]$ sec Störfrequenzen bei 4.5 mHz und 6 mHz, die durch den besprochenen Einschalteffekt zustandekommen.

Betrachtet man das Powerspektrum im Zeitintervall $t \in [7000, 9000]$ sec (Abb.(3.31)) so ist nur noch die erzwungene Schwingung vorhanden, deren Amplitude von ca. 250 cm/sec auf 1000 cm/sec im Höhenverlauf anwächst. Ein sehr ähnliches Verhalten zeigt sich bei Modell F, jedoch ist die Störfrequenz länger vorhanden. Dies sollte man aus den Ergebnissen der Modelle A–C und Modell G auch erwarten. Verringert man nämlich den positiven Temperaturgradienten kontinuierlich auf Null, so erhält man die isotherme Atmosphäre, in der die Abklingzeit der Störung sehr lang ist. Modell F sollte also ein mittleres Abklingverhalten besitzen, was man auch beobachtet.

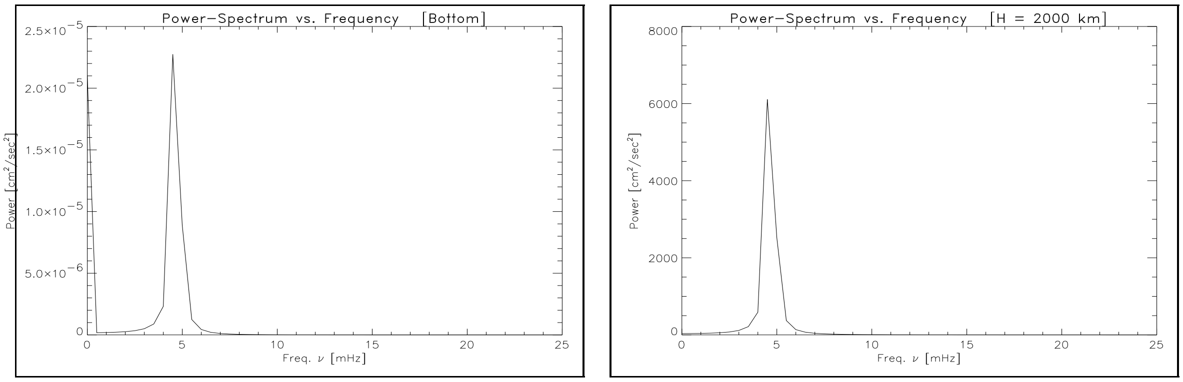


Abbildung 3.29: Powerspektrum der Pulsanregung von Modell I am unteren und oberen Rand der Atmosphäre.

Die Pulsanregung: (Modell I) Abb.(3.33) zeigt das Geschwindigkeitsprofil der Welle in Abhängigkeit der Höhe und der Zeit. Auch bei dieser Atmosphäre ist die zu erwar-

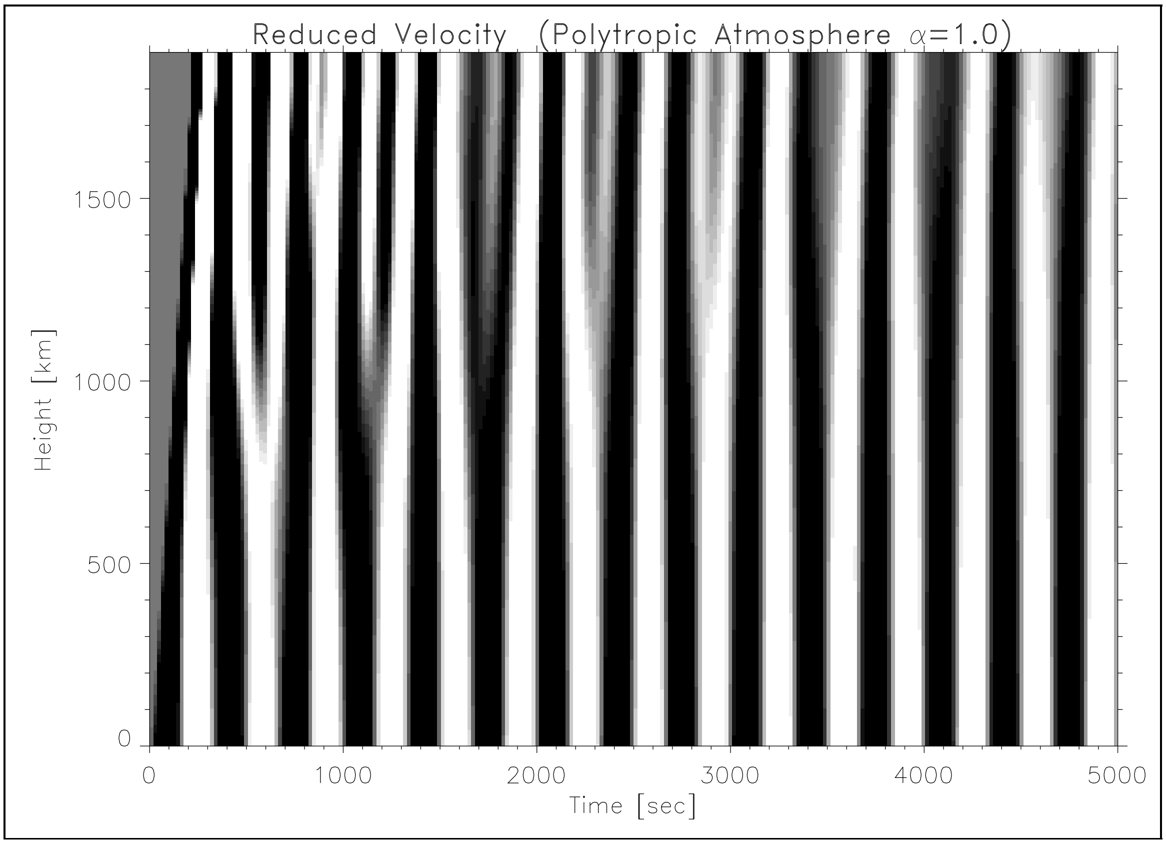


Abbildung 3.30: Geschwindigkeitsverlauf der polytropen Atmosphäre mit positivem Temperaturgradienten als Grauplott dargestellt (Weiß entspricht wieder positiver, schwarz negativer Geschwindigkeit).

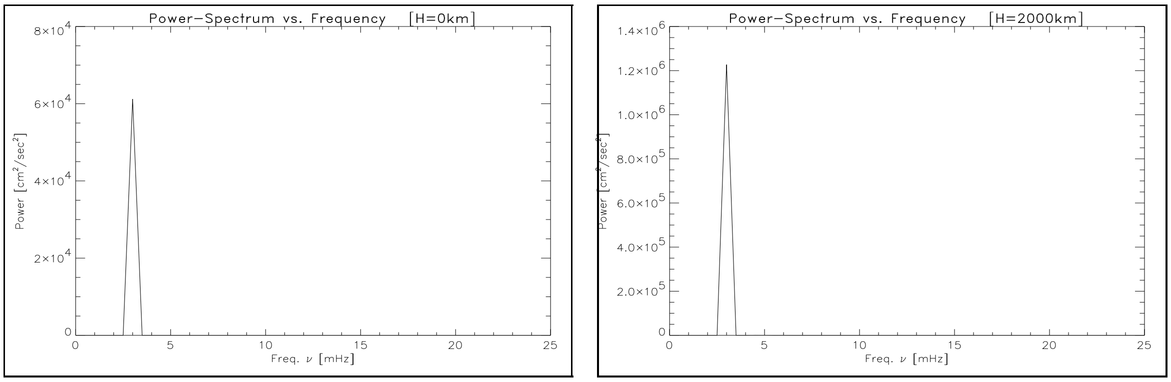


Abbildung 3.31: Powerspektrum aus Modell G am unteren und oberen Rand der Atmosphäre.

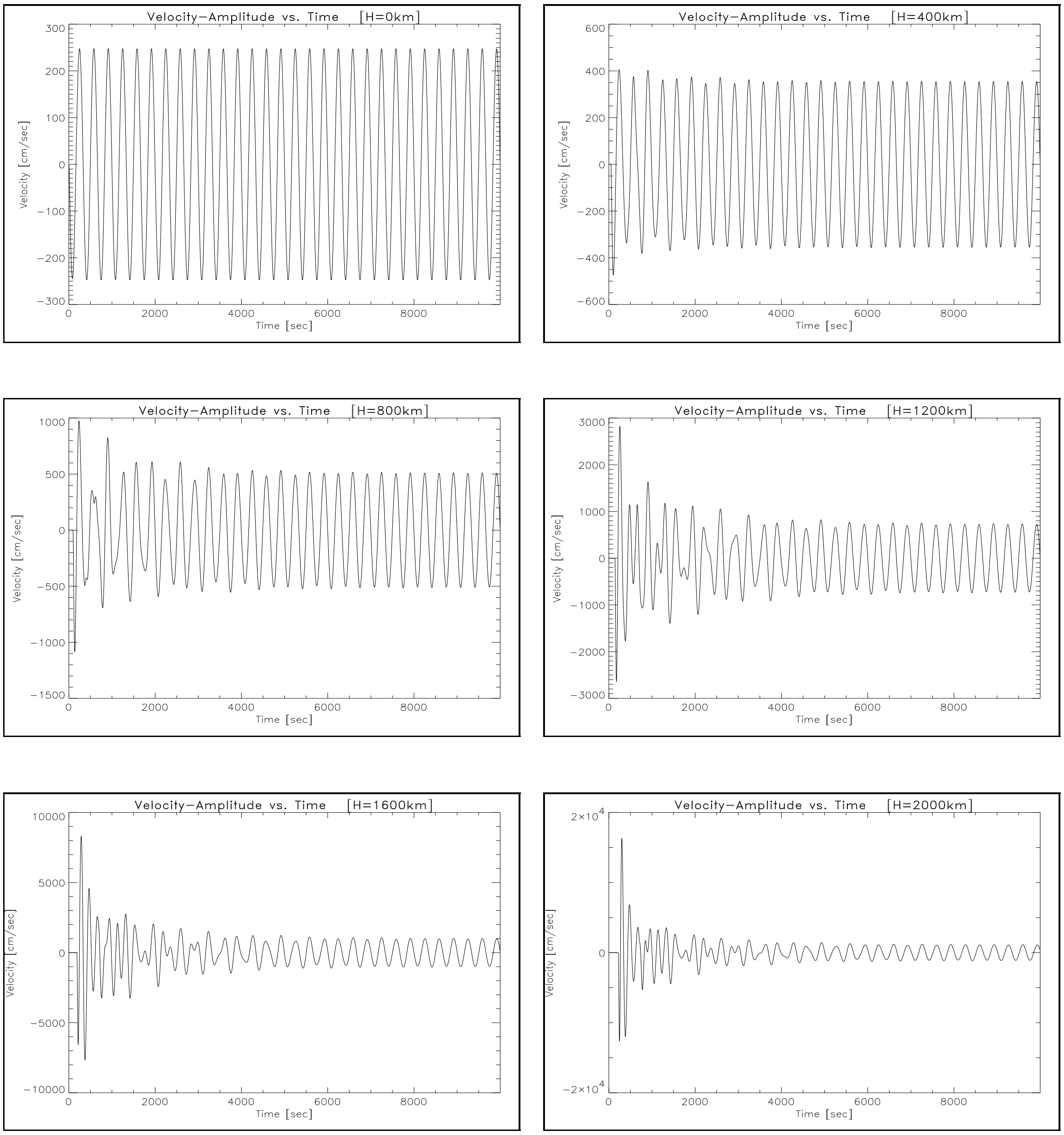


Abbildung 3.32: Geschwindigkeitsprofil aus Modell G in Abhängigkeit der Zeit in unterschiedlichen Höhen der Atmosphäre.

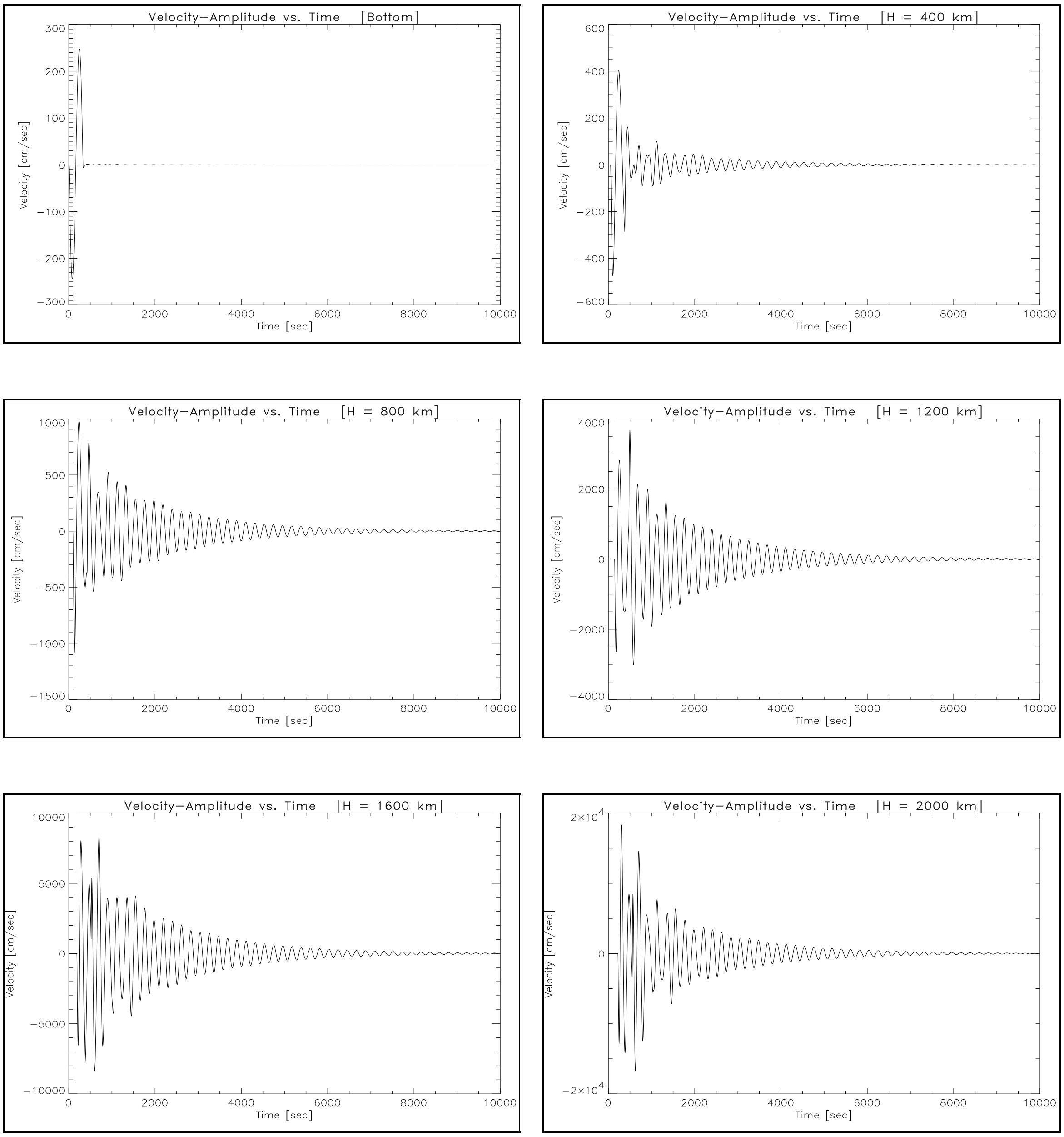


Abbildung 3.33: Geschwindigkeitsverlauf in Modell I in unterschiedlichen Höhen als Funktion der Zeit.

tende kurzperiodische Verdichtungswelle zu beobachten, die das Wellenprofil die ersten 1000 sec stört. Das Erstaunliche ist jedoch, daß diese Atmosphäre ein gänzlich anderes Abklingverhalten der Störung aufweist. Man beobachtet ebenso wie bei den anderen Modellen bereits am unteren Rand eine freie Schwingung kleiner Amplitude, die sich im Verlauf der Höhe aufsteilt, jedoch wird diese Oszillation sehr stark in der Zeit gedämpft, so daß die Amplitude nach 10000 sec praktisch vernachlässigt werden kann (am oberen Rand besitzt die Geschwindigkeitamplitude nur noch ca. 50 cm/sec). Zu beachten ist weiterhin, daß die Amplitude der freien Schwingung trotz jeweils identischer erzwungener Schwingung in den unterschiedlichen Modellen, sehr viel kleiner ist – ungefähr um den Faktor 10 – als im Fall der isothermen und polytropen Atmosphäre mit negativem Temperaturgradienten.

3.2.3 Die VAL–C–Atmosphäre

Die Daueranregung: Die VAL–Atmosphäre besitzt oberhalb 500 km Höhe einen positiven Temperaturgradienten, der von 800 km an bis zu ca. 2000 km als nahezu konstant angesehen werden kann. In diesem Bereich ist die Atmosphäre somit durchaus mit einer polytropen Schichtung, ähnlich wie der in Modell F, zu vergleichen.

Betrachtet man die Geschwindigkeitsverteilung aus Abb.(3.35), so erkennt man in der Tat Parallelitäten zwischen den beiden Atmosphärentypen, wobei die Abklingzeit der Störung in der VAL–Atmosphäre kleiner ist als die von Modell F. Auch hier zeigt eine Analyse im Zeitintervall $t \in [500, 2500]$ sec die dicht beieinanderliegenden Frequenzen bei 5 mHz und 6,5 mHz, sowie ein breiteres, höherfrequentes Band kleiner Amplitude. Diese Frequenzanteile verschwinden jedoch vollständig nach längerer Rechenzeit und nach ca. 5000 sec ist nur noch die erzwungene Schwingung vorherrschend.

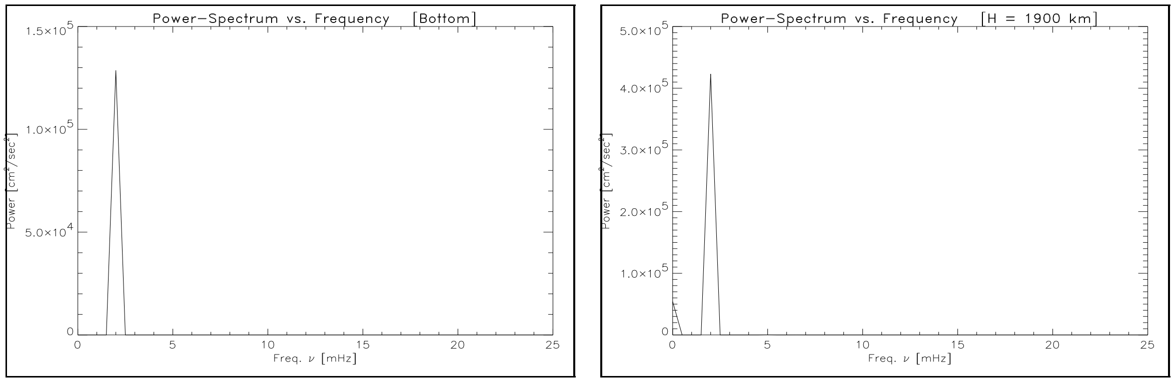


Abbildung 3.34: Das absolute Power im Zeitintervall $t \in [7000, 9000]$ sec der VAL–Atmosphäre am Fußpunkt und am oberen Rand.

Die Pulsanregung: Man beobachtet auch hier eine sehr große Ähnlichkeit zu der polytropen Atmosphäre mit positivem Temperaturgradienten. Aus den Rechnungen

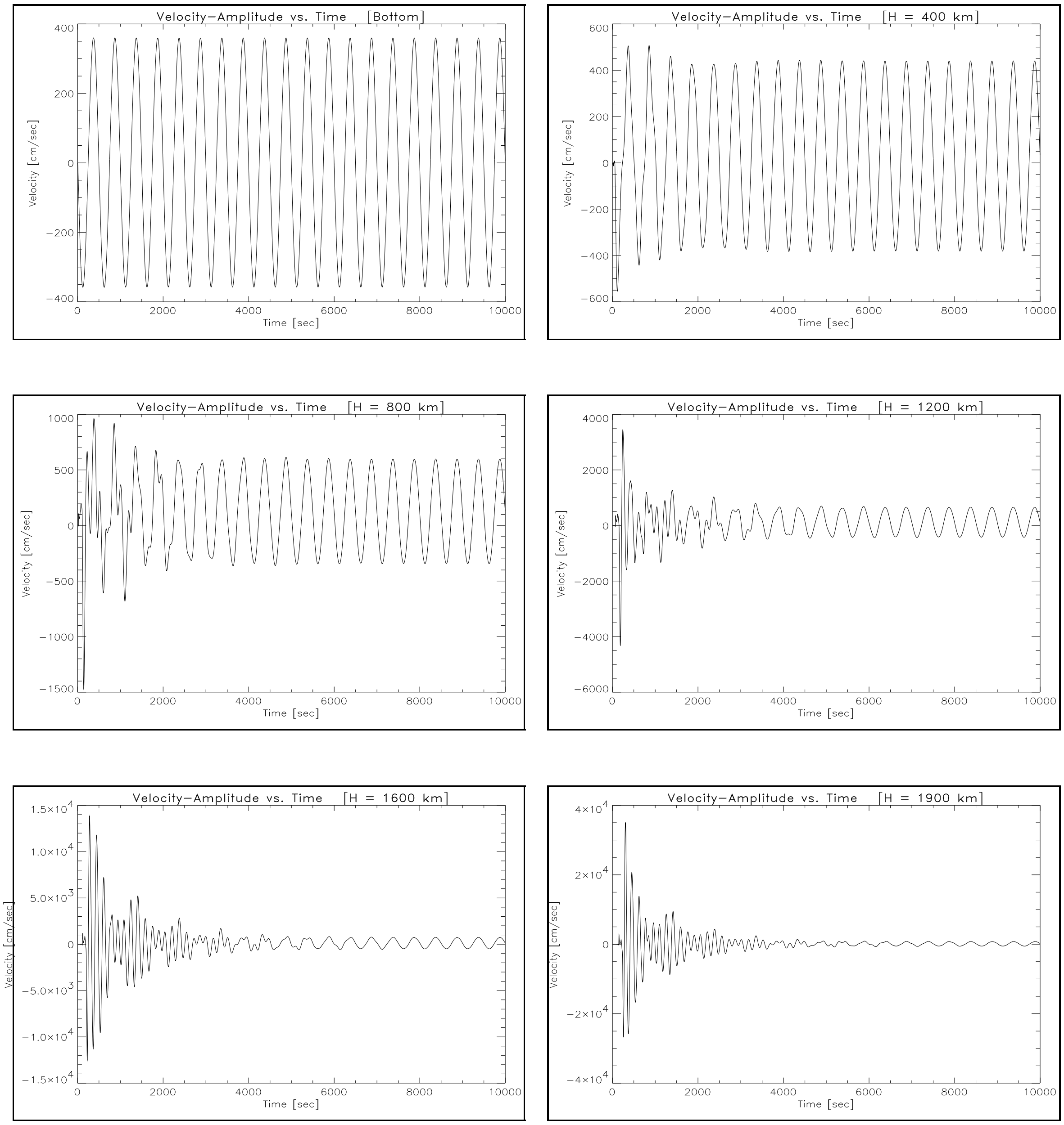


Abbildung 3.35: Der Geschwindigkeitsverlauf als Funktion der Zeit in unterschiedlichen Höhen der VAL–Atmosphäre.

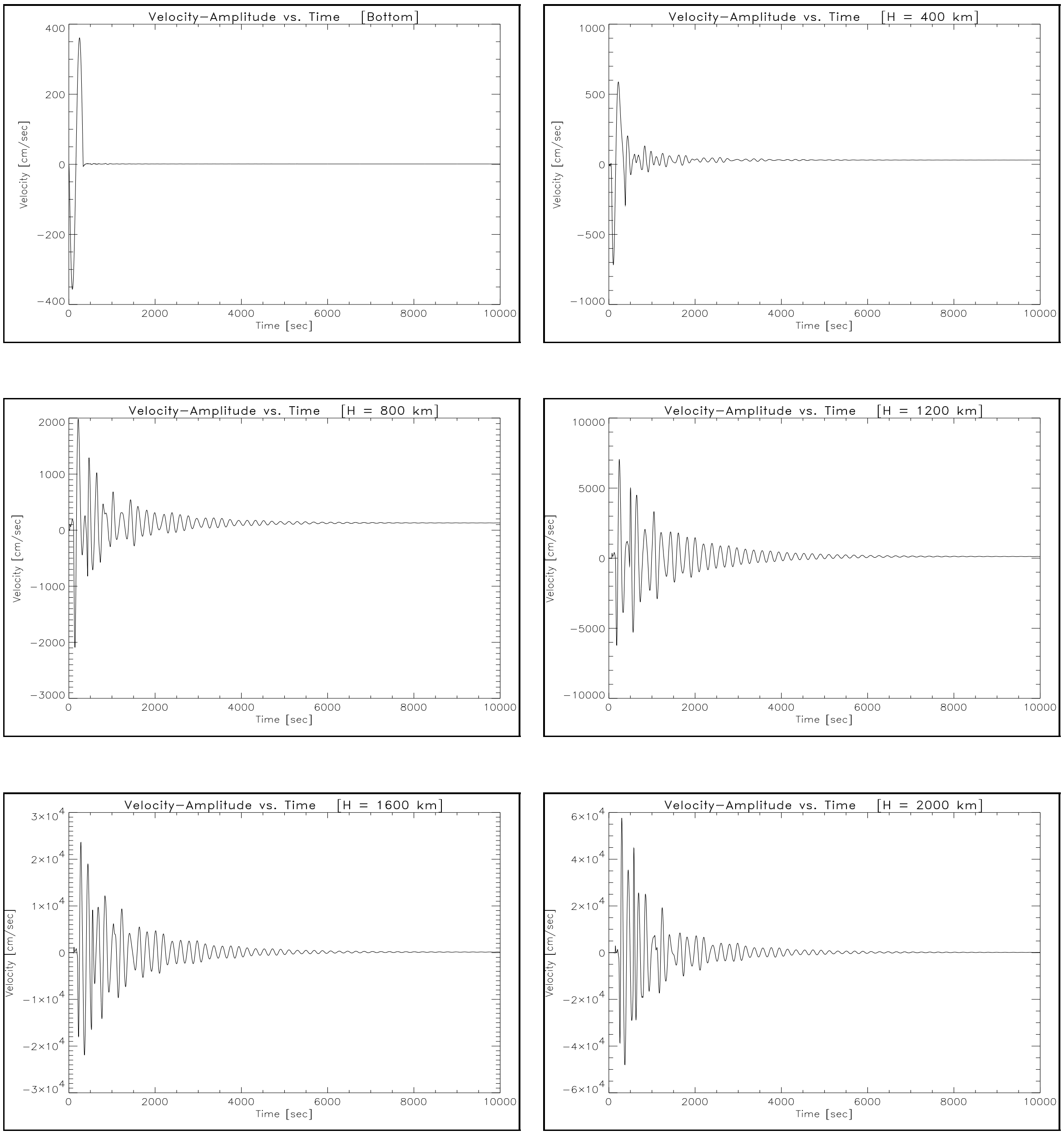


Abbildung 3.36: Der Geschwindigkeitsverlauf als Funktion der Zeit in unterschiedlichen Höhen in der VAL–Atmosphäre bei der Pulsanregung.

der Daueranregung war dies auch in etwa zu erwarten. Abb.(3.36) zeigt das Geschwindigkeitsprofil dieser Rechnung in unterschiedlichen Höhen, Abb.(3.37) zeigt das Powerspektrum.

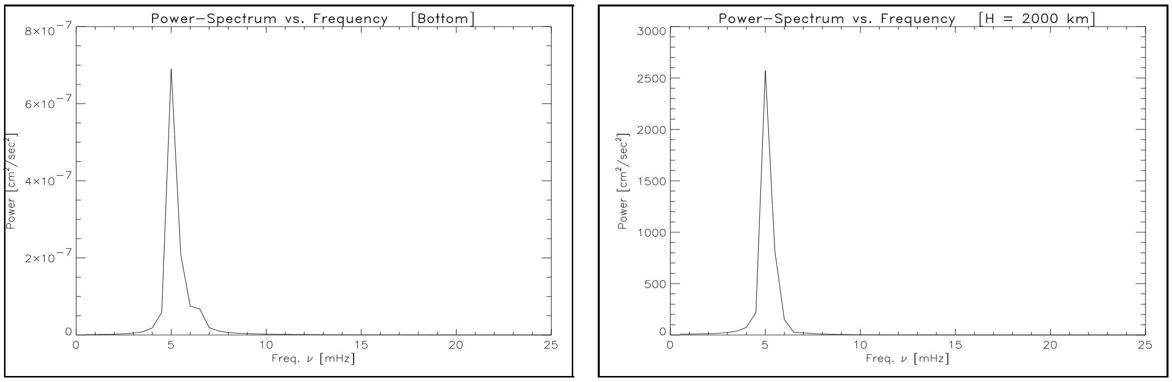


Abbildung 3.37: Das absolute Power im Zeitintervall $t \in [7000, 9000]$ sec der VAL–Atmosphäre am Fußpunkt und am oberen Rand bei der Pulsanregung.

3.3 Zusammenfassung

Fassen wir die Ergebnisse der Rechnungen zusammen, so kann man sagen, daß zwar alle untersuchten Atmosphärentypen ein Eigenschwingungsverhalten besitzen, jedoch das zeitliche Abklingverhalten der erzeugten freien Schwingung abhängig ist von der Temperaturschichtung. So konnte bei den Pulsanregungen jeweils eine eindeutige Frequenz beobachtet werden, mit der die gesamte Atmosphäre schwingt. Obwohl es sich hierbei nicht um ein Resonanzphänomen handelt, wollen wir diesen Schwingungszustand als *Eigenschwingung* bezeichnen. Die Zeitskala auf der diese Eigenschwingung abklingt, kann bestimmt werden, indem man die zeitliche Abnahme der Einhüllenden der Geschwindigkeitsamplitude studiert. Hierzu wurden die Geschwindigkeitverläufe am oberen Ende der Atmosphäre ausgemessen, indem über jeweils 5 Wellenberge die Zeit und die Amplitude gemittelt wurde. Abb.(3.38) zeigt die logarithmische Auftragung der Einhüllenden als Funktion der Zeit. Aus der Steigung läßt sich somit der zeitliche Dämpfungsexponent δ des funktionellen Verlaufes von $u(t) \sim e^{-\delta t}$ bestimmen.

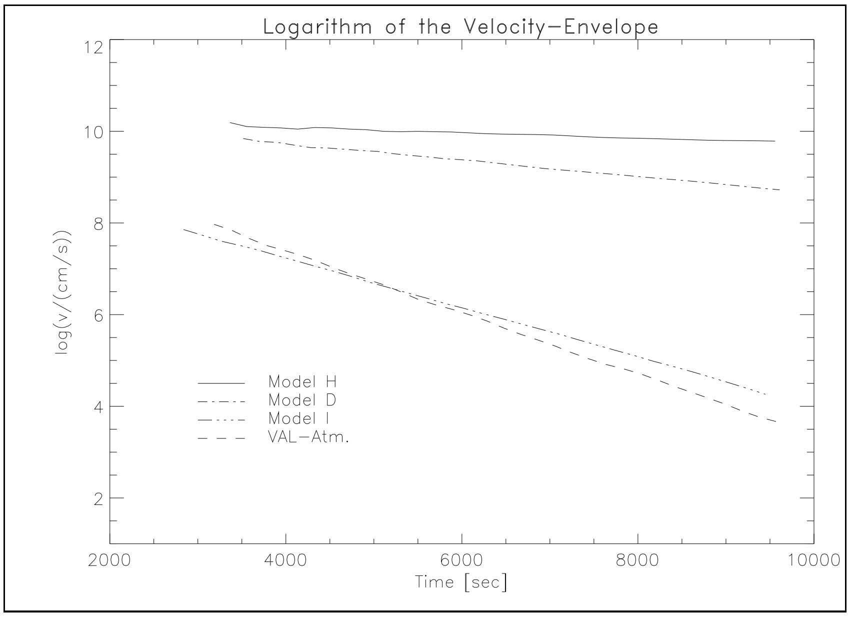


Abbildung 3.38: Logarithmische Auftragung der Einhüllenden der Geschwindigkeitsamplitude aus den Rechnungen mit Pulsanregung. Es wurde jeweils der obere Rand der Atmosphäre betrachtet. Um die Anfangsstörungen nicht mit einfließen zu lassen, wurde die Einhüllende nach ca. 3000 sec ausgemessen.

Vergleicht man das angenommene Schwingungsverhalten der Atmosphären bei der Pulsanregung mit den Temperaturen der entsprechenden Cut–Off–Frequenzen, so sieht man, daß bei den polytropen Atmosphären eine Schwingung angeregt wird, die einer Cut–Off– Frequenz der Fußpunkttemperatur (6000 K) entspricht. Dies Verhalten wird

Atmosphäre	Freie Schw. bei Daueranr. [mHz]		Freie Schw. bei Pulsanr. [mHz]		Dämpfungs-konstante δ $[1 \cdot 10^{-5}]$	Korresp. Cut–Off–Freq. [mHz]
Isotherme						
3000K	7	A	—		—	6.4
5000K	5–5.5	B	5–5.5	D	17.9	5
8000K	4	C	—		—	3.9
Polytrope						
$\alpha = -1.0$	5	E	5	H	5.8	4.5
$\alpha = 0.5$	$\sim$	F	—		41.9	4.5
$\alpha = 1.0$	$\sim$	G	4.5	I	53.8	4.5
VAL–C	$\sim$		5		67.2	≈ 4.5

Tabelle 3.1: Ergebnisse der linearen Anregung. Eingetragen sind die Schwingungszustände, die sich am Ende der Rechenzeit (10000 sec) einstellten. "$\sim$" steht dafür, daß die freie Schwingug nach dieser Zeit bereits wieder abgeklungen war. "—" markiert, daß dieser Fall nicht gerechnet wurde. Im Fall der Dauer– und der Pulsanregung sind jeweils die Bezeichnungen der Modelle mit eingetragen.

klar, wenn man beachtet, daß auf den ersten paar hundert Kilometern der Großteil der gesamten Masse der Atmosphäre konzentriert ist. In diesem relativ kleinen Teil der Atmosphäre ist die Temperaturänderung noch so gering, daß die Temperaturstruktur durch eine isotherme Schichtung approximiert werden kann. Das Schwingungsverhalten wird sich dort also auch sehr ähnlich zu dem einer isothermen Atmosphäre ausbilden und die große Massenansammlung wird sich wie ein überdimensionaler Kolben verhalten, dessen Bewegung die oberen Schichten folgen. Von diesem Standpunkt aus betrachtet könnte man eine beliebige Atmosphäre durch eine isotherme Schichtung approximieren. Umso erstaunlicher ist daher das sehr unterschiedliche zeitliche Verhalten der unterschiedlichen Temperaturstrukturen.

Bei der linearen Daueranregung mit evaneszenten Wellen wurden die Eigenschwingungen der Atmosphären deshalb nicht in allen Langzeitrechnungen wiedergefunden, da diese gegenüber der erzwungenen Schwingung zurücktraten. Das Abklingen der freien Schwingung kann daher nur als ein Einschaltvorgang interpretiert werden. Das Auftreten von neuen Frequenzen neben der der erzwungenen Schwingung bedeutet nicht die Umwandlung einer Schwingungsform in eine andere. Vielmehr findet eine Überlagerung statt, bei der die Amplitude der Eigenschwingung abstirbt, die der erzwungenen Schwingung erhalten bleibt.

Zum Vergleich der analytischen und der numerischen Rechnungen zu der isothermen Atmosphäre kann man den relativen Anteil der Cut–Off–Frequenz am gesamten Power in Abhängigkeit der Höhe auftragen (s.Abb.(3.39)). Demnach scheint die Approximation, die bei der Ableitung von Gleichung (3.88) gemacht wurde erst nach ca. 50000 sec Gültigkeit zu besitzen. Allerdings besitzen die Kurven der analytischen und der numerischen Rechnungen unterschiedliche Steigungen im mittleren Bereich. Dieses Verhalten könnte seinen Grund darin finden, daß die Herleitung von (3.88) auf einer

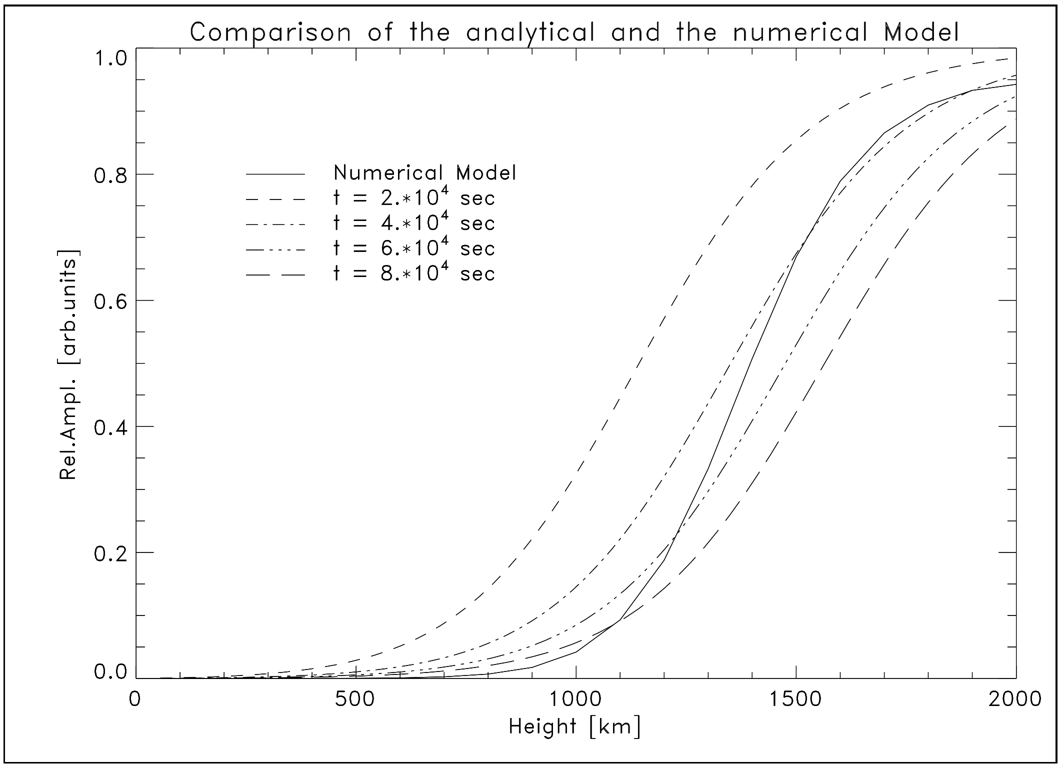


Abbildung 3.39: Vergleich zwischen dem analytischen und numerischen Modell. Die Kurven des analytischen Modells sind für mehrere Zeiten dargestellt. Demnach scheint die analytische Näherung erst nach ca. 50000 sec das numerische Verhalten zu beschreiben, wobei das Steigungsverhalten der Kurven in beiden Modellen voneinander abweichend ist.

unendlich ausgedehnten Atmosphäre beruhte. Das Rechenprogramm jedoch besitzt eine *transmittierende Randbedingung* für die obere Atmosphärengrenze. Diese besitzt nur für ein homogenes Medium strenge Gültigkeit, so daß für die Rechnungen effektiv eine endliche und *nicht* unendlich ausgedehnte Modellatmosphäre zur Verfügung stand. Auch qualitativ konnte keine vollständige Übereinstimmung zwischen den analytischen und numerischen Rechnungen erzielt werden. Beobachtet wurde in dem numerischen Modell zwar auch ein zeitliches Abklingen der freien Schwingung, jedoch gehorcht die Dämpfungsfunktion nicht einem Potenzgesetzgesetz ($u \sim t^{-\delta}$), sondern einem Exponentialgesetz ($u \sim e^{-\delta t}$), das graphisch ermittelt wurde.

Bezogen auf eine realistische Atmosphäre kann festgestellt werden, daß die polytrope Atmosphäre mit positivem Temperaturgradienten in ihrem Schwingungsverhalten der VAL–C–Atmosphäre sehr viel näher kommt, als eine isotherme Schichtung. Dies ist insofern relevant, als daß Erklärungsversuche für solare Schwingungen, die auf die isotherme Näherung zurückgehen, mit Vorsicht zu interpretieren sind.

Tabelle (3.1) stellt die wichtigsten Ergebnisse noch einmal zusammen.

Kapitel 4

Nichtlineare Wellenausbreitung

Behandelt werden soll in diesem Kapitel die Anregung von Atmosphären mit Wellen großer Amplitude (Machzahl $\sim 10^{-2}$) und größerer Periode als der Cut–Off–Periode. Hier werden sich, im Gegensatz zum vorhergehenden Kapitel, innerhalb des Rechenbereiches der Atmosphäre Diskontinuitäten ausbilden, die als Schockwellen propagieren. Im Mittelpunkt des Kapitels soll die Frage stehen, ob es möglich ist, daß kurzperiodische Wellen, die am unteren Rand der Atmosphäre induziert werden, langperiodische Oszillationen (P $\approx$ 200 sec) der Atmosphäre erzeugen bzw. triggern können. Zur Beantwortung sollen unterschiedliche Ansätze verfolgt werden: Die simpelste Art eine Atmosphäre zu stören ist die, am unteren Rand *monochromatische* Wellen zu induzieren. Hierbei entsteht die Frage: hat die Größe der Periode eine Bedeutung für den Verlauf der Rechnung? Eine allgemeinere Form der Störung ist das Induzieren eines *Wellenspektrums*. Hierbei können beliebige Formen für das Spektrum gewählt werden, wie in Kapitel 2 gezeigt wurde. Bei dieser Art der Anregung entsteht die Frage, ob die Form des Spektrums eine Bedeutung hat und welchen Einfluß die Anzahl der gewählten Frequenzpunkte besitzt. (Man kann davon ausgehen, daß in der Natur ein kontinuierliches Spektrum realisiert ist, allerdings wird man durch eine Integration über ein Frequenzintervall auch ein kontinuierliches Spektrum diskretisieren können. In diesem Sinne entspricht eine monochromatische Welle der Integration an einem Frequenzpunkt.) Weiterhin stellt sich die Frage, ob evaneszente Wellen eine Bedeutung auch im nichtlinearen Fall besitzen könnten. Die photosphärischen 5–min Oszillationen beispielsweise, die man auf der Sonne beobachtet, könnten kurzperiodische Anteile in der Chromosphäre überlagern und das Zusammenwirken beider könnte relevant für eine langperiodische Oszillation sein. Daher sollen ebenfalls Rechnungen vorgestellt werden, bei denen zum einen monochromatische Wellen, zum anderen Schallspektren mit evaneszenten Wellen überlagert werden.

Im vorhergehenden Kapitel hatten wir gesehen, daß das Eigenschwingungsverhalten einer Atmosphäre geprägt wird durch deren Temperaturstruktur. Inwieweit eine solche Abhängigkeit ebenfalls für nichtlineare Wellenphänomene gilt, sollen Vergleichsrechnungen in unterschiedlichen Anfangsatmosphären zeigen. Ein weiterer wichtiger Parameter für das Ausbreitungsverhalten von akustischen Wellen ist deren Geschwindigkeitsamplitude und damit deren Energie. Es werden Rechnungen vorgestellt, in denen der in die Atmosphäre induzierte Energiefluß im Bereich von drei Größenordnungen variiert ($1 \cdot 10^6$ bis $1 \cdot 10^9$ erg/cm^{2}s). Durch diese Variationen der Wellen– und Atmosphärencharakteristika soll versucht werden eine Antwort auf die oben formulierte Frage zu finden.

Zunächst jedoch soll die Entstehung von Schockwellen besprochen sowie die Hugoniot–Beziehungen abgeleitet werden die den physikalischen Zustand im Vor– und Nachschockgebiet miteinander verknüpfen.

4.1 Die Schockgleichungen

4.1.1 Diskontinuitäts-Relationen

Eine Erhaltungsgleichung hat folgende allgemeine Form

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \vec{\nabla} \vec{F} = G. \tag{4.1}$$

Physikalisch entspricht E z.B. einer Dichte, F einem gerichtetem Fluß und G einem Quellterm. I.a. wird sich jede einzelne Größe aus mehreren Termen zusammensetzen. Betrachten wir ein Volumen, in dem sich eine Diskontinuitätsfläche Γ ausgebildet hat und integrieren (4.1) über dieses Volumen

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V E dV + \int_V \vec{\nabla} \vec{F} dV = \int_V G dV. \tag{4.2}$$

Das zweite Integral läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Integral über die Oberfläche des betrachteten Volumens umwandeln. Die Größe des Volumens ist beliebig gewählt, so daß man es speziell so wählen kann, daß es die Diskontinuität Γ infinitesimal umhüllt und der Volumeninhalt gegen Null strebt.Das bedeutet aber, daß das erste und zweite Integral in (4.2) verschwinden und übrigbleibt

$$\int_\Gamma \vec{F} \vec{n} d\sigma = 0 \tag{4.3}$$

und daher

$$[F] = 0, \tag{4.4}$$

wobei $[F]$ die Differenz $(F_2 - F_1)$ der beiden Funktionswerte links bzw. rechts von Γ symbolisieren soll. Man kann nun die Kontinuitätsgleichung,die Impuls- und Energieerhaltungsgleichung in der Form (4.1) schreiben (Hirschfelder,Curtis,Bird)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{u} = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla(\rho \vec{u}^2 + p\overline{\overline{U}}) = \rho g \vec{e_z} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\vec{u}^2 + \rho E + \rho\phi) + \vec{\nabla}(\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + \rho E + p + \rho\phi)\vec{u} = \rho T \left.\frac{dS}{dt}\right|_{ext} \tag{4.7}$$

Hier stellt $\overline{\overline{U}}$ die Einheitsdyade (Goldstein,1985,S.161ff.) $\vec{e_z}$ den Einheitsvektor $(0,0,-1)$ in z-Richtung und ϕ das Gravitationspotential dar. Mit dem Argument von oben (s.Kapitel 2.2) vernachlässigen wir die Terme mit dem Gravitationspotential in Gleichung (4.7) und unter Beachtung von (4.4) können wir nun sofort die Verbindungsgleichungen, die Rankine-Hugoniot-Beziehungen, zwischen den beiden Seiten der Diskontinuitätsfläche angeben

$$[\rho\vec{u}] = [\vec{j}] = 0 \tag{4.8}$$

$$[p] + \left[\vec{j}^2\frac{1}{\rho}\right] = 0 \tag{4.9}$$

$$\vec{j}\cdot\left[H + \frac{1}{2}\vec{j}^2\frac{1}{\rho^2}\right] = 0 \tag{4.10}$$

mit $\vec{j}$ der Massenstromdichte und $H = E + \frac{p}{\rho}$ der Enthalpie. Die Gleichungen (4.8 – 4.10) besitzen eine triviale Lösung. Ist nämlich $\vec{j} = 0$ und somit $\vec{u_1}$ und $\vec{u_2}$ gleich Null, so verschwinden (4.8) und (4.10) identisch und in (4.9) bleibt lediglich der Term $[p] = 0$ zurück. Dieser Fall von Diskontinuität wird *Kontaktdiskontinuität* genannt (Courant-Friedrichs). Physikalisch entspricht diese Situation zweier Medien mit unterschiedlicher Dichte, die sich im hydrostatischen Gleichgewicht miteinander befinden. (Bsp.: die Oberfläche eines Sees bildet mit der angrenzenden Luft eine Kontaktdiskontinuität). Ist $\vec{j} \neq 0$ so liegt der dynamische Fall vor und man spricht von einer *Stoß*- oder *Schockwelle*. Für die vorliegende Arbeit spielt nur die zweite Art von Unstetigkeit eine Rolle; daher soll von Kontaktdiskontinuitäten im folgenden nicht mehr die Rede sein.

Wir führen nun die Mach-Zahl M_S ein, die das Verhältnis der Geschwindigkeit $\vec{u}$ zur Schallgeschwindigkeit c angibt, wobei $\vec{u}$ die Relativgeschwindigkeit des strömenden Mediums zur Unstetigkeitsfläche Γ ist.

$$M_S = \frac{|\vec{u}|}{c} \tag{4.11}$$

Setzt man ein polytropes Gas voraus ($\gamma = \frac{c_p}{c_v} = const$), wie es im Verlauf der Arbeit stets gemacht wird, in dem gilt

$$E = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{4.12}$$

$$H = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{4.13}$$

$$c^2 = \gamma\frac{p}{\rho} \tag{4.14}$$

so kann man die Rankine-Hugoniot-Beziehungen auf folgende Form bringen (Witham)

$$\frac{u_1 - u_2}{c_1} = \frac{2(M_S^2 - 1)}{(\gamma+1)M_S} \tag{4.15}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_S^2}{(\gamma-1)M_S^2 + 2} \tag{4.16}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma(2M_S^2 - 1)}{\gamma + 1} \tag{4.17}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{[2\gamma M_S^2 - (\gamma - 1)]^{\frac{1}{2}}\,[(\gamma - 1)M_S^2 + 2]^{\frac{1}{2}}}{(\gamma + 1)M_S} \tag{4.18}$$

An Gleichung (4.16) erkennt man, daß es ein maximales Dichteverhältnis gibt zwischen Vor- und Nachschockgebiet. Strebt die Machzahl gegen sehr große Werte, so gilt

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \approx 4 \tag{4.19}$$

Um für die Beurteilung der Stärke eines Schocks eine Skala zu besitzen, führt man den Schockstärkeparameter η ein, den man über die Dichtedifferenzen auf der Vor– und der Nachschockseite definiert

$$\eta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}. \tag{4.20}$$

Hierbei besitzt η aufgrund von (4.19) eine obere Schranke. Die Gleichungen (4.15 – 4.18) stellen die Beziehungen zwischen den Vor– und Nachschockparametern in Abhängigkeit der Schockmachzahl M_S dar. Ebenso kann man die Gleichungen in Abhängigkeit der Schockstärke η schreiben

$$M = \sqrt{\frac{1 + \eta}{2 - \eta(\gamma - 1)}} \tag{4.21}$$

$$\frac{u_1 - u_2}{c_1} = \frac{\gamma\eta - 1}{\gamma + 1}\sqrt{\frac{1}{(2 - \eta(\gamma - 1))(\eta + 1)}} \tag{4.22}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \eta + 1 \tag{4.23}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma(\eta + 1)}{(\gamma + 1)(2 - \eta(\gamma - 1))} \tag{4.24}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{2\gamma(\eta + 1) - (\gamma - 1)(2 - \eta(\gamma - 1))}\,\cdot \tag{4.25}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{(\gamma - 1)(\eta + 1) - 2\eta(\gamma - 1) + 4}}{(\gamma + 1)\sqrt{\eta + 1}} \tag{4.26}$$

Durch Angabe der Schockstärke kann man somit die Verhältnisse von Vor– und Nachschockgrößen vollständig angeben.

4.1.2 Bildung von Unstetigkeiten

Wir betrachten nun Wellen mit beliebiger Geschwindigkeitsamplitude. Wir können also somit nicht die linearisierten Grundgleichungen heranziehen. Zur Vereinfachung wollen wir ein homogenes Medium betrachten und setzen daher $g = 0$. Weiterhin wollen wir voraussetzen, daß sich die Geschwindigkeit u als Funktion von einer der Zustandsvariablen auffassen läßt (Landau,Lifschitz 1991). Sei

$$u = u(\rho) \tag{4.27}$$

Mit dieser Annahme können die Kontinuitäts- und die Eulergleichung geschrieben werden als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d}{d\rho}(\rho u)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + \frac{1}{\rho}\frac{d}{du})\frac{\partial u}{\partial x} + g = 0 \tag{4.29}$$

Unter Beachtung der Beziehungen

$$\Big(\frac{\partial \rho}{\partial t}\Big)_x \Big/ \Big(\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big)_t = -\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big)_\rho \tag{4.30}$$

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_x \Big/ \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_t = -\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big)_u \tag{4.31}$$

erhalten wir

$$\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big)_\rho = \frac{d\rho u}{d\rho} = u + \rho\frac{du}{d\rho} \tag{4.32}$$

$$\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big)_u = u + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{du} \tag{4.33}$$

Da u nur eine Funktion von ρ ist und dadurch also vollständig bestimmt wird, ist es gleichgültig, ob die Ableitung nach der Zeit t bei konstantem ρ oder konstantem u betrachtet wird. Identifizieren wir (4.32) und (4.33) und verwenden $\frac{dp}{d\rho} = c^2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} du &= \pm\frac{c}{\rho}d\rho \\ &= \pm\frac{1}{c\rho}dp \end{aligned} \tag{4.34}$$

Setzen wir diese Ergebnisse in (4.32) und (4.33) ein, so erhalten wir für die Änderung von x

$$\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big)_{\rho,u} = u \pm c = v \tag{4.35}$$

wobei der Index anzeigen soll, daß es irrelevant ist, welchen Parameter man konstant hält. u und c sind hier als Funktionen der Dichte bestimmt. Anschaulich gesehen breitet sich eine Störung mit Schallgeschwindigkeit relativ zu einem ruhenden Bezugssystem im Gas aus. Hat das Gas selber noch einen Bewegungszustand, der durch u beschrieben wird, so wird sich für einen außenstehenden Beobachter diese Geschwindigkeit

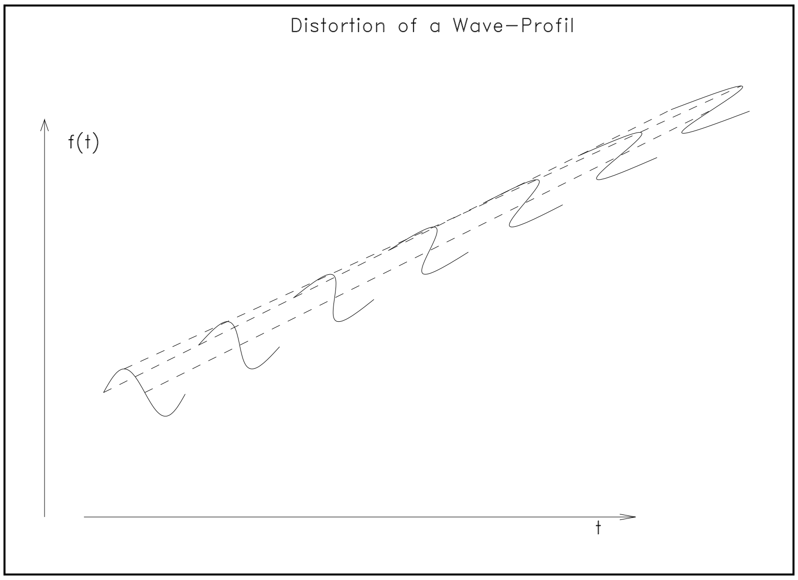


Abbildung 4.1: Verzerrung eines sinusförmigen Wellenprofils in einer homogenen Atmosphäre. An der Stelle, wo der Funktionswert nicht meher eindeutig ist, wird sich eine Diskontinuität ausbilden.

zur Ausbreitung der Störung hinzuaddieren. Man kann nun zeigen (Landau,Lifschitz 1991)

$$\frac{du}{d\rho} > 0 \tag{4.36}$$

Besitzt ein Wellenprofil also einen Dichtegradienten, so wird sich die Form der Welle mit der Zeit verzeren. Hat man speziell in einem Gebiet einen negativen Dichtegradienten, so wird sich das Profil im $\rho, x-$Diagramm so verzerren, so daß nach einer gewissen Zeit t an einem Ort x der Funktionswert nicht mehr eindeutig zugeordnet werden kann. Dieser Zustand ist mit einer Ausbildung einer Diskontinuität, einer Stoßwelle, verbunden, da eine Mehrdeutigkeit von $\rho(x)$ physikalisch sinnlos wäre. Hierzu zeigt Abb.(4.1) ein Wellenprofil das im Laufe der Zeit verzerrt wird. Bezieht man dieses Bild auf die charakteristischen Gleichungen, so würde die Ausbildung von Stoßwellen dem Schneiden zweier Charakteristiken – in der Abbildung zweier Geraden – entsprechen.

4.2 Numerische Rechnungen

4.2.1 Monochromatische Wellen

Es wurden Rechnungen mit Periodenlängen von P=15 sec , 20 sec, 30 sec, 60 sec und 100 sec durchgeführt (im folgenden Modelle M15, M20, M30, M60 und M100). Der Energiefluß betrug am unteren Rand der Atmosphäre (H^-– Atmosphäre) in allen Fällen $1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s.

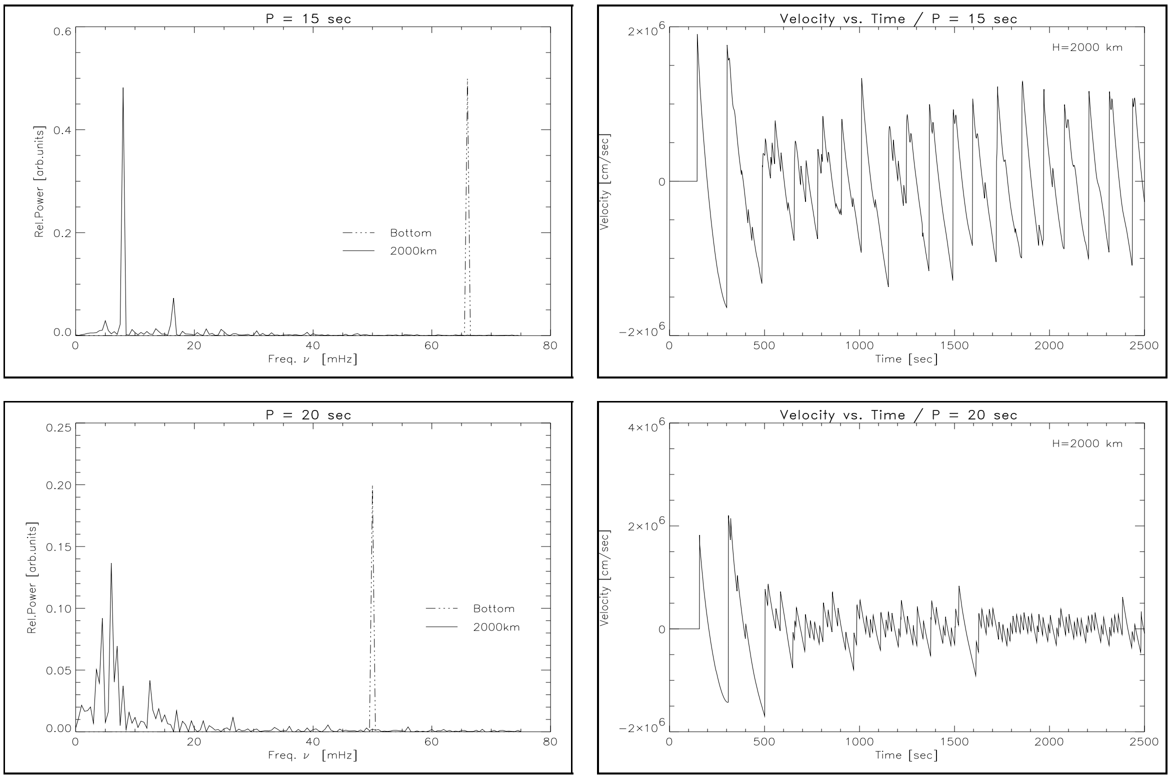


Abbildung 4.2: Das normalisierte Powerspektrum einer Welle mit P=15 sec (oben) sowie P=20 sec (unten), verglichen am unteren Rand der Atmosphäre und in 2000 km Höhe (links). Rechts ist das Geschwindigkeitsprofil in 2000 km abgebildet.

Es zeigt sich, daß abhängig von der Periode zwei unterschiedliche dynamische Formen angenommen werden. In Abb.(4.2) ist das Powerspektrum am unteren und oberen Rand der Atmosphäre von M15 und M20 dargestellt. Abb.(4.3) zeigt zusätzlich den Verlauf von M15 in Abhängigkeit der Höhe. Um die Höhenpunkte qualitativ miteinander zu vergleichen, wurde das Power an jedem Höhenpunkt auf 1 normiert. Deutlich erkennt man in M20 eine Verteilung um 6 mHz in 2000 km Höhe, während in M15 ein scharfer Peak bei ca. 8mHz auftritt. Die monochromatischen Wellen lösen sich somit in ein Spektrum auf mit dem Maximum bei ca. 1/10 der Ursprungsfrequenz. Ebenso zeigt Abb.(4.2) die Geschwindigkeitsverteilung dieser Rechnungen in 2000 km Höhe. Die monochromatischen Wellen haben sich zu Schockwellen entwickelt, die sich einholen und verschmelzen (*shock–overtaking*) wodurch sich längerperiodische Wellen entwickeln. Zu erkennen sind zwar immer noch *Sägezähne* der Ursprungsperiode, jedoch dominieren die langperiodischen Anteile. In Modell M20 fallen die großen Wellenkämme der ersten 500 sec auf. Hier sind 4–5 kurzperiodische Wellen miteinander veschmolzen. Im Kapitel über die lineare Wellenausbreitung hatten wir gesehen, daß bei jedem Einschaltvorgang eine langperiodische Grundschwingung angeregt wird. Besitzt diese Oszillation eine negative Geschwindigkeitsamplitude, so *bremst* sie sozusagen

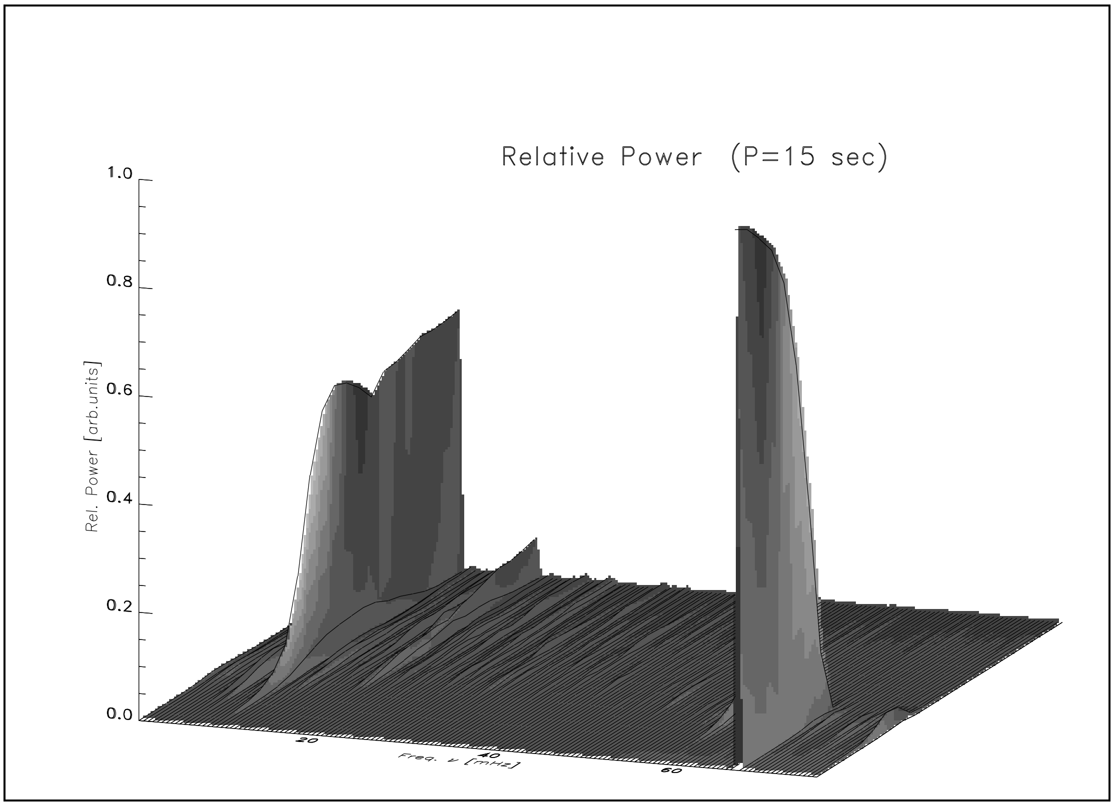


Abbildung 4.3: Das relative Powerspektrum in Abhängigkeit der Höhe für eine monochromatische Welle mit einer Periode von P=15 sec.

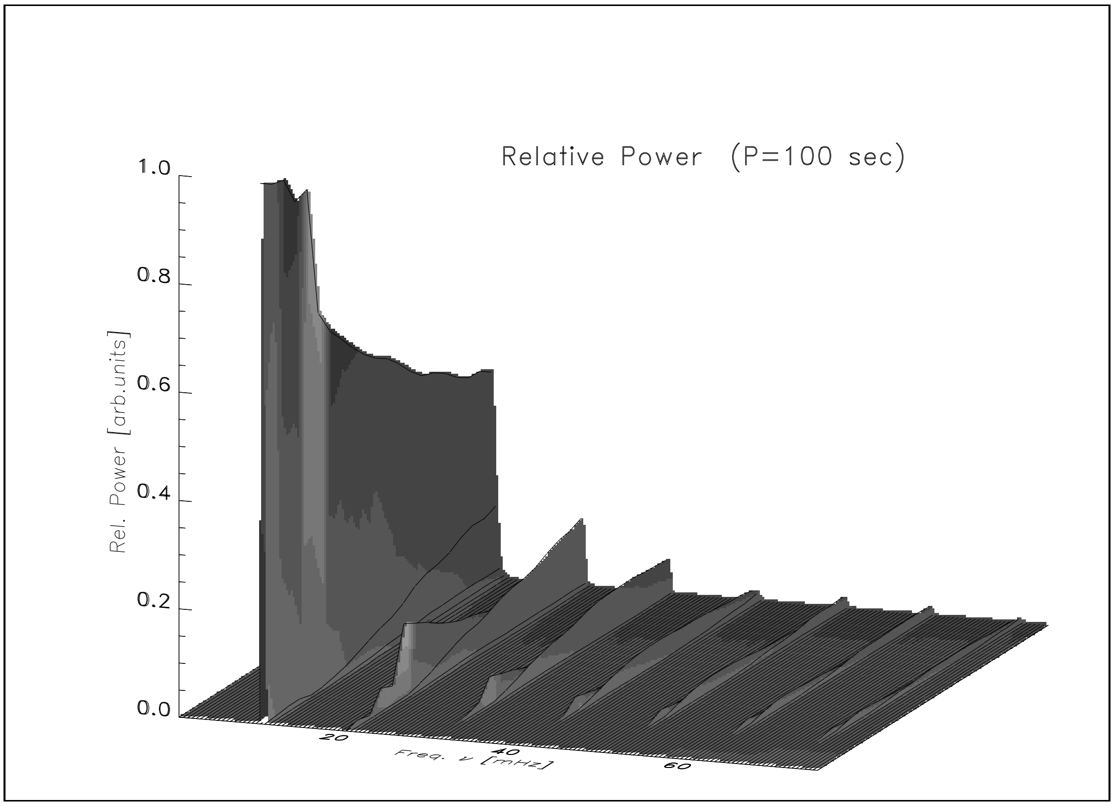


Abbildung 4.4: Dieselbe Darstellung wie in Abb.(4.3) für eine monochromatische Welle mit P=100 sec.

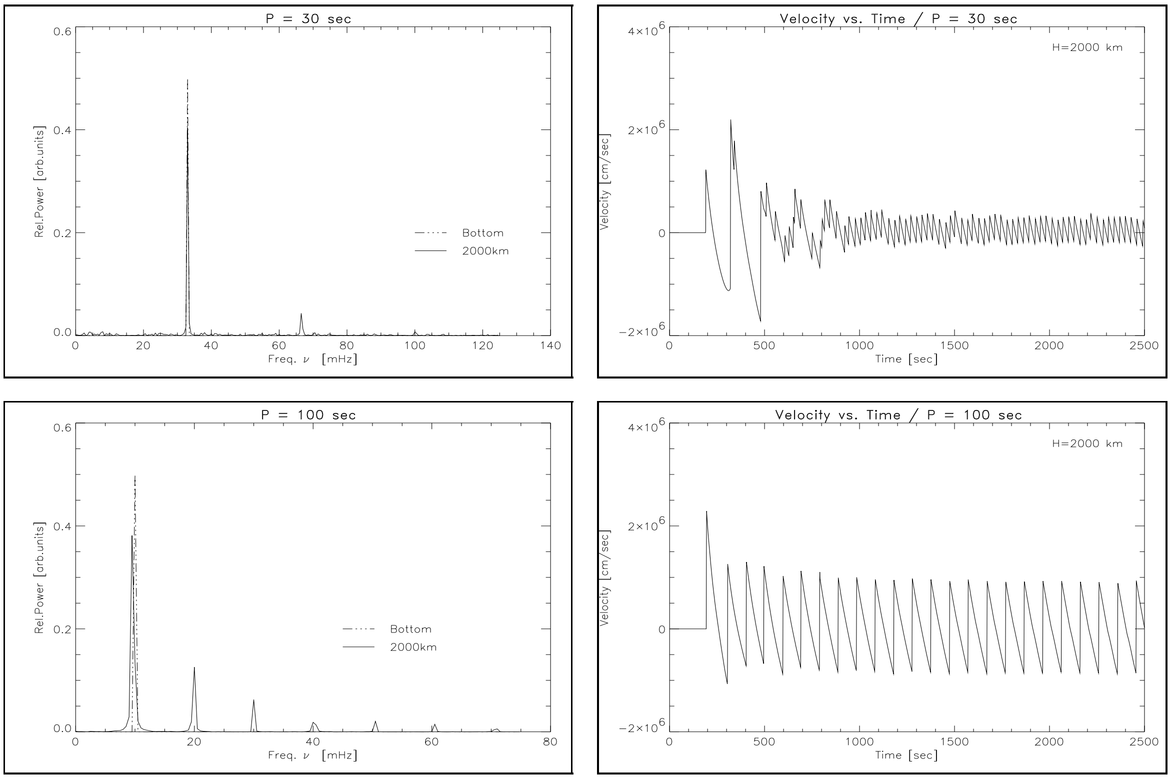


Abbildung 4.5: Das normalisierte Powerspektrum einer Welle mit P=30 sec (oben) und P=100 sec (unten), verglichen am unteren Rand der Atmosphäre und in 2000 km Höhe (links). Rechts ist das Geschwindigkeitsprofil in 2000 km abgebildet.

die nach außen propagierenden Wellen wodurch sie ineinander laufen. Bei einer positiven Geschwindigkeitsamplitude werden sie entsprechend beschleunigt. Die Ursache für das Zusammenlaufen der Schockwellen könnte somit diese, durch das Einsetzen der Welle in die Atmosphäre, induzierte Störung sein. Diese Oszillation sollte jedoch aufgrund des steigenden Temperaturgradienten, der durch das Dissipationsverhalten der Schocks hervorgerufen wird, relativ schnell verklingen. In Modell M20 deutet sich jedoch bereits an, daß die kurzperiodischen Wellen sich weiterhin zu langperiodischen Wellen entwickeln werden (auch am rechten Rand in Abb.(4.2 unten) gibt es noch große Schocks). In Modell M15 sind praktisch keine kurzperiodischen Anteile mehr vorhanden; es dominieren über den gesamten Rechenbereich die langperiodischen Anteile. Es scheint also, als würde die Anfangsstörung durch die kurzperiodischen Schockwellen getriggert.

Anders ist das Verhalten der längerperiodischen monochromatischen Wellen. Abb. (4.5) zeigt das relative Geschwindigkeits–Power von Modell M30 in der Darstellung wie oben, sowie das Geschwindigkeitsprofil. Zwar erkennt man auch hier die Bildung großer Amplituden und langer Perioden in den ersten 1000 Sekunden. Jedoch verklingt die Störung sehr schnell und nach 1000 Sekunden sind lediglich noch Schockwellen

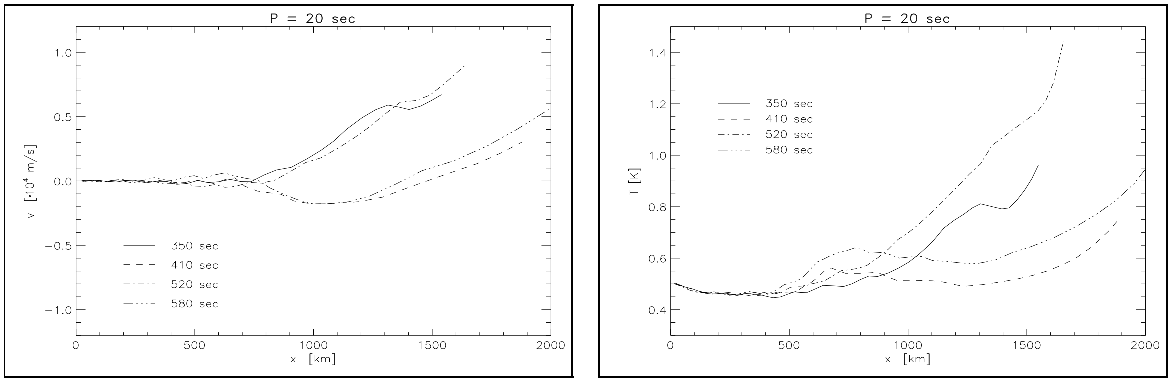


Abbildung 4.6: Gemittelte Geschwindigkeit (links) und Temperatur (rechts) zu den Zeiten T=350 sec, 410 sec, 520 sec und 580 sec. Die Darstellung umfaßt somit etwas mehr als eine Periode einer *3–min–Oszillation*. Gemittelt wurde jeweils über 15 benachbarte Punkte.

der Ursprungsperiode vorhanden. Dasselbe qualitative Verhalten ist bei den anderen langperiodischen Wellen (60s, 100s) zu beobachten. Zu beachten sind die kleinen Peaks neben der Ursprungsfrequenz in der Abb.(4.5), die Ausdruck der Transformation einer Sinuswelle in die Sägezahnform sind. Aus der Theorie der Fourieranalyse ist bekannt (Smirnov, 1968, Bd.II, S.369), daß man eine Sägezahnfunktion $f(t)$ der Periode P, durch Superposition von Sinuswellen mit einem Vielfachen der Grundfrequenz ν =1/P erzeugen kann

$$f(t) = 2 \cdot \sum (-1)^{k-1} \sin\left(\frac{2\pi k t}{P}\right)$$

Die analysierten Oberschwingungen stellen somit keine Eigenschaft der Atmosphäre, sondern eine Eigenschaft der laufenden Welle dar. Abb.(4.4) zeigt hierzu die höhenabhängige Entwicklung des Powers aus Modell M100. Die Oberschwingungen treten dort auf, wo sich Schockwellen entwickeln.

Eine Erklärung für dieses unterschiedliche Verhalten der monochromatischen Wellen soll mit Hilfe von Abb.(4.6) versucht werden. Dargestellt ist der gemittelte Temperatur– und Geschwindigkeitsverlauf von vier Phasen einer Wellenrechnung mit P=20s. Hierbei wurden über 15 benachbarte Punkte jeweils die Funktionswerte gemittelt. Die 4 Kurven umschließen ein Zeitintervall von 230 sec und damit eine Periode des Frequenzbereiches um 5 mHz. Im Geschwindigkeits– wie im Temperaturverlauf erkennt man eine Oszillation, die einen *Knotenpunkt* bei ca. 900 km besitzt. Betrachten wir die Höhe von 1200 km, so schwankt die Temperatur dort zwischen ca. 5000 K und 9000 K. Mit dieser Temperaturdifferenz ist ein Unterschied in der Schallgeschwindigkeit von 2,5 km/s verbunden. Der Abstand zwischen zwei 20s–Wellen beträgt ca. 170 km. Nimmt man an, daß eine Schockwelle die Hälfte der Periode der überlagerten Schwingung in einem Gebiet mit großer, die andere Hälfte in einem Gebiet mit kleiner Schallgeschwindigkeit propagiert, so ändert sich die relative Lage zweier Schockwellen, die in den unterschiedlichen Gebieten laufen in der Weise, daß ein *overtaking* stattfinden kann. Bei Schockwellen mit kleiner Periode und damit geringem Abstand zueinander ist ein Zusammenlaufen daher eher möglich als bei langperiodischen Wellen. Sind zwei Schockwellen einmal miteinander verschmolzen, so besitzen sie eine größere Schockstärke als zuvor, wodurch sie die Atmosphäre im Höhenverlauf ausdehnen werden. Hinter den starken Stoßfronten wird die Atmosphäre wieder zurückfallen, wodurch die nachfolgenden Wellen *gebremst* werden, was wiederum ein Zusammenlaufen ermöglicht. Je kürzer Wellenperioden sind, desto eher können sich Schockwellen überholen und starke Schocks bilden, die die Atmosphäre in Schwingungen versetzen. Hierdurch kann also ein Rückkopplungseffekt entstehen, der eine einmal entstandene Pulsation aufrechterhält. Sind die Perioden der Wellen zu groß ($P \geq 30$ sec), so ist der Abstand zwischen den Wellenbergen so groß, daß sich die Wellen nicht einholen können. D.h., es gibt keinen Mechanismus, der die Anfangsstörung der Atmsphäre aufrechterhalten könnte. Wie in Abb.(4.5) zu sehen ist verklingen die Anfangsstörungen erwartungsgemäß aufgrund der zu großen Periode sehr schnell.

4.2.2 Monochromatische Wellen mit überlagerter evaneszenter Welle

Es wurden diesselben Wellentypen wie im vorhergehenden Abschnitt untersucht, wobei eine 5–min–Oszillation mit einer Geschwindigkeitsamplitude von 1,5 km/s überlagert wurde. Diese Geschwindigkeitsamplitude entspricht ungefähr dem 3–fachen des beobachteten Wertes der photosphärischen Oszillation auf der Sonne (White, Cha, 1973). Gegenüber den rein monochromatischen Wellen traten keine sichtlich neuen Phänomene auf. Die Abb.(4.7) zeigt die Ergebnisse einer 20s– und 100s–Wellenrechnung. Bei der 100s–Welle tritt die 5–Oszillation im Höhenverlauf der Atmosphäre vollständig zurück und es verbleibt die Ursprungsfrequenz mit ihren typischen harmonischen Oberschwingungen aufgrund der Sägezahnform der Welle. Bei den kurzperiodischen Wellen tritt insofern eine Modifikation ein, als daß über den gesamten Verlauf des Zeitintervalls große Schocks vorhanden sind. Die 5–min–Oszillation bewirkt also eine zusätzliche Störung, die ein Zusammenlaufen der kurzperiodischen Schockwellen begünstigt. In jedem Falle tritt nicht der Effekt ein, der im letzten Kapitel im Zusammenhang mit der linearen Ausbreitung verbunden war: Durch evaneszente Wellen werden keine großamplitudigen Wellen in der Eigenfrequenz der Atmosphäre angeregt, sondern das dynamische Verhalten wird lediglich durch die kurzperiodischen Wellen bestimmt.

4.2.3 Wellenspektren

Powerspektren

Ein Wellenspektrum zeichnet sich dadurch aus, daß keine definierte Wellenperiode bzw. Wellenamplitude in zeitlichen Intervallen, die klein sind gegen $1/\Delta\nu$, angenommen wird, wobei $\Delta\nu$ das Intervall zwischen den äquidistant liegenden Frequenzpunkten im Spektrum ist. Da die Schockbildungshöhe von der Geschwindigkeitsamplitude und

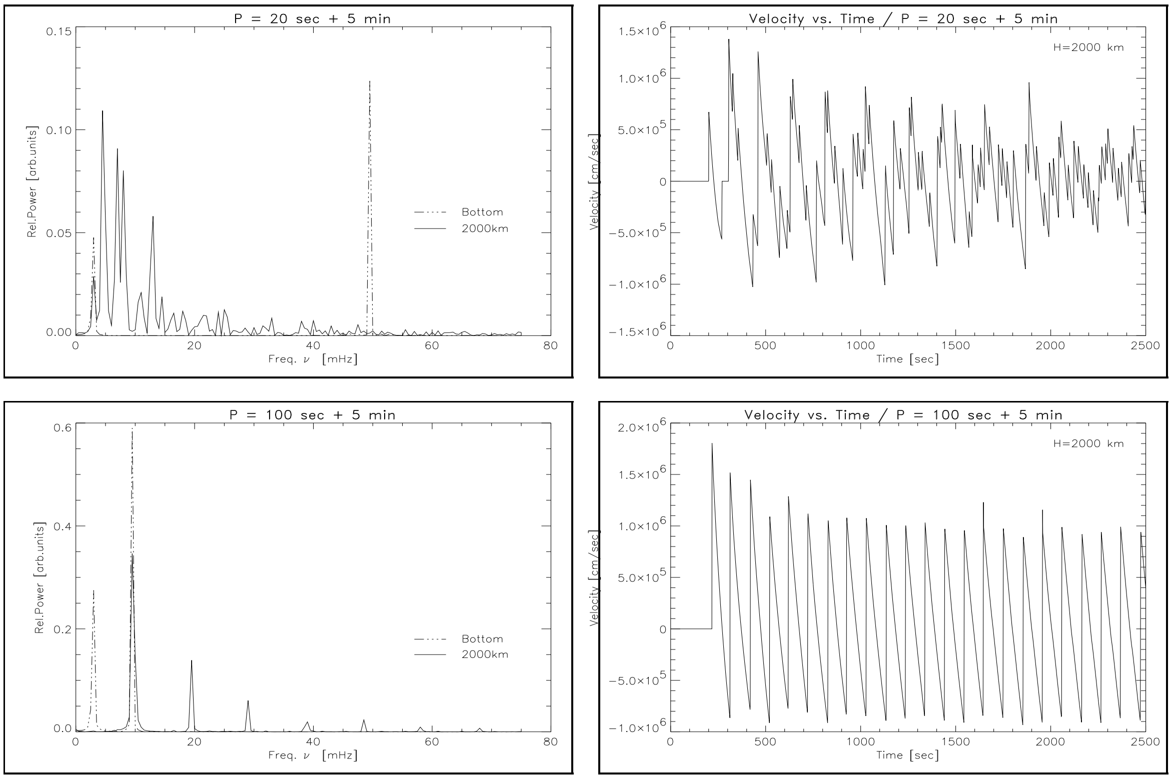


Abbildung 4.7: Das normalisierte Powerspektrum einer Welle mit P=20 sec (oben) sowie einer Welle mit P=100 sec und einer überlagerten 5 min Oszillation, verglichen am unteren Rand der Atmosphäre und in 2000 km Höhe (links). Rechts ist das Geschwindigkeitsprofil in 2000 km abgebildet.

deren Periode abhängt, wird es keine definierte Schockbildungshöhe geben. Ebenso ist zu erwarten, daß es leichter zu *shock–overtaking* im Höhenverlauf der Atmosphäre kommen wird, da aufgrund der nichtdefinierten Periode sich unterschiedliche Schockstärken entwickeln werden und somit unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellen existieren.

Um das qualitative Verhalten einer Atmosphäre auf Schallspektren zu untersuchen wurden 4 verschiedene Formen eines Spektrums, auf welche jeweils ein totaler Energiefluß von $F_M = 1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s verteilt war, betrachtet, wie sie bereits in Kapitel 2 vorgestellt wurden: ein Spektrum mit konstanter Amplitude (Boxspektrum, Modell B8), ein gaußverteiltes Spektrum (Modell G8), das sein Maximum bei $P = 35$ sec besitzt und eine Breite von der zweifachen Cut–Off–Frequenz besitzt ($u(\omega) \sim \exp(-(\omega - \omega_0)^2/4\omega_A^2)$), ein zufallsverteiltes Spektrum (Modell R8) und ein exponentiell von kleinen zu großen Frequenzen abfallendes Spektrum ($u(\omega) \sim e^{-\delta\omega}$, Modell E8). Es wurden jeweils 100 Frequenzpunkte mit einer Intervallbreite von 0,5 mHz gewählt. Die kleinste auftretende Frequenz befand sich stets knapp unterhalb der Cut–Off-Frequenz, die größte lag entsprechend bei ca. der 10–fachen Cut- Off-Frequenz. Die Rechnungen wurden in einer Wasserstoff–Atmosphäre durchgeführt.

Abb.(4.8) zeigt die Ergebnisse dieser Rechnungen. Dargestellt ist wieder das relative Geschwindigkeitspower am Fußpunkt und in 2000 km Höhe der Atmosphäre. Hierzu exemplarisch ist das höhenabhängige relative Geschwindigkeitspowerspektrum für ein gaußverteiltes Spektrum in Abb.(4.9) dargestellt. In allen vier Rechnungen fällt der deutliche Peak bei 6–7 mHz auf. Innerhalb kleiner Schranken, zeigen alle Diagramme dasselbe qualitative Verhalten. In allen Fällen ist die Tendenz festzustellen, langperiodische Anteile gegenüber kurzperiodischen dominant werden zu lassen. Man könnte geneigt sein zu denken, daß die langperiodischen Anteile sich deshalb so dominant entwickeln, weil sie von vornherein induziert werden (in allen Fällen sind Geschwindigkeitsbeiträge auch unterhalb der Cut–Off–Frequenz vorhanden). Hierzu ist jedoch die Betrachtung des exponentiell abfallenden Spektrums interessant, das sein Maximum bei ca. 3 mHz am Fußpunkt der Atmosphäre besitzt. In 2000 km hat sich das Maximum nach 7 mHz hin verschoben, wobei die niederfrequenten Anteile in ihrer Amplitude sehr rasch abfallen. D.h. die Verschiebung zu kleinen Frequenzen geschieht *nicht* durch ein *Hineinfallen* der hochfrequenten Anteile in die niederfrequenten, sondern es bildet sich im Höhenverlauf der Atmosphäre ein neues *dynamisches Muster* aus, das *nicht* von der Form des Ausgangsspektrums abhängt.

Eine Erklärung für diesen Effekt findet sich bei einem Blick auf das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit der Höhe. Abb.(4.10) zeigt ein solches Profil eines gaußverteilten Spektrums. Man erkennt, daß in ca. 500 km die Schockbildung einsetzt. In dem Gebiet, wo die Schockwellen propagieren, wird mechanische Energie dissipiert und die Temperatur und damit ebenso die Schallgeschwindigkeit steigen an. Da Stoßwellen relativ zum Vorschockgebiet mit Überschallgeschwindigkeit propagieren wird ein positiver Temperaturgradient bewirken, daß die vorherlaufenden Wellen sich schneller ausbreiten als die nachkommenden. Betrachten wir in der ersten Graphik der Abbildung die zwei untersten Schocks in der Atmosphäre (600 km, 800 km), so sieht man, daß die Nachschocktemperatur des oberen Schocks durchgehend größer ist als die Vorschocktemperatur. Gleiches gilt somit für die Schallgeschwindigkeit und der tiefer liegende Schock wird somit eine größere Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen als der Höhere. Verfolgt man die beiden Schocks durch die vier Graphiken, so sieht man, daß der untere den oberen einholt und ein *shock–overtaking* eintritt. Dasselbe gilt für die beiden am höchsten in der Atmosphäre liegenden Schocks. Durch dieses *shock–overtaking* werden die auftretenden Wellenlängen und damit die Perioden länger. In der ersten Graphik sieht man jedoch noch mehr: Denkt man sich die Nullinie der Geschwindigkeit eingezeichnet, so sieht man, daß der obere Teil der Atmosphäre eine positive Geschwindigkeit, der zweite Schock unten eine insgesamt negative Geschwindigkeit besitzt. Verfolgt man den obersten Schock durch die vier Graphiken, so sieht man, daß auch dieser in seinem Vorschockgebiet eine negative Geschwindigkeit bekommt. Es scheint also, als würden die Schocks auf einer langperiodischen Grundschwingung *reiten.* Dieser Effekt wurde bereits von Rammacher, Ulmschneider (1992) beobachtet. Im vorhergehenden Kapitel hatten wir gesehen, daß beim Anschaltvorgang des Kolbens eine Grundschwingung der Atmosphäre in der *Cut–Off–Frequenz* angeregt

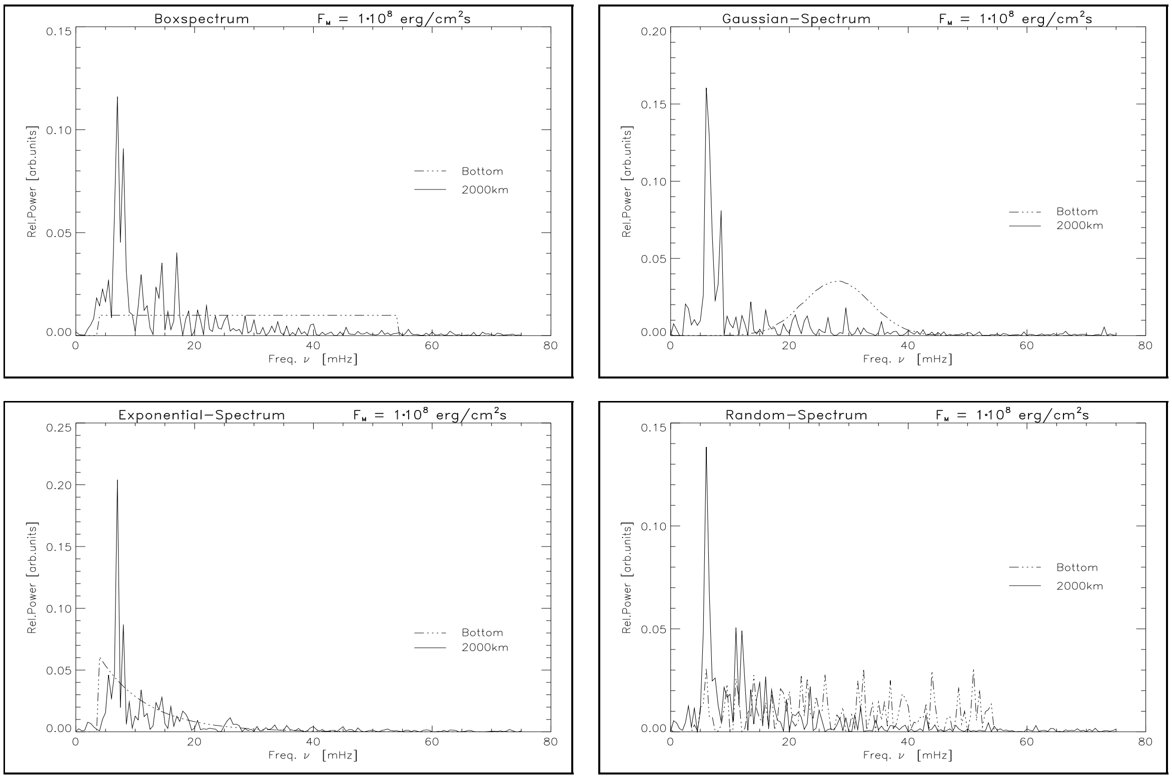


Abbildung 4.8: Das Powerspektrum am unteren Rand und in 2000 km Höhe einer H−−Atmosphäre mit unterschiedlichen Formen des Spektrums. V.l.n.r.: Boxspektrum (konstante Amplitude, gaußförmig verteiltes Spektrum um 35 sec, exponentiell abfallendes Spektrum und zufallsverteiltes Spektrum.

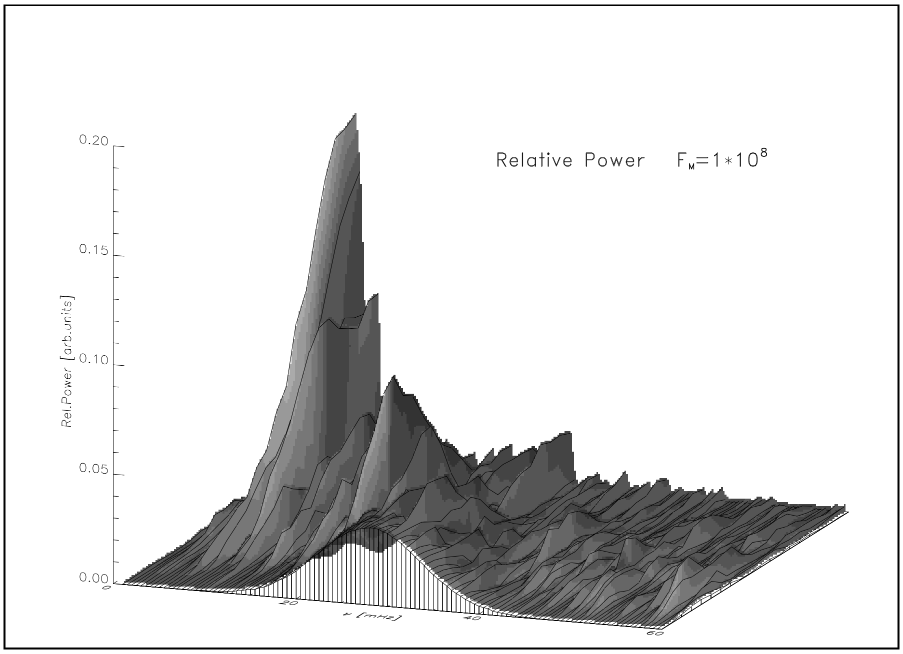


Abbildung 4.9: Normiertes höhenabhängiges Powerspektrum eines gaußförmig verteilten Spektrums. Hierbei wurde das Gesamtpower in jeder auf 1 normiert.

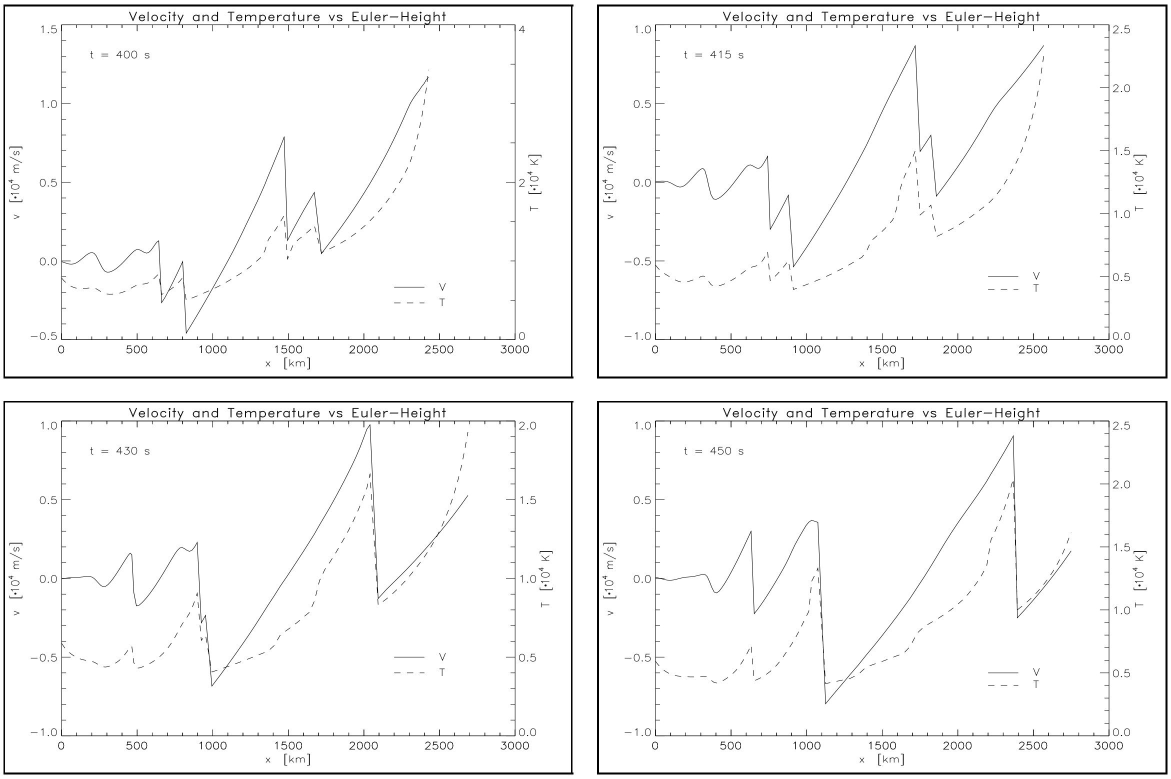


Abbildung 4.10: Vier Phasen einer Rechnung mit einem Gaußspektrum. Zu erkennen sind zwei *Overtaking–Events* sowie eine überlagerte *freie* Oszillation.

wird, die mit der Zeit verklingt. Mit steigendem Temperaturgradienten verkürzt sich die Abklingzeit der auftretenden Störung. Bei den Rechnungen des letzten Kapitels blieb das Temperaturprofil im Laufe der Rechnung stets unverändert. In den Rechnungen mit Schocks wird das Temperaturprofil jedoch stark verzerrt und bekommt effktiv einen positiven Temperaturgradienten. Die Abklingzeit einer durch den Einschaltvorgang induzierten Störung sollte also klein sein. Durch das *Shock–Overtaking* scheint es eine Möglichkeit zu geben einen Rückkopplungsmechanismus zu besitzen, mit dem eine Schwingung erhalten bleibt. Hierbei ist es also zunächst nicht von Belang welche Form das Spektrum besitzt. Wichtig erscheint, daß Schocks sich in unterschiedlichen Höhen bzw. sich in unterschiedlichen Stärken ausbilden, um die Voraussetzung für ein Verschmelzen zu besitzen. Die Dynamik wird dann weitgehend durch die sich groß entwickelnden Schockwellen bestimmt.

Schockstärken

In diesem Zusammenhang ist es interessant das dynamische Verhalten der Schockwellen zu betrachten, das durch deren Schockstärke η charakterisiert werden kann. Abb.(4.11) (links) zeigt die maximalen Schockmachzahlen, die durch (4.21) mit der Schockstärke η verknüpft ist, der Modelle B8, E8, G8 und R8, die nach einer Programmzeit von 800

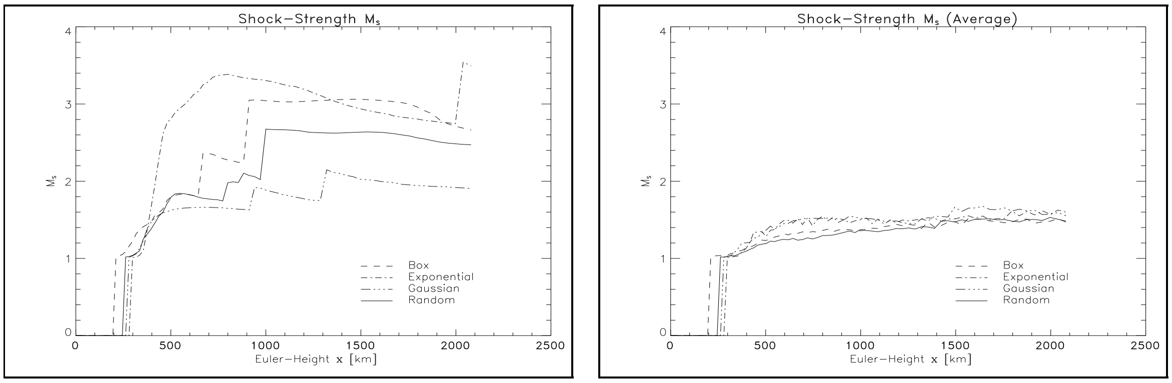


Abbildung 4.11: Die maximalen Schockstärken (links), die in den Modellen B8, E8, G8 und R8 nach einer Programmzeit von 800 sec auftraten, sowie die gemittelten Schockstärken (rechts).

sec angenommen wurden. Hier ist die Schockmachzahl $M_S = (U - u_1)/c_1$ aufgetragen, wobei U die Schockgeschwindigkeit, u_1 die Vorschockgeschwindigkeit und c_1 die lokale Vorschockschallgeschwindigkeit bedeuten ($U - u_1$ ist somit die Geschwindigkeit mit der sich der Schock relativ zum Gas bewegt). Auffällig ist die Stufenstruktur, die dadurch entsteht, daß Schocks sich einholen und ein *overtaking* stattfindet, wobei schlagartig eine größere Schockstärke angenommen wird. Man sieht, daß in keiner der Rechnungen eine Grenzschockstärke angenommen wird, wie sie in der Theorie der schwachen Schocks bei monochromatische Wellen in einer isothermen Atmosphäre gefunden wird (Ulmschneider 1971, 1991). Wichtig hierbei zu erwähnen ist, daß bei allen untersuchten Schallspektren *overtaking* stattfindet, wodurch sich die Periode in 2000 km Höhe in den Bereich 130–180 sec verschiebt. Monochromatische Wellen oberhalb von $P = 20$ sec zeigen kein *overtaking* und behalten ihre Periodizität. Betrachtet man jedoch die gemittelten Schockstärken, so ergibt sich ein anderes Bild (Abb.(4.11) (rechts)). Bei dieser Darstellung wurden in Höhenintervallen von ca. 100 km die Schockstärken aufsummiert, die im Verlauf der Rechnung angenommen wurden und durch die Gesamtzahl der auftretenden Schocks in diesem Intervall dividiert. Deutlich erkennt man ein starkes Zusammenrücken der Machzahlen in den Modellen, wobei in jedem Modell eine steigende Tendenz der Schockstärken vorhanden ist. Die mittlere Schockstärke ($M_S \sim 1,5$) entspricht hierbei in etwa der Stärke einer monochromatischen Welle mit einer Periode $P = 40$ sec. D.h. für Wellenspektren existiert *keine* Grenzschockstärke, sondern eine gemeinsame *mittlere Schockstärke*. Hierbei deutet die Steigung der Machzahl M_S mit der Höhe auf häufigeres *overtaking* (abrupte Erhöhung der Schockstärke) bzw. eine Vergrößerung der Periode (Abstand zwischen zwei Wellenbergen) mit der Höhe hin.

Bedeutung der Anzahl der Frequenzpunkte

Bisher wurden in jedem Spektrum 100 Frequenzpunkte zugrundegelegt. Abb.(4.12) zeigt die Auswirkung im Powerspektrum für eine andere Wahl der Anzahl. Hierbei

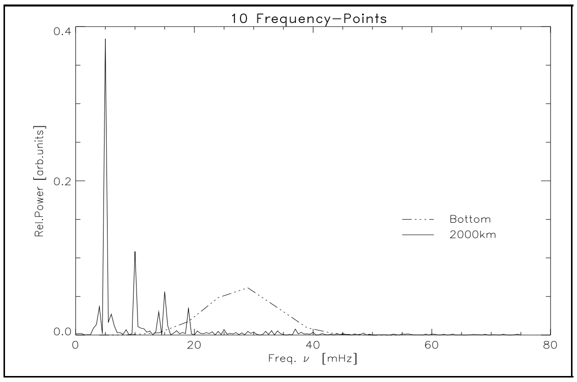


Abbildung 4.12: Vergleich zwischen unterschiedlichen Anzahlen N_ν von Frequenzpunkten. Links $N_\nu = 10$, rechts $N_\nu = 500$.

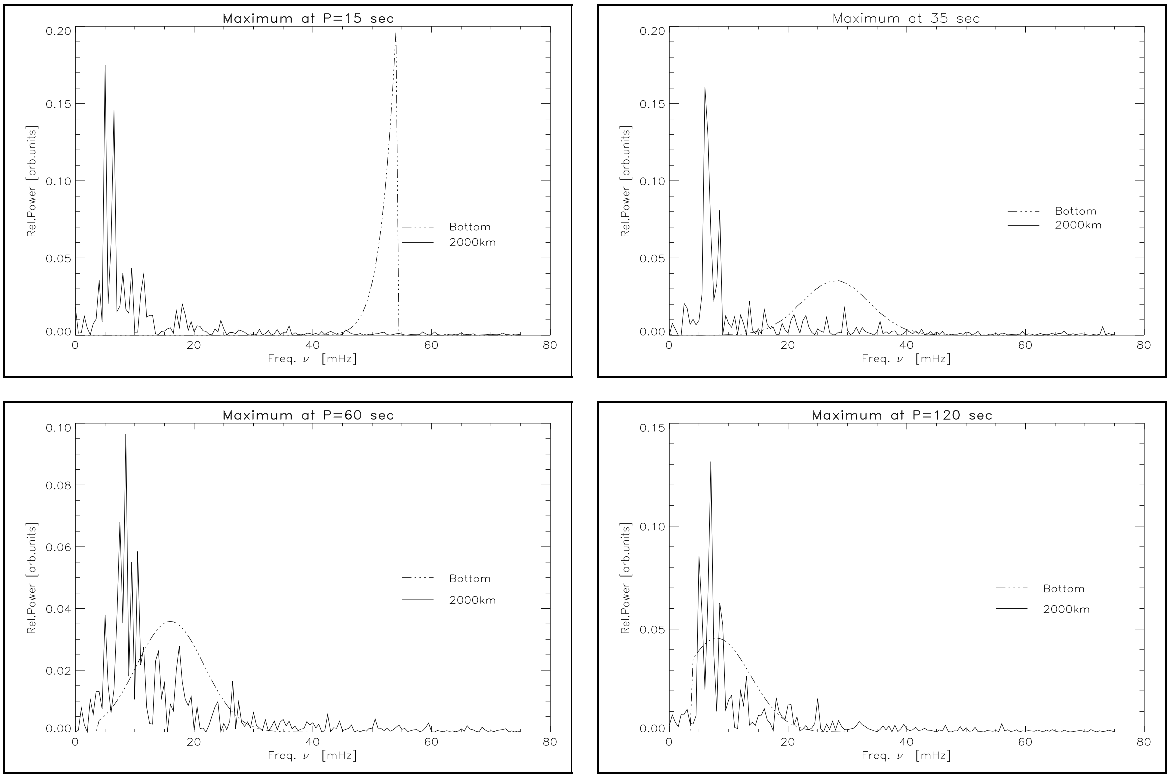


Abbildung 4.13: Vergleich von unterschiedlichen Zentralfrequenzen eines gaußverteilten Spektrums. V.l.n.r.: $P = 15$ sec, $P = 35$ sec, $P = 60$ s ec und $P = 120$ sec. (Die unvollständigen Gaußkurven kommen durch die programminterne Frequenzbelegung zustande).

wurden einmal 10 (F10) und einmal 500 Frequenzpunkte (F500) auf ein gaußförmiges Spektrum verteilt. Beobachtet man bei F10 einen sehr scharfen Peak bei 5 mHz, ist bei F500 eine breitere Verteilung im unteren Frequenzintervall zu beobachten, wobei die beiden größten Peaks ebenfalls um 5 mHz zentriert sind. In erster Näherung scheint das qualitative Verhalten eines Spektrums nicht von der Anzahl der Frequenzpunkte abzuhängen. Es erscheint jedoch wichtig, daß mehrere Frequenzkomponenten vorhanden sind, um die entstehenden Schocks unterschiedlich entwickeln zu lassen und so die Voraussetzung für ein *shock–overtaking* zu liefern.

Bedeutung der Zentralfrequenz

Um die Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens der Atmosphäre von der Zentralfrequenz (max. Geschwindigkeitsamplitude) zu untersuchen, sollen gaußverteilte Spektren exemplarisch betrachtet werden, bei denen die Gaußverteilung um $P = 15$ sec, 35 sec, 60 sec, sowie $P = 120$ sec zentriert wurde. Programmintern wurde die Frequenzverteilung so gesteuert, daß lediglich im Intervall $\omega \in [\omega_{cut}, 10 \cdot \omega_{cut}]$ Geschwindigkeitsamplituden belegt wurden. Abb.(4.13) zeigt daher in der Frequenzverteilung am unteren Punkt der Atmosphäre teilweise nur Ausschnitte einer Gaußkurve. Qualitativ ist aus der Darstellung der Abb.(4.13), die wiederum das normierte Power vergleicht, ersichtlich, daß mit abnehmender Zentralfrequenz zwar immer noch eine Verschiebung in Richtung kleinerer Frequenzen mit der Höhe geschieht, daß jedoch ein größer werdendes Intervall von Frequenzen angenommen wird. Tendenziell kann somit festgestellt werden, daß das Vorhandensein großer Frequenzen ($\nu > 20$ mHz) am unteren Rand der Atmosphäre eher dazu führt kleine Frequenzen im oberen Teil der Atmosphäre anzunehmen.

4.2.4 Wellenspektren mit überlagerter evaneszenter Welle

Wie bei den Rechnungen mit monochromatischen Wellen wurde eine 5–min–Oszillation mit einer Geschwindigkeitsmplitude $u_5 = 1,5 \cdot 10^4$ cm/s einem Wellenspektrum überlagert. Hierbei wurde ein gaußverteiltes Spektrum um $P = 35$ sec mit 100 Frequenzpunkten repräsentativ für die oben betrachteten Spektren gewählt. Der Energiefluß betrug am unteren Rand der Atmosphäre $F_M = 1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s (im folgenden Modell G8P5). Es zeigt sich, daß – ähnlich wie bei den monochromatischen Wellen – eine Superposition evaneszenter Wellen nur sehr geringfügige Auswirkungen auf das dynamische Verhalten einer Atmosphäre besitzt. Betrachtet man das Geschwindigkeitspower am unteren Rand und in 2000 km Höhe der Atmosphäre, so zeigt sich qualitativ dasselbe Bild wie in einer Rechnung ohne Superposition (s.Abb.(4.14)). In beiden Fällen liegt das Maximum des Geschwindigkeitspowers deutlich unterhalb von 10 mHz, wobei in G8P5 der größte Peak bei ca. 7 mHz liegt, der von G8 bei ca. 5mHz. Auch im höhenabhängigen Verhalten zeigen sich qualitativ keine Unterschiede (s.Abb.(4.14 rechts)) Oberhalb von 500 km verlaufen die Kurven des relativen Anteils des Geschwindigkeitspowers nahezu parallel. Deutlich sieht man den Abfall der Kurve von G8P5 während der ersten 300 km in dieser Darstellung, der auf die exponentielle Dämpfung der 5–min–Oszillation

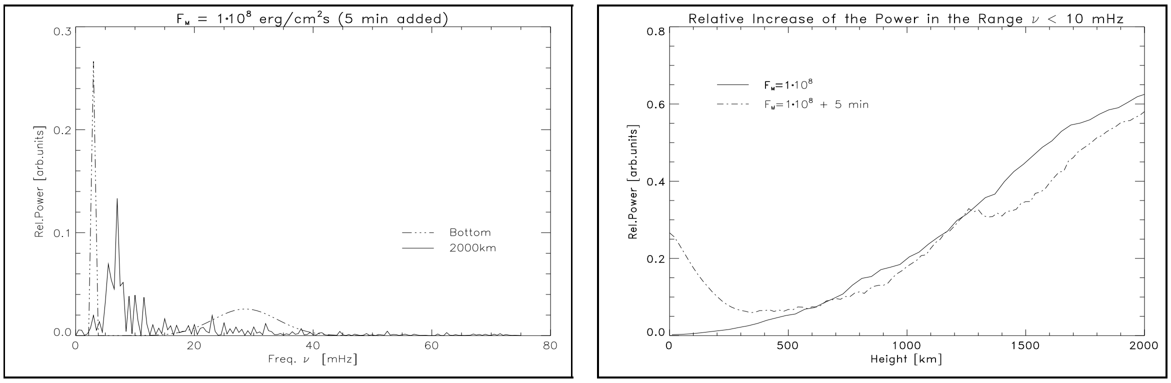


Abbildung 4.14: Vergleich des normalisierten Powerspektrums am unteren Rand und in 2000 km Höhe einer H^-–Atmosphäre für ein gaußverteiltes Spektrum mit überlagerter 5–min–Oszillation (links), sowie der relative Anteil des Geschwindigkeitspowers unterhalb von 10 mHz im Vergleich mit einer Rechnung ohne evaneszente überlagerung (rechts).

zurückzuführen ist. D.h. die langperiodische Schwingung wird im unteren Bereich der Atmosphäre bereits *ausgeschaltet* und besitzt für den Höhenbereich, der von Schockwellen dominiert wird, keine Bedeutung mehr. Selbst der Peak bei 3 mHz, der bei G8P5 in 2000 km Höhe auftritt muß nicht notwendigerweise auf die induzierte 5–min–Oszillation zurückzuführen sein. Wie Abb.(4.8) zeigt, ist dieser Anteil ebenfalls bei G8 vorhanden, d.h. es ist ein Anteil, der allein durch die Schockdynamik zustandekommt.

4.2.5 Abhängigkeit von der Startatmophäre

In diesem Abschnitt soll das dynamische Verhalten von 4 Atmosphärentypen untersucht werden. Es wurden zwei Strahlungsgleichgewichtsatmosphären (H^-, Mg), eine isotherme Schichtung (T=5000 K) sowie die VAL–C–Atmosphäre behandelt. Die Atmosphären wurden jeweils mit einem gaußförmigen Wellenspektrum, bestehend aus 100 Frequenzpunkten angeregt, auf das $1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s verteilt waren. Abb.(4.15) zeigt das jeweils auf 1 normierte Powerspektrum am Fußpunkt der Atmosphäre sowie in 2000 km Höhe. Qualitativ weisen die Atmosphären keine großen Unterschiede auf. Auch im Höhenverlauf gibt es nur wenige Differenzen. Abb.(4.16) zeigt den relativen Anteil des Powers im Intervall $\nu \in [0, 10]$ mHz in Abhängigkeit der Höhe. Der qualitative Verlauf des relativen Powers ist in allen Atmosphären gleich und in 2000 km Höhe liegt ca. 60% des gesamten Geschwindigkeitspowers in dem betrachteten Frequenzintervall. Auffällig ist die relativ starke Zunahme in ca. 800 km. Zu erklären ist dieser Anstieg damit, daß sich in der Höhe auftretende Schocks voll entwickelt haben und durch *shock–overtaking* anfangen die Periode zu vergrößern. Verknüpft man mit dem Geschwindigkeitspower den mechnischen Energiefluß ($F_M \propto u^2$), so kann man sagen, daß

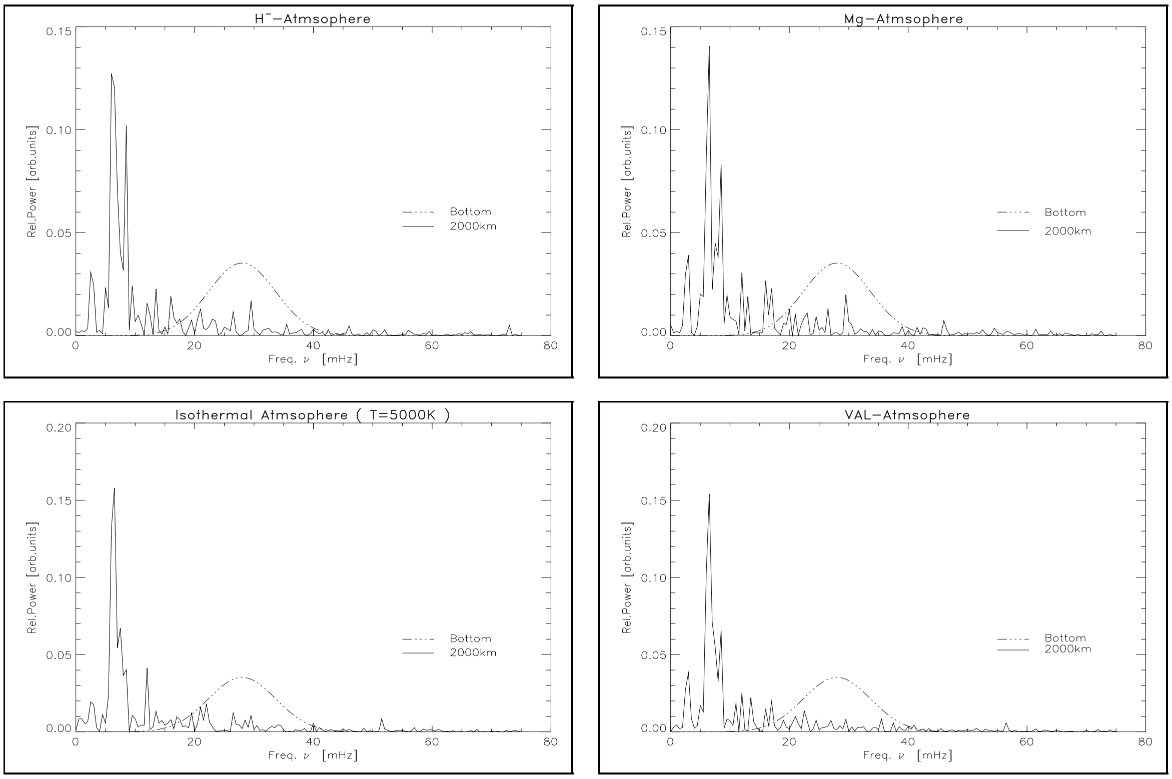


Abbildung 4.15: Powerspektren eines gaußförmig verteilten Spektrums um 35 sec in verschiedenen Startatmosphären. V.l.n.r.: H^-–, Magnesium-Strahlungsgleichgewichtsatmosphären, isotherme Atmosphäre (T=5000 K) und die VAL–C Atmosphäre.

60% des Energieflusses in 2000 km Höhe unterhalb von 10 mHz strömt. Daß qualitativ zwischen den Atmosphären keine Unterschiede bestehen, kann damit erklärt werden, daß im Verlauf der Rechenzeit die Temperaturstruktur durch die Schocks so verzerrt wird, daß die Information des Anfangszustandes vollständig vernichtet wird. Da die Rechnungen ohne Strahlungskühlung durchgeführt wurden, besteht keine Möglichkeit für die Atmosphäre die Entropiesteigerung, die durch die Schocks verursacht wird wieder abzubauen, d.h. die Schocks *laden* Entropie in der oberen Atmosphäre *ab*, was sich nur in einer Temperaturerhöhung und einer Ausdehnung der Atmosphäre äußern kann. In dem Zeitintervall, in dem die Fourieranalyse durchgeführt wurde ($t \in [1000, 3000]$ sec) ist die Temperatur nicht mehr durch die Anfangsstruktur, sondern nur noch durch das Dissipationsverhalten der Schocks dominiert, das von dem induzierten Energiefluß abhängt. Das Verhältnis $T(x,t)/T_0(x)$ ist so groß geworden, daß der genaue Verlauf der Anfangsatmosphäre unwichtig ist.

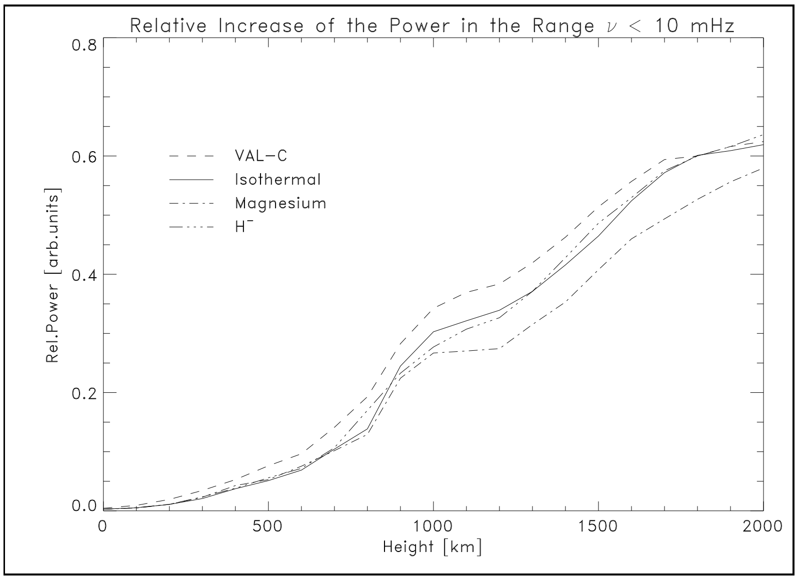


Abbildung 4.16: Der relative Anteil des Geschwindigkeitspowers unterhalb von 10 mHz.

4.2.6 Die Abhängigkeit vom Energiefluß

Powerspektren

Abb.(4.17) zeigt die Ergebnisse aus Rechnungen mit einem gaußverteilten Spektrum um P=35 sec und induzierten Energieflüssen am unteren Rand einer H^-– Atmosphäre im Bereich von $F_M = 1 \cdot 10^6$ erg/cm^{2}s bis $F_M = 1 \cdot 10^9$ erg/cm^{2}s (im folgenden Modelle G6 bis G9 respektive). In diesem betrachteten Intervall scheint das dynamische Verhalten der Atmosphäre in einer Höhe von 2000 km signifikant von der Größe des Energieflusses abzuhängen. Zwar liegt der größte Teil des Geschwindigkeitspowers in allen Modellen wiederum unterhalb von 10 mHz, jedoch scheint mit wachsender Energie eine immer stärker werdende Zentrierung um $\nu = 5$ mHz stattzufinden. Ist bei G6 noch eine breite Frequenzverteilung mit vergleichbar großen Peaks im Intervall $\nu \in [5, 25]$mHz zu finden, so liegt bei den anderen Modellen ein deutliches Maximum in der Frequenzverteilung unterhalb von 10 mHz, wobei mit zunehmender Energie ein Peak bei ca. 9 mHz zugunsten des Peaks bei 5 mHz zurücktritt.

Schaut man sich die höhenabhängige Entwicklung des Geschwindigkeitspowers unterhalb von 10 mHz an (s.Abb.(4.18)), so tritt die Abhängigkeit vom induzierten Energiefluß noch deutlicher zutage. Mit wachsender Energie verschiebt sich bereits in geringerer Höhe das Geschwindigkeitspower in den unteren Frequenzbereich. Führt man die Frequenzverschiebung auf die Schockdynamik zurück, so erwartet man dieses Verhalten auch. Da eine größere Energie eine größere Geschwindigkeitsamplitude impliziert ($u \sim \sqrt{F_M}$) wird sich das Wellenprofil in kleineren Höhen bereits verzerren (s.Kap. 4.1.2) und somit werden sich schneller Diskontinuitäten ausbilden. Der frühere Anstieg der Kurven ist somit verständlich.

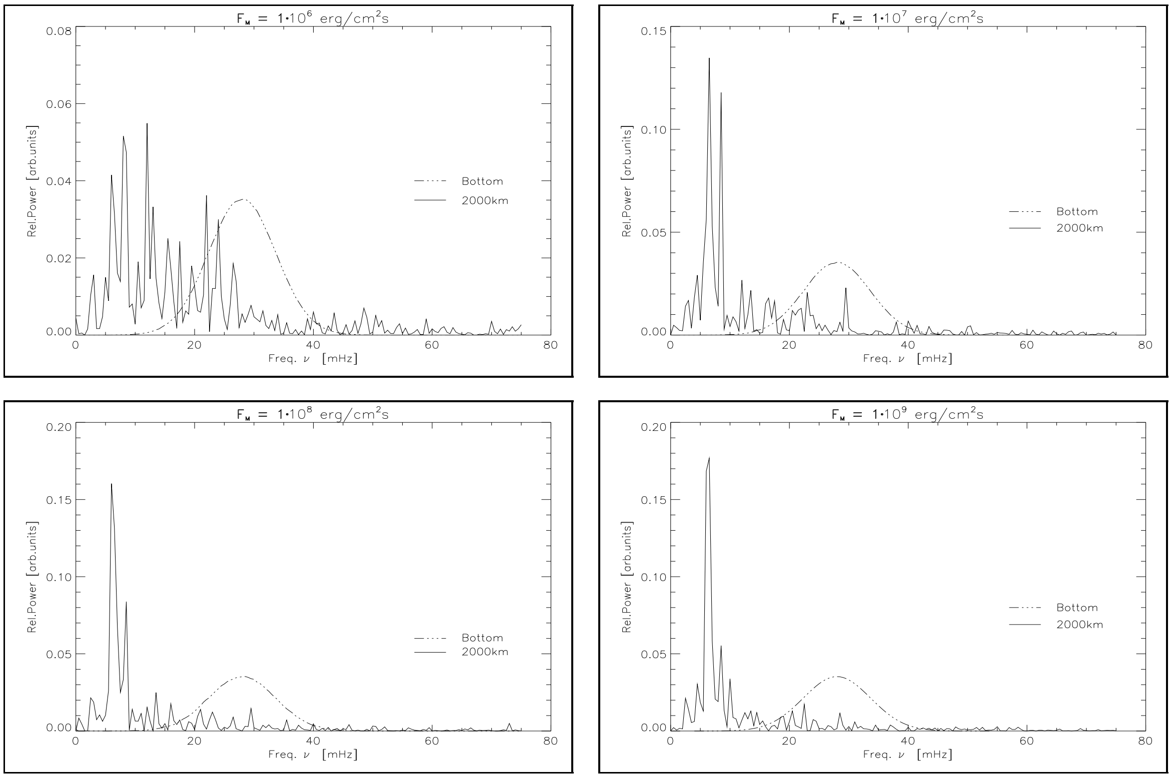


Abbildung 4.17: Das normalisierte Powerspektrum eines gaußverteilten Spektrums unterschiedlicher Energie in einer H^-– Atmosphäre, verglichen am unteren Rand der Atmosphäre und in 2000 km Höhe. V.l.n.r.: $1 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$, $1 \cdot 10^8$ und $1 \cdot 10^9$ erg/cm^{2}s.

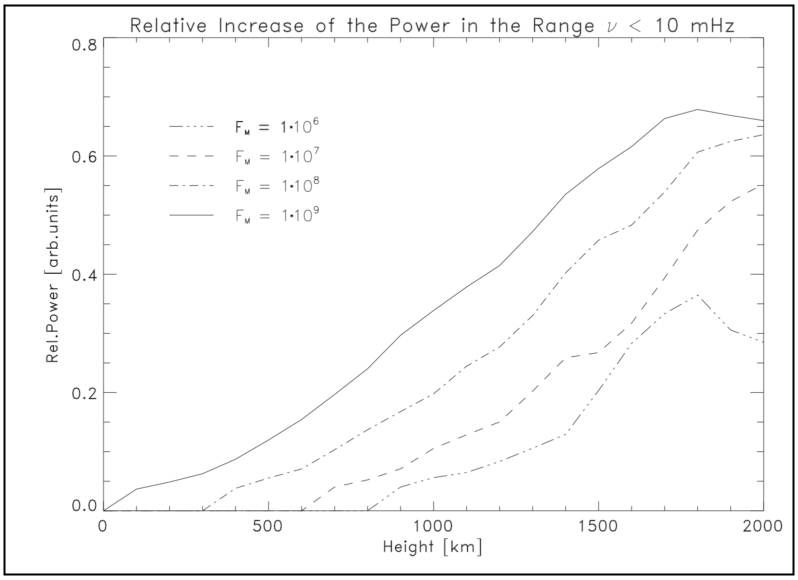
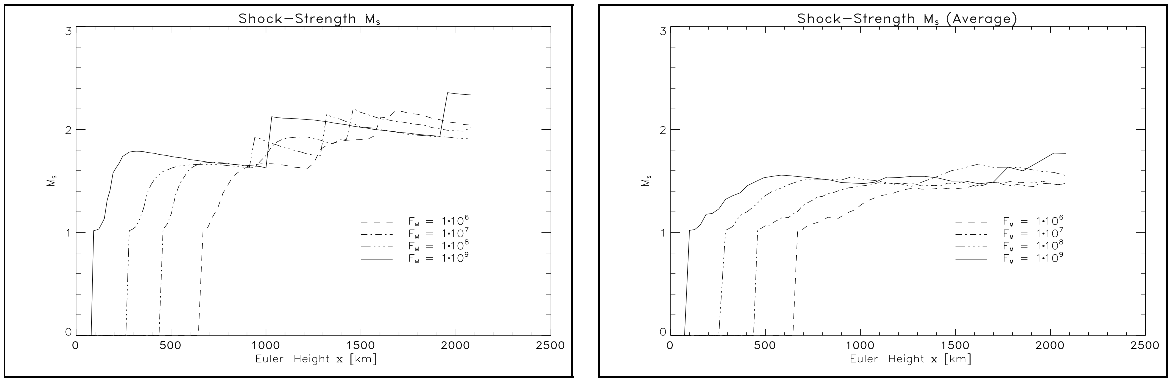


Abbildung 4.18: Der relative Anteil des Geschwindigkeitspowers unterhalb von 10 mHz für die gaußverteilten Spektren unterschiedlicher Energie.

Schockstärken

Hier ist es wiederum interessant die Schockmachzahl M_S zu betrachten. Abb.(4.19) (links) zeigt die maximalen Schockstärken in den Modellen G6 bis G9, sowie aus monochromatischen Rechnungen mit einer Periode von $P = 35$ sec. Die Auftragung ist wie im vorgehenden Abschnitt nach 800 sec Programmzeit vorgenommen, um die Anfangsstörung nicht miteinzubeziehen. Wiederum fällt die Stufenstruktur in den Spektrenrechnungen im Gegensatz zu dem glatten Verlauf der monochromatischen Rechnungen auf. Im Gegensatz zu den monochromatischen Wellen scheint es im unteren Teil der Atmosphäre in den G–Modellen keine Grenzschockstärke zu geben. Die Grenzschockstärke aus der Theorie der schwachen Schocks η_{lim} ist nur abhängig von der Periode und *nicht* von der Größe des Energieflusses. Dieses Verhalten ist in Abb.(4.19) für die monochromatischen Wellen sehr deutlich erkennbar, wobei die abfallende Tendenz der Kurven mit zunehmender Höhe Ausdruck der Schockdissipation ist. Bei den Wellenspektren variiert M_S am unteren Rand jedoch zwischen 1,65 (G6 in 950 km) und 2,0 (G9 in 220 km), wobei starke Schocks schnell ihre Energie verlieren und kleinere Schockstärken annehmen. Im oberen Teil der betrachteten Atmosphärenschicht kann man zwar einen gemeinsamen Mittelwert von $M_S = 2,05$ finden. Dieser Mittelwert hat jedoch nicht den Charakter einer Grenzschockstärke, da er offensichtlich durch *shock–overtaking* zustande kommt (in jedem Modell erkennt man eine ausgeprägte Stufenstruktur), was in dem Konzept der *limiting shock–strength* nicht enthalten ist. Führt man jedoch wieder wie oben eine Mittelung der Machzahlen durch (Abb.(4.19) rechts), so erkennt man dasselbe Verhalten wie in den Modellen E8, R8 und B8. Auch hier existiert ein gemeinsamer Mittelwert mit steigender Tendenz.

Vergleicht man nun die Abb.(4.18) und (4.19), so erkennt man, daß der relative Anteil des Powers dort anfängt zu wachsen, wo sich die Schocks voll entwickelt haben. Wie oben bereits gezeigt wurde wird der Effekt der Periodenverlängerung durch das Verschmelzen von Schocks verstärkt. Wie in den Rechnungen mit monochromatischen Wellen zu sehen ist, reicht die bloße Anwesenheit von Schockwellen nicht aus, um die Verschiebung des Frequenzmaximums zu erklären. Können sich Schockwellen jedoch überholen, so liefert dies eine Frequenzverschiebung: bei der Verschmelzung zweier Schockwellen besitzt der resultierende Schock die gesamte Periodenlänge der zwei ursprünglichen Wellen. Abb.(4.20) zeigt hierzu eine Statistik der *shock–overtakings*. Ersichtlich ist, daß mit zunehmendem Energiefluß die Anzahl der *overtakings* zunimmt. Ebenso verringert sich die Höhe, in der sich bereits Schockwellen überholen. Eine Höhe, in der modellbezogen besonders häufig *overtakings* stattfinden, kann jedoch nicht festgestellt werden. Um die Anfangsstörung, bei der überdurchschnittlich häufig *overtakings* stattfinden in dieser Darstellung auszuschließen, wurde die Statistik erst nach einer Programmzeit von 800 sec begonnen. Zusätzlich zu der Schockstärke erkennt man in Abb.(4.19) die Entstehungshöhe der Schocks, die durch das abrupte Anwachsen der Schockmachzahl M_S von 0 auf 1 gekennzeichnet ist (ein neu eingesetzter Schock wird sich zunächst mit Schallgeschwindigkeit relativ zum Vorschockmedium bewegen). Mit zunehmender Energie sinkt die Entstehungshöhe von 650 km in Modell G6 auf 400 km in G7, 200 km in G8 auf ca. 50 km in Modell G9. Da Schocks einen Druck auf die



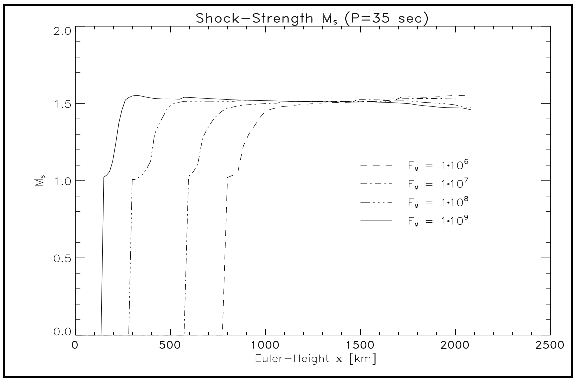


Abbildung 4.19: Die maximalen Schockstärken, die in den Modellen G6 bis G9 (o.l.) und monochromatischen Rechnungen mit einer Periode P=35 sec (links) auftraten, sowie die mittleren Schockstärken der Spektren (o.r.), die nach einer Programmzeit von 800 sec angenommen wurden.

Atmosphäre ausüben, der proportional der Anfangsatmosphärendichte $\rho_0(x)$ ist und mit steigender Machzahl M_S zunimmt (Gail et al. 1990), werden Schocks, die sich in geringer Höhe bilden, wo die Dichte relativ hoch ist einen großen nach außen gerichteten Druck auf die Atmosphäre ausüben und diese somit stark ausdehnen. Ebenso wird in den Schocks durch Dissipation von mechanischer Energie in Wärme die Temperatur bereits in geringen Höhen stark ansteigen, womit auch die Schallgeschwindigkeit und damit die Wellenpropagationsgeschwindigkeit wachsen wird. Bezogen auf Abb.(4.18) treten somit zwei konkurrierende Effekte auf. Zum einen wird mit abnehmender Energie (G9 $\rightarrow$ G6) die Entwicklung des Powers im Intervall $\nu < 10$ mHz durch die Abnahme der Zahl der *overtakings* (s.Abb.(4.20)) in den unteren Schichten der Atmosphäre auf größere Höhen verschoben. Zum anderen tritt durch die Ausdehnung und den Temperaturanstieg eine Skalenverzerrung ein. Die Dynamik, die sich bei G6 auf ca. 3000 km verteilt, spielt sich in G9 auf ca. 20000 km ab. Hierzu zeigt Abb.(4.21) das Ausdehnungsverhalten der vier Modelle.

Mit steigender Energie verschiebt sich die Atmosphärenschicht, die nach außen gestoßen wird immer stärker nach innen. Ist die Atmosphäre in G6 bis ca. 1000 km noch stabil, verschiebt sich diese Grenze in G9 auf ca. 200 km. Deutlich zu erkennen sind in dem Ausdehnungsverhalten die langperiodischen Anteile in den oberen Atmosphärenschichten. Hierbei kommen die *welligen* Formen dadurch zustande, daß ein Schock einen Druck auf die Atmosphäre ausübt und diese ausdehnt. Hinter dem Schock bildet sich eine nach innen gerichtete Strömung aus, die solange andauert, bis der nächste Schock das Gas wieder nach außen drückt. Erreichen die Gasteilchen bei diesem Zurückströmen nicht mehr ihre Ausgangsposition bis der nächste Schock ein-

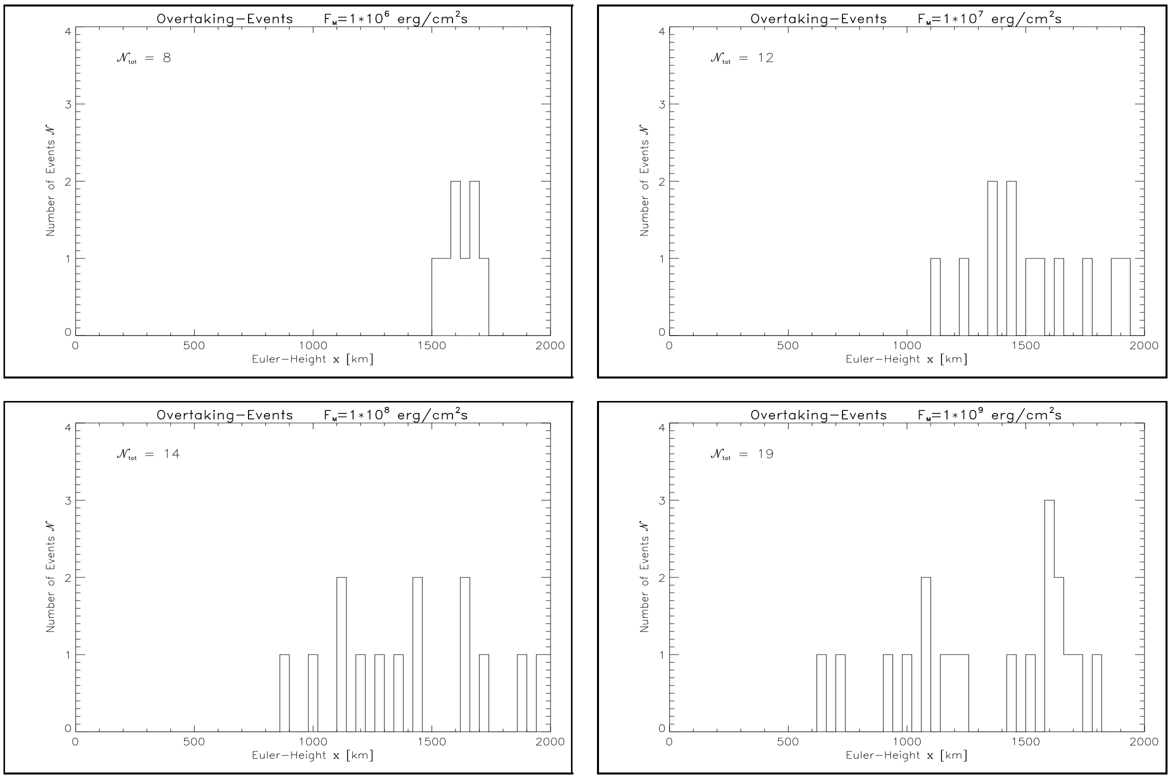


Abbildung 4.20: *Shock–overtaking–Statistik* der Modelle G6 bis G9. Gezeigt ist jeweils die Anzahl der *overtakings* in einem Höhenintervall von 100 km sowie die Gesamtanzahl $\mathcal{N}_{tot}$.

trifft, so wird sich die Atmosphäre immer weiter ausdehnen. Würde man die Rechnung bspw. von G9 noch weiterführen, so könnte man einen Zustand erreichen, bei dem das Gas die Fluchtgeschwindigkeit erreicht und als *Wind* von der Atmosphäre davonfliegt. Die Möglichkeit von schockgetriebenen Sternwinden wurde bereits von verschiedenen Autoren diskutiert (Ulmschneider et al. 1992, Cuntz 1987, 1990, Cuntz & Muchmore 1989, Lafon & Berruyer 1991).

Mechanische Energieflüsse

In Zusammenhang mit der Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens von dem induzierten Energiefluß, ist es interessant das unterschiedliche Dissipationsverhalten der Schockwellen in den Modellen zu betrachten. Abb.(4.22 links) zeigt hierzu im Vergleich die vier Modelle G6 bis G9 sowie vier Rechungen einer monochromatischen Welle mit einer Periode P = 35 sec in demselben Energiebereich (Modelle M6 bis M9 im folgenden), wobei der Energiefluß auf den untersten Punkt in der Atmosphäre normiert wurde. Wie zu erwarten, setzt bei allen Modellen der Verlust an mechanischer Energie mit dem Auftreten von Schocks ein. Zu beachten ist, daß die Flüsse im Lagrangegitter dargestellt sind, d.h. ein Massenstrom, der durch die Ausdehnung der Atmosphäre im

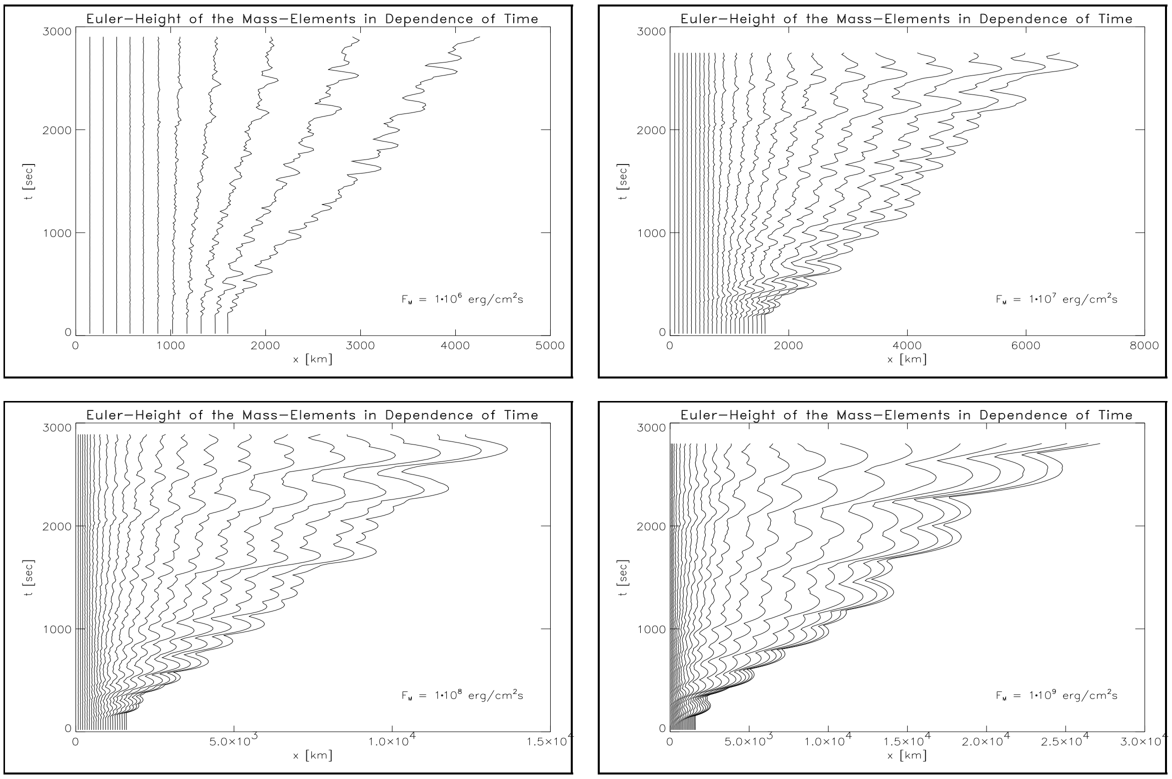


Abbildung 4.21: Die Ausdehnung der Atmosphäre in den Modellen G6 bis G9. Aufgetragen ist die Euler–Höhe der Lagrange– Koordinaten in Abhängigkeit der Zeit. Die Wellenstruktur entsteht durch Schocks, die durch die Massenelemente laufen und diese nach außen stoßen.

ortsfesten Eulergitter entsteht und damit einen kinetischen und potentiellen Energiefluß darstellt, ist nicht berücksichtigt. Aufgetragen ist somit die Dissipation von mechanischer Energie in Wärme, sowie die Ausdehnungsarbeit, die gegen den äußeren Druck geleistet werden muß. Um das Dissipationsverhalten der Schocks grob abzuschätzen, kann das Intervall betrachtet werden, das gegeben ist durch die Höhe der Schockbildung und der Höhe, in der die Energie auf die Hälfte abgesunken ist. Dieses Intervall variiert in G6 bis G9 zwischen 240 km (G9) und 340 km (G6), sowie in M6 bis M9 zwischen 200 km (M9) und 260 km (M7). Eine genauere Betrachtung kann durch Einführung der Dämpfungslänge L geschehen, die durch

$$\frac{1}{L} = -\frac{1}{F_M}\frac{dF_M}{dx} \tag{4.37}$$

definiert ist. Abb.(4.22 rechts) zeigt die inversen negativen Dämpfungslängen für die Modelle G6 bis G9 sowie M6 bis M9 wiederum im Lagrangegitter. In der Theorie der schwachen Schocks kann für die Dämpfungslänge ein analytischer Ausdruck der Form

$$L = \frac{cP}{(\gamma+1)\eta} \tag{4.38}$$

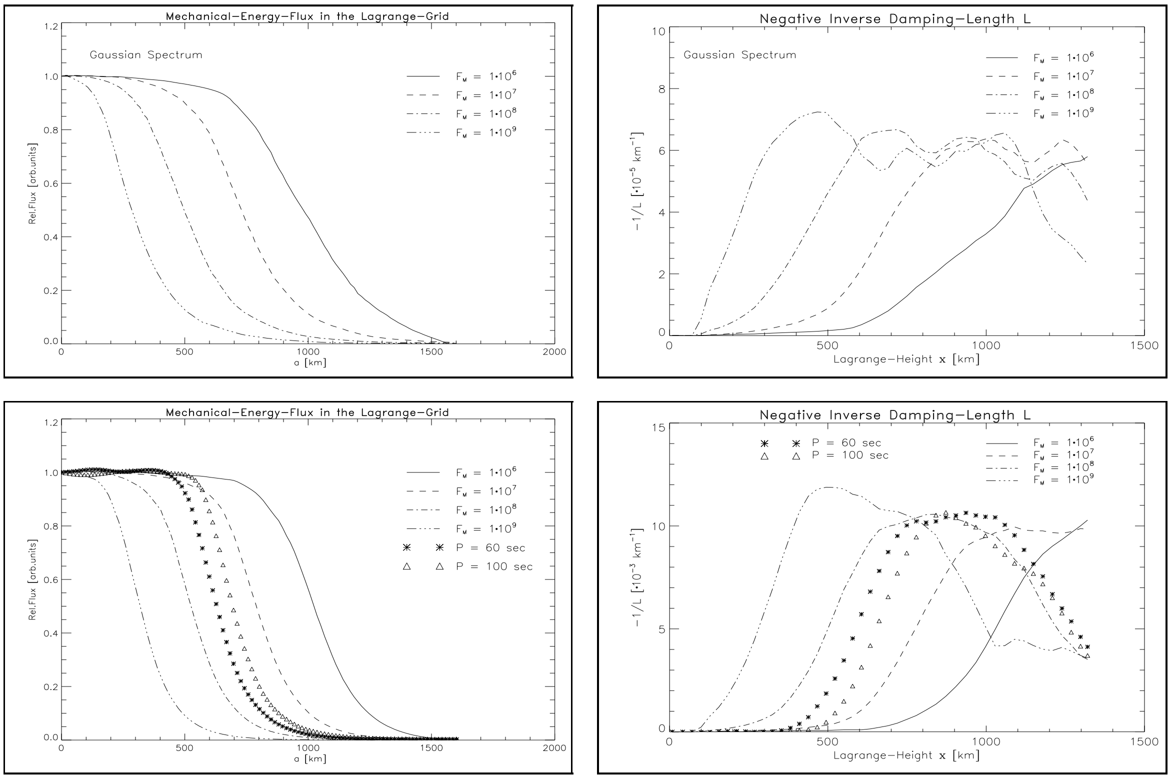


Abbildung 4.22: Der normierte mechanische Energiefluß F_M in Abhängigkeit der Höhe (links) für gaußverteilte Spektren (oben links) und monochromatische Wellen mit $P = 35$ sec (unten links) im Energieintervall $F_M = 1 \cdot 10^6$ erg/cm^{2}s bis $F_M = 1 \cdot 10^9$ erg/cm^{2}s (Modelle G6 bis G9, sowie M6 bis M9), sowie die negativen inversen Dämpfungslängen L (rechts) für die entsprechenden Modelle. Zusätzlich sind die Energieflüsse und Dämpfungslängen der Modelle M60 ($F_M = 1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s, $P = 60$ sec) und M100 ($F_M = 1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s, $P = 100$ sec) zum Vergleich mit Symbolen in die untere Graphik geplottet.

abgeleitet werden (Ulmschneider, 1991), wobei c die Schallgeschwindigkeit, P die Wellenperiode und η die Schockstärke als Funktion der Dichte ρ (s.Gl.(4.20)) ist. Der Abfall der Kurven in Abb.(4.22), der nach dem starken Anstieg durch Schockbildung folgt, führt sich somit auf die Vergrößerung der Wellenperiode sowie einen Anstieg der Schallgeschwindigkeit (aufgrund der einsetzenden Temperaturerhöhung) zurück. Auffällig ist jedoch, daß die inversen Dämpfungslängen der monochromatischen Wellen einen starken Anstieg und ebenso einen starken Abfall besitzen (deutlich zu sehen bei M8, M9). Oben hatten wir gesehen, daß monochromatische Wellen mit größerer Periode als $P = 30$ sec ihre Periode beibehalten. Ebenso besitzen monochromatische Wellen eine *limiting shock strength*, d.h. daß η eine Konstante darstellt. Die einzige Möglichkeit für monochromatische Wellen, ihre Dämpfungslänge zu ändern, besteht in der Erhöhung der Schallgeschwindigkeit. Demnach ist der Abfall der Kurven in

M8, M9 ein Ausdruck für den Temperatur– und damit den Schallgeschwindigkeitsanstieg. Ein anderes Verhalten ergibt sich in den Modellen G6 bis G9. Die inversen Dämpfungslängen steigen ebenfalls zunächst stark an, zeigen aber eine viel schwächere Tendenz wieder abzusinken. Da alle Spektren im Höhenverlauf *bestrebt sind* lange Perioden zu bilden, sowie durch *Overtaking* die Schockstärke η vergrößert wird, gibt es für Spektren drei variable Größen in (4.38). Da die Schockstärke sich nur unterproportional zur Periode entwickelt (s.Abb.(4.19); die Schockstärke steigt maximal auf den 1,2–fachen Wert bei *Overtakings*) und die Schallgeschwindigkeit sich ähnlich entwickelt wie bei den monochromatischen Wellen, scheint dieses differierende Verhalten überwiegend auf die Vergrößerung der Periode zurückzuführen zu sein. Eine größere negative Dämpfungslänge (kleine inverse Dämpfungslänge) bedeutet einen kleineren Energieverlust. Durch die Vergrößerung der Periode wird somit Energie langsamer dissipiert. Dies zeigt sich auch in den steiler abfallenden Energieflußkurven der monochromatischen Wellen gegenüber den Wellenspektren. Um das Energiedissipationsverhalten der Modelle im ortsfesten Eulergitter gegeneinander zu vergleichen, kann man die Transmissionskoeffizienten $\mathcal{T}$ des mechanischen Energieflusses F_M in 2000 km Höhe bestimmen (d.i. das Verhältnis des Energieflusses in 2000 km Höhe zu dem Energiefluß am unteren Rand der Atmosphäre). Hierbei zeigt sich, daß die Gaußspektren in der Höhe noch ca. 1,5–mal mehr Energie transportieren wie die monochromatischen Wellen vergleichbarer Periode (Vergleich zwischen dem Maximum des Gaußspektrums und der monochromatischen Welle). Hat man bei den Gaußspektren noch einen Anteil zwischen 3,8% und 2,9% in der Höhe, so sind es bei monochromatischen Wellen (Modelle M6 bis M9) nur zwischen 3,4% und 1,8%. Bei den Modellen M15 und M20, die ebenfalls die Tendenz besitzen lange Perioden in der Höhe auszubilden, sind es sogar nur 0,7% bzw. 0,4%. Bei dem Boxspektrum (B8), sowie dem zufallsverteilten Spektrum (R8) beträgt der transmittierte Anteil ca. 7% und bei dem exponentiell abfallenden Spektrum sogar 12,8%. Mit steigender Periode steigt ebenfalls der Transmissionskoeffizient bei den monochromatischen Wellen, was zu erwarten ist, da mit steigender Periode erst in größerer Höhe Schockbildung und damit Dissipation einsetzt. Bei M60 fließen noch 7,2%, bei M100 immerhin noch 16,6% der mechanischen Energie in 2000 km Höhe in Relation zum Fußpunkt der Atmosphäre.

Neben der Energieflußdichte kann man Betrachtungen zur mittleren kinetischen Energiedichte

$$\varepsilon(x,\nu) = \frac{1}{2}\rho_{av}(x) < v(x,\nu)^2 > \tag{4.39}$$

anstellen. Hierbei stellt $\rho_{av}(x)$ die mittlere Dichte an einem Eulerpunkt x, $< v(x,\nu)^2 >$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat an diesem Punkt in Abhängigkeit der Frequenz ν (Poweramplitude) dar.

Durch diese Darstellung ist es möglich die Energiekonversion des Wellenspektrums auf den Frequenzbereich $\nu < 10$ mHz (*3 min Oszillation*) zu betrachten. Da sich mit steigendem Energiefluß die Atmosphäre stärker ausdehnt (s.Abb.(4.21)), wird auch die mittlere Dichte in größeren Höhen mit der Energie zunehmen (dichtes Gas wird nach außen transportiert). D.h. es ist zu erwarten, daß in den Modellen mit großem Energiefluß (G8, G9) mehr Energie auf kleine Perioden übertragen wird – zum einen aufgrund

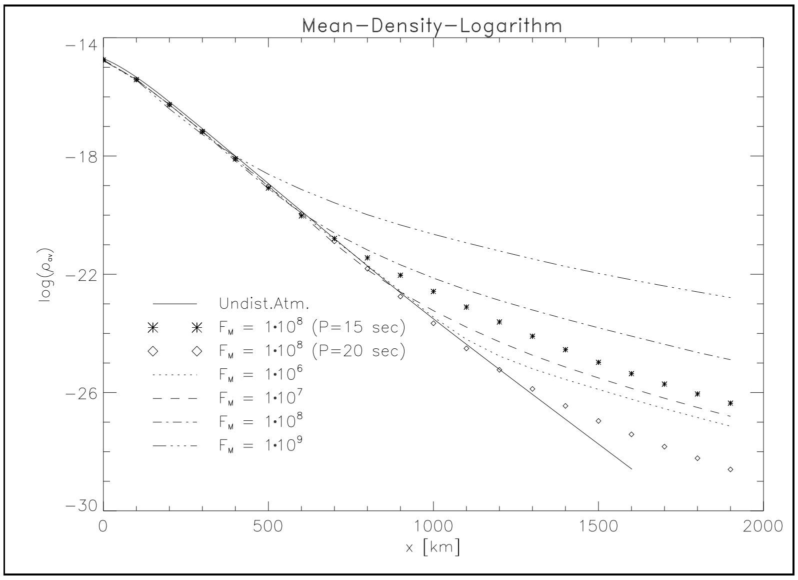


Abbildung 4.23: Die mittlere Dichte $\rho_{av}(x)$ in den Modellen G6 bis G9.

der größeren mittleren Dichte, zum anderen wegen des größeren relativen Anteils des Geschwindigkeitspowers (s.Abb.(4.18)). Abb.(4.23) zeigt den Verlauf der mittleren Dichte in den Modellen G6 bis G9 sowie der Modelle M15 und M20, die ebenfalls die Tendenz zeigten im oberen Atmosphärenbereich große Perioden anzunehmen. Wie zu erwarten ist, steigt die mittlere Dichte $\rho_{av}(x)$ mit der Energie. Da der Energiefluß in allen Modellen stark mit der Höhe abnimmt, ist nicht zu erwarten, daß ein großer Absolutbetrag an Energie auf die kleinen Frequenzen übertragen wird. Hierzu zeigt Abb.(4.24) die kinetische Energiedichte ε in Abhängigkeit der Frequenz ν am unteren Punkt der Atmosphäre und in einer Euler–Höhe von 2000 km. Ebenso ist der Anteil K der Energiedichte im Intervall $\nu < 10$ mHz in 2000 km Höhe zur absoluten Energie am unteren Rand notiert. In Modell G9 wird somit mehr als dreimal soviel Energie auf die kleinen Frequenzen übertragen, wie in G6 (1,7% zu 0,5%). Ebenso ist festzustellen, daß in den monochromatischen Rechnungen nur ein Bruchteil der Energie im Vergleich zu den Spektrenrechnungen konvertiert wird (0,1% in M20, 0,3% in M15).

4.3 Zusammenfassung

Es konnte gezeigt werden, daß monochromatische Wellen ein anderes dynamisches Verhalten besitzen als Wellenspektren. Zum einen nehmen monochromatiche Wellen eine Grenzschockstärke ein, die nur abhängig ist von der Periode und nicht von der Größe des Energieflusses. Zum anderen besitzen sie ein anderes Energiedissipationsverhalten, was sich dadurch auszeichnet, daß die Energie in einem kleineren Höhenintervall effektiver verloren wird als bei Wellenspektren (kleinere Dämpfungslänge). Jedoch existiert bei den monochromatischen Wellen eine *Grenzperiode* P_{lim} unterhalb derer sie ein ähnliches dynamisches Verhalten besitzen wie Wellenspektren. P_{lim} lag in den Rech-

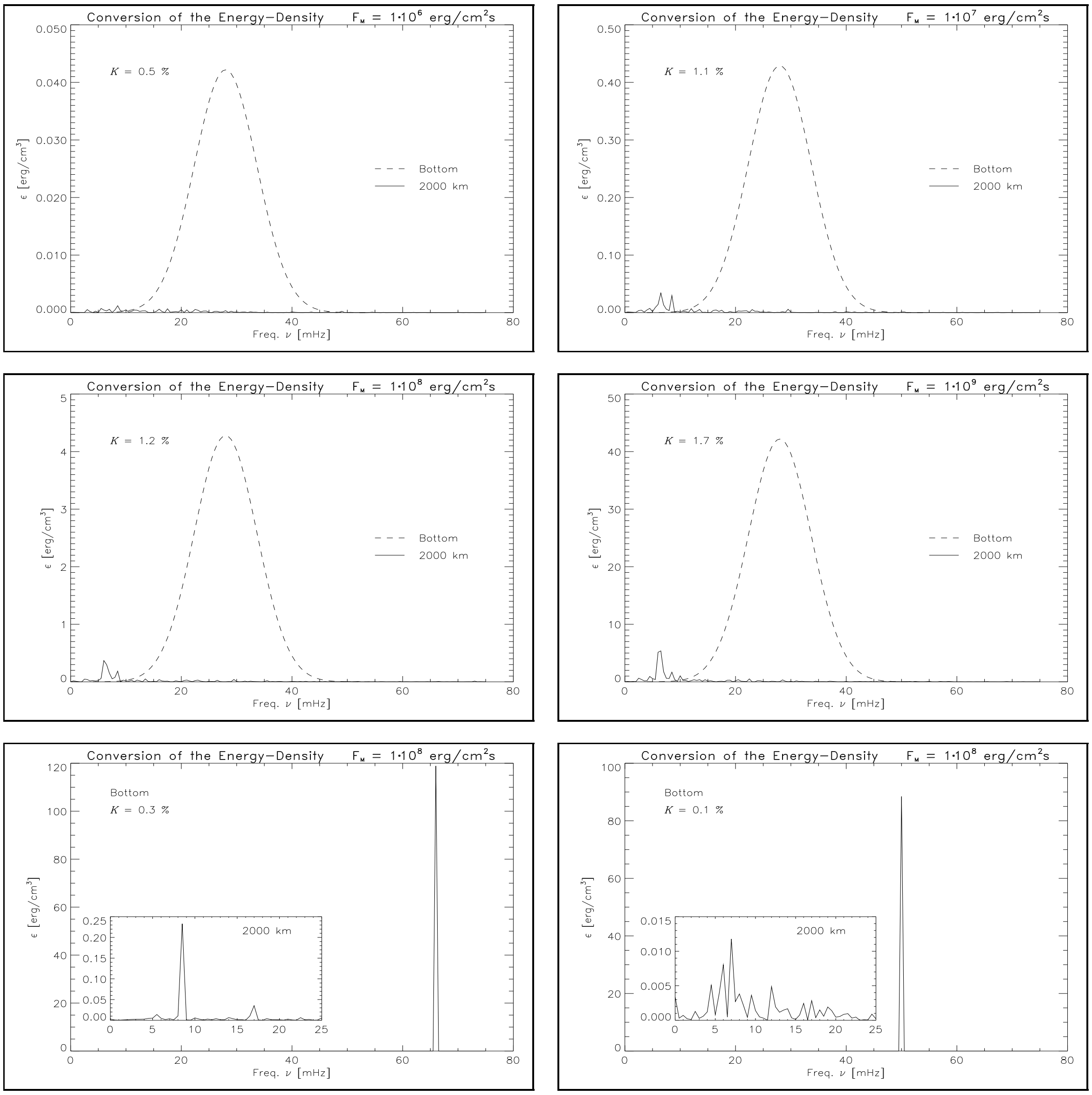


Abbildung 4.24: Konversion der mechanischen Energiedichte ε von hohen auf kleine Frequenzbereiche. Notiert ist ebenfalls der prozentuale Anteil der Energiedichte unterhalb 10 mHz in 2000 km Höhe in Relation zur Energiedichte am unteren Rand der Atmosphäre. V.l.o.n.r.u.: G6 ($F_M = 1 \cdot 10^6$ erg/cm^{2}s), G7 ($F_M = 1 \cdot 10^7$ erg/cm^{2}s), G8 ($F_M = 1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s), G9 ($F_M = 1 \cdot 10^9$ erg/cm^{2}s), M15 ($F_M = 1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s, $P = 15$ sec), und M20 ($F_M = 1 \cdot 10^8$ erg/cm^{2}s, $P = 20$ sec).

Modell	F_M [erg/cm²s]	R [%]	ν_{max} [mHz]	η_{max}	$\overline{\eta}$	x_{sh} [km]	L^{-1}_{max} [$\cdot 10^{-3}$ km^{-1}]	K(ε) [%]	$\mathcal{T}(F_M)$ [%]
Spektren									
G6	$1 \cdot 10^6$	30	≈ 7	2,2	1,5	650	6,0	0,5	3,8
G7	$1 \cdot 10^7$	55	5,5	2,1	1,5	430	6,5	1,1	2,9
G8	$1 \cdot 10^8$	65	5,5	2,2	1,6	270	7,0	1,2	3,0
G9	$1 \cdot 10^9$	65	5,5	2,4	1,6	80	7,5	1,7	3,5
B8	$1 \cdot 10^8$	50	6	3,0	1,5	200	7,0	2,4	7,4
E8	$1 \cdot 10^8$	53	7	3,6	1,5	270	7,0	2,7	12,8
R8	$1 \cdot 10^8$	45	5,5	2,6	1,5	250	7,0	1,0	7,1
Monochr.W.									
M6	$1 \cdot 10^6$	0	30	1,5	1,5	780	10	0	3,4
M7	$1 \cdot 10^7$	0	30	1,5	1,5	580	10	0	2,3
M8	$1 \cdot 10^8$	0	30	1,5	1,5	280	10,5	0	1,9
M9	$1 \cdot 10^9$	0	30	1,5	1,5	130	12	0	1,8
M15	$1 \cdot 10^8$	65	8	2,6	1,2	70	7,5	0,3	0,7
M20	$1 \cdot 10^8$	60	5,5	2,2	1,3	140	10	0,1	0,4
M60	$1 \cdot 10^8$	0	17	1,8	1,6	380	11	0	7,2
M100	$1 \cdot 10^8$	0	10	2,1	2,0	420	10	0	16,6

Tabelle 4.1: Zusammenstellung der nichtlinearen Rechnungen. Aufgeführt ist der Energiefluß F_M, der Anteil des relativen Powers R unterhalb 10 mHz in 2000 km Atmosphärenhöhe, die Frequenz ν_{max}, bei der sich in 2000 km das Maximum des Geschwindigkeitspowers befindet, die maximale Schockstärke η_{max} (Schockmachzahl M_S), die nach 800 sec Programmzeit angenommen wurde, die Durchschnittsschockstärke $\overline{\eta}$, die tiefste Schockentstehungshöhe x_{sh}, die maximale negative inverse Dämpfungslänge L^{-1}, der prozentuale Anteil der mechanischen Energiedichte $K(\varepsilon)$, der auf Frequenzen unterhalb von 10 mHz übertragen wird, sowie der Transmissionskoeffizient $\mathcal{T}$ des mechanischen Energieflusses in 2000 km Höhe.

nungen nahe bei P=20 sec. Monochromatische Wellen mit kleineren Perioden als P_{lim} besitzen die Tendenz durch *shock–overtaking* in den oberen Schichten der Atmosphäre lange Perioden oberhalb von 100 sec anzunehmen. Hierbei wird im Höhenverlauf der Atmosphäre jedoch bereits soviel Energie verloren, daß nur sehr wenig Energie auf die kleinen Frequnzen übertragen wird.

Die Wellenspektren hingegen, die im Rahmen der Rechnungen untersucht wurden, zeigten ohne Ausnahme *alle* die Entwicklung von kleinen Frequenzen unterhalb von $\nu = 10$ mHz. Hierbei zeigte sich, daß qualitativ insofern eine Abhängigkeit von der Form des Spektrums besteht, als daß der Zentralpeak des Powers in 2000 km Höhe näher an 5 mHz rückt, je stärker kurzperiodische Wellen im Ursprungsspektrum vorhanden sind, wodurch die Wellen stärker die Tendenz zum *overtaking* besitzen. Hierdurch entwickeln sich starke Schocks die die Atmosphäre in pulsierende Bewegungen versetzen, wobei diese sich mit zunehmendem induzierten Energiefluß stärker ausdehnen wird. Entgegen den monochromatischen Wellen oberhalb der kritischen

Periode, beobachtet man bei den Schallspektren, sowie den monochromatischen Wellen unterhalb der kritischen Periode, keine *Grenzschockstärke*, sondern eine *mittlere Schockstärke*. Durch die Dissipation von Schockwellen und dem damit verbundenen Temperaturanstieg der Atmosphäre ist das dynamische Verhalten unabhängig von der Startatmosphäre, die zugrundegelegt wird. Die Dissipationskurve der mechanischen Energie verläuft aufgrund der größer werdenden Periode flacher als bei den monochromatischen Wellen. Dies beobachtet man ebenso im Verhältnis zu monochromatischen Wellen unterhalb P_{lim}. Da die Dämpfungslänge L proportional zur Periode ist, wird bei sehr kurzperiodischen Wellen bereits im unteren Atmosphärenbereich viel Energie dissipiert. Ein Wellenspektrum besitzt daher in großen Höhen noch relativ viel Energie *und* bildet lange Perioden aus. Aus diesem Grund kann in den Spektrenrechnungen zwischen 5– und 10–mal mehr Energie auf das Frequenzintervall $\nu < 10$ mHz übertragen werden.

Schließlich konnte gezeigt werden, daß die Überlagerung eines Wellenspektrums bzw. monochromatischer Wellen mit einer großamplitudigen evaneszenten Welle nur geringfügige und vernachlässigbare Effekte liefert. Die wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels sind noch einmal in Tabelle (4.1) zusammengefaßt.

Kapitel 5

Schlußbetrachtung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden einige Aspekte betrachtet, die zum Verständnis des dynamischen Verhaltens von realen Sternatmosphären wichtig sind. Dabei beschränkte sich das Vorgehen auf die Untersuchung von rein hydrodynamischen Vorgängen, die den Einfluß von Strahlung und damit die Wechselwirkung von Strahlung–Materie (κ–Mechanismus, Strahlungskühlung) vernachlässigte. Um ein Grundverständnis für die auftretenden Wellenphänomene zu erhalten, scheint die Vernachlässigung der sehr aufwendigen Strahlungsbehandlung jedoch gerechtfertigt.

In dieser Idealisierung des Modells wurden sowohl im linearen wie im nichtlinearen Fall Wellenausbreitungen in unterschiedlichen Atmosphären untersucht. Hierbei konnte gezeigt werden, daß jede Form von induzierten Wellen eine Modellatmosphäre in ihrer Eigenfrequenz (assoziierte Cut–Off–Frequenz im unteren Bereich der Atmosphäre) zum Schwingen anregt. Diese freie Schwingung der Atmosphäre besitzt im linearen Fall ein exponentielles Abklingverhalten $u_E \sim e^{-\delta t}$, wobei der Dämpfungskoeffizient δ abhängig ist vom Typ der Atmosphäre und mit steigendem Temperaturgradienten zunimmt. So konnte gezeigt werden, daß das Schwingungsverhalten der semiempirischen VAL–C–Atmosphäre besser durch eine polytrope Atmosphäre mit positivem Temperaturgradienten beschrieben werden kann. Infolge dieser Rechnungen erscheint es als sehr unwahrscheinlich, daß die beobachteten 3 min Oszillationen (Deubner 1990, Rutten & Uitenbroek 1991) durch langperiodische lineare Wellen angeregt werden, da die Eigenschwingungen als Einschaltvorgang (*transient effect*) interpretiert werden müssen, der bei der VAL–Atmsophäre sehr schnell verklingt. In früheren Arbeiten (Fleck 1991) wurde diese Eigenschaft der unterschiedlichen Atmosphärentypen nicht erkannt, da die Rechnungen nicht ausreichend lang durchgeführt wurden, um das unterschiedliche Abklingverhalten hervortreten zu lassen. Daher wurden sämtliche Ergebnisse der isothermen Atmsophäre, die in der Tat ein sehr langsames Abklingverhalten aufweist, auf realistischere Atmosphären wie die VAL–Atmosphäre übertragen.

Weiterhin konnte im nichtlinearen Fall gezeigt werden, daß monochromatische Wellen, abhängig von ihrer Frequenz ein unterschiedliches Schwingungsverhalten der oberen Atmosphärenschicht erzeugen. Liegt die Periode der Wellen in der *Photosphäre* unterhalb von 20 sec, so werden Oszillationen der Atmosphäre erzeugt, die ein Zusammenlaufen und Verschmelzen von Schocks bewirken, wodurch ein Rückkopplungsmechanismus geliefert wird, der die Oszillationen zu erhalteni sucht. Dieses Verhalten ist bei längerperiodischen monochromatischen Wellen jedoch nicht beobachtbar. Es bilden sich zwar Schockwellen aus, jedoch wird die ursprüngliche Periode beibehalten. Da es auszuschließen ist, daß in der Sonne sämtliche akustische Energie auf solch hohe Frequenzen ($\nu > 50$ mHz) verteilt ist, scheint es eine zu starke Idealisierung zu sein, die chromosphärische Dynamik mit monochromatischen Wellen von Perioden < 20 sec beschreiben bzw. erklären zu wollen. Umso erstaunlicher ist es, daß in einer realistischeren Simulation mit einer Induzierung verschiedener Wellenspektren, bei denen die Energie auf die einzelnen Frequenzen unterschiedlich voneinander verteilt ist, sich jedesmal ein ähnliches dynamisches Muster in der oberen Atmosphäre einstellt. Annähernd unabhängig von der Form des Spektrums und abhängig von der Größe des induzierten mechanischen Energieflusses, verschiebt sich das Geschwindigkeitspower von hohen Frequenzen (Verteilung z.B. um 30 mHz) zu tiefen Frequenzen ($\nu < 10$ mHz), wobei das Maximum im Powerspektrum zwischen 5 mHz und 7 mHz zentriert ist. Diese Verschiebung, scheint wie bei den sehr kurzperiodischen monochromatischen Wellen durch ein Triggern einer Oszillation durch *shock–overtaking* stattzufinden. Hierbei stoßen Schocks mit einer sehr großen Schockstärke ($M_{S,max} \approx 3,5$) die Atmosphäre nach außen. Durch *shock–overtaking* ist es nicht nur möglich die Aufrechterhaltung einer Oszillation zu erklären, sondern auch einen schockgetriebenen Sternwind (Massenverlust) zu beschreiben, der bei allen Sternen mit Chromosphären beobachtet wird. Eine chromosphärische Kavität, wie sie von unterschiedlichen Autoren (Leibacher & Stein 1981, Leibacher et al. 1982, Ulmschneider & Muchmore 1986, Hill et al. 1991) zur Erklärung der 3–min–Oszillation in die Diskussion gebracht wurde, ist in unseren Rechnungen nicht erforderlich. Erstaunlich ist die Realisierung einer mittleren Schockstärke für die betrachteten Spektren. Die mittlere Schockmachzahl, die bei $M_S \approx 1,5$ liegt, ist mit einer monochromatischen Welle von $P = 40$ sec assoziiert, wenn man deren Grenzschockstärke zugrundelegt. Auch wenn das Energiedissipationsverhalten von monochromatischen Wellen und Wellenspektren als etwas unterschiedlich gefunden wurde, ist es interessant die Ergebnisse mit unabhängig erstellten Rechnungen bzw. mit der Beobachtung zu vergleichen. Anderson & Athay (1989) berechneten mechanische Heizungsraten, die notwendig sind, um den Temperaturverlauf des VAL–C–Modells zu reproduzieren. Aus den Heizungsraten berechneten sie den hierfür erforderlichen akustischen Fluß in Abhängigkeit der Höhe. Ein Vergleich mit dem Dissipationverhalten von monochromatischen Wellen, die *limiting–shock–strength* besitzen (Ulmschneider, 1991), zeigt, daß man eine Welle von ca. $P = 40$ sec zugrundelegen muß, um das semiempirische Dissipationsverhalten zu reproduzieren. Beobachtungsdaten von Deubner (1988) sind mit den berechneten Kurven in annähernder Übereinstimmung. Würde man für Spektrenrechnungen, die die Strahlungsbehandlung miteinschließen, einen annähernd ähnlichen Verlauf finden, so würde es nahegelegt der mittleren Schockstärke eine ähnliche Bedeutung wie der Grenzschockstärke bei monochromatischen Wellen zuzumessen. Somit würden zwei Effekte richtig wiedergegeben werden können. Zum einen hätte man die Entwicklung von Frequenzen um $\nu = 5$ mHz (eine Welle mit $P = 40$ sec zeigt dieses Verhalten nicht), zum anderen könnte man die mechanischen Heizungsraten reproduzieren, die für das VAL–C–Modell gefunden wurden.

Im Anschluß an diese Arbeit, die für die Erklärung der 3–min–Oszillationen die Dynamik von Schockwellen nahelegt, steht es an, die Hydrodynamik durch eine Einbeziehung von Strahlungseffekten zu ergänzen, um nicht nur das beobachtete Geschwindigkeitsverhalten, sondern ebenso die beobachteten Spektrallinien zu reproduzieren und auf theoretischer Basis die Phänomene zu beschreiben deren Erklärung noch aussteht. Hierbei ist zu beachten, daß Strahlungseffekte die Entwicklung von Schockwellen beeinflussen, wie Carlsson & Stein (1992) in vergleichenden Rechnungen zeigten. Somit könnten auch die oszillatorischen Erscheinungen der gesamten Atmosphäre die in der vorliegenden Arbeit beobachtet wurden beeinflußt bzw. geändert werden. Eine eingehende Untersuchung hierzu steht noch aus.

Durch Beobachtung der Ca II Infrarot–Triplettlinien bei 8542Å und 8498Å und der photosphärischen Fe I–Linie konnte mit V–V–Phasenspektren (simultane Beobachtung der Geschwindigkeiten in unterschiedlichen Linien und damit unterschiedlichen atmosphärischen Höhen) und V–I–Phasenspektren (simultane Beobachtung von Geschwindigkeit und Intensität in einer Linie) gezeigt werden (Fleck & Deubner 1989), daß die auftretenden Wellen zwischen Photosphäre und mittlerer Chromosphäre (ca. 1000 km) progressives Verhalten zeigen, dann jedoch ein Gebiet anschließt (*magic height*), in dem man sehr große Phasengeschwindigkeiten beobachtet, was auf stehende Wellen deutet. Bisher wird diese Beobachtung in der Weise interpretiert, daß eine partielle Reflektion von Wellen an der Übergangsschicht stattfindet, wodurch eine halbdurchlässige chromosphärische Kavität nahegelegt würde. Ein Problem für diese Interpretation besteht darin, daß für reflektierte Wellen Phasensprünge von $\pm 180^o$ existieren müssen. Diese Phasensprünge werden jedoch nicht beobachtet. In unseren Rechnungen, bei denen Schocks in der Atmosphäre auftreten, existieren keine Wellenfelder , die als stehend bezeichnet werdn könnten. Um die beobachteten Phasengeschwindigkeiten erklären zu können, müssen demnach detaillierte Untersuchungen über die Entstehungshöhen der Linien erfolgen, um Aufschluß darüber zu erhalten ob ein beobachtetes *stehendes Wellenfeld* nicht auch durch das Zusammenwirken von Strahlungsbeiträgen aus unterschiedlichen Höhen suggeriert werden kann (Höhenabhängigkeit der *line–contribution–function*).

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß durch theoretische Rechnungen der Art wie sie vorgeschlagen werden Voraussagen gemacht werden können über das Schwingungsverhalten von anderen Sternen im HR–Diagramm. Oszillationen, wie sie bereits beobachtet werden bei roten Riesen (Dupree et al. 1991, Belmonte et al. 1990) könnten theoretisch bestätigt werden, bzw. für Sterne, bei denen noch keine Beobachtungsdaten vorliegen, vorausgesagt werden.

Anhang A

A.1 Die Laplace-Transformation

Falls das Integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{A.1}$$

existiert, so wird $f(s)$ die Laplace-Transformierte von $F(t)$ genannt und mit

$$f(s) = \mathcal{L}_I(F(t)) \tag{A.2}$$

bezeichnet. Falls sich das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, wird die Transformierte mit $\mathcal{L}_{II}$ bezeichnet. Im folgenden, sowie oben, wird jedoch nur $\mathcal{L}_I$ berücksichtigt und mit $\mathcal{L}$ bezeichnet werden. $f(s)$ wird auch *Bildfunktion* genannt. Die Rücktransformation von der Bildfunktion in die *Originalfunktion* geschieht vermittels der komplexen Umkehrformel

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{ts} f(s)\, ds, \tag{A.3}$$

wobei α ein reeller Parameter ist, der aus einem Intervall $[\alpha_1, \alpha_2]$ gewählt werden kann, in dem gilt, daß (A.3) für $\Re(s) \in [\alpha_1, \alpha_2]$ absolut konvergiert.

Praktische Anwendung findet die Laplace-Transformation in der Lösung von partiellen Differentialgleichungen mehrer Veränderlicher. Mit ihr läßt sich die Anzahl der Veränderlichen n in der Gleichung auf $n-1$ reduzieren. Löst man die reduzierte Gleichung dann im *Bildraum*, so kann man durch Rücktransformation in den *Originalraum* – fals eine solche existiert, was nicht immer der Fall zu sein braucht – eine Lösung erhalten.

Für die Reduktion muß die Voraussetzung gemacht werden, daß die $\mathcal{L}$– Transformation mit den Differentiationen nach den nichttransformierten Variabeln vertauschbar ist, d.h.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{F\} \qquad , \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{F\}. \tag{A.4}$$

Falls $F(x,t)$ für $t > 0$ n-mal differenzierbar ist und $\mathcal{L}\{F^{(n)}(x,t)\}$ für s_0 mit $\Re(s_0) > 0$ konvergiert, so existieren

$$\lim_{t\to 0} F(x,t) = F_0(x) \qquad , \quad \ldots \quad , \qquad \lim_{t\to 0} F^{(n-1)}(x,t) = F_0^{(n-1)}(x) = F_{n-1}(x), \tag{A.5}$$

sowie

$$\mathcal{L}\left\{F^{(n-1)}(x,t)\right\} \quad , \quad ... \quad , \quad \mathcal{L}\left\{F(x,t)\right\} \tag{A.6}$$

für $s = s_0$ und $\Re(s) > \Re(s_0)$. Hierfür gilt dann

$$\mathcal{L}\left\{F^{(n)}(x,t)\right\} = s^n f(x,s) - F_0(x)s^{n-1} - F_0'(x)s^{n-2} - \quad ... \quad - F_0^{(n-1)} \tag{A.7}$$

Betrachtet man nun eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} & A_1(x)\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} + A_2(x)\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x \partial t} + A_3\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} \\ & +B_1(x)\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} + B_2(x)\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} + C(x)F(x,t) \quad = \quad \Phi(x,t), \end{aligned} \tag{A.8}$$

so lautet ihre $\mathcal{L}$–Transformierte mit (A.4 - A.7)

$$\begin{aligned} & A_1(x)\frac{\partial^2 f(x,s)}{\partial x^2} + A_2(x)\frac{\partial}{\partial x}[sf(x,s) - F_0(x)] \\ & +A_3(x)[s^2 f(x,s) - F_0(x)s - F_1(x)] + B_1(x)\frac{\partial f(x,s)}{\partial x} \\ & +B_2(x)[sf(x,s) - F_0(x)] + C(x)f(x,s) = \phi(x,s) \end{aligned} \tag{A.9}$$

Die Bildgleichng besitzt somit keine Ableitung mehr in der Zeit und kann als gewöhnliche Differentialgleichung aufgefaßt werden.

Als Ergänzung sollen einige Sätze aus der Theorie der Laplace-Transformationen folgen:

i) Verschiebungssatz: Falls $F(t) = 0$ für $t < 0$, dann gilt

$$\mathcal{L}\{F(t-b)\} = e^{-bs}f(s) \tag{A.10}$$

ii) Ähnlichkeitssatz:

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad , \qquad \mathcal{L}\{f(cs)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{t}{c}\right) \tag{A.11}$$

iii) Faltungssatz: Falls die Faltung

$$F_1(x,t) * F_2(x,t) = \int_0^t F_1(x,t-\tau)F_2(x,\tau)d\tau$$

existiert, für alle $t \geq 0$, dann gilt

$$\mathcal{L}\{F_1(x,t) * F_2(x,t)\} = f_1(x,s) \cdot f_2(x,s) \tag{A.12}$$

Anhang B

B.1 Die Wellengleichung

Wir gehen aus von den linearisierten Grundgleichungen

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{B.1}$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0, \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + u\frac{\partial p_0}{\partial z} - c^2(z)\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) = 0, \tag{B.3}$$

sowie der hydrostatischen Gleichung

$$dp_0 = -\rho_0 g\, dz \tag{B.4}$$

und der Adiabatenbeziehung für die Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}. \tag{B.5}$$

Die Schallgeschwindigkeit wird hier zunächst als höhenabhängig angenommen. Für den weiteren Verlauf soll (B.1) nach $\frac{\partial \rho'}{\partial t}$ aufgelöst werden

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -u\frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \rho_0\frac{\partial u}{\partial z} \tag{B.6}$$

Um die Gleichungen zusammenfassen zu können, differenzieren wir (B.2),(B.3) nach der Zeit bzw. nach dem Ort

$$\frac{\partial (B.2)}{\partial t} = \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial z} + g\frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial (B.3)}{\partial z} \overset{B.4}{=} & \frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial t} - g\rho_0\frac{\partial u}{\partial z} - gu\frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \frac{\partial c^2}{\partial z}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) \\ & -c^2\left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z \partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + u\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2}\right) = 0\end{aligned} \tag{B.8}$$

Die Ortsableitung der Schallgeschwindigkeit ist

$$\frac{\partial c^2}{\partial z} = \gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right) = \gamma\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{p_0}{\rho_0^2}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)$$

$$\overset{(B.4/5)}{=} -\gamma g - \frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} \tag{B.9}$$

Subtraktion von Gleichung (B.8) von (B.7) liefert

$$\begin{aligned}(B.8)-(B.7) \;=\; & \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g\frac{\partial \rho'}{\partial t} + g\rho_0\frac{\partial u}{\partial z} + gu\frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \gamma g\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \gamma gu\frac{\partial \rho_0}{\partial z} \\ & - \frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{c^2 u}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)^2 \\ & + c^2\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z \partial t} + c^2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + c^2 u\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \;=\; 0 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Setzen wir (B.6) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(B.8)-(B.7) \;=\; & \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \underbrace{gu\frac{\partial \rho_0}{\partial z}}_{1} - \underbrace{g\rho_0\frac{\partial u}{\partial z}}_{2} + \underbrace{g\rho_0\frac{\partial u}{\partial z}}_{2} + \underbrace{gu\frac{\partial \rho_0}{\partial z}}_{1} + \underbrace{\gamma gu\frac{\partial \rho_0}{\partial z}}_{3} \\ & + \gamma g\rho_0\frac{\partial u}{\partial z} - \underbrace{\gamma gu\frac{\partial \rho_0}{\partial z}}_{3} + \underbrace{\frac{c^2 u}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)^2}_{4} + \underbrace{c^2\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}}_{5} \\ & - \underbrace{\frac{c^2 u}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)^2}_{4} - \underbrace{c^2 u\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2}}_{6} - \underbrace{c^2\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}}_{5} \\ & - \underbrace{c^2\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}}_{7} - c^2\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \underbrace{c^2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}}_{7} + \underbrace{c^2 u\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2}}_{6} = 0 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Die Terme mit der gleichen Numerierung heben sich aus der Gleichung heraus. Dividieren wir die verbleibende Gleichung durch ρ_0, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - c^2(z)\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \gamma g\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = 0. \tag{B.12}$$

Dies ist die allgemeine Differentialgleichung, die sich mit einer beliebigen Temperaturstruktur ergibt. Nehmen wir speziell eine isotherme Atmosphäre an, in der gilt

$$c(z) = \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R} T_0}{\mu}} = c_0 = const \tag{B.13}$$

so ergibt sich die bekannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \gamma g\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = 0 \tag{B.14}$$

Anhang C

C.1 Asymptotische Integralentwicklung

Das Integral sei in der Form gegeben

$$I = \int_t^\infty e^{i\omega(t-\tau)} \cdot \frac{J_1(\omega'\sqrt{\tau^2-\beta^2})}{\sqrt{\tau^2-\beta^2}} d\tau \tag{C.1}$$

und es sei $\tau >> \beta$. J_1 ist eine Besselsche Funktion erster Gattung und erster Ordnung. Für die Besselfunktionen erster Gattung kann man asymptotische Formeln für große Funktionswerte angeben (Bronstein,Semendjajew,1991,p.444)

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left[\cos(x - \frac{n}{2}\pi - \frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \tag{C.2}$$

Mit $n = 1$ und den Bezeichnungen für x erhält man somit

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_t^\infty \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\tau^2-\beta^2}} \cdot \left(\frac{1}{\omega'^2(\tau^2-\beta^2)}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \cos\left(\omega'\sqrt{\tau^2-\beta^2} - \frac{3}{4}\pi\right) d\tau \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}} \int_t^\infty \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\tau^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{4}}} \cdot \cos\left(\omega'\tau\sqrt{1-\varepsilon} - \frac{3}{4}\pi\right) d\tau, \end{aligned} \tag{C.3}$$

mit

$$\varepsilon = \frac{\beta^2}{\tau^2}$$

Die einzelnen Terme unter dem Integral können entwickelt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} &= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{15}{48}\varepsilon^3 + \dots \\ &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\tau^3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\beta^4}{\tau^5} + \dots \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{5}{32}\varepsilon^2 + \dots \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\omega'\tau\sqrt{1-\varepsilon}-\frac{3}{4}\pi\right) &= \cos\left(\omega'\tau(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2-\frac{3}{48}\varepsilon^3+...)-\frac{3}{4}\pi\right)\\ &\approx \cos(\omega'\tau-\frac{3}{4}\pi)\end{aligned} \tag{C.6}$$

Setzt man die entwickelten Terme in () ein, so erhält man für I

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\int_t^\infty \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos(\omega'\tau-\frac{3}{4}\pi)\cdot\\ &\quad \left\{\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2+...\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{5}{32}\varepsilon^2+...\right)\right\}d\tau\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\int_t^\infty \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos(\omega'\tau-\frac{3}{4}\pi)\cdot\left\{\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon+\frac{21}{32}\varepsilon^2+...\right)\right\}d\tau\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\int_t^\infty e^{i\omega(t-\tau)}\cdot\cos(\omega'\tau-\frac{3}{4}\pi)\cdot\left\{\frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{4}\frac{\beta^2}{\tau^{\frac{7}{2}}}+\frac{21}{32}\frac{\beta^2}{\tau^{\frac{11}{2}}}+...\right\}d\tau\end{aligned}$$

Für konstantes β und großes τ fallen die Terme in der geschweiften Klammer für größer werdende Potenzen von τ sehr rasch ab, so daß es ausreicht lediglich den führenden Term der Reihe zu berücksichtigen. Das resultierende Integral lautet dann

$$I=\sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\int_t^\infty \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos(\omega'\tau-\frac{3}{4}\pi)d\tau \tag{C.7}$$

Das Integral läßt sich asymptotisch lösen. Hierzu schreiben wir den Cosinus als Exponentialfunktion und spalten das Integral I in die Summanden I_1 und I_2 auf. Daher

$$I=\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{i(\omega t-\frac{3}{4}\pi)}\int_t^\infty\frac{e^{i(\omega'-\omega)\tau}}{\tau^{\frac{3}{2}}}d\tau}_{I_1}+\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{i(\omega t+\frac{3}{4}\pi)}\int_t^\infty\frac{e^{-i(\omega'+\omega)\tau}}{\tau^{\frac{3}{2}}}d\tau}_{I_2}$$

Die Integrale werden durch partielle Integration in eine Reihe entwickelt

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\cdot\frac{1}{2}e^{i(\omega t-\frac{3}{4}\pi)}\int_t^\infty e^{i(\omega'-\omega)\tau}\cdot\tau^{-\frac{3}{2}}d\tau\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\cdot\frac{1}{2}e^{i(\omega t-\frac{3}{4}\pi}\left\{\frac{1}{i(\omega'-\omega)}e^{i(\omega'-\omega)\tau}\cdot\tau^{-\frac{3}{2}}\Big|_t^\infty+\frac{3}{2}\frac{1}{i(\omega'-\omega)}\int_t^\infty e^{i(\omega'-\omega)\tau}\cdot\tau^{-\frac{5}{2}}d\tau\right\}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}}\cdot\frac{1}{2}e^{(\omega t-i\frac{3}{4}\pi)}\left\{\frac{1}{i(\omega'-\omega)}e^{i(\omega'-\omega)\tau}\cdot\tau^{-\frac{3}{2}}\Big|_t^\infty-\frac{3}{2}\frac{1}{i(\omega'-\omega)}e^{i(\omega'-\omega)\tau}\cdot\tau^{-\frac{5}{2}}\Big|_t^\infty\right.\\ &\quad\left.-\int_t^\infty\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{(\omega'-\omega)^2}\cdot e^{i(\omega'-\omega)\tau}\cdot\tau^{-\frac{7}{2}}d\tau\right\}\end{aligned}$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man eine nicht abbrechende Reihe mit monoton wachsenden Exponenten in τ. Für hinreichend große t reicht es, den ersten Summanden als dominant zu betrachten. Wir erhalten also für I_1

$$I_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{i(\omega t - \frac{3}{4}\pi)} \cdot \frac{1}{i(\omega' - \omega)} \cdot \frac{e^{i(\omega' - \omega)t}}{t^{\frac{3}{2}}} \tag{C.8}$$

Ebenso verfährt man mit I_2. Die Reihe, die man durch partielle Integration erhält lautet

$$\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{i(\omega t + \frac{3}{4}\pi)} \left\{ -\frac{1}{i(\omega' + \omega)} e^{-i(\omega' + \omega)\tau} \cdot \tau^{-\frac{3}{2}} \Big|_t^\infty - \frac{3}{2} \frac{1}{i(\omega' + \omega)} e^{-i(\omega' + \omega)\tau} \cdot \tau^{-\frac{5}{2}} \Big|_t^\infty \right. \\ & \left. - \int_t^\infty \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(\omega' + \omega)^2} \cdot e^{-i(\omega' + \omega)\tau} \cdot \tau^{-\frac{7}{2}} d\tau \right\}, \end{aligned}$$

und daraus wie oben

$$I_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}} \cdot \frac{1}{2} e^{i(\omega t + \frac{3}{4}\pi)} \cdot \frac{1}{i(\omega' + \omega)} \cdot \frac{e^{-i(\omega' + \omega)t}}{t^{\frac{3}{2}}} \tag{C.9}$$

Faßt man die beiden Integrale zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}} \cdot \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2 - \omega'^2)} \cdot \left\{ i(\omega' + \omega) \cdot e^{i[(\omega' - \omega)t - \frac{3}{4}\pi]} - i(\omega' - \omega) \cdot e^{-i[(\omega' + \omega)t - \frac{3}{4}\pi]} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}} \cdot \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2 - \omega'^2)} \cdot \left\{ -i\omega' \cdot \left(e^{i[(\omega' + \omega)t - \frac{3}{4}\pi]} - e^{-i[(\omega' - \omega)t - \frac{3}{4}\pi]} \right) \right. \\ & \left. + i\omega \left(e^{i[(\omega' + \omega)t - \frac{3}{4}\pi]} + e^{-i[(\omega' - \omega)t - \frac{3}{4}\pi]} \right) \right\} \end{aligned}$$

und das resultierende Integral lautet

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega'}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(\omega^2 - \omega'^2)} \cdot \left\{ \omega' \sin(\omega' t - \frac{3}{4}\pi) - i\omega \cos(\omega' t - \frac{3}{4}\pi) \right\} \tag{C.10}$$

Anhang D

D.1 Die Charakteristischen Gleichungen

Physikalisch gesprochen sind charakteristische Gleichungen solche, die entlang der Ausbreitungskurve einer Strung gelst werden. Zur mathematischen Erklrung soll folgendes System von partiellen Differentialgleichungen betrachtet werden

$$\sum_{j=1}^{N}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)+c_i=0 \qquad i=1,...,N \tag{D.1}$$

Die a_{ij} und b_{ij} stellen Koeffizientenmatrizen dar, c_{ij} ist ein Koeffizientenvektor. Alle diese Faktoren knnen noch von x, t, u_i abhngen, d.h. da das Gleichungssystem ein quasilineares ist. In den N Gleichungen von (1) wird somit Information ber die nderung von $\vec{u}$ in die Richtungen x und t gekoppelt. Eine einzelne Gleichung kann nicht gelst werden ohne alle anderen mit in betracht zu ziehen. Einfacher zu behandeln ist (1), wenn eine Mglichkeit gefunden werden kann, das System von Gleichungen so umzuschreiben, da man eine gewhnliche Differentialgleichung bekommt. Hierbei htte man die Information ber die nderung der abhngigen Variabelen $\vec{u}$ in eine bestimmte Richtung in einer Gleichung enthalten, die einfacher zu lsen ist. Im gnstigsten Falle lt sich eine solche Gleichung analytisch lsen, ansonsten ist man auf numerische Techniken der Integration angewiesen. Wir betrachten zunchst eine Linearkombination aus allen N Gleichungen (1)

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{j=1}^{N} l_i a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}+l_i b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}\right\}+l_i c_i=0 \tag{D.2}$$

. $\vec{l}$ ist ein N-dimensionaler Vektor, dessen Koeffizienten wiederum von $x, t, \vec{u}$ abhngen knnen. Eine erste Aufgabe besteht darin, ein $\vec{l}$ zu finden, das die Koeffizientenmatrizen diagonalisiert. D.h man versucht (2) in die Form

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\alpha\frac{\partial u_i}{\partial t}+\beta\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)+l_i c_i=0 \tag{D.3}$$

umzuschreiben. Whlt man fr x und t eine Parameterdarstellung

$$x=x(\xi), \qquad t=t(\xi),$$

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad t' = \frac{dt}{d\xi},$$

so kann man ohne Einschrnkung der Allgemeinheit α und β als

$$\alpha = \frac{dt}{d\xi}, \qquad \beta = \frac{dx}{d\xi}$$

whlen und erhlt somit

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(t' \frac{\partial u_i}{\partial t} + x' \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + l_i c_i = 0 \tag{D.4}$$

Der Klammerausdruck stellt das totale Differential einer Funktion $\vec{u} = \vec{u}\,(x(\xi), t(\xi))$ dar. D.h. (3) kann nun umgeschrieben werden in

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{du_i}{d\xi} + l_i c_i = 0. \tag{D.5}$$

Vergleicht man (3) und (4) so findet man als Bedingung an die Koeffizienten

$$m_j t' = \sum_{i=1}^{N} l_i a_{ij}, \tag{D.6}$$

$$m_j x' = \sum_{i=1}^{N} l_i b_{ij}. \tag{D.7}$$

Lst man nach m_j auf und kombiniert (6) und (7) so erhlt man das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{N} l_i (x' a_{ij} - t' b_{ij}) = 0. \tag{D.8}$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung fr eine nicht-triviale Lsung dieses Gleichungssystems stellt das Verschwinden der Determinante dar,also

$$det(x' a_{ij} - t' b_{ij}) = 0. \tag{D.9}$$

Diese Bedingung stellt somit eine Bedingung der Kurven $x(\xi), t(\xi)$. Eine Kurve, die Bedingung (9) erfllt, wird eine *charakteristische* Kurve genannt und Gleichung (4) befindet sich in charakteristischer Form. Falls nun a_{ij} eine singulre Matrix ist, so mu $t' \equiv 0$ gelten.Vergleich mit (9) liefert, da dann die $x-$Richtung charakteristisch ist. Umgekehrt, wenn b_{ij} singulr ist, ist die $t-$Richtung charakteristisch. Angenommen, beide Matrizen sind singulr, dann kann man durch eine Koordinatendrehung versuchen, wenigstens eine Matrix nicht-singulr zu bekommen. Dies Verfahren der Koordinatendrehung kann nun dazu verwendet werden, eine der beiden Koordinatenachsen x, t als charakteristische Richtung zu erhalten. Multipliziert man (1) mit a_{ij}^{-1}, so transformiert sich (1) in

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + B_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + C_i = 0, \tag{D.10}$$

mit

$$B_{ij} = a_{ij}^{-1} b_{ij}, \qquad C_j = a_{ij}^{-1} c_i.$$

Falls a_{ij} singulr ist, mu wiederum eine Koordinatentransformation vorgenommen werden, so da a_{ij}^{-1} nicht-singulr wird. Gleichung (9) schreibt sich in diesem Falle als

$$det(x'\delta_{ij} - t'b_{ij}) = 0. \tag{D.11}$$

Ist $i = j$ so sieht man, da $t' \neq 0$ sein mu, d.h. x also nicht charakteristische Richtung sein kann.Ebensowenig kann t charakteristische Richtung sein. Daher ist erlaubt, t als Kurvenparameter anstelle von ξ zu whlen. (1) liest sich somit als

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + c_i = 0 \qquad i = 1, ..., N \tag{D.12}$$

und lt sich auf die charakteristische Form

$$l_i \frac{du_i}{dt} + l_i c_i = 0 \tag{D.13}$$

bringen, mit

$$\frac{dx}{dt} = c \tag{D.14}$$

als charakteristischer Geschwindigkeit. Der Vergleich mit (8) und (11) liefert nun

$$\sum_{i=1}^{N} l_i b_{ij} = l_j c, \tag{D.15}$$

$$det(c\delta_{ij} - b_{ij}) = 0. \tag{D.16}$$

Somit sind die Lsungen c die Eigenwerte und $\vec{l}$ ein linker Eigenvektor der Matrix b_{ij} .

Literaturverzeichnis

[1] J.A.Belmonte, A.R.Jones, P.L.Palle, T.R.Cortes: 1990, Astrophys. J., **358**, 595

[2] L.Biermann: 1946, Naturwiss. **33**, 118

[3] L.Biermann: 1948, Z.Astrophys., **25**,161

[4] P.Bloomfield: 1976, "Fourier Analysis of Time Series: An Introduction", John Wiley

[5] M.L.Boas: 1966, "Mathematical Methods in the Physical Sciences", John Wiley

[6] H.U.Bohn: 1981, Dissertation, Universität Würzburg

[7] H.U.Bohn: 1984, Astron. Astrophys., **136**, 338

[8] R.Bracewell: 1965, "The Fourier Transform and its Applications", McGraw Hill

[9] J.W.Brault, O.R.White: 1971, Astron. Astrophys., **13**, 169

[10] E.O.Brigham: 1974, "The Fast Fourier Transform", Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall

[11] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew: 1991, "Taschenbuch der Mathematik", Teubner VG Stuttgart

[12] B.Buchholz: 1993, Proc. of the 8th Cambridge workshop Cool Stars, Stellar Systems and the Sun, J.P.Caillault Ed.

[13] M.Carlsson, R.F.Stein: 1992, Astrophys. J., **397**, L59

[14] R.Courant, K.O.Friedrichs: 1948, "Supersonic Flow and Shock Waves", New York

[15] L.E.Cram: 1978, Astron. Astrophys., **70**, 345

[16] M.Cuntz: 1987, Astron. Astrophys., **188**, L5

[17] M.Cuntz: 1990, Astrophys. J., **353**, 255

[18] M.Cuntz, D.Muchmore: 1989, Astron. Astrophys., **209**, 305

[19] M.Cuntz, P.Ulmschneider, W.Rammacher: 1993, Astrophys. J., submitted

[20] F.–L.Deubner, B.Fleck: 1990, Astron. Astrophys., **228**, 506

[21] F.–L.Deubner: 1976, Astron. Astrophys., **51**, 189

[22] G.Doetsch: 1970, "Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace–Transformation" 1.Aufl., Birkhäuser Verlag

[23] A.K.Dupree, S.L.Baliunas, E.F.Guinan, L.Hartmann, G.Sonneborn: 1991, "Confrontation between Stellar Pulsation and Evolution Vol.11", C.Cacciari, G.Clementini Eds, p.468

[24] B.Fleck, 1991: Disertation, Julius–Maximilians–Universität Würzburg, (unveröffentlicht)

[25] B.Fleck, F.Schmitz: 1991, Astron. Astrophys., **250**, 235

[26] B.Fleck, F.Schmitz: 1993, Astron. Astrophys., **273**, 671

[27] B.Fleck, F.L.Deubner: 1989, Astron. Astrophys., **224**, 245

[28] H.-P.Gail, M.Cuntz, P.Ulmschneider: 1990, Astron. Astrophys., **234**, 359

[29] H.Goldstein, "Klassische Mechanik", 8.Aufl., Wiesbaden 1985

[30] I.S.Gradshteyn, I.M.Ryshik: 1980, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press

[31] R.Hammer, P.Ulmschneider, Astron. Astrophys., **69**, 407, 1978

[32] J.K.Hargreaves, "The Solar Terrestrial Environment", Cambridge University Press, 1992

[33] F.Hill, F.–L.Deubner, G.Isaak: 1991, in "The Solar Interior and Atmosphere", A.N.Cox, W.C.Livingston, The University of Arizona Press

[34] C.O.Hines: 1960, Can. J. Phys., **38**, 1441

[35] W.Kalkofen, P.Rossi, G.Bodo, S.Massaglia: 1993, Astron. Astrophys., (submitted)

[36] F.Kneer, M.v.Uexküll: 1993, Astron. Astrophys., **274**, 584

[37] R.L.Kurucz, "ATLAS: A Computer Program for Calculation Model Stellar Atmospheres", Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 309, 1970

[38] J.–P.J.Lafon, N.Berruyer, Astron. Astrophys. Rev., **2** 249, 1991

[39] H.Lamb, Proc.Lond.Math.Soc., Ser.2, **7**, 122, 1908

[40] L.D.Landau, E.M.Lifschitz: 1991, "Hydrodynamik", 5.Aufl., Akademie Verlag, Berlin

[41] J.W.Leibacher, R.F.Stein: 1981, in "The Sun as a Star", S.Jordan Ed., NASA SP–450, p.263

[42] J.W.Leibacher, P.Gouttebroze, R.F.Stein: 1982, Astrophys. J., **258**, 393

[43] M.Lister, 1960, "Math. Methods for Digital Computers I", A.Ralston, H.S.Wilf, Eds., John Wiley New York

[44] H.Meinke, F.W.Gundlach: 1962, "Taschenbuch der Hochfrequenztechnik", Berlin–Göttingen–Heidelberg

[45] F.Möller, "Einführung in die Meteorologie Bd.I", BI Mannheim, 1973

[46] Z.E.Musielak, R.Rosner, R.F.Stein, P.Ulmschneider: 1993, Astrophys. J., submitted

[47] U.Narain, P.Ulmschneider: 1990, Space Science Reviews, **54**, 377

[48] W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, "Numerical Recipes", Cambridge University Press, 1986

[49] W.Rammacher, P.Ulmschneider, Astron. Astrophys., **253**, 586, 1992

[50] W.Rammacher: 1993, private paper

[51] R.J.Rutten, H.Uitenbroek: 1991, Solar Phys., **134**, 15

[52] M.Schwarzschild: 1948, Astrophys. J., **107**, 1

[53] W.I.Smirnov, "Lehrgang der höheren Mathematik", Bd.II, Berlin 1968

[54] A.Sommerfeld, "Optik", Thun 1989

[55] M.Steffen, H.–G.Ludwig, A.Krüss, 1989, Astron. Astrophys., **213**, 271

[56] R.F.Stein: 1967, Solar Phys., **2**, 385

[57] R.F.Stein: 1968, Astrophys. J., **154**, 297

[58] J.Theurer: 1993, Diplomarbeit Universität Heidelberg (unveröffentlicht)

[59] P.Ulmschneider, Astron. Astrophys., **12**, 297, 1971

[60] P.Ulmschneider, W.Kalkofen, T.Nowak, H.U.Bohn: 1977a, Astron. Astrophys., **54**, 61

[61] P.Ulmschneider: 1977b, Memoirs of Astron. Soc. Italia, **48**, 439

[62] P.Ulmschneider, F.Schmitz, W.Kalkofen, H.U.Bohn, 1978, Astron. Astrophys., **70**

[63] P.Ulmschneider, Proc. Heidelberg Conference, P.Ulmschneider E.R.Priest, R.Rosner Eds., Springer Verlag, p.328 ff, Berlin 1991

[64] P.Ulmschneider, W.Rammacher, H.-P.Gail: 1992, Proc. of the 7th Cambridge workshop Cool Stars, Stellar Systems and the Sun, M.S.Giampapa, J.A.Bookbinder Eds., ASP Conference Series, Vol.26, p.471

[65] P.Ulmschneider, E.R.Priest, R.Rosner: 1991, "Mechanisms of Chromospheric and Coronal Heating", Springer

[66] P.Ulmschneider, D.Muchmore: 1986, in "Small Scale Magnetic Flux Concentrations in the Solar Photosphere", W.Deinzer, M.Knölker, H.H.Voigt Eds., Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen, p.169

[67] J.E.Vernazza, E.H.Avrett, R.Loeser: 1981, Astrophys. J. Supplm., **45**, 635

[68] O.R.White, M.Y.Cha, Sol.Phys., **31**, 23, 1973

[69] G.B.Witham, "Linear and Nonlinear Waves", John Wiley, 1974

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den ....

(Unterschrift)