Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Achim Traut
aus Heidelberg

1997

Zusammenfassung

In der Standard-Akkretionsscheibentheorie wird die Viskosität durch den sog. α-Ansatz beschrieben. Dieser Ansatz kann jedoch nicht konsistent auf selbstgravitierende Akkretionsscheiben angewendet werden. Duschl, Strittmatter und Biermann [DSB] haben als Alternative die sog. β-Viskosität eingeführt, die diese Inkonsistenzen beseitigt.
In der vorliegenden Arbeit wurde durch numerische Rechnungen untersucht, welche Auswirkungen die Anwendung der β-Viskosität auf die Struktur der Lösungen hat. Die Rechnungen bezogen sich auf Akkretionsscheiben in Aktiven Galaktischen Kernen mit Schwarzen Löchern von $10^6 - 10^9$ Sonnenmassen als Zentralobjekt und Akkretionsraten zwischen 10^{-2} und 10 Sonnenmassen pro Jahr. Im Gegensatz zum α-Ansatz führt die β-Viskosität nur bei den höchsten Akkretionsraten und in relativ großem radialem Abstand vom Zentrum (ab etwa 10^4 Schwarzschildradien) zu einem wesentlichen Einfluß der Selbstgravitation. Ein weiterer wesentlicher Unterschied besteht in der Flächendichte der Scheiben. In der β-Beschreibung ist sie deutlich kleiner, was zur Folge hat, daß die Scheiben in weiten Bereichen optisch dünn werden. Während die bolometrische Leuchtkraft von der Viskosität unabhängig ist, ändert sich die spektrale Zusammensetzung durchaus. Die beobachteten Emissionslinien im sichtbaren Spektralbereich und der sog. "5μ-bump" lassen sich im β-Modell besser erklären. Diese Ergebnisse sprechen für den β-Ansatz und sind Motivation für weitere Untersuchungen.

Abstract

Selfgravitating accretion disks: Models with α- and β-viscosity

In the standard-theory of accretion disks the viscosity is described by the so-called α-ansatz. This description cannot be applied to selfgravitating accretion disks in a consistent way. Duschl, Strittmatter and Biermann [DSB] introduced the so-called β-viscosity as an alternative, which avoids this inconsistency.
In the present thesis the consequences of the application of β-viscosity on the structure of the solutions were investigated with numerical calculations. Computations were performed for accretion disks in Active Galactic Nuclei with masses of the central Black Hole ranging from 10^6 to 10^9 solar masses and accretion rates between 10^{-2} and 10 solar masses per year. A result of the β-parametrization is that, in contrast to the α-ansatz, selfgravity becomes important only for the highest accretion rates at large distances (about 10^4 Schwarzschild radii and above) from the central object. A further major difference arises in the column density, which is distinctly smaller in the case of the β-description. This implicates that the disks are optically thin in wide regions. Whereas the bolometric luminosity is independent of the viscosity, the spectral composition may well be affected. The β-model explains the observed emission lines in the visible frequency range and the so-called "5μ-bump" better than the α-model. These results support the β-ansatz and motivate further investigations.

Selbstgravitierende Akkretionsscheiben: Modelle mit α- und β-Viskosität

Die Diplomarbeit wurde von Achim Traut ausgeführt am
Institut für Theoretische Astrophysik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Idee der Akkretionsscheibe

Das Konzept der Akkretionsscheibe ist in der Astrophysik weit verbreitet. Bereits der physikalische Kenntnisstand des letzten Jahrhunderts reicht aus, um die grundlegenden Zusammenhänge dieses Phänomens zu verstehen. Im Zentrum befindet sich ein massereiches Zentralobjekt, das umgebende Materie gravitativ anzieht. Diese Materie besitzt im allgemeinen einen Drehimpuls. Dieser verhindert einen radialen Einfall auf das Zentralobjekt und sorgt dafür, daß die Materie sich auf Keplerellipsen bewegt. Ist der Zustrom von akkretierter Materie einigermaßen kontinuierlich und in einer Vorzugsebene konzentriert, bildet sich eine Scheibe, die im allgemeinen aus Gas und/oder Staub besteht. Die Richtungen der Halbachsen der Ellipsen sind innerhalb der Scheibenebene gleichmäßig verteilt. Die Wechselwirkung zwischen den Gas- oder Staubteilchen wird dazu führen, daß sich die radialen Geschwindigkeitsanteile rausmitteln und eine gemeinsame Kreisbewegung resultiert. Entsprechend den Keplerschen Gesetzen ist die Rotation differentiell mit nach außen abnehmender Winkelgeschwindigkeit. Benachbarte Kreisringe bewegen sich also relativ zueinander und üben aufgrund innerer Reibung Drehmomente aufeinander aus. Dies ist der entscheidende Mechanismus, der den vorhandenen Drehimpuls nach außen abführt und somit erst die weitere Annäherung des Scheibenmaterials an das Zentralobjekt ermöglicht.

Durch die Akkretion wird Gravitationsenergie freigesetzt, die zur einen Hälfte zur Erhöhung der kinetischen Energie von Gas oder Staub beiträgt und zur anderen Hälfte in der Scheibe durch innere Reibung dissipiert wird. Im stationären Fall erfolgt die Kühlung der Scheibe durch die Emission elektromagnetischer Strahlung mit der gleichen Rate wie die Heizung durch viskose Reibung. Auf diese Weise kann äußerst effektiv Ruhemasse in elektromagnetische Energie umgewandelt werden. Um abzuschätzen, wie groß der Wirkungsgrad η, der das Verhältnis aus abgestrahlter Energie zur Ruheenergie der akkretierten Materie angibt, werden kann, betrachten wir als Zentralobjekt ein Schwarzes Loch in der Schwarzschild-

Metrik, für das die innerste stabile Kreisbahn bei 3 Schwarzschildradien liegt. Es wird die Energie abgestrahlt, die bis zu dieser Stelle dissipiert wird, der Rest verschwindet im Inneren des Schwarzen Lochs. Mit Newtonscher Rechnung erhalten wir

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\frac{GM\dot{M}}{3R_s}}{\dot{M}c^2} = \frac{1}{12} \ . \tag{1.1}$$

Eine korrekte allgemein-relativistische Behandlung[1] ergibt

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,057 \ . \tag{1.2}$$

Vergleicht man dies mit der Kernfusion von Wasserstoff zu Helium, die einen Wirkungsgrad von lediglich

$$\eta \approx 0,007 \tag{1.3}$$

hat, so kann man ermessen, was für einen ungeheuer effektiven Energieumwandlungsmechanismus die Akkretion bereitstellt. Bei hohen Akkretionsraten können auf diese Weise enorme Leuchtkräfte erzeugt werden.

1.2 Das Vorkommen von Akkretionsscheiben

Akkretionsscheiben können auf unterschiedlichsten Größenskalen und in mannigfaltigen astrophysikalischen Umgebungen existieren. Sowohl mittels Beobachtung als auch durch theoretische Modelle am besten verstanden sind Scheiben in Doppelsternsystemen. Dies liegt zum einen daran, daß Doppelsternsysteme sehr häufig vorkommen und sich etliche in unserer Nachbarschaft befinden und somit der Beobachtung gut zugänglich sind. Außerdem bietet die nahe Entfernung zweier Sterne ideale Voraussetzungen für die Bildung einer Akkretionsscheibe, da dort sowohl ein Zentralobjekt als auch umgebende Materie, die dann akkretiert wird, zur Verfügung stehen. Während einer der beiden Sterne die Entwicklung zum Weißen Zwerg – in diesem Fall spricht man von Kataklysmischen Veränderlichen (Cataclysmic Variable, CV) – oder Neutronenstern bereits durchlaufen hat und dann als Zentralobjekt der Scheibe dient, kann der Begleiter auf zwei verschiedene Arten das Akkretionsmaterial zur Verfügung stellen:

- Er kann sich im Laufe seiner Entwicklung so weit ausdehnen, daß er sein Roche-Volumen ausfüllt, so daß die äußeren Schichten in das Roche-Volumen des Begleiters überlaufen (Roche lobe overflow). Die zufließende Materie befindet sich in der Bahnebene des Doppelsternsystems, wodurch gleichzeitig die Ebene vorgegeben ist, in der sich die Akkretionsscheibe ausbildet.
- Durch Sternwinde kann seine Hülle abgeblasen werden, die (teilweise) vom Begleiter gebunden wird.

[1] s. z.B. *Gravitation* von Misner,Thorne & Wheeler, [MTW]

Ein weiterer Bereich, in dem Akkretionsscheiben eine Rolle spielen können, sind protostellare Objekte. Für die ursprünglich vorhandenen Molekülwolken, aus denen dann Protosterne entstehen, genügt bereits eine kleine Winkelgeschwindigkeit, um ihnen einen Drehimpuls zu verleihen, der größer ist, als er von einem Stern allein aufgenommen werden könnte. Die Existenz unseres Planetensystems scheint diese Vermutung zu unterstützen, denn die Planeten liegen alle etwa in der gleichen Ebene und tragen praktisch den kompletten Drehimpuls des Sonnensystems.

Akkretionsscheiben mit viel größeren Ausmaßen und *supermassiven* Schwarzen Löchern (das sind Schwarze Löcher mit mehr als 10^6 Sonnenmassen) im Zentrum werden in *Aktiven Galaktischen Kernen* (Active Galactic Nuclei – AGN's) vermutet. Unter diesem Begriff werden einige Objekte, die sich für den Beobachter recht unterschiedlich darstellen, zusammengefaßt. Ihnen gemeinsam ist eine ungeheure Energieabstrahlung auf relativ kleiner räumlicher Ausdehnung. Diese beiden Eigenschaften müssen indirekt geschlossen werden. Durch Beobachtung können AGN's nicht hinreichend aufgelöst werden; ihre räumliche Ausdehnung kann jedoch aufgrund von Veränderungen der Leuchtkraft auf recht kurzen Zeitskalen nach oben beschränkt werden. Zur Bestimmung der absoluten Leuchtkraft muß die Entfernung bekannt sein, die meist nur über die kosmologische Rotverschiebung zu ermitteln ist. Diese Interpretation wurde zwar zunächst, eben aufgrund der sich ergebenden enormen absoluten Leuchtkraft, angezweifelt, ist inzwischen aber weitgehend akzeptiert.

Diese starke Energieerzeugung läßt sich nur als Freisetzen gravitativer Energie von Materie plausibel erklären, die von einem supermassiven Schwarzen Loch mit etwa 10^6 bis 10^9 Sonnenmassen akkretiert wird. Da eine radiale Akkretion äußerst unwahrscheinlich ist (ein kleiner Drehimpuls würde schon genügen, um zumindest in der näheren Umgebung des Schwarzen Lochs den Materiefluß zu bestimmen), ist die Annahme einer Akkretionsscheibe naheliegend[2].

Diese Vermutung erfuhr eine erste Unterstützung durch die Arbeiten von Malkan & Sargent [MS82] und Malkan [M83], denen es gelang, die gemessenen Spektren von sechs Quasaren[3] durch Modelle optisch dicker Akkretionsscheiben recht gut zu reproduzieren. Dennoch gibt es weiterhin Hinweise darauf, daß die Theorie von Akkretionsscheiben in Kataklysmischen Veränderlichen nicht so ohne weiteres auf AGN's übertragen werden kann. Da die charakteristischen Zeitskalen etwa wie die Zentralmasse zunehmen, liefert die Theorie bei zeitabhängigen Rechnungen nur Variabilitäten im Bereich von einigen Tausend bis Millionen Jahren, was in klarem Widerspruch zu Beobachtungen steht (s. [SCK]).

Während also weitgehend Einigkeit darüber herrscht, daß AGN's Akkretionsscheiben ent-

[2]Eine ausführliche Übersicht über die unter dem Begriff AGN zusammengefaßten Objekte und deren Phänomenologie findet sich in [BNW]. Eine überzeugende Argumentation dafür, diese empirischen Befunde durch Akkretionsscheiben um supermassive Schwarze Löcher zu erklären, kann in [Bl] oder [Rees] nachgelesen werden.

[3]Quasare sind die am weitesten entfernten und leuchtkräftigsten Objekte, die bis jetzt beobachtet wurden, und stellen eine Unterklasse der AGN's dar.

halten, sind Details dieser Theorie noch nicht zufriedenstellend geklärt.

Kapitel 2

Theoretische Modelle von Akkretionsscheiben

2.1 Notation und fundamentale Zusammenhänge

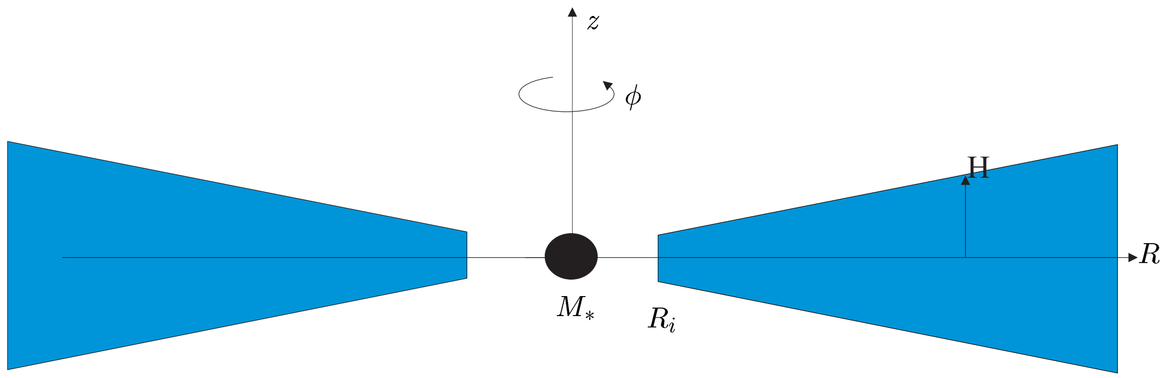

Abbildung 2.1: Schematische Darstellung von Zentralobjekt, Akkretionsscheibe und zugehörigem Koordinatensystem

Zur Beschreibung von Akkretionsscheiben verwenden wir Zylinderkoordinaten mit einer radialen Koordinate R, einer vertikalen Koordinate z und einer azimutalen Koordinate ϕ. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt der Zentralmasse M_*, die $R\phi$-Ebene sei die Symmetrieebene der Akkretionsscheibe (vgl. Abb.2.1). Diese wird nämlich als rotationssymmetrisch um die z-Achse und spiegelsymmetrisch zur Zentralebene angenommen.

Neben der Zentralmasse M_*[1] sind der Radius des inneren Scheibenrandes R_i und die Akkretionsrate $\dot{M}$, die angibt, wieviel Masse pro Zeiteinheit vom Zentralobjekt akkretiert

[1]Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird auf den Index $_*$ im folgenden an manchen Stellen verzichtet.

wird, die äußeren Parameter, die zur Charakterisierung einer Akkretionsscheibe immer erforderlich sind. Dazu gehört eigentlich auch der äußere Radius R_a, den wir jedoch immer als sehr groß gegenüber dem inneren Radius annehmen und seinen Einfluß, der wie $1/R_a$ geht, deshalb vernachlässigen.
Als sehr nützlich erweist sich die Einführung der sog. Säulen- oder Flächendichte

$$\Sigma(R,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R,z,t)dz = \int_{-H}^{H} \rho(R,z,t)dz \; . \tag{2.1}$$

Die gasförmige Materie, aus der die Akkretionsscheibe besteht, wird durch die üblichen hydrodynamischen Gleichungen beschrieben, die hier natürlich nicht in ihrer allgemeinen Form gelöst werden können, sondern zunächst durch Symmetriebetrachtungen und Vernachlässigung einzelner Terme, die in den hier behandelten Spezialfällen verschwinden oder sehr klein sind, vereinfacht werden.
Für die Poissongleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \tag{2.2}$$

berücksichtigen wir zunächst nur die Masse im Zentrum als Massenpunkt. Die dadurch verursachte Schwerebeschleunigung erhalten wir jedoch auch direkt aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz als

$$g^* = \frac{GM}{R^2 + z^2} \; . \tag{2.3}$$

In diesem Fall ist die Winkelgeschwindigkeit durch den Keplerschen Wert gegeben,

$$\Omega = \Omega_K = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \; ; \tag{2.4}$$

die Bahngeschwindigkeit beträgt dann

$$v_\phi = R\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R}} \; . \tag{2.5}$$

Wenn wir später auch die Eigengravitation, die von der Scheibenmasse selbst ausgeübt wird, berücksichtigen, fügen wir deren Beitrag zur Schwerebeschleunigung additiv hinzu.
Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \; ; \tag{2.6}$$

in Zylinderkoordinaten schreibt sich dies als

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\rho v_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(\rho v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \; . \tag{2.7}$$

Bei Zylindersymmetrie gilt $\partial_\phi = 0$ und da wir annehmen, daß sich die Scheibe in vertikaler Richtung in hydrostatischem Gleichgewicht befindet, gilt hier außerdem $v_z = 0$. Führen wir gleich auch noch eine z-Integration durch, so erhalten wir

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) = 0 \; . \tag{2.8}$$

Für die $R\phi$-Komponente des viskosen Spannungstensors in Zylinderkoordinaten gilt (vgl.[LL], Gl.(15.15))

$$\sigma_{R\phi}^{\text{visk}} = \rho\nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial R} - \frac{v_\phi}{R} \right) , \tag{2.9}$$

wobei ν die kinematische Viskosität ist[2]. Hier gilt wieder $\partial_\phi = 0$ und die azimutale Geschwindigkeit ist durch den Keplerschen Wert gegeben; somit

$$\sigma_{R\phi}^{\text{visk}} = \rho\nu \left(-\frac{1}{2} \frac{v_\phi}{R} - \frac{v_\phi}{R} \right) = \rho\nu R \frac{\partial \Omega}{\partial R} . \tag{2.10}$$

Eine weitere nützliche Relation bekommen wir aus einer Drehimpulsbilanz. Der an einem Ring mit Radius R pro Zeiteinheit ankommende Drehimpuls wird zum einen Teil durch viskose Scherkräfte nach außen abgegeben, zum anderen Teil wird er mit der akkretierten Materie weiter ins Scheibeninnere transportiert:

$$\dot{M} R v_\phi = -2\pi R^2 \int_{-H}^{H} \sigma_{R\phi}^{\text{visk}} \, dz + \dot{J} . \tag{2.11}$$

Wieviel Drehimpuls nach innen wandert und schließlich vom Zentralobjekt aufgenommen wird, hängt von den Bedingungen am inneren Rand der Scheibe ab. Wir nehmen hier an, daß sich bis zum inneren Scheibenrand beim Radius R_i die Materie mit Keplerscher Geschwindigkeit bewegt, und von weiter innen keine viskose Reibung mehr wirkt. Dann ist die Rate, mit der Drehimpuls vom Zentralobjekt aufgenommen wird, gegeben durch

$$\dot{J} = \dot{M} R_i^2 \Omega_i = \dot{M} \sqrt{G M R_i} . \tag{2.12}$$

Dies ergibt zusammen mit Gl.(2.1), (2.10) und (2.11)

$$\dot{M} \left(1 - \sqrt{\frac{R_i}{R}} \right) = 3\pi\nu\Sigma . \tag{2.13}$$

2.2 Das Standardmodell stationärer, dünner α-Scheiben

Schon in den 40er- und 50er-Jahren hatten von Weizsäcker und Lüst ein im wesentlichen heute noch gültiges Akkretionsscheibenmodell aufgestellt (vgl. [vW43], [L52]). Rechnungen mit einer molekularen Viskosität ergaben aber Zeitskalen für die Entwicklung sowohl protoplanetarer als auch galaktischer Scheiben, die größer als die Hubble-Zeit waren und damit einer physikalischen Existenz widersprachen. So ist es auch nicht erstaunlich, daß diesem Modell damals wenig Beachtung geschenkt wurde.
Dies änderte sich 1973 schlagartig, als Shakura und Sunyaev [SS73] die α-Parametrisierung

[2] Mit der Bezeichnung Viskosität ist in dieser Arbeit stets ν gemeint; die dynamische Viskosität $\eta = \rho\nu$ wird hier nicht verwendet.

einführten. Da der Drehimpuls nicht durch molekulare Viskosität erfolgen konnte, war die Idee, eine turbulente Viskosität dafür verantwortlich zu machen, sehr plausibel. Sie argumentierten, daß die den Drehimpuls transportierenden Wirbel keine größere Ausdehnung als die Höhe der Scheibe haben und sich höchstens mit Schallgeschwindigkeit bewegen können, da sonst Stoßwellen entstünden, die sehr schnell wieder gedämpft würden. Deshalb müsse sich die Viskosität darstellen lassen als $\nu = \alpha H c_s$ mit einem Parameter $\alpha \leq 1$, über den sonst zunächst nichts bekannt ist. Daß er in seinem radialen Verlauf konstant ist, ist nicht zu belegen, wird mangels besseren Wissens aber üblicherweise angenommen; außerdem würde eine Parametrisierung mit einem α, das sich von einer Konstanten wesentlich unterscheidet, wenig Sinn ergeben.
Mit diesem Ansatz erhielt das Modell plötzlich einen Sinn, der über ein rein akademisches Interesse hinausgeht, und wird seither als das Standardakkretionsscheibenmodell akzeptiert.

2.2.1 Die Annahmen

Das einfachste Akkretionsscheibenmodell, das z.B. bei Frank, King & Raine [FKR] ausführlich dargestellt ist, beschreibt (quasi)-stationäre, geometrisch dünne, optisch dicke α-Scheiben, d.h. es geht von folgenden Annahmen aus:

1. Die äußeren Bedingungen, wie z.B. die Akkretionsrate $\dot{M}$, ändern sich nur auf Zeitskalen, die groß sind im Vergleich zur viskosen Zeitskala, auf der sich die radiale Struktur ändert: $t_{\text{ext}} \gg t_{\text{visk}} = \frac{R^2}{\nu}$.

2. Die Höhe H der Scheibe (gerechnet von der Zentralebene bis zum oberen Rand) soll klein sein gegenüber dem radialen Abstand R vom Zentralobjekt: $H \ll R$.

3. Die optische Tiefe soll wesentlich größer als 1 sein: $\tau \gg 1$.

4. Die Masse der Akkretionsscheibe wird vernachlässigt und das Gravitationspotential allein durch das Zentralobjekt bestimmt. Insbesondere nimmt dann die Winkelgeschwindigkeit ihren Keplerschen Wert an: $\Omega = \Omega_{\text{K}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$.

5. Die kinematische Viskosität ν wird durch die α-Parametrisierung beschrieben: $\nu = \alpha H c_s$, wobei c_s die Schallgeschwindigkeit ist und $\alpha \leq 1$.

Unter diesen Voraussetzungen stellt sich in der Scheibe ein quasi-stationärer Zustand ein, bei dem Druck- und Temperaturgradient praktisch vertikal gerichtet sind, so daß sich radiale und vertikale Struktur entkoppeln lassen; das Modell ist also nicht echt 2-dimensional, sondern '1+1'-dimensional.

2.2.2 Die radiale Struktur im Einzonenmodell

In dieser '1+1'-dimensionalen Beschreibung läßt sich die radiale Struktur durch ein *Einzonenmodell* beschreiben, in dem die relevanten physikalischen Größen, die sich in z-Richtung verändern, entweder durch über ihren vertikalen Verlauf gemittelten Wert oder durch ihren Wert in der Zentralebene ersetzt werden. Dieses Verfahren kann nicht völlig selbstkonsistent sein, die Ergebnisse sind als erste Näherung des wahren Verlaufs jedoch recht nützlich. Dabei spielen die folgenden Gleichungen eine Rolle:
Für die Dichte verwenden wir den vertikal gemittelten Wert, der sich aus der Definition der Flächendichte ergibt zu

$$\rho = \bar{\rho} = \frac{\Sigma}{2H} \, . \tag{2.14}$$

Für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit gilt

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho} \, . \tag{2.15}$$

In der Gleichung, die das hydrostatische Gleichgewicht in vertikaler Richtung beschreibt,

$$\frac{dP}{dz} = -g_z \rho = -\Omega^2 z \rho \, , \tag{2.16}$$

ersetzen wir die linke Seite durch den Differentialquotienten $-P/H$ und auf der rechten Seite schätzen wir z durch H ab und erhalten somit nach einfachen Umformungen

$$H = \frac{c_s}{\Omega} \, . \tag{2.17}$$

Die nächste Gleichung stellt den Gesamtdruck in der Zentralebene als Summe von Gas- und Strahlungsdruck dar, wobei wir die Materie als ideales Gas annehmen und, da die Scheibe optisch dick ist, für den Strahlungsdruck die Diffusionsnäherung verwenden;

$$P = \frac{\rho k_B T_c}{\mu m_u} + \frac{a}{3} T_c^4 \, . \tag{2.18}$$

Dabei steht k_B für die Boltzmannkonstante, T_c für die Zentraltemperatur, μ für die Masse der Gasteilchen in Einheiten der atomaren Masseneinheit m_u und $a = \frac{4\sigma}{c} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3}$ für die Stefan-Boltzmann-Konstante.
Die optische Tiefe geben wir für den Weg zwischen oberem Scheibenrand und Zentralebene an

$$\tau = \frac{1}{2} \Sigma \kappa \, , \tag{2.19}$$

wobei wir nur einen frequenzgemittelten Wert berücksichtigen; als frequenzgemittelte Opazität κ haben wir das Rosseland-Mittel (vgl. Abschnitt 2.5.1) benutzt.
Weiterhin gilt gemäß Gl.(2.13)

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{R_i}{R}} \right) \, . \tag{2.20}$$

Von zentraler Bedeutung ist die Energiebilanz. Die viskose Reibung heizt das Scheibenmaterial auf mit der Heizrate

$$q = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{R\phi} \left(\frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{R} \right) + \sigma_{\phi R} \frac{\partial v_\phi}{\partial R} = \sigma_{R\phi} \left(-\frac{v_\phi}{R} \right) + \sigma_{\phi R} \left(-\frac{1}{2} \frac{v_\phi}{R} \right)$$

$$= \rho \nu R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \left(-\frac{3}{2} \frac{v_\phi}{R} \right) = \rho \nu \left(R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)^2 . \tag{2.21}$$

Da im stationären Fall die dissipierte Energie auch wieder abgestrahlt wird und nur der Fluß senkrecht zur Scheibenebene einen Nettobeitrag leistet, erhalten wir für die Energieflußdichte

$$F = \int_0^H q(z) dz = \int_0^H \rho \nu \left(R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)^2 dz = \frac{\Sigma}{2} \nu \frac{9GM}{4R^3} = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_i}{R}} \right) , \tag{2.22}$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (2.20) benutzt haben.
Andererseits gilt auch

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{a}{3} T^4 \right) = \frac{dP_{\mathrm{rad}}}{dz} = \frac{F}{c} \frac{d\tau}{dz} . \tag{2.23}$$

Integrieren wir diese Gleichung von der Zentralebene bis zum oberen Scheibenrand, so ergibt sich, wenn wir die Temperatur am oberen Rand gegen die Zentraltemperatur vernachlässigen,

$$\frac{F}{c} \tau \approx \frac{a}{3} T_c^4 . \tag{2.24}$$

Zusammen mit Gleichung (2.22) folgt daraus

$$\frac{ac}{3\tau} T_c^4 = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_i}{R}} \right) . \tag{2.25}$$

Gleichung (2.22) verdient noch eine Bemerkung. Die potentielle Energie, die pro Zeiteinheit in einem Ring der Breite ΔR umgewandelt wird, ist gegeben durch

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{GM\dot{M}}{R^2} \Delta R \tag{2.26}$$

Davon steht nur die Hälfte zur Aufheizung der Scheibe zur Verfügung, während die andere Hälfte die Bahngeschwindigkeit und damit die kinetische Energie der Gas- oder Staubteilchen in der Scheibe erhöht. Da der Ring eine Ober- und eine Unterseite hat, strahlt er auf einer Fläche von $2 \cdot 2\pi R \, \Delta R$ ab. Dies bedeutet, daß die Gravitation lokal für eine Energieflußdichte

$$\tilde{F} = \frac{GM\dot{M}}{8\pi R^3} \tag{2.27}$$

aufkommen kann. In den weiter außen gelegenen Bereichen, wo $\sqrt{R_i/R}$ klein gegen 1 ist, wird also dreimal soviel Energie abgestrahlt, wie dort direkt durch die Abnahme der potentiellen Energie zur Verfügung gestellt wird. Der fehlende Anteil stammt aus den inneren

Bereichen, wo $\sqrt{R_i/R}$ nicht mehr viel kleiner als 1 ist. Die viskose Reibung transportiert also nicht nur Drehimpuls nach außen, sondern sorgt auch für eine Umverteilung der Energie. Die Annahme von Stationarität bei einer bestimmten inneren Randbedingung erzwingt dies und ist auch Ursache dafür, daß in Gleichung (2.22) $F \to 0$ für $R \to R_i$. Über die gesamte Scheibenfläche integriert, führen beide Ausdrücke zur gleichen Leuchtkraft, so daß die Energieerhaltung selbstverständlich nicht verletzt wird;

$$L_{\text{disk}} = 2\int_{R_i}^{\infty} F(R) 2\pi R \, dR = \frac{GM\dot{M}}{2} \int_{R_i}^{\infty} 3\frac{1}{R^2}\left(1 - \sqrt{\frac{R_i}{R}}\right) dR$$

$$= \frac{GM\dot{M}}{2}\left(\frac{3}{R_i} - \frac{3}{1,5R_i}\right) = \frac{GM\dot{M}}{2R_i} \tag{2.28}$$

bzw.

$$\tilde{L}_{\text{disk}} = 2\int_{R_i}^{\infty} \tilde{F}(R) 2\pi R \, dR = \frac{GM\dot{M}}{2} \int_{R_i}^{\infty} \frac{1}{R^2} dR = \frac{GM\dot{M}}{2R_i} \; . \tag{2.29}$$

Schließlich benötigen wir noch Gleichungen für die Viskosität

$$\nu = \alpha H c_s \; , \tag{2.30}$$

die Opazität

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \tag{2.31}$$

und die mittlere Teilchenmasse

$$\mu = \mu(\rho, T) \; . \tag{2.32}$$

Die Gleichungen (2.14),(2.15),(2.17)–(2.20),(2.25) und (2.30)–(2.32) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem, das z.B. mit dem Newton-Raphson-Verfahren numerisch gelöst werden kann.

2.2.3 Die Grundgleichungen der vertikalen Struktur

Um exaktere Lösungen als mit dem Einzonenmodell zu erhalten, muß man die vertikale Struktur mit in die Rechnungen einbeziehen. Auch darüber gibt es in der Literatur eine Vielzahl von Artikeln, hier sei nur der von Meyer & Meyer-Hofmeister [MM82] genannt, der eine recht ähnliche Behandlung wie unsere in Abschnitt 3.1 vorführt. Die vertikale Struktur wird durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben.

1. Im hydrostatischen Gleichgewicht ist der Druckgradient gleich der Kraftdichte; die z-Komponente davon lautet:

$$\frac{dP}{dz} = -g_z \rho \; . \tag{2.33}$$

2. Die nächste Gleichung folgt aus einer Energiebilanz. Die Heizung des Gases erfolgt durch viskose Reibung, und die Energieflußdichte nimmt dann gerade um den Betrag zu, den dieser Heizmechanismus liefert.

$$\frac{dF}{dz} = \rho\nu\left(R\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)^2 = \frac{9}{4}\rho\nu\frac{GM}{R^3} \tag{2.34}$$

3. Welche Temperaturschichtung sich einstellt, hängt davon ab, auf welche Weise der Energietransport erfolgt. Konvektion tritt auf, wenn der radiative Gradient größer als der adiabatische ist, $\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla_{\mathrm{ad}}$, wobei $\nabla := d\ln T/d\ln P$. Andernfalls trägt ausschließlich Strahlung zum Energietransport bei. Der konvektive Gradient ∇_{conv} kann gegebenenfalls in einer Konvektionstheorie unter Berücksichtigung aller zum Energietransport beitragenden Phänomene bestimmt werden[3].

$$\frac{dT}{dz} = \begin{cases} \frac{dP_{\mathrm{rad}}}{dz}\left(\frac{dP_{\mathrm{rad}}}{dT}\right)^{-1} = -\kappa\rho\frac{F}{c}\left(\frac{4}{3}aT^3\right)^{-1} = -\frac{3\kappa\rho F}{4acT^3} & , \nabla_{\mathrm{rad}} \le \nabla_{\mathrm{ad}} \\ g_z\rho\frac{T}{P}\nabla_{\mathrm{conv}} & , \nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla_{\mathrm{ad}} \end{cases} \tag{2.35}$$

2.2.4 Erfolg und Schwächen dieses Modells

Hat man eine Lösung eines solchen Modells gefunden, kann und muß man die Rechtfertigung der Annahmen 2) – 4) aus Abschnitt 2.2.1 a posteriori überprüfen. In sehr weiten Bereichen für die Parameter M, $\dot{M}$, R und α sind diese Annahmen auch tatsächlich sehr gut erfüllt. Nur sehr schwer zu überprüfen ist dagegen die Beschreibung der Viskosität. Ihre Darstellung basiert im wesentlichen auf Dimensionsbetrachtungen und Isotropieannahmen, obwohl von Isotropie eigentlich nicht die Rede sein kann, schließlich soll der Drehimpuls ja ausschließlich in radialer Richtung transportiert werden, während als begrenzende Länge ein Wert herangezogen wird, der die vertikale Struktur beschreibt. In diese vertikale Richtung zeigen auch Druck– und Temperaturgradient, die in einer isotropen Situation ja verschwinden müßten.
Erstaunlicherweise führten Modellrechnungen mit konstantem α jedoch nicht nur zu realistischen Zeitskalen, sondern zeigten auch mit den am leichtesten der Beobachtung zugänglichen Scheiben, nämlich solchen in Doppelsternsystemen, eine recht gute Übereinstimmung. Sowohl Scheibenspektren von Kataklysmischen Veränderlichen als auch die zeitliche Entwicklung von Zwergnovae-Ausbrüchen können mit großem Erfolg modelliert werden, wodurch sich die Standard-Akkretionsscheibentheorie längst etabliert hat.
Dennoch waren hin und wieder individuelle Modifikationen am α-Modell notwendig, um die Ergebnisse besser mit Beobachtungsbefunden in Einklang zu bringen. Zur besseren Modellierung der Lichtkurven von Zwergnovae-Ausbrüchen benutzten Pringle et al. (s. [PVW]) zwei verschiedene Parameter α_1 und α_2 für die beiden stabilen Zweige im $\log\dot{M} - \log\Sigma$–Diagramm, wobei $\alpha_2/\alpha_1 \ge 3$ notwendig war, während Meyer & Meyer-Hofmeister

[3] s. z.B. [KW],§7

([MM83], [MM84]) zu demselben Zweck eine $\frac{H}{R}$-Abhängigkeit von α wählten. Einen guten Überblick über theoretische Modelle von Zwergnovae und viele weitere Literaturhinweise bietet der Übersichtsartikel von Cannizzo [C93].
Für einige Modelle benötigten Pringle et al. [PVW] außerdem α-Werte von 5, obwohl die Argumentation für die α-Viskosität überhaupt nur Werte $\alpha \leq 1$ zuläßt.
Der α-Ansatz ist trotz all seiner Erfolge also nicht nur aus konzeptioneller Sicht nicht wirklich befriedigend, sondern führt auch in gewissen Parameterbereichen zu Ergebnissen, die nur durch sehr unnatürliche Konstruktionen mit Beobachtungsdaten zur Übereinstimmung gebracht werden können.

2.3 Selbstgravitierende Akkretionsscheiben

Üblicherweise berücksichtigt man für das Gravitationspotential, in dem sich die Akkretionsscheibe befindet, nur die Masse des Zentralobjekts und vernachlässigt die Scheibenmasse völlig. In weiten Parameterbereichen ist diese Näherung auch sehr gut gerechtfertigt. Die Eigengravitation der Scheibe kann jedoch schon dann eine wesentliche Rolle spielen, wenn die Scheibenmasse noch klein gegenüber der Zentralmasse ist. Die radiale und die vertikale Komponente der Schwerebeschleunigung müssen jeweils separat verglichen werden.
Die Schwerebeschleunigung, die durch das Zentralobjekt verursacht wird, ist gegeben durch

$$g^* = \frac{GM}{R^2 + z^2} \approx \frac{GM}{R^2} \, . \tag{2.36}$$

Dies spaltet sich auf in die beiden Komponenten

$$g_z^* = g^* \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \approx \frac{GM}{R^3} z = \Omega^2 z \tag{2.37}$$

und

$$g_R^* = g^* \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \approx \frac{GM}{R^2} \, . \tag{2.38}$$

Zur Bestimmung der radialen Komponente des eigengravitativen Anteils an der Stelle R nehmen wir vereinfachend an, daß nur der Teil der Scheibe beiträgt, der zwischen dem inneren Scheibenrand R_i und R liegt, und zwar so, als sei diese Masse im Zentrum konzentriert, also

$$g_R^{SG}(R) = \frac{GM_d(R)}{R^2} \, , \tag{2.39}$$

wobei

$$M_d(R) = \int\limits_{R_i}^{R} \Sigma(r) 2\pi r \, dr \tag{2.40}$$

die Masse der Scheibe bis zum Radius R ist.
Zur Berechnung der z-Komponente an der Stelle (R, z) stellen wir uns vor, die Scheibe

habe eine unendliche Ausdehnung in der $R\phi$-Ebene und eine konstante Flächendichte Σ. Der Fehler, den wir dadurch machen, ist nicht zu groß, da nur die nähere Umgebung einen wesentlichen Beitrag zur Schwerebeschleunigung liefert. Unter diesen Annahmen vereinfacht sich die Poisson-Gleichung zu

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(R,z) = 4\pi G\rho\,. \tag{2.41}$$

Daraus folgt

$$g_z^d(R,z) = \frac{d}{dz}\Phi(R,z) = \int_0^z \frac{d}{dz}\Phi(R,z) = \int_0^z 4\pi G\rho(R,h)dh + C\,. \tag{2.42}$$

Da die vertikale Komponente in der Zentralebene aus Symmetriegründen verschwindet, ist die Integrationskonstante $C = 0$. Wir erhalten somit

$$g_z^d(R,z) = 2\pi G\Sigma_z(R,z)\ , \tag{2.43}$$

wobei

$$\Sigma_z(R,z) := \int_{-z}^z \rho(R,h)dh = 2\int_0^z \rho(R,h)dh\ . \tag{2.44}$$

Vergleicht man die jeweiligen vertikalen Komponenten am oberen Rand der Scheibe, d.h. in der Höhe $z = H$, so erhalten wir ein Maß für den Anteil der Selbstgravitation, indem wir einen Selbstgravitationsparameter SGP einführen, der das Verhältnis des selbstgravitativen zum zentralen Anteil angibt,

$$\frac{g_z^d}{g_z^*} = \frac{2\pi G\Sigma}{\Omega^2 H} =: SGP \approx \frac{2RM_d(R)}{HM_*}\ . \tag{2.45}$$

Die Eigengravitation überwiegt in z-Richtung, wenn der Selbstgravitationsparameter größer als 1 ist, also bereits dann, wenn das Verhältnis von Scheibenmasse zu Zentralmasse größer ist als $H/2R$,

$$\frac{M_d(R)}{M_*} > \frac{H}{2R}\ . \tag{2.46}$$

Sofern die radiale Komponente noch allein durch die Zentralmasse bestimmt wird, spricht man von *Keplersch Selbstgravitierenden* (KSG) Scheiben. Wird auch die Schwerebeschleunigung in R–Richtung wesentlich durch die Eigengravitation beeinflußt, so spricht man von *Voll Selbstgravitierenden* (Fully Selfgravitating, FSG) Akkretionsscheiben. Dafür ist dann notwendig, daß die Scheibenmasse mindestens mit der Zentralmasse vergleichbar ist,

$$M_d(R) \gtrsim M_*\ . \tag{2.47}$$

2.4 Scheiben mit β-Viskosität

Hinweis: Um eventuelle Mißverständnisse von vornherein auszuschließen, wird hier darauf hingewiesen, daß mit dem Begriff β-Viskosität in dieser Arbeit ausschließlich der von Duschl, Strittmatter und Biermann [DSB] eingeführte β-Ansatz gemeint ist. Dieser ist nicht mit der in der Literatur gelegentlich unter demselben Namen auftauchenden Variante der α-Viskosität zu verwechseln, die in der Beschreibung des Spannungstensors den Gesamtdruck durch den Gasdruck ersetzt.

2.4.1 Der β-Ansatz

Abschnitt 2.2.4 enthielt bereits einige Hinweise darauf, daß der α-Ansatz, so erfolgreich er in einigen Fällen auch war, nur von beschränkter Gültigkeit sein kann. Duschl, Strittmatter und Biermann [DSB] konnten darüber hinaus zeigen, daß eine Anwendung des α-Ansatzes auf Keplersch Selbstgravitierende Scheiben, bei denen g_z durch die Selbstgravitation dominiert und g_z^* vernachlässigt wird, zu dem Ergebnis führt, daß die Temperatur in ihrem radialen Verlauf konstant ist,

$$T(R) = \text{const.} \tag{2.48}$$

(oder, bei gewissen Randbedingungen am inneren Scheibenrand, eine feste Funktion des Radius, die von thermodynamischen Überlegungen unabhängig ist). Dies ist insofern unphysikalisch, als die Temperatur die Freiheit haben müßte, sich im Zusammenspiel zwischen der freiwerdenden Gravitationsenergie durch viskose Dissipation einerseits und Kühlung durch Energieabstrahlung andererseits einzustellen.

Eine alternative Viskositätsbeschreibung sollte der allgemein akzeptierten Hypothese, daß die Viskosität turbulenten Ursprungs ist, Rechnung tragen. Unterstützt wird diese Hypothese auch durch Betrachtungen der Reynoldszahl

$$\Re e = \frac{vl}{\nu_{\text{mol}}} \gg \Re e_{\text{krit}} \ , \tag{2.49}$$

die groß gegenüber ihrem kritischen Wert ist, wenn man die aus Laborexperimenten bekannte molekulare Viskosität ν_{mol} zugrunde legt. Dabei ist es unerheblich, welche der auftretenden Geschwindigkeits- und Längenskalen man als die charakteristischen ansieht. Die Wahl von v_ϕ und R ist insofern plausibel, als wir uns für die $R\phi$-Komponente des viskosen Spannungstensors interessieren, die für den Drehimpulstransport nach außen verantwortlich ist. Die in [DSB] eingeführte β-Viskosität beruht dann auf der Annahme, daß die turbulente Viskosität gerade einen solchen Wert annimmt, daß die Reynoldszahl im Bereich ihres kritischen Wertes liegt, also

$$\nu_{\text{turb}} = \frac{1}{\Re e_{\text{krit}}} R v_\phi = \beta R v_\phi \ , \tag{2.50}$$

wobei

$$\beta := \frac{1}{\Re e_{\text{krit}}} \approx 10^{-3} - 10^{-2} \ . \tag{2.51}$$

2.4.2 Direkte Folgerungen des Ansatzes

Da der α-Ansatz ja auch unbestreitbare Erfolge hatte, wäre es wenig verheißungsvoll für die β-Viskosität, wenn sie in diesen Parameterbereichen zu völlig anderen Resultaten führt. Setzen wir die Viskosität der beiden Ansätze gleich, so erhalten wir

$$\beta R v_\phi \stackrel{!}{=} \alpha H c_s \ . \tag{2.52}$$

Für geometrisch dünne Akkretionsscheiben ohne Selbstgravitation gilt (2.17); dies eingesetzt ergibt

$$\beta = \left(\frac{H}{R}\right)^2 \alpha \ . \tag{2.53}$$

Mit den Einschränkungen $\alpha \leq 1$ und $10^{-3} \leq \beta \leq 10^{-2}$ ist ersichtlich, daß die beiden Ansätze dann einander äquivalent sind, wenn

$$\frac{H}{R} = \text{const.} \geq \frac{1}{30} \ . \tag{2.54}$$

In den Doppelsternsystemen, wo die α-Viskosität die besten Ergebnisse geliefert hat, ist $\frac{H}{R}$ in aller Regel größer als $\frac{1}{30}$ und ändert sich im radialen Verlauf nicht zu sehr, so daß die beiden Ansätze miteinander vereinbar sind.

In den äußeren Bereichen von AGN's und insbesondere dann, wenn die Selbstgravitation in vertikaler Richtung eine wesentliche Rolle spielt, wird das Verhältnis von Höhe zu radialem Abstand wesentlich kleiner als 1/30. Dann besteht ein klarer Widerspruch zwischen den beiden Viskositätsbeschreibungen; der β-Ansatz würde ein α, das deutlich größer als 1 ist, erfordern, bzw. der α-Ansatz ein β, das deutlich kleiner als 10^{-3} ist. Nachdem die α-Viskosität in diesen Regionen bis jetzt wenig Erfolge zu verzeichnen hatte und beispielsweise von Collin-Souffrin [C-S] mit $\alpha = 10$ bereits erste zaghafte Schritte zu einer größeren Viskosität unternommen wurden, soll in dieser Arbeit untersucht werden, zu welchen Ergebnissen die komplett neue Viskositätsbeschreibung führt. Um die beiden Ansätze innerhalb der gegebenen Schranken noch möglichst nah beieinander zu halten, haben wir hier $\beta = 10^{-3}$ bevorzugt und mit Modellen mit $\alpha = 1$ verglichen.

Aufgrund der einfachen funktionalen Abhängigkeit der β-Viskosität kann man für KSG-Scheiben sofort einige Abschätzungen durchführen. Der β-Ansatz läßt sich dann umformen zu

$$\nu = \beta R v_\phi = \beta \sqrt{GMR} = \nu(\beta, M, R) \ , \tag{2.55}$$

d.h. die Viskosität ist nur noch von der Wahl von β sowie den äußeren Parametern M und R abhängig (für FSG-Scheiben enthält M natürlich auch M_d). Man kennt ihren Wert also, ohne irgendeine weitere Kenntnis über die Struktur der Akkretionsscheibe zu haben. Dies gestattet es, direkt die Flächendichte Σ auszurechnen. Mit Hilfe von Gleichung (2.13), die aus der Drehimpulserhaltung abgeleitet wurde, bekommen wir

$$\Sigma(R) = \frac{\dot{M}}{3\pi\nu(R)}\left(1-\sqrt{\frac{R_i}{R}}\right) = \frac{\dot{M}}{3\pi\beta\sqrt{GMR}}\left(1-\sqrt{\frac{R_i}{R}}\right) . \tag{2.56}$$

Für die Masse der Scheibe bis zum Radius R ergibt sich somit

$$M^d(R) = \int\limits_{R_i}^{R} 2\pi s\Sigma(s)\,ds = \frac{2\dot{M}}{3\beta\sqrt{GM}}\int\limits_{R_i}^{R}\left(\sqrt{s}-\sqrt{R_i}\right)ds$$

$$= \frac{2\dot{M}}{3\beta\sqrt{GM}}\left(\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}\underbrace{-R\sqrt{R_i}+\frac{1}{3}R_i^{\frac{3}{2}}}_{=:\tilde{m}_i}\right) , \tag{2.57}$$

wobei wir den Term, der durch den inneren Rand der Scheibe verursacht wird, mit $\tilde{m}_i$ bezeichnen. Um eine erste grobe Abschätzung zu erhalten, wo sich der Effekt der Eigengravitation bemerkbar machen kann, bilden wir das Verhältnis von Scheiben- zu Zentralmasse. Da wir einen wesentlichen Beitrag der Selbstgravitation nur in den weit außen gelegenen Bereichen der Akkretionsscheibe erwarten, vernachlässigen wir $\tilde{m}_i$; außerdem führen wir die dimensionslose Größe r ein, die den radialen Abstand in Einheiten des Schwarzschildradius mißt,

$$r := \frac{R}{R_s} = \frac{R}{\frac{2GM}{c^2}} . \tag{2.58}$$

Einfache Umformungen führen zu

$$\frac{M^d(r)}{M} = \frac{4\sqrt{2}}{9}\frac{G}{c^3}\frac{\dot{M}}{\beta}r^{\frac{3}{2}} . \tag{2.59}$$

Nach r aufgelöst ergibt dies (dimensionsbehaftete Größen wie üblich in cgs-Einheiten)

$$r = \left(6,4\cdot 10^{38}\frac{\beta}{\dot{M}}\frac{M^d}{M}\right)^{\frac{2}{3}} . \tag{2.60}$$

Die Stelle, an der die Schwerebeschleunigung durch Zentralobjekt und Selbstgravitation den gleichen Beitrag in z-Richtung leisten, erhalten wir, indem wir $M_d/M = H/2R$ einsetzen. Damit diese Stelle noch möglichst weit innen ist, setzen wir für β den kleinstmöglichen Wert von 10^{-3} und für die Akkretionsrate einen relativ hohen Wert von $10 M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}$ ein. Dann liegt die Grenze, ab der die Eigengravitation in vertikaler Richtung den Zentralanteil überwiegt, bei

$$r = 10^6\left(\frac{H}{2R}\right)^{\frac{2}{3}} . \tag{2.61}$$

Für $H/R = 1/30$ ist dies immer noch ein Abstand von etwa 65 000 Schwarzschildradien. Wie Berechnungen, die die vertikale Struktur explizit berücksichtigen, zeigen, ist H/R in AGN's, insbesondere in den äußeren Bereichen, meist wesentlich kleiner als 1/30. Dies bedeutet einerseits, daß der Einfluß der Eigengravitation nicht erst ganz so weit außen einsetzt, andererseits dort aber α- und β-Ansatz völlig andere Vorhersagen für die Viskosität machen.

2.5 Die Materialfunktionen

2.5.1 Die Opazitäten

In dieser Arbeit wurden keine frequenzabhängigen Werte κ_ν verwendet, sondern ausschließlich das Rosseland-Mittel

$$\kappa = \frac{\int\limits_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} = \left(\frac{\pi}{acT^3} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right)^{-1} , \tag{2.62}$$

wobei die Planck-Funktion

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \tag{2.63}$$

die Energieverteilung der Schwarzkörper-Strahlung angibt. Das Rosseland-Mittel stammt aus der Beschreibung des Strahlungstransports als Diffusionsprozeß[4], was in optisch dicken Medien ($\tau \gg 1$) eine gute Näherung ist. Das Rosseland-Mittel ist dann noch eine Funktion der Dichte ρ, der Temperatur T und der chemischen Zusammensetzung. Da wir hier keine Veränderungen der chemischen Zusammensetzung betrachten, geben wir uns eine fest vor. Die hier verwendete Zusammensetzung mit einem Massenanteil

$$\begin{array}{rll} \text{von Wasserstoff} & X = 0,7 & , \\ \text{von Helium} & Y = 0,28 & \text{und} \\ \text{dem Rest} & Z = 1 - X - Y = 0,02 & \end{array}$$

wurde aufgrund der Opazitätstabelle von Alexander und Ferguson in [AF] gewählt, die gerade für diese Zusammensetzung gilt. Die Opazität ist dann noch eine Funktion von Dichte und Temperatur. Für Temperaturen bis $1\,000\,K$ wird hier eine von Lin und Papaloizou ([LP],Gl.(65a,b,c)) angegebene stückweise analytische Funktion benutzt:

$$\begin{array}{rlr} \kappa = 2 \cdot 10^{-4} T^2 & \text{für} & T \leq 170\,K \\ \kappa = 2 \cdot 10^{16} T^{-7} & \text{für} & 170\,K < T \leq 210\,K \\ \kappa = 5 \cdot 10^{-3} T & \text{für} & 210\,K < T \leq 1\,000\,K \end{array} \tag{2.64}$$

[4]Wie sich das Rosseland-Mittel aus der Diffusionsnäherung als die geeignete frequenzunabhängige Opazität ergibt, steht z.B. in [KW]§5.1 .

Für $1\,000\,K < T \leq 10\,000\,K$ werden hier die Werte aus der Tabelle von Alexander und Ferguson ([AF], table 6) verwendet. Die Tabelle zeigt $\log \kappa$ als Funktion von $\log T$ und $\log \mathtt{R} := \log \left(10^{18} \frac{\rho}{T^3}\right)$; für Wertepaare $(\log T, \log \mathtt{R})$ zwischen den Gitterpunkten der Tabelle wurden die Werte von $\log \kappa$ linear interpoliert.
Für Temperaturen über $10\,000\,K$ wurden die Daten aus dem *Opacity Project* ([OpPj], [SYMP]) benutzt. Mit den dort zur Verfügung stehenden Datensätzen, Interpolations- und Transformationsprogrammen haben wir zunächst einen neuen Datensatz für die chemische Zusammensetzung $X = 0,7$, $Z = 0,02$ erzeugt. Aus diesem Datensatz haben wir wiederum $\log \kappa(\log T, \log \mathtt{R})$ linear interpoliert.
Der gesamte Verlauf der Opazität wird durch das Gebirge in Abb. 2.2 veranschaulicht.

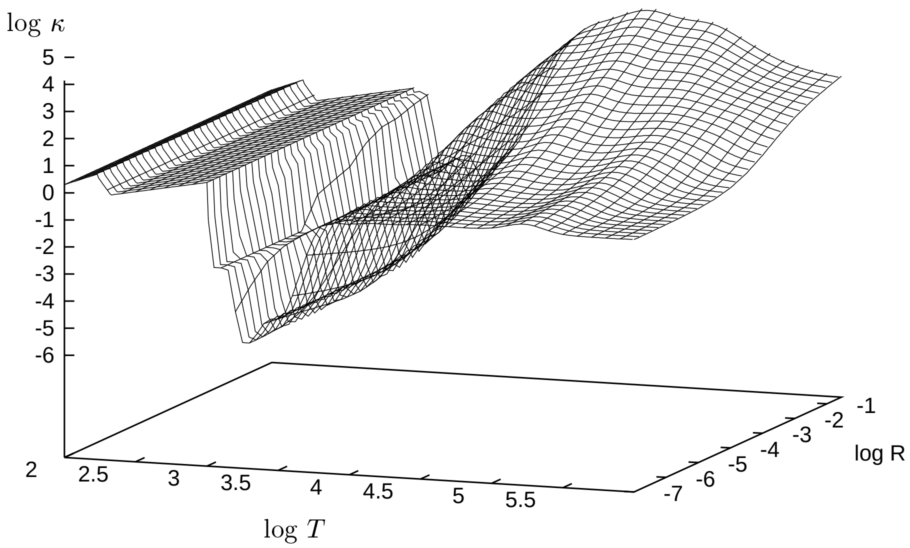

Abbildung 2.2: Opazitätsgebirge

2.5.2 Die mittlere Teilchenmasse μ

Auch wenn wir die chemische Zusammensetzung als konstant betrachten, gilt dies nicht für die mittlere Teilchenmasse μ. Sie verändert sich nämlich auch durch Ionisation. Das Ionisationsgleichgewicht wird durch die Saha-Gleichung beschrieben. Das Verhältnis der Teilchenzahldichten n in den Grundzuständen der $(r+1)$-ten und r-ten Ionisationsstufe ist gegeben durch (vgl.[KW], Gl.(14.12))

$$\frac{n_{r+1,0}}{n_{r,0}} n_e = \frac{g_{r+1,0}}{g_{r,0}} f_r(T) \quad , \quad \text{mit} \quad f_r(T) = 2 \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r / k_B T} \ . \qquad (2.65)$$

Die Besetzungszahlen des s-ten Anregungszustands und des Grundzustands einer Ionisationsstufe sind durch die Boltzmann-Gleichung miteinander verknüpft:

$$\frac{n_{r,s}}{n_{r,0}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,0}} e^{-\Psi_{r,s}/k_B T} \,. \tag{2.66}$$

Dabei bedeuten die $g_{i,j}$ die statistischen Gewichte, χ_i die Ionisationsenergie und $\Psi_{i,j}$ die Anregungsenergie.

Für die prinzipielle Struktur unserer Lösungen spielt die mittlere Teilchenmasse nur eine sehr untergeordnete Rolle. Der hohe Aufwand, den die simultane Lösung der Saha- und Boltzmann-Gleichungen für die verschiedenen Atome, Ionisationsstufen und Anregungszustände erfordert, ist dadurch nicht gerechtfertigt. Um jedoch μ nicht gleich als konstant anzusehen, gehen wir folgenden Kompromiß ein:

Wir übernehmen aus einer Arbeit von Huré et al. [HCBP], die sich ebenfalls mit äußeren Bereichen von Scheiben in AGN's befaßt, μ–Werte bei verschiedenen Temperaturen und interpolieren dazwischen die mittlere Teilchenmasse. Die verwendeten Werte sind in Tabelle 2.1 dargestellt.

Temperatur [K]	μ
$\leq 1\,520$	2,365
3 800	1,3
11 000	0,77
23 000	0,64
$\rightarrow \infty$	0,617

Tabelle 2.1: Werte der mittleren Teilchenmasse μ, zwischen denen interpoliert wird.

Die Interpolation erfolgt bis $23\,000\,K$ zwischen den jeweils beiden benachbarten Tabellenpunkten linear, wenn man μ als Funktion von $\log T$ auffaßt, und über $23\,000\,K$ linear, wenn man μ als Funktion von T^{-1} auffaßt.

Kapitel 3

Die numerische Behandlung selbstgravitierender Akkretionsscheiben

Neben den äußeren Parametern $M, \dot{M}, R_i$ und R geben wir uns außerdem noch die Beschreibung der Viskosität vor. Dadurch ist unser Modell jedoch noch nicht vollständig charakterisiert. Da wir den Strahlungstransport nicht in seiner Allgemeinheit behandeln können, beschränken wir uns auf die Grenzfälle optisch dicker, $\tau \gg 1$, und optisch dünner Scheiben, $\tau \ll 1$. Wie die Rechnungen zeigen, sind die Scheiben mit α-Viskosität in den hier untersuchten Parameterbereichen überall optisch dick. Unter Verwendung der β-Viskosität existiert nur in manchen Parameterbereichen eine Lösung des optisch dicken Modells. In welchem Abstand vom Zentrum die Scheibe optisch dick ist, wird vorwiegend durch die Temperatur bestimmt, da die Opazität in den hier relevanten Dichte- und Temperaturbereichen nur schwach von der Dichte abhängt, sich aber auf relativ kleinen Temperaturintervallen um mehrere Größenordnungen ändern kann, während die Flächendichte sich nur wie $1/\sqrt{R}$, also sehr moderat, ändert.

Für Akkretionsscheiben mit optischen Tiefen, die groß gegen 1 sind, berechnen wir die vertikale Struktur. Unser Vorgehen lehnt sich dabei an eine Arbeit von Meyer & Meyer-Hofmeister [MM82] an.

Im Fall von optischen Tiefen, die klein gegen 1 sind, nehmen wir die Scheibe als isotherm in vertikaler Richtung an, wie dies u.a. auch bei [Ty81] oder [C-S] gemacht wurde, und rechnen nur ein Einzonenmodell.

3.1 Die vertikale Struktur optisch dicker Scheiben

3.1.1 Die Differentialgleichungen

Die Gleichungen, die die vertikale Struktur im Standardmodell beschreiben, wurden bereits in Abschnitt 2.2.3 aufgeführt. Davon unterscheidet sich das unseren Rechnungen zugrunde liegende Modell in den folgenden Punkten.

- Wir vernachlässigen die Konvektion und nehmen an, daß der Energietransport ausschließlich durch Strahlung erfolgt. Konvektion tritt dann auf, wenn der radiative Gradient größer als der adiabatische ist, $\nabla_{\rm rad} > \nabla_{\rm ad}$, wobei $\nabla := d\ln T/d\ln P$. Für ein einatomiges ideales Gas (also mit drei Freiheitsgraden) gilt $\nabla_{\rm ad} = 0,4$. In den hier gerechneten Modellen ist nirgends $\nabla_{\rm rad} > 0,4$ festgestellt worden. Da $\nabla_{\rm ad}$ auch kleiner als $0,4$ werden kann, ist damit zwar noch nicht ausgeschlossen, daß Konvektion überhaupt einsetzen kann, die Vernachlässigung sollte die Lösungen jedoch höchstens im Detail beeinflussen, wogegen diese Arbeit ja auf die ganz erheblichen Unterschiede zwischen α- und β-Viskosität abzielt.

- Da bei Berücksichtigung der Selbstgravitation g_z von Σ_z abhängt, ist hier eine weitere Differentialgleichung erforderlich,

$$\frac{d\Sigma_z}{dz} = 2\rho \; . \tag{3.1}$$

  Sie folgt direkt aus der Definition von Σ_z.

- Die Viskosität wird für die vertikale Struktur im Standardmodell mit Hilfe der Beziehung (2.17) umgeschrieben als

$$\nu = \alpha H c_s = \alpha \frac{H}{c_s} c_s^2 = \alpha \frac{P}{\Omega\rho} \; . \tag{3.2}$$

  Diese Abschätzung ist im selbstgravitierenden Fall falsch und muß ersetzt werden durch

$$\frac{P}{H} \approx \frac{dP}{dz} = (g_z^* + g_z^d)\rho \approx (\Omega^2 H + 2\pi G\Sigma)\rho = (\Omega^2 H + 2\pi G 2H\rho)\rho \; , \tag{3.3}$$

  und somit

$$H = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + 4\pi G\rho}} \sqrt{\frac{P}{\rho}} \; . \tag{3.4}$$

  Dies führt zu der Viskosität

$$\nu = \alpha \frac{P}{\rho\sqrt{\Omega^2 + 4\pi G\rho}} \; , \tag{3.5}$$

  die wir in unserem Modell als α-Ansatz verwendet haben.
  Für die Rechnungen, in denen wir die β-Viskosität benutzen, setzen wir natürlich

$$\nu = \beta R v_\phi \; . \tag{3.6}$$

3.1.2 Die Randbedingungen

Wir haben es also mit einem System von 4 gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun, zu dessen Lösung grundsätzlich 4 Randbedingungen vorgegeben werden müssen. In der Zentralebene bei $z = 0$ verschwinden sowohl der Fluß als auch Σ_z; erstere, in z-Richtung weisende Größe aus Symmetriegründen, letztere folgt direkt aus der Definition. Wir haben also bei $z = 0$:

$$F(0) = 0 \tag{3.7}$$

$$\Sigma_z(0) = 0 \tag{3.8}$$

Die Scheibe hat jedoch keinen wohldefinierten oberen Rand. Um dennoch die nötigen Randbedingungen zu bekommen, setzen wir als Abschluß der Scheibe eine graue Atmosphäre oben drauf. Die Grenze zwischen der eigentlichen Scheibe und der Atmosphäre liegt bei einer durch die Atmosphäre definierten Höhe z_0. An dieser Stelle $z = z_0$ bekommen wir die weiteren Randbedingungen:

$$F(z_0) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM\dot{M}}{R^3}\left(1 - \sqrt{\frac{R_i}{R}}\right) \tag{3.9}$$

$$T(z_0) = T_{\text{eff}} = \left(\frac{F}{\sigma}\right)^{1/4} \tag{3.10}$$

Der Druck $P(z_0)$ an der Stelle z_0 und die Säulendichte $\Sigma_z(z_0)$ sind noch nicht durch die äußeren Parameter bestimmt, sondern müssen an die Atmosphäre angepaßt werden; sie sind bei Kenntnis der Atmosphäre durch diese Stetigkeitsbedingungen festgelegt. Insgesamt existieren somit vier Randbedingungen, nämlich (3.7) – (3.10), und zwei Stetigkeitsbedingungen für die vier Differentialgleichungen. Das System wäre überbestimmt, wenn wir nicht noch über zwei freie Parameter verfügen könnten. Wie wir im nächsten Unterabschnitt sehen werden, läßt die Atmosphäre genau diese zwei Parameter frei.

3.1.3 Die Atmosphäre

Die Atmosphäre wird hier in Anlehnung an die Theorie der Sternatmosphären behandelt[1]. Als unabhängige Variable verwenden wir die optische Tiefe τ. Die Atmosphäre befindet sich dann zwischen $\tau = 0$ und $\tau = 2/3$, wobei die Grenze z_0 zwischen der eigentlichen Scheibe und der Atmosphäre gerade durch $\tau = 2/3$ definiert wird. Innerhalb der Atmosphäre wird vereinfachend F als konstant angenommen:

$$F(\tau) = \text{const.} \tag{3.11}$$

[1]Für Details, wie z.B.die Herleitung der Eddington-Näherung, s. [B-V]

Unter Zuhilfenahme der Eddington-Näherung gilt für den Temperaturverlauf innerhalb der Atmosphäre

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) . \tag{3.12}$$

Hier sieht man auch, daß die Definition der Atmosphärengrenze als $\tau = \frac{2}{3}$ gleichbedeutend damit ist, daß die Temperatur an dieser Stelle gleich der Effektivtemperatur ist. Fluß und Temperatur sind also von vornherein an jeder Stelle τ bekannt.

Die vertikale Koordinate z, der Gesamtdruck P und Σ_z bleiben somit als die Unbekannten übrig, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden müssen. Aus der Definition der optischen Tiefe τ folgt

$$\frac{dz}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^{-1} = -\frac{1}{\kappa\rho} . \tag{3.13}$$

Für den Verlauf des Gasdrucks gilt im hydrostatischen Gleichgewicht

$$\frac{dP_{\text{g}}}{d\tau} = \frac{dP}{d\tau} - \frac{dP_{\text{rad}}}{d\tau} = \frac{dP}{dz}\frac{dz}{d\tau} - \frac{F}{c} = \frac{g_z}{\kappa} - \frac{F}{c} . \tag{3.14}$$

Schließlich noch, direkt aus der Definition von Σ_z folgend:

$$\frac{d\Sigma_z}{d\tau} = \frac{d\Sigma_z}{dz}\frac{dz}{d\tau} = 2\rho \left(-\frac{1}{\kappa\rho} \right) = -\frac{2}{\kappa} \tag{3.15}$$

Dies ist ein Differentialgleichungssystem für z, P_{g} und Σ_z. Die rechten Seiten sind hierbei durch z, P_{g} und Σ_z sowie die äußeren Parameter G, M, $\dot{M}$, R und die als Funktion von τ bereits bekannten Größen F und T gegeben. Die Dichte ist z.B. über die Zustandsgleichung als Funktion von Gasdruck und Temperatur gegeben; die Opazität[2] κ ist ihrerseits wieder eine Funktion von Dichte und Temperatur.

Als Randbedingung bei $\tau = 0$ soll der Gasdruck verschwinden, also

$$P_{\text{g}}(\tau = 0) = 0 . \tag{3.16}$$

Die anderen beiden Randbedingungen, $z(\tau = 0)$ — wir bezeichnen diese Größe im folgenden mit z_∞ — und $\Sigma_z(\tau = 0) = \Sigma$, sind zu diesem Zeitpunkt noch unbestimmt; es sind gerade die beiden Parameter, die die Atmosphäre freiläßt und die zur Erfüllung der Gleichungen in der eigentlichen Scheibe samt Rand- und Stetigkeitsbedingungen erforderlich sind. Hier fallen jedoch zwei Punkte auf:

1) z_∞ ist physikalisch nicht wohldefiniert. Falls in einer Höhe z_1 $\tau = 0$ erfüllt ist, so auch in jeder größeren Höhe z_2, da sich oberhalb von z_1 keine Materie mehr befindet, die zu einer Änderung der optischen Tiefe beitragen könnte.

2) Gleichung (3.13) hat bei z_∞ eine Singularität, da dort der Gasdruck und damit auch die Dichte verschwindet.

[2] s. Abschnitt 2.5.1

Diese beiden Punkte sind Ausdruck der Tatsache, daß es sich hierbei um ein freies Randwertproblem handelt, das eine nach außen exponentiell abfallende Lösung besitzt, also $z \to \infty$ für $\tau \to 0$. Dies kann dadurch numerisch gelöst werden, daß wir zuerst für Gleichung (3.14) den ersten Integrationsschritt explizit durchführen; damit können wir ρ und κ am Ende des ersten Integrationsschrittes ausrechnen und damit für die Gleichungen (3.13) und (3.15) den ersten Integrationsschritt implizit ausführen. Die (willkürliche) Wahl der Länge h des ersten Integrationsschrittes beeinflußt jedoch das Ergebnis an der unteren Atmosphärengrenze. Wir erhalten $z_0 = z_0(\Sigma, z_\infty, h)$ und $P_{\tau=0} = P_{\tau=0}(\Sigma, z_\infty, h)$. Diese beiden Funktionen verhalten sich jedoch gerade so, daß $P_{\tau=0} = P_{\tau=0}(\Sigma, z_0)$, d.h. der Druck an der Atmosphärengrenze ist durch die Flächendichte und z_0 gegeben und hängt nicht separat von der unphysikalischen Größe z_∞ oder der Schrittweite h ab, sondern nur von der Kombination der beiden vermöge deren Einfluß auf z_0. Dies erlaubt uns, das h fest vorzugeben und nur noch z_∞ zu variieren. Durch diese Behandlung der Atmosphäre haben wir genau unser Ziel erreicht: Wir haben den Druck an der Atmosphärengrenze als weitere Randbedingung für die Akkretionsscheibe. Als freien Parameter haben wir jetzt statt dem z_0, das ebenfalls durch die Atmosphäre festgelegt ist, z_∞.

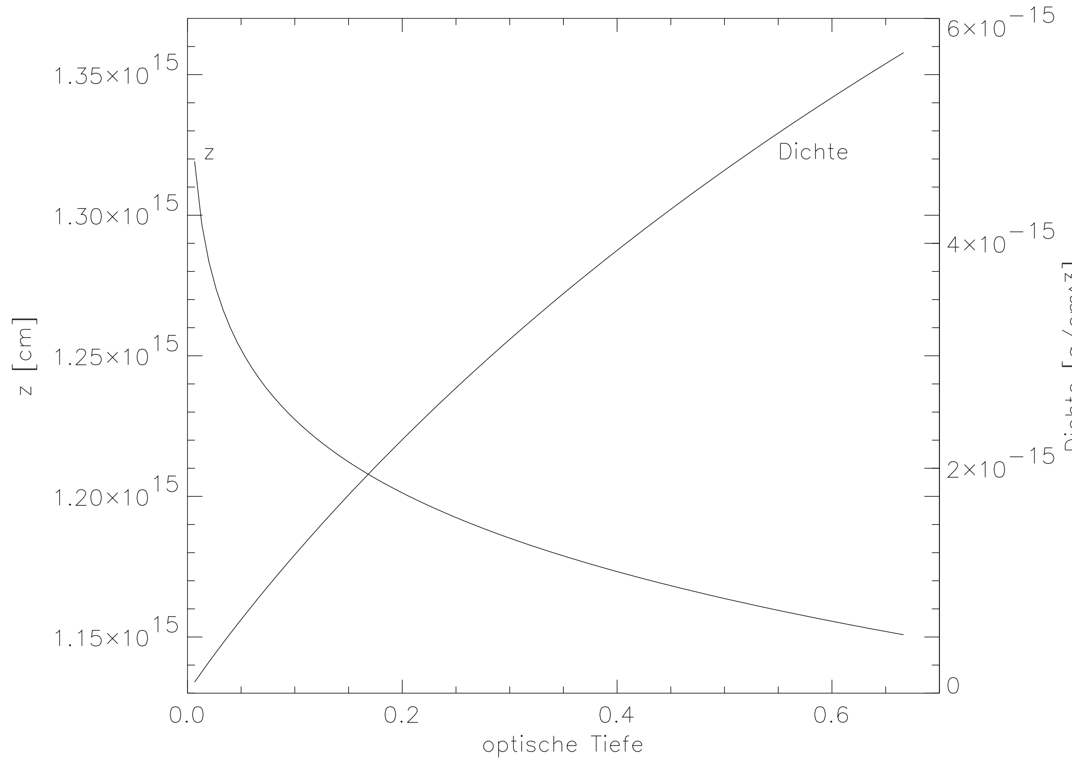

Abbildung 3.1: Vertikale Koordinate z und Dichte ρ als Funktion der optischen Tiefe τ. Die Darstellung mit der optischen Tiefe auf der Abszisse entspricht dem numerischen Verfahren. Die Funktionen sind erst ab $\tau = h$ eingezeichnet; dort ist auch der asymptotische Verlauf von z zu erkennen, der veranschaulicht, daß z_∞ keine physikalisch wohldefinierte Größe ist. Als Parameter waren hier $M = 10^8 M_\odot$, $\dot{M} = 1 M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}$ und $R = 10^4 R_s$ gewählt.

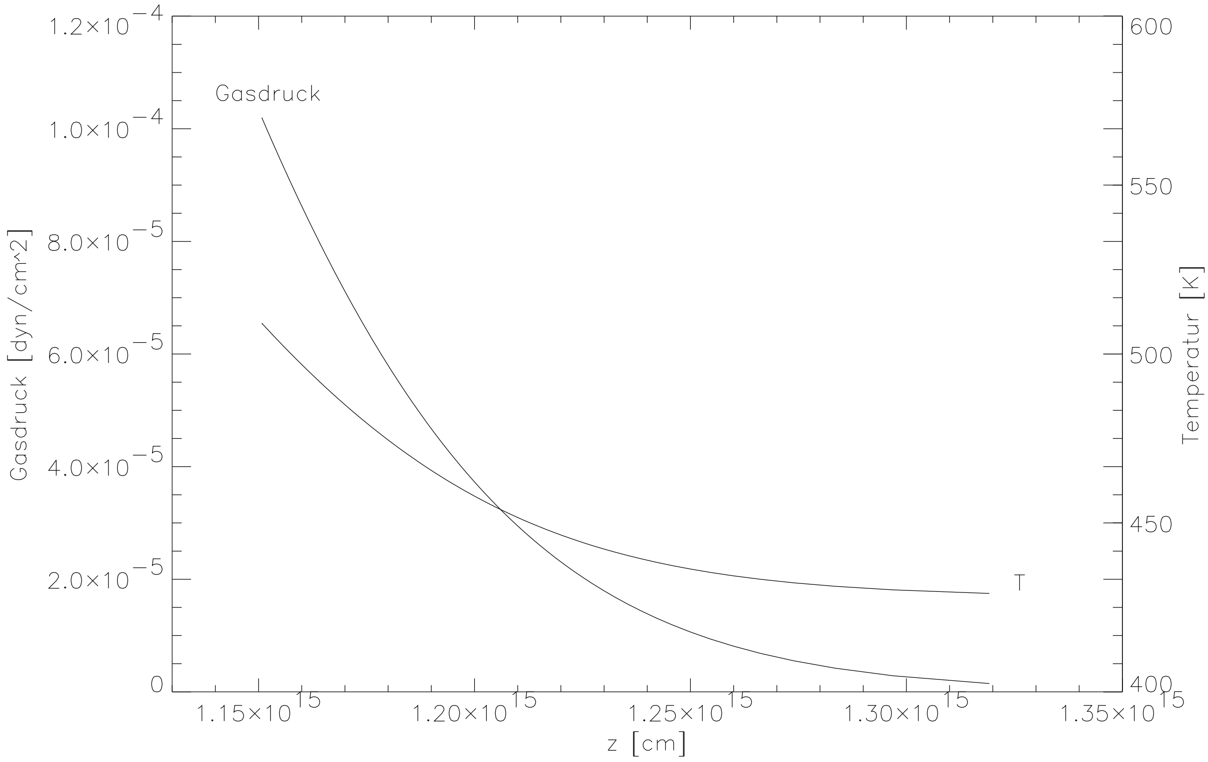

Abbildung 3.2: Verlauf von Gasdruck und Temperatur innerhalb der Atmosphäre. Gleiche Modellparameter wie für Abb. 3.1

3.1.4 Das Randwertproblem

Durch die oben aufgestellten Annahmen und Bedingungen ist die Aufgabe, die zur Bestimmung der vertikalen Struktur erfüllt werden muß, klar umrissen. Alles zusammengefaßt, muß die Lösung der vertikalen Struktur den folgenden Anforderungen genügen:

- Gleichungen (2.33)–(2.35) und (3.1) in der Akkretionsscheibe
- Gleichungen (3.13)–(3.15) in der Atmosphäre
- Randbedingungen (3.7) und (3.8) in der Zentralebene
- Randbedingungen (3.9) und (3.10) an der Atmosphärengrenze
- Randbedingung (3.16) am oberen Rand der Atmosphäre
- Stetigkeitsbedingungen an der Atmosphärengrenze

Die Stetigkeitsbedingungen und die Randbedingungen an der Atmosphärengrenze gestatten es nun bei Kenntnis der Lösung auf einer Seite von z_0, die unabhängige Variable auszutauschen und durch Integration (wie bei einem Anfangswertproblem) die Lösung auf

die andere Seite auszudehnen. Ein solches Vorgehen führt natürlich auch dazu, daß diese Bedingungen automatisch erfüllt sind.
Nun handelt es sich hier aber um kein Anfangswertproblem, sondern um ein Randwertproblem, d.h. es sind Randbedingungen an verschiedenen Punkten zu erfüllen und es existiert kein Punkt, an dem alle Komponenten der Lösung bekannt sind. Sowohl in der Zentralebene bei $z = 0$ als auch am oberen Atmosphärenrand bei $\tau = 0$ ist die Anzahl der Randbedingungen um zwei geringer als die Anzahl der Gleichungen[3]. Für solche Fälle ist das einfache Schießverfahren (single shooting) eine geeignete Methode.

3.1.5 Das Shooting-Verfahren

Gegeben sei folgendes Randwertproblem: n gekoppelte Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, \ldots, y_n) \ \ , \ i = 1, \ldots, n \tag{3.17}$$

auf dem Intervall zwischen x_0 und x_1, $x \in [x_0, x_1]$, mit n_1 Randbedingungen

$$g_j(y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)) = 0 \ \ , \ j = 1, \ldots, n_1 \tag{3.18}$$

am einen Ende des Intervalls, und $n_2 = n - n_1$ Randbedingungen

$$h_k(y_1(x_1), \ldots, y_n(x_1)) = 0 \ \ , \ k = 1, \ldots, n_2 = n - n_1 \tag{3.19}$$

am anderen Ende. Die Menge der Anfangswerte $(y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0))$, die (3.18) erfüllen, kann durch n_2 Parameter, die wir mit $s_1, \ldots, s_{n_2}$ bezeichnen, parametrisiert werden. Abkürzend schreiben wir $\mathbf{s} := (s_1, \ldots, s_{n_2})$. Das durch (3.17) zu jedem $\mathbf{s}$ definierte Anfangswertproblem ist i.a. eindeutig lösbar, wobei die Lösung an der Stelle x_2 natürlich von $\mathbf{s}$ abhängt[4]. Um das Randwertproblem zu lösen, muß $\mathbf{s}$ so bestimmt werden, daß diese Lösung die Randbedingung (3.19) erfüllt. Abkürzend stellen wir dies durch die folgende sinnfällige Schreibweise dar

$$\tilde{h}_k(\mathbf{s}) = 0 \ \ , \ k = 1, \ldots, n_2 = n - n_1 \ . \tag{3.20}$$

Dies ist ein n_2-dimensionales nichtlineares Gleichungssystem. Ein solches braucht i.a. keine Lösung zu besitzen, kann jedoch auch mehrere (grundsätzlich beliebig viele) Lösungen haben. Falls man eine konkrete Vorstellung des Problems und seiner Lösung hat, wie wir

[3]Dies ist bei nicht-selbstgravitierenden Akkretionsscheiben anders. Dort fällt die Gleichung für Σ_z weg, weil diese Größe dann gar nicht an die anderen Gleichungen koppelt. Am oberen Atmosphärenrand fehlt in diesem Fall nur eine Randbedingung, was die Lösung unter Umständen beträchtlich vereinfachen kann.

[4]Unter Umständen divergiert diese Lösung beim vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{s}$ innerhalb des Integrationsintervalls und diese Lösung existiert an der Stelle x_2 gar nicht; falls das Problem nicht numerisch instabil ist, kann jedoch zumindest bei hinreichend guter Wahl des Startwertes $\mathbf{s}$ eine Lösung gefunden werden, die bis zur Stelle x_2 definiert ist.

sie aus physikalischen Überlegungen gewinnen, so kann man meist recht gut abschätzen, ob und wo potentielle Lösungen liegen können, und dann dort danach suchen. Hat man sich auf diese Weise davon überzeugt, daß außer den gefundenen Lösungen keine weiteren existieren, ist das Randwertproblem gelöst.

Im vorliegenden Fall starten wir am oberen Rand der Atmosphäre bei $\tau = 0$ und geben uns dort die beiden freien Parameter z_∞ und Σ vor. Innerhalb der Atmosphäre erfolgt die Integration der Gleichungen (3.13)–(3.15) mit einem Euler-Verfahren. Mit ihm ist die spezielle Behandlung des freien Randwertproblems besonders einfach und durchschaubar. Der Nachteil des Euler-Verfahrens, seine geringe Genauigkeit, fällt hier nicht ins Gewicht. Die Gleichungen sind so gutmütig, daß eine Rechnung mit 1 000 Integrationsschritten unseren Genauigkeitsanforderungen bereits genügt, während wir von der Rechenzeit ohne Schwierigkeiten 10 000 Schritte akzeptieren können. An der Atmosphärengrenze wird dann von τ als unabhängige Variable auf z umgeschaltet; die Stetigkeitsbedingungen für P und Σ sowie die Randbedingungen (3.9) und (3.10) bilden nun die Anfangswerte für die Differentialgleichungen (2.33)–(2.35) und (3.1) innerhalb der eigentlichen Akkretionsscheibe. Von dort wird die Integration mit einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung[5] bis zur Zentralebene fortgesetzt.

Dieses Integrationsverfahren muß nun von einem Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3.20) umgeben werden. In mehr als einer Dimension wird dabei üblicherweise das Newton-Raphson-Verfahren gewählt. Dieses wird hier nicht verwendet. Es erfordert nämlich neben der Bestimmung der Funktionswerte $\tilde{h}_k(\mathbf{s})$ auch die Kenntnis oder Bestimmung der Funktionalableitung. Während wir es ohne Berücksichtigung der Selbstgravitation ohnehin nur mit einem eindimensionalen Problem zu tun hatten, für das z.B. das Bisektions-Verfahren eine gute Alternative zum Newton-Raphson-Verfahren ist, existiert bei einem starken Einfluß der Selbstgravitation nur dann überhaupt eine Lösung des konstruierten Anfangswertproblems auf dem ganzen Integrationsintervall, d.h. bis zur Zentralebene, wenn die geschätzten Startwerte z_∞ und Σ bereits ganz dicht an den entsprechenden Werten der exakten Lösung liegen. Um das Newton-Raphson-Verfahren nutzen zu können, müßten wir also, da wir die Anfangswerte der exakten Lösung nur sehr ungenau kennen, unsere Startwerte ausreichend gut raten, was bei dominierender Selbstgravitation nahezu aussichtslos ist.

Statt dessen spalten wir das zweidimensionale in zwei eindimensionale Probleme auf. Zunächst geben wir uns Σ fest vor und ignorieren die Randbedingung $\Sigma_{z=0} = 0$. Wir haben dann lediglich z_∞ als freien Parameter und $F_{z=0} = 0$ als Randbedingung am Ende des Integrationsweges.Dafür soll folgende suggestive Schreibweise verwendet werden:

$$\tilde{F}(z_\infty) = 0 \; . \tag{3.21}$$

Wenn wir nun zwei Werte für z_∞ kennen, für die $\tilde{F}(z_\infty)$ unterschiedliches Vorzeichen

[5] Diese Routine wurde den Numerical Recipes in FORTRAN [PTVF] entnommen.

annimmt, wissen wir aufgrund der Stetigkeit von $\tilde{F}(z_\infty)$, daß dazwischen eine Stelle existieren muß, an der $\tilde{F}$ verschwindet[6]. Das Bisektions-Verfahren halbiert jetzt in jedem Iterationsschritt das Intervall, das mindestens eine Nullstelle enthält, indem jeweils das Vorzeichen von $\tilde{F}$ in der Intervallmitte bestimmt und diejenige Intervallgrenze, an der $\tilde{F}$ das gleiche Vorzeichen wie in der Intervallmitte hat, durch diese ersetzt wird.
Haben wir auf diese Weise z_∞ ausreichend genau bestimmt, wenden wir uns dem zweiten Problem zu, Σ_z so zu bestimmen, daß die Randbedingung $\Sigma_{z=0} = 0$ erfüllt ist. Dabei benutzen wir den Wert von $\Sigma_{z=0}$, der sich bei der Integration mit Startwert Σ (und dem besten z_∞ aus der ersten Iteration) ergibt, als Korrektur für den Startwert Σ und setzen[7]

$$\Sigma_{\mathrm{neu}} := \Sigma - \Sigma_{z=0}(\Sigma) \ . \tag{3.22}$$

Mit diesem neuen Wert $\Sigma := \Sigma_{\mathrm{neu}}$ wird nun erneut das Bisektions-Verfahren für z_∞ durchgeführt. Die Σ-Iteration wird nun solange durchgeführt, bis auch dafür die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

3.2 Einzonenmodell optisch dünner Scheiben

Der Fall optisch dünner Akkretionsscheiben erfordert eine grundsätzlich andere Behandlung. Zum einen kann das obige Modell mit einer Atmosphäre, die ja per definitionem eine optische Tiefe von $\frac{2}{3}$ hat, dort aber auch der Strahlungsfluß als konstant angenommen wird, gar keine Lösung haben, da außer der Atmosphäre keine eigentliche Scheibe existiert, der Fluß in der Zentralebene aber verschwinden soll. Andererseits ist die Beschreibung des Strahlungstransports als Diffusionsprozeß dann natürlich auch nicht gerechtfertigt.
Eine Berechnung der vertikalen Struktur optisch dünner Scheiben ist äußerst schwierig. In der Literatur gibt es einige Artikel, in denen dies für jeweils sehr eingeschränkte Parameterbereiche durchgeführt wurde. Dafür mußte meistens ein recht hoher Aufwand betrieben werden, und die Aussagekraft der Ergebnisse war umstritten. Um den Strahlungstransport nicht frequenzabhängig mit Berücksichtigung aller Linien behandeln zu müssen, wird üblicherweise das Planck-Mittel

$$\kappa_P = \frac{\int\limits_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu}{\int\limits_0^\infty B_\nu d\nu} = \frac{\pi}{\sigma T^4} \int\limits_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu \tag{3.23}$$

[6]Der große Vorteil dieser Überlegung liegt darin, daß die Funktion gar nicht genau berechnet werden muß (geschweige denn ihre Ableitung), sondern die Kenntnis des Vorzeichens ausreicht. Im vorliegenden Fall existiert ja, wie oben erwähnt, in den meisten Fällen gar keine Lösung, die bis $z = 0$ reicht; während der Integration kann jedoch festgestellt werden, weshalb die Lösung zusammenbricht und daraus geschlossen werden, auf welcher Seite der Lösung man sich befindet.

[7]Dies ist nichts anderes als ein sogenanntes *näherungsweises Newton-Raphson-Verfahren*, bei dem die Ableitung nicht in jedem Schritt neu berechnet wird, sondern durch eine Näherung ersetzt wird. Hier ist die Ableitung durch 1 angenähert.

als frequenzunabhängige Opazität benutzt. Da es nicht wie das Rosseland-Mittel die reziproke Opazität mittelt, bevorzugt das Planck-Mittel die hohen Werte, d.h. die Linien werden hoch gewichtet. Diese Vorgehensweise ist in optisch dünnen Medien mit $\tau \ll 1$ sinnvoll, da dort die Emission, die mit jedem Beitrag zur Opazität verbunden ist, die gesamte Abstrahlung in gleichem Maße erhöht, da ja praktisch nichts absorbiert wird.
An diesem Punkt setzt die Kritik von Tylenda [Ty88] ein. Die untersuchten Akkretionsscheiben sind ja nur moderat optisch dünn, d.h. $\tau < 1$, aber $\tau \not\ll 1$. Insbesondere ist die Scheibe dann in den Linien optisch dick, so daß die hohe Gewichtung der Linien unberechtigt ist und zu einer starken Überschätzung der Opazität führt. Tylenda hat anhand von einigen Beispielen gezeigt, daß man für den Temperaturverlauf bessere Ergebnisse erhält, wenn man bei der Berechnung des Planck-Mittels die Linien wegläßt!

Im Gegensatz zum Rosseland-Mittel ist das Planck-Mittel in der Literatur nicht hinreichend tabelliert, sondern muß jeweils selbst berechnet werden. In Anbetracht der zweifelhaften Qualität der Ergebnisse erscheint dieser Aufwand hier nicht gerechtfertigt. Stattdessen nehmen wir die Scheibe in vertikaler Richtung als isotherm an und verwenden ein Einzonenmodell.

Um eine Beziehung zwischen Energieabstrahlung und Temperatur zu erhalten, verfahren wir wie Cannizzo & Wheeler [CW84]. Wir verwenden das Rosseland-Mittel, um die optische Tiefe zu bestimmen, und multiplizieren die Quellfunktion mit $(1-e^{-2\tau})$. Wir erhalten dann

$$\sigma T^4 = \frac{F}{1-e^{-2\tau}} \; . \tag{3.24}$$

Die Gleichungen (2.14),(2.19),(2.31) und (2.32) können direkt aus dem Standard-Einzonenmodell übernommen werden, wobei wir bei der mittleren Teilchenmasse μ entsprechend unserer Näherung die ρ-Abhängigkeit weglassen.

$$\rho = \frac{\Sigma}{2H} \tag{3.25}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\Sigma\kappa \tag{3.26}$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \tag{3.27}$$

$$\mu = \mu(T) \tag{3.28}$$

Die Zustandsgleichung lautet

$$P_{\mathrm{g}} = \frac{\rho k_B T}{\mu m_u} \; . \tag{3.29}$$

Aus $P_{\mathrm{g}} = P - P_{\mathrm{rad}}$ und $P_{\mathrm{rad}} = \frac{F\tau}{c}$ folgt mit der Abschätzung (3.3)

$$P_{\mathrm{g}} = (\Omega^2 H + 2\pi G\Sigma)\rho H - \frac{F\tau}{c} \; . \tag{3.30}$$

Die Gleichungen (3.24)–(3.30) bilden wiederum ein nichtlineares Gleichungssystem. Es besteht aus weniger Gleichungen als im Fall des Standard-Einzonenmodells (Abschnitt

2.2.2), da wir es nur auf Akkretionsscheiben mit β-Viskosität anwenden. Dann lassen sich nämlich Viskosität und Flächendichte direkt aus den äußeren Parametern ausrechnen, sind somit schon im vorhinein bekannt und keine Unbekannten des obigen Gleichungssystems mehr. Auch die Schallgeschwindigkeit, die im α-Modell in die Viskosität eingeht, spielt hier keine Rolle, wodurch eine weitere Gleichung eingespart werden kann.

Zur numerischen Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems ziehen wir ein Newton-Raphson-Verfahren heran. Es beruht auf der Approximation einer n-dimensionalen Funktion durch ihre Taylorreihe, die nach dem Term 1.Ordnung abgebrochen wird:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x}\,. \tag{3.31}$$

Hier steht $\mathbf{F}'$ für die Jacobi-Matrix. Der Korrekturschritt $\delta\mathbf{x}$ wird so bestimmt, daß

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})\,. \tag{3.32}$$

In jedem Iterationsschritt erhalten wir einen korrigierten Wert

$$\mathbf{x}_{\text{neu}} = \mathbf{x}_{\text{alt}} + \delta\mathbf{x}\,. \tag{3.33}$$

Um den Konvergenzbereich dieses Verfahrens zu vergrößern, modifizieren wir es, indem wir bei jeder Iteration den Korrekturschritt nur dann akzeptieren, wenn der Fehler[8] $\|\mathbf{F}\|$ durch die Korrektur kleiner wurde; ansonsten wird dasselbe für die halbe, viertel Schrittweite usw. geprüft, bis ein akzeptabler Schritt gefunden wurde.

Dennoch konvergiert das Verfahren nur dann gegen eine Lösung, wenn die Startwerte hinreichend nahe bei der Lösung liegen. Wir wollen das Gleichungssystem ja für verschiedene äußere Parameter lösen und machen uns zunutze, daß die Lösung stetig von diesen Parametern abhängt. Wir verwenden eine einmal gefundene Lösung als Startwert für den nächsten uns interessierenden Parametersatz. Falls dies noch nicht zum Ziel führt, kann auch noch an Zwischenstellen die Lösung bestimmt werden, mit deren Hilfe wir uns dann zum Zielpunkt 'hangeln'. Diese Vorgehensweise wird auch als Homotopie-Verfahren bezeichnet.

[8] Die Wahl der Norm ist nicht trivial. Wir definieren die Funktion $\mathbf{F}$ so, daß alle Komponenten von der Größenordnung 1 sind und nehmen als Norm die Summe der Beträge der einzelnen Komponenten. Da sich diese ganz unterschiedlich ändern, wenn man die äußeren Parameter variiert, muß auch $\mathbf{F}$ gelegentlich umdefiniert werden, um Komponenten von gleicher Größenordnung zu behalten.

Kapitel 4

Ergebnisse

Es wurden Rechnungen durchgeführt für Modelle mit Zentralmassen zwischen 10^6 und 10^9 Sonnenmassen. Die Akkretionsrate wurde zwischen 10^{-2} und 10 Sonnenmassen pro Jahr variiert. Modelle sowohl mit α-Viskosität als auch mit β-Viskosität wurden berechnet. Je nach optischer Dicke der Scheibe wurde entweder explizit die vertikale Struktur berechnet oder nur ein Einzonenmodell benutzt. Die Modelle wurden als optisch dick akzeptiert, falls die Rechnung einen Beitrag zur Flächendichte in der Atmosphäre von höchstens 30 % ergab.

α- und β-Ansatz lieferten dabei so gegensätzliche Resultate, daß in den meisten Parameterbereichen nicht einmal das gleiche Modell für die beiden Viskositätsbeschreibungen angewandt und durchgerechnet werden konnte. Um die Diskrepanz so gering wie möglich zu halten, wurden die Werte für α und β innerhalb ihrer erlaubten Schranken so gewählt, daß die jeweiligen Viskositätswerte möglichst 'nah' beieinander lagen. Dies bedeutet $\alpha = 1$ und $\beta = 10^{-3}$.

4.1 Modelle mit α-Viskosität

Am Beispiel eines Modells mit $M = 10^6 M_\odot$, $\dot{M} = 10^{-2} M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$ und $\alpha = 1$ soll zunächst gezeigt werden, welche Konsequenzen die Anwendung des α-Ansatzes auf Akkretionsscheiben hat, bei denen Selbstgravitation, zumindest in den äußeren Bereichen, eine Rolle spielt.

Die Scheiben sind überall optisch dick, es kann somit immer die vertikale Struktur berechnet werden. In relativer Nähe des Zentralobjektes ist die Selbstgravitation noch vernachlässigbar. Dies trifft zu für einen radialen Abstand von 10^3 Schwarzschildradien; für diese Stelle ist der vertikale Verlauf von Energieflußdichte F, Temperatur T, Druck P und Dichte ρ in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt.

Je mehr der Abstand vom Schwarzen Loch im Zentrum wächst, desto wichtiger wird

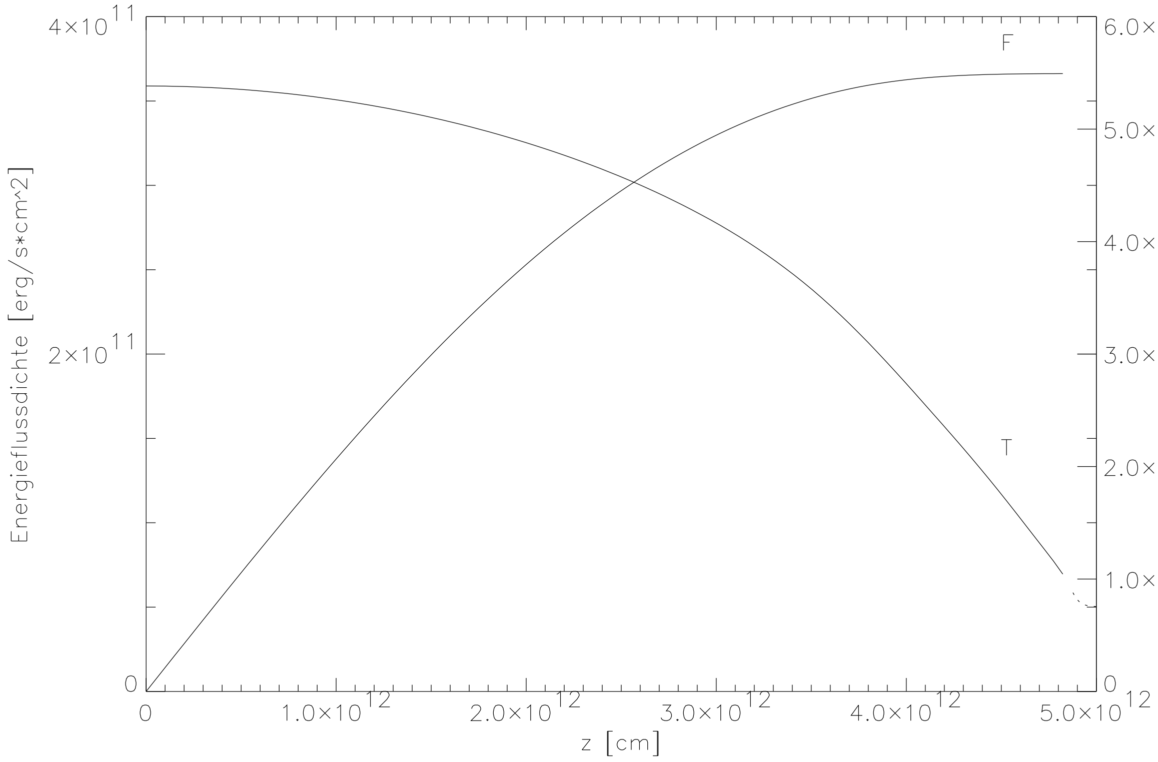

Abbildung 4.1: Energieflußdichte und Temperatur als Funktion der Höhe z über der Zentralebene. Die durchgezogenen Kurven stellen den Verlauf zwischen Zentralebene und Atmosphärengrenze dar, die gepunktete Kurve gibt den Verlauf in der Atmosphäre wieder bei einem α-Modell mit den Parametern $M = 10^6 M_\odot$, $\dot{M} = 10^{-2} M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$, $R = 10^3 R_s$, $\alpha = 1$.

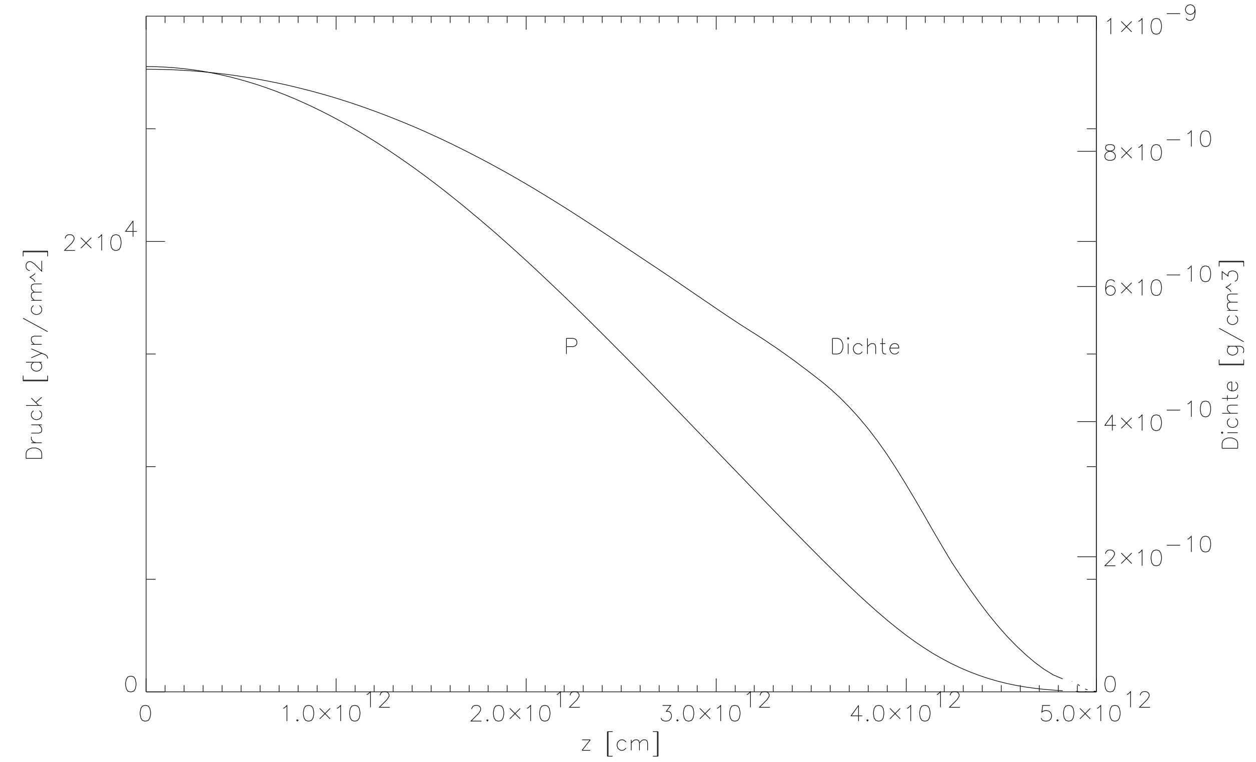

Abbildung 4.2: Druck- und Dichte-Verlauf im selben Modell wie Abb. 4.1. Der 'Knick' in der Dichte bei $z \approx 4 \cdot 10^{12}$cm ist ein Artefakt der μ-Interpolation, vgl. Tabelle 2.1.

der Einfluß der Eigengravitation, quantifiziert durch den sog. Selbstgravitationsparameter SGP, der das Verhältnis zwischen den vertikalen Komponenten von Eigengravitation und Anteil des Zentralobjektes am oberen Scheibenrand angibt und in Gleichung (2.45) definiert wurde. Im Abstand von $10^{4,7}$ Schwarzschildradien dominiert die Selbstgravitation in z-Richtung bereits deutlich, der Selbstgravitationsparameter hat hier einen Wert von $15,5$. Auch für diese Stelle ist wiederum der vertikale Verlauf von Energieflußdichte F, Temperatur T, Druck P und Dichte ρ dargestellt, s. Abbildungen 4.3 und 4.4.

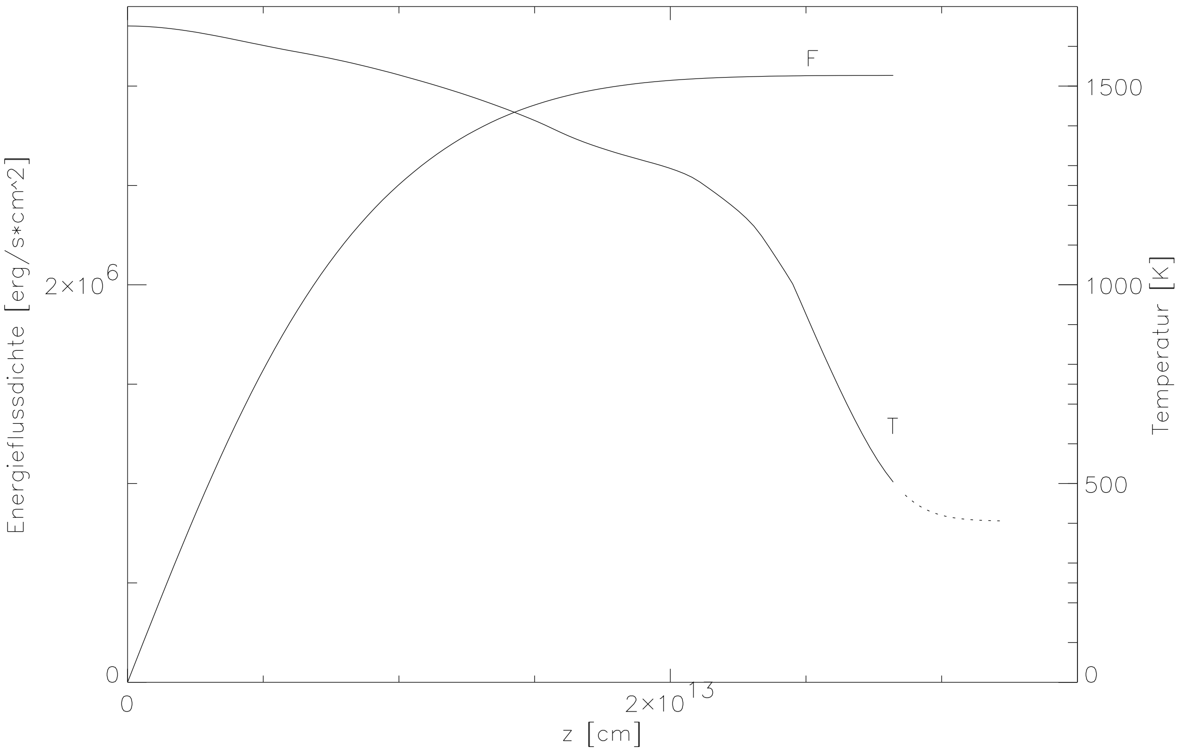

Abbildung 4.3: Fluß- und Temperaturverlauf bei $R = 10^{4,7} R_s$, wo Selbstgravitation in vertikaler Richtung dominiert; $M = 10^6 M_\odot$, $\dot{M} = 10^{-2} M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$.

Untersucht man, wie sich diese Lösungen mit zunehmendem Radius verändern, stellt man folgenden qualitativen Zusammenhang fest. Die Temperatur und damit auch die Schallgeschwindigkeit nehmen nach außen ab, was in der α-Beschreibung mit $\nu = \alpha H c_s$ dann auch für die Viskosität gilt. Eine kleinere Viskosität führt gemäß Gleichung (2.20) zu einer höheren Flächendichte. Diese läßt die Eigengravitation anwachsen, was ein Abplatten der Scheibe nach sich zieht. Die geringere Höhe der Scheibe reduziert ihrerseits wieder die Viskosität. Dieses Wechselspiel führt in diesem Modell zu einem sich immer weiter verstärkenden Effekt, so daß die Scheiben nach außen zu ganz dünnen, massereichen Platten entarten.

Dieses Verhalten kann auch quantitativ bestätigt werden, indem Lösungen der vertikalen Struktur bei unterschiedlichen Radien direkt miteinander verglichen werden. Die Abbil-

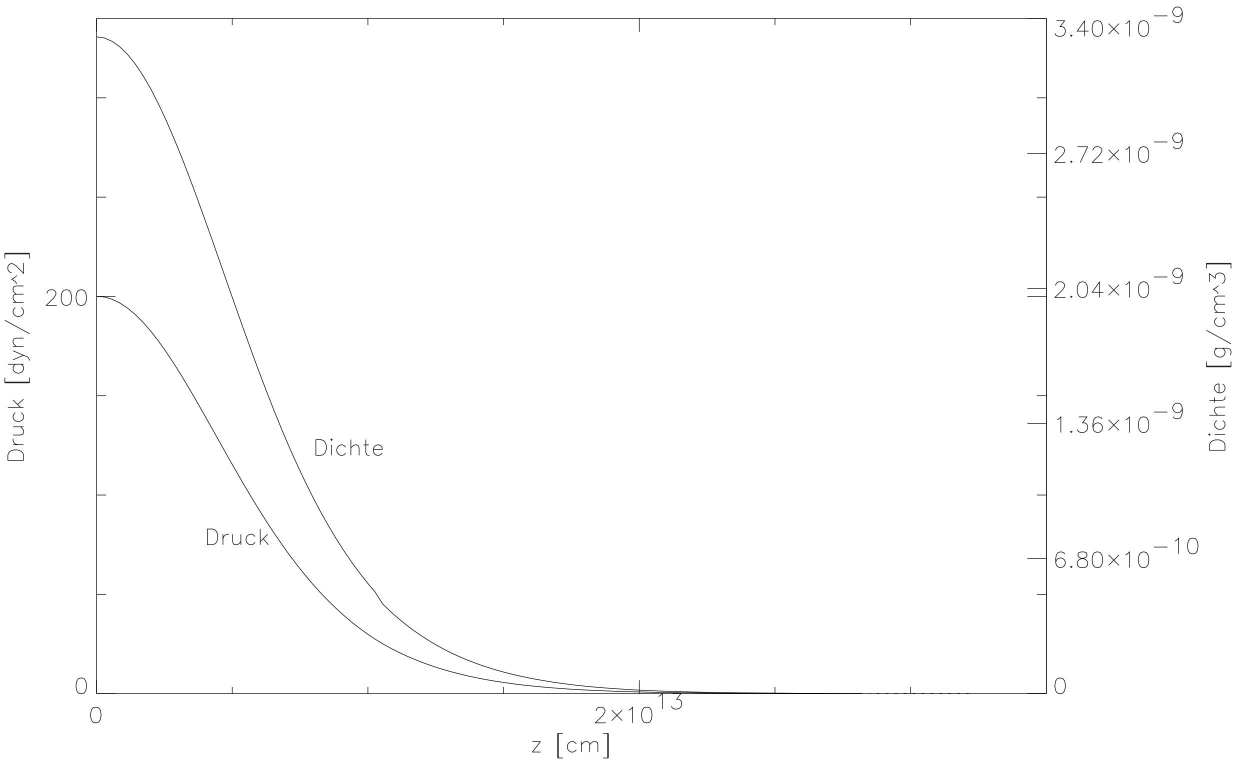

Abbildung 4.4: Druck- und Dichte-Verlauf an derselben Stelle wie in Abb. 4.3

dungen 4.5 und 4.6 zeigen den radialen Verlauf der Flächendichte Σ, des Selbstgravitationsparameters SGP, der Höhe z_0 der Scheibe und das Verhältnis von halber Scheibendicke zu radialer Koordinate. Daran ist zu erkennen, daß ab etwa $\log(R/R_s) = 4,3$ die Selbstgravitation eine merkliche Rolle spielt. Ab dieser Stelle nimmt die Flächendichte stark zu, die Dicke der Scheibe nimmt ab und der Anteil der Eigengravitation explodiert.
Das auffallende Verhalten für $3,6 < \log(R/R_s) < 4,2$ ist auf die Opazität zurückzuführen. Sie ist innerhalb der hier auftretenden Temperatur- und Dichtebereiche im wesentlichen durch die Temperatur bestimmt und fällt zwischen 1 000 und 6 000 K steil ab und hat ein ziemlich scharfes Minimum bei etwa 2 000 K. Bei $\log(R/R_s) = 3,9$, wo die Flächendichte ein lokales Maximum hat, beträgt die Effektivtemperatur $T_{\text{eff}} = 1\,912\,K$ und die Temperatur in der Zentralebene $T_{\text{c}} = 3\,664\,K$. Die Scheibe ist an dieser Stelle nur noch moderat optisch dick; unser Kriterium von einem Massenanteil der Atmosphäre von höchstens 30% ist jedoch noch erfüllt.

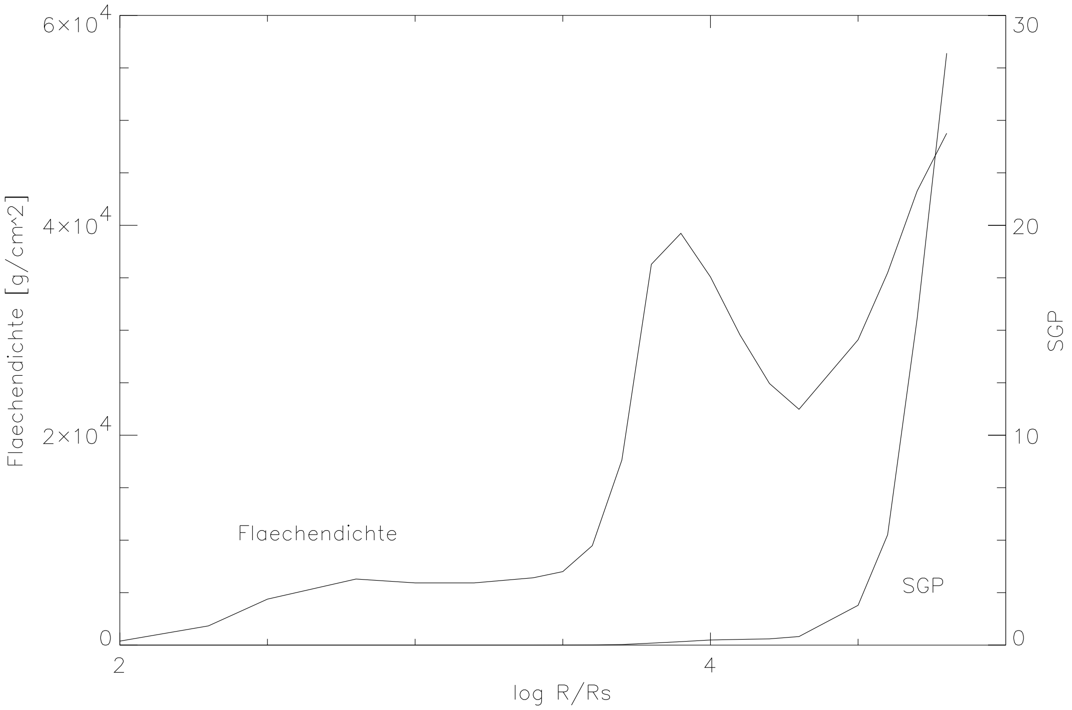

Abbildung 4.5: Radialer Verlauf der Flächendichte Σ und des Selbstgravitationsparameters SGP. Modell-Parameter: $M = 10^6 M_\odot$, $\dot{M} = 10^{-2} M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$, $\alpha = 1$.

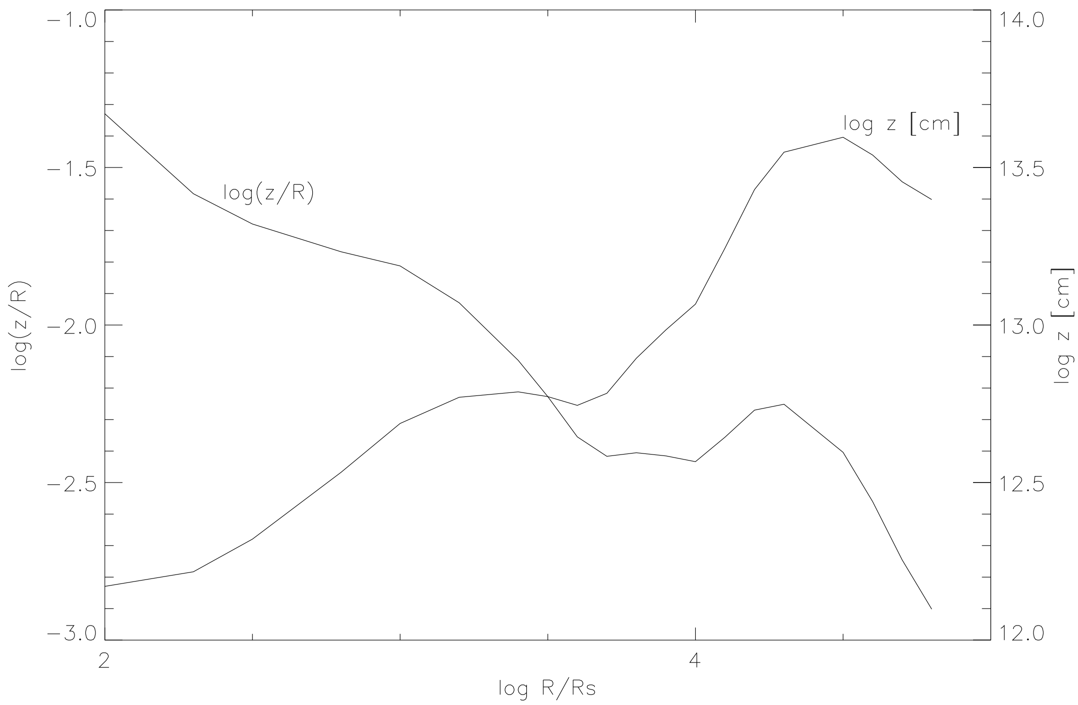

Abbildung 4.6: Für die gleichen Parameter wie in Abb. 4.5 ist hier der Verlauf der Scheibenhöhe, definiert durch die Atmosphärengrenze, abgebildet. Nicht nur das Verhältnis von Scheibendicke zu Radius, sondern ab etwa $3 \cdot 10^4$ Schwarzschildradien auch der absolute Wert von z_0, nimmt nach außen ab.

4.2 Optisch dicke Modelle mit β-Viskosität

In den beiden folgenden Abbildungen ist die vertikale Struktur eines β-Modells dargestellt. An der ausgewählten Stelle trägt die Selbstgravitation den größeren Anteil zur Schwerebeschleunigung bei, $SGP \approx 2,5$. Ein grundlegender Unterschied zu Rechnungen mit der α-Viskosität ist nicht zu erkennen, sondern ist vielmehr in der Wahl der Parameter verborgen. Um ein selbstgravitierendes Gebiet darstellen zu können, haben wir für Zentralmasse und Akkretionsrate viel größere Werte als in den Abbildungen 4.3 und 4.4 genommen.

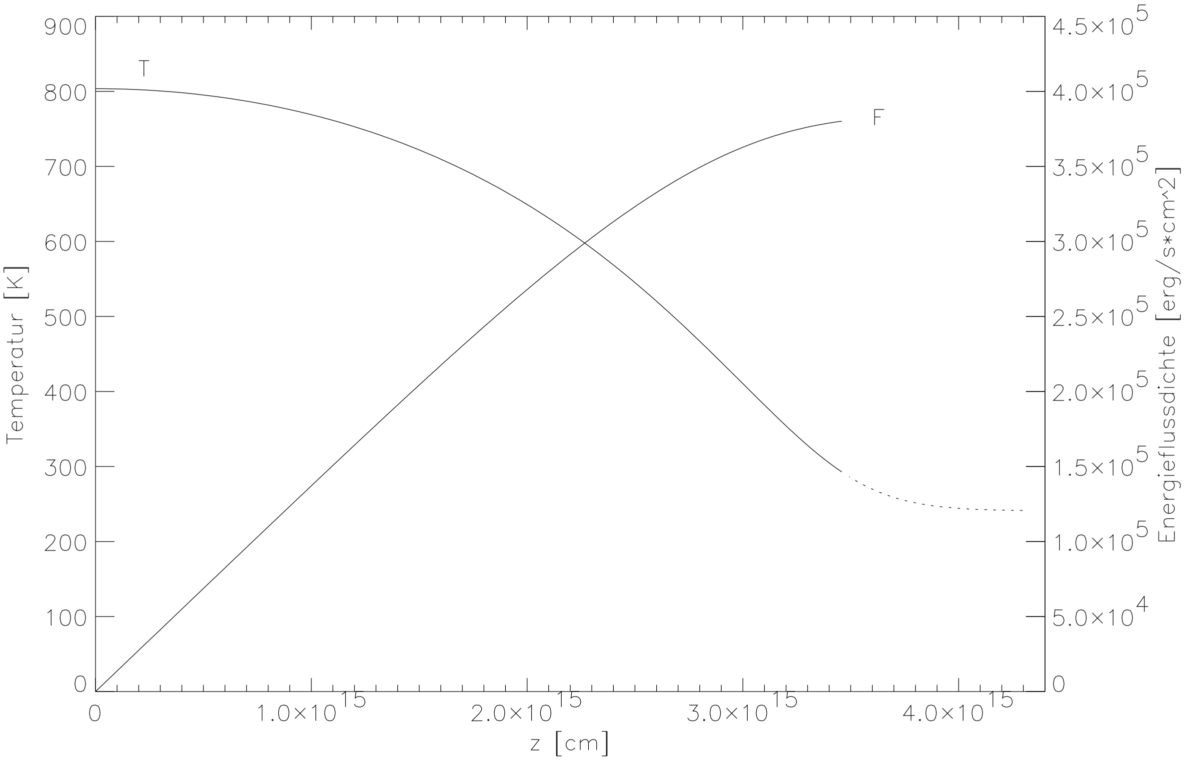

Abbildung 4.7: Vertikaler Verlauf von Temperatur und Energieflußdichte im Abstand von 10^4 Schwarzschildradien eines Schwarzen Lochs mit 10^9 Sonnenmassen und einer Akkretionsrate von 10 Sonnenmassen pro Jahr; $\beta = 10^{-3}$.

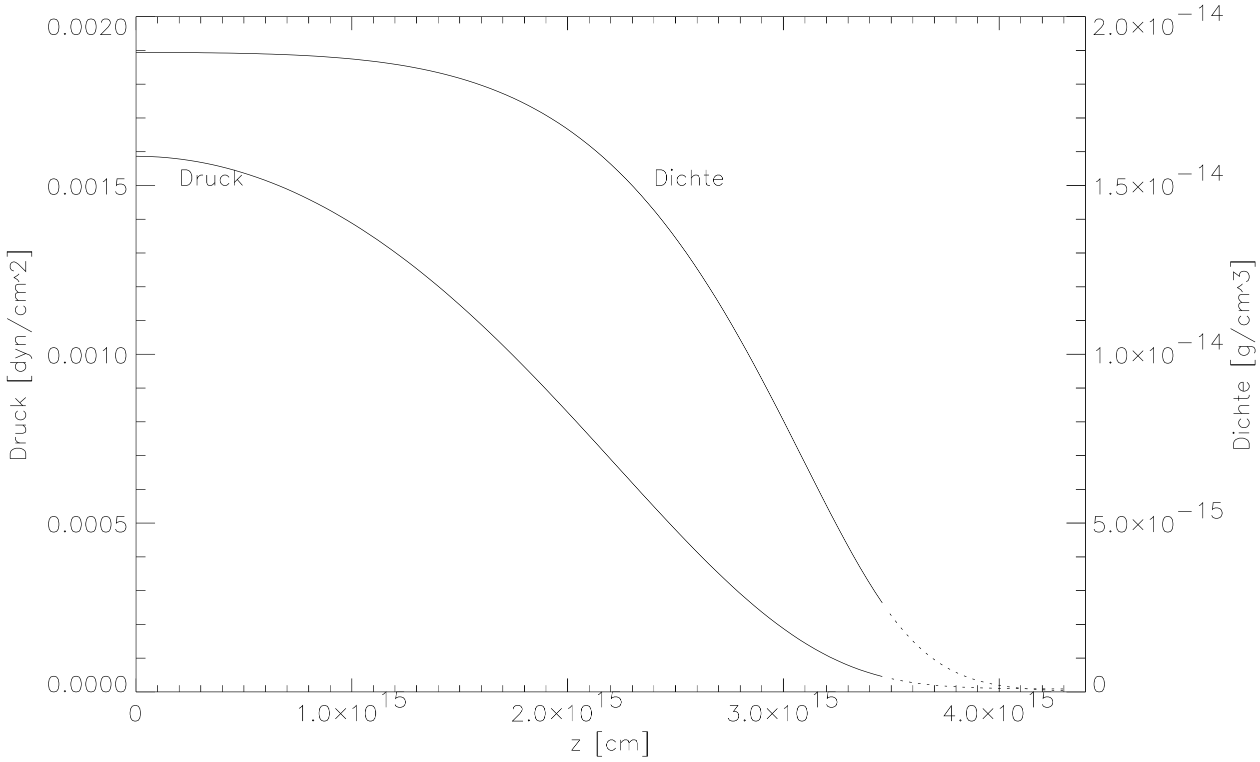

Abbildung 4.8: Druck- und Dichte-Verlauf im selben Modell wie in Abb. 4.7

Die Lösungen der vertikalen Struktur bei verschiedenen Radien repräsentieren gemeinsam den radialen Verlauf im optisch dicken Gebiet. Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen die Veränderung von Flächendichte, Selbstgravitationsparameter, Druck und Dichte in der Zentralebene mit zunehmendem radialem Abstand.

Im Gegensatz zum α-Modell nimmt hier die Flächendichte nach außen ab, so daß der Einfluß der Selbstgravitation nicht so abrupt einsetzt. Für $\log\frac{R}{R_s} \rightarrow 3,6$ nähert sich die Temperatur dem Bereich an, wo die Opazität ihr Minimum hat, die optische Tiefe nimmt ab und weiter innen ist die Annahme, die optische Tiefe sei groß gegen 1, nicht mehr gerechtfertigt.

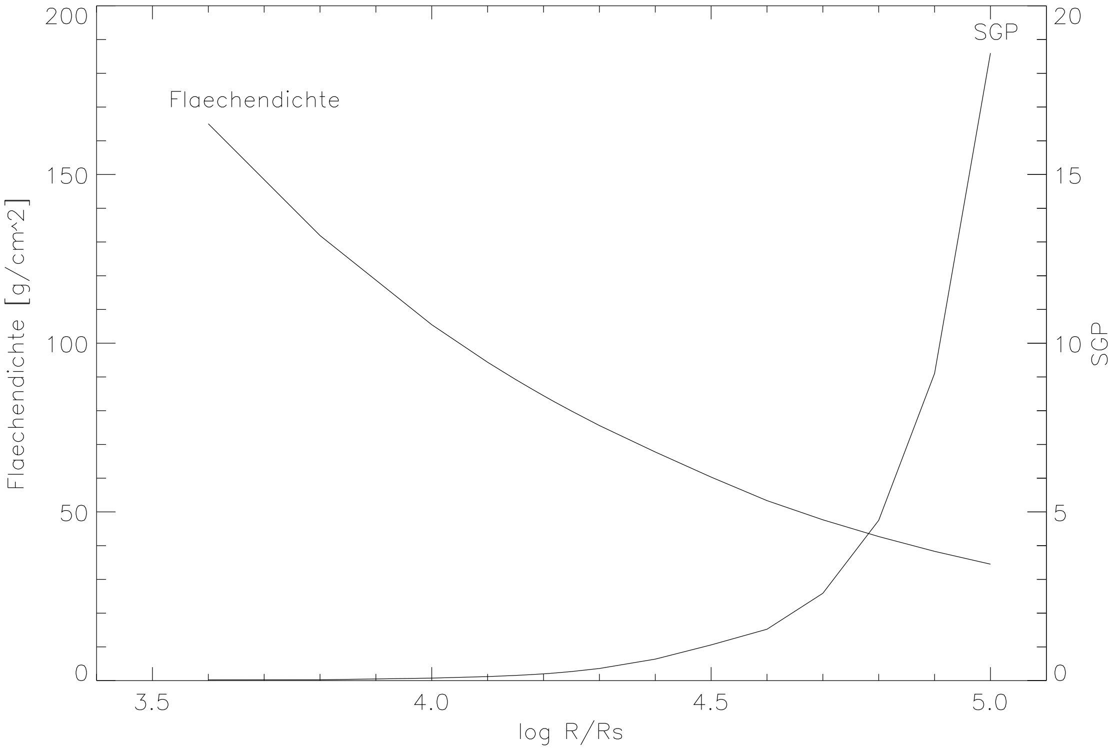

Abbildung 4.9: Flächendichte und Selbstgravitationsparameter als Funktion des Radius

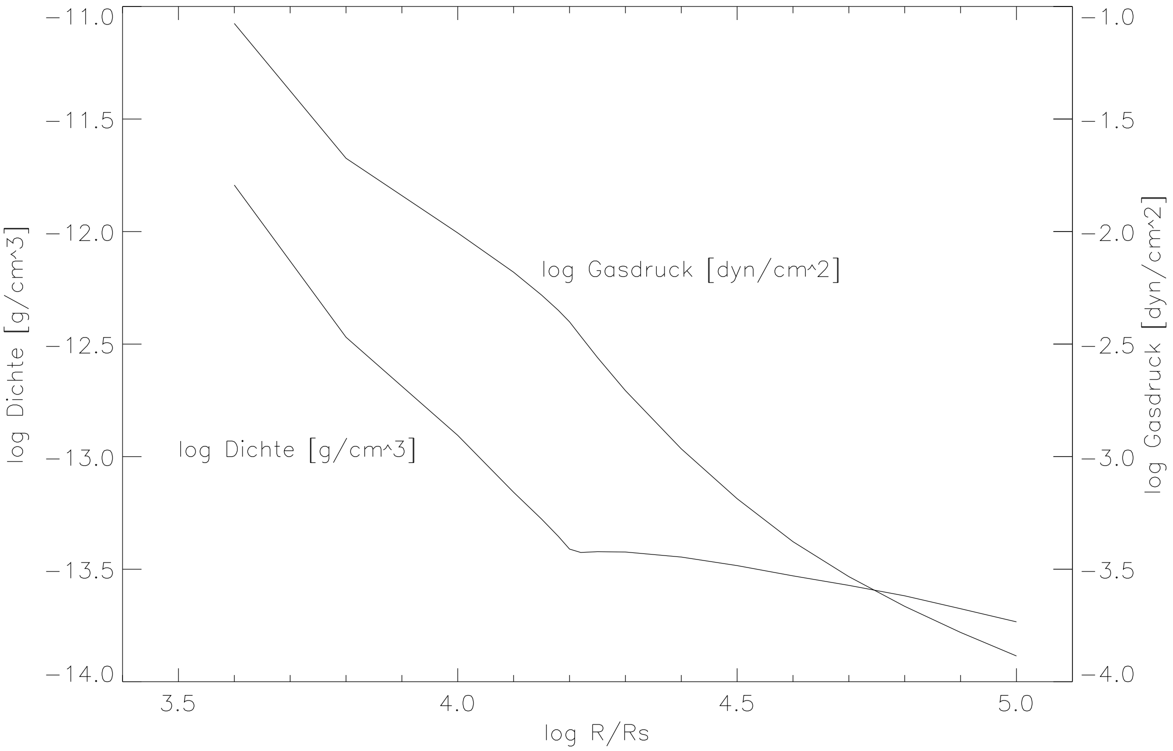

Abbildung 4.10: Druck und Dichte in der Zentralebene im selben Modell wie Abb. 4.9

4.3 Vergleich von α- und β-Modell bei gleichen äußeren Parametern

Wählt man die äußeren Parameter für eine Akkretionsscheibe in einem AGN derart, daß die Scheibe im α-Modell selbstgravitierend ist, stellt man in vielen Fällen fest, daß kein Modell sowohl mit α- als auch mit β-Viskosität zu lösen ist. Wo die Selbstgravitation im α-Modell einsetzt, führt der β-Ansatz zu einer optisch dünnen Scheibe; wo die β-Scheibe optisch dick ist, ist das α-Modell weit jenseits der Stelle, an der die Selbstgravitation einsetzt, und diese wächst ab ihrem Einsetzen so schnell, daß sie nur wenig weiter außen bereits zu unsinnigen Resultaten führt.

Hier sollen nun an einem Beispiel, wo das möglich ist, die Ergebnisse eines optisch dicken Modells nebeneinander gestellt werden, die sich nur in der Beschreibung der Viskosität unterscheiden. Wir haben hier eine Zentralmasse von 10^7 Sonnenmassen, eine Akkretionsrate von 10^{-1} Sonnenmassen pro Jahr und einen Abstand von 10^4 Schwarzschildradien ausgewählt.

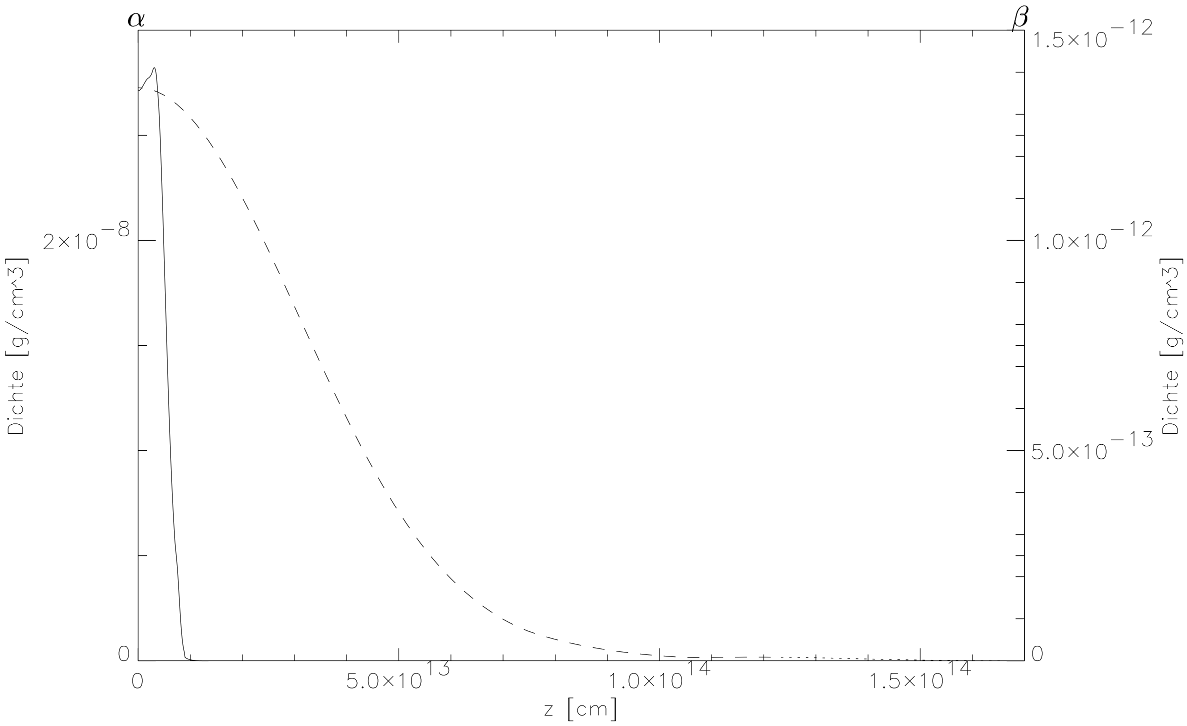

Abbildung 4.11: Vertikale Dichtestruktur in α- (durchgezogen) und β-Modell (gestrichelt) mit $M = 10^7 M_\odot, \dot{M} = 10^{-1} M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$ und $R = 10^4 R_s$. Man beachte die unterschiedliche Skalierung für α- bzw. β-Beschreibung auf den beiden senkrechten Achsen.

In den Abbildungen 4.11 – 4.13 sind Dichte, Temperatur und Fluß in ihrer vertikalen Struktur dargestellt. Während in der β-Scheibe die Selbstgravitation keine Rolle spielt,

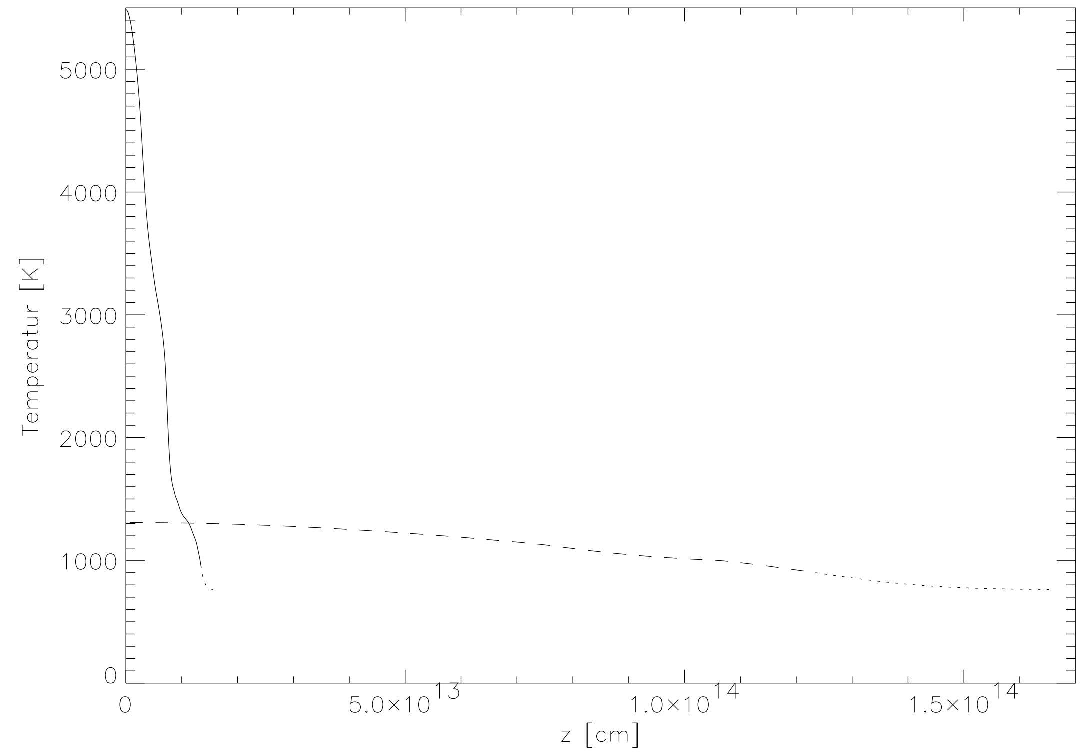

Abbildung 4.12: Für die gleichen äußeren Parameter wie in Abb. 4.11 ist hier der Temperaturverlauf aufgezeichnet. Die gepunkteten Kurven geben den Verlauf in der Atmosphäre wieder.

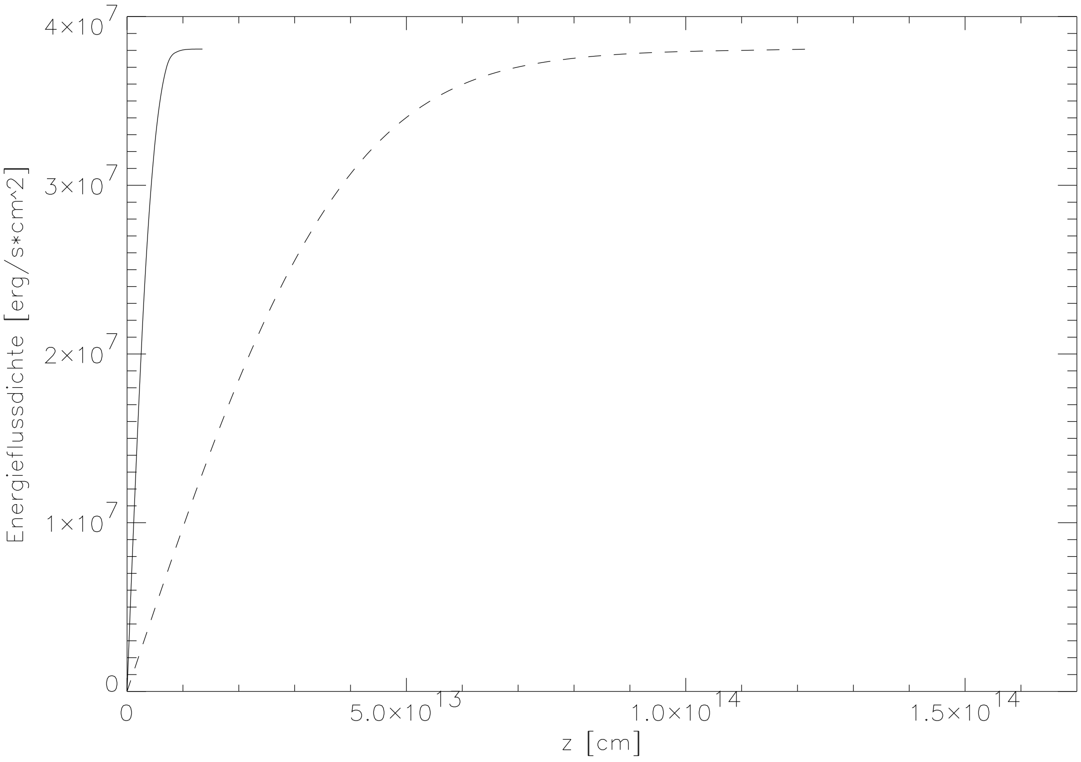

Abbildung 4.13: Die Enegieflußdichte aus denselben beiden Rechnungen

$SGP = 7 \cdot 10^{-3}$, ist die α-Scheibe in vertikaler Richtung von Selbstgravitation dominiert, $SGP = 198$. Diese verursacht ein starkes Zusammenziehen der Scheibe zu einem ungeheuer flachen Gebilde. Gemeinsam mit der hohen Flächendichte, die, wie bereits in Abschnitt 4.1 gezeigt, im α-Fall wesentlich größer ist, führt dies zu einer Dichte, die um mehrere Größenordnungen über derjenigen im β-Modell liegt. Dies gilt erst recht für den Druck, da die α-Scheibe auch die heißere ist. Abbildung 4.13 zeigt, daß die Energieflußdichte in der α-Scheibe auf einer kürzeren vertikalen Skala zunimmt; am oberen Rand der Scheibe ist sie aber in beiden Fällen gleich. Dies veranschaulicht nur noch einmal die Tatsache, daß es nicht von der Viskosität abhängt, wieviel Energie abgestrahlt wird.

4.4 Optisch dünne Modelle mit β-Viskosität

Da für die Scheibenregionen, wo deren optische Tiefe in vertikaler Richtung klein gegen 1 ist, nur ein Einzonenmodell verwendet wurde, kann auch nur eine Struktur in radialer Richtung angegeben werden. Dies ist in den Abbildungen 4.14 und 4.15 für Gasdruck, Dichte, Höhe der Scheibe und Temperatur getan. Die Ergebnisse beziehen sich auf eine Akkretionsscheibe um ein Schwarzes Loch mit 10^8 Sonnenmassen, das Materie mit einer Rate von einer Sonnenmasse pro Jahr akkretiert. Das optisch dünne Modell besitzt nur eine Lösung im Bereich $2,7 \leq \log\frac{R}{R_s} \leq 3,6$.

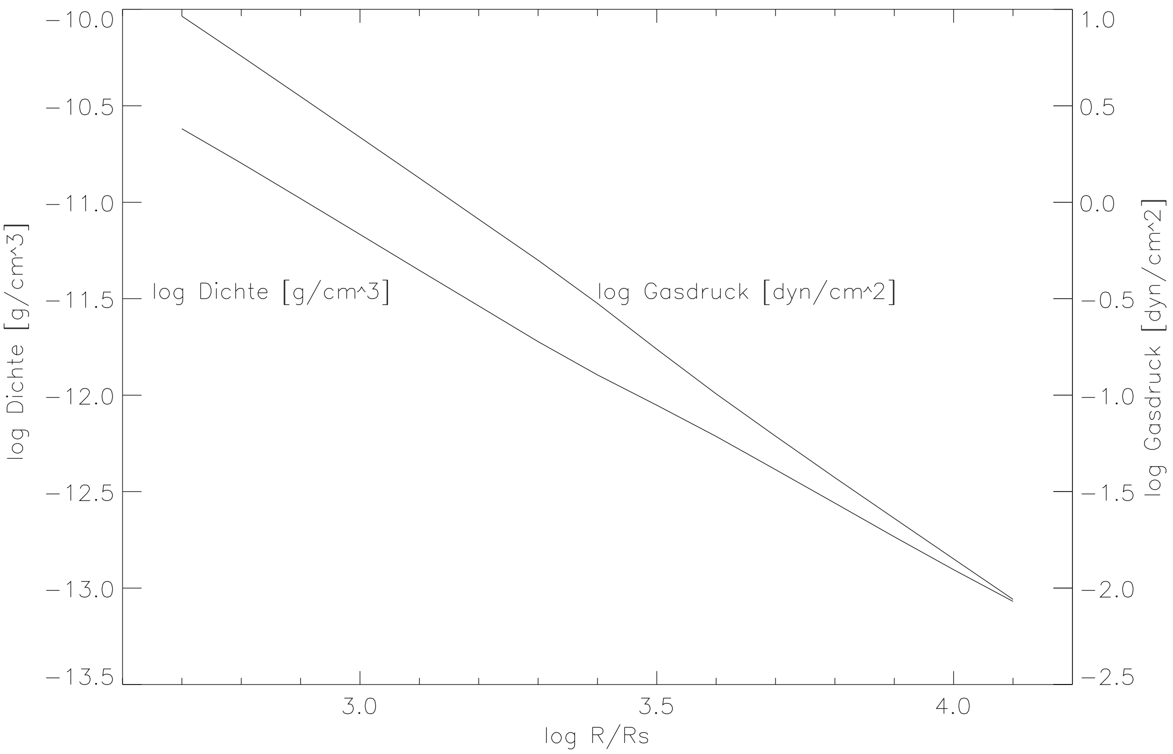

Abbildung 4.14: Dichte und Gasdruck in Abhängigkeit des radialen Abstands vom Zentrum. $M = 10^8 M_\odot$, $\dot{M} = 1 M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$, $\beta = 10^{-3}$.

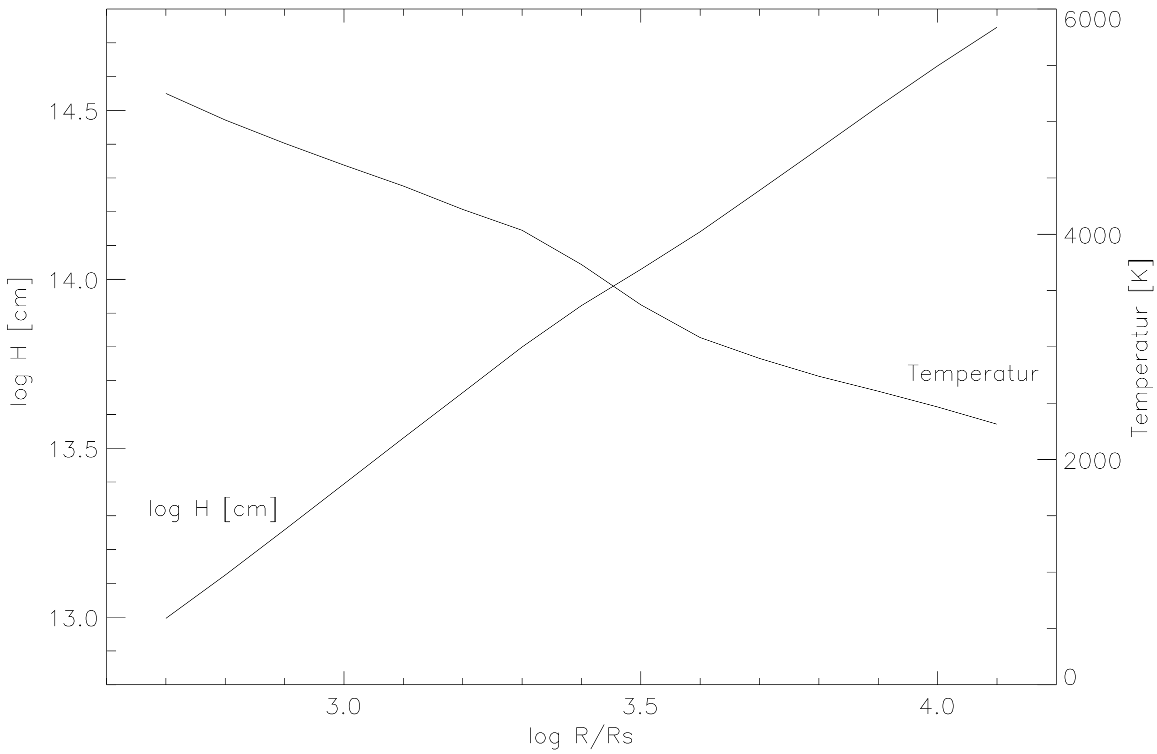

Abbildung 4.15: Temperatur und Höhe der Scheibe im selben Modell wie für Abb. 4.14

4.5 Lösungen des β-Modells im radialen Verlauf

Um wirklich zu verstehen, wie eine Akkretionsscheibe aussieht, deren Viskosität durch den β-Ansatz beschrieben wird, reicht es nicht aus, die Gebiete mit optisch dicken bzw. mit optisch dünnen Lösungen einzeln zu betrachten. Man muß zusätzlich untersuchen, wie diese beiden Gebiete nebeneinander existieren und was an der Grenze dazwischen geschieht. In Abbildung 4.16 sind die Effektivtemperatur, die Temperatur in der Zentralebene des optisch dicken Modells und die Temperatur des optisch dünnen Einzonenmodells in ihrem radialen Verlauf in den Bereichen wiedergegeben, wo die zugehörigen Modelle Lösungen besitzen.

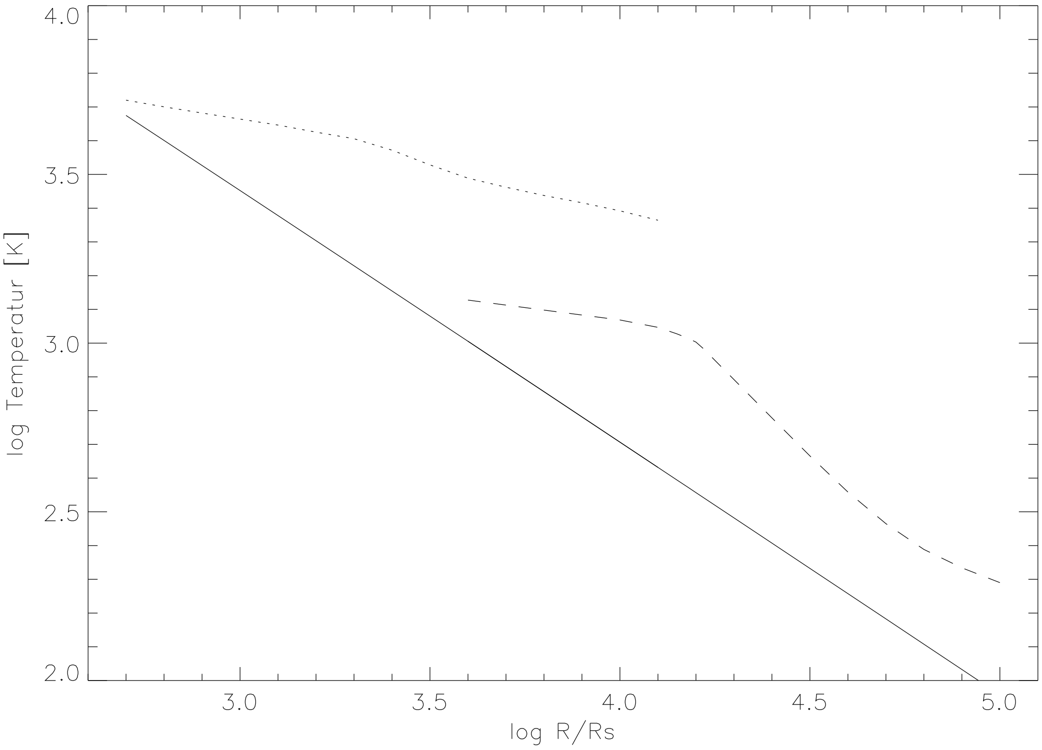

Abbildung 4.16: Effektivtemperatur (durchgezogen), Temperatur in der Zentralebene im optisch dicken Modell (gestrichelt) und Temperatur des optisch dünnen Einzonenmodells (gepunktet); $M = 10^8 M_\odot$, $\dot{M} = 1 M_\odot \mathrm{yr}^{-1}$.

Betrachten wir nun die einzelnen Punkte, an denen Lösungen entstehen oder verschwinden; jenseits von $\log \frac{R}{R_s} = 5,0$ läßt sich die optisch dicke Lösung weiter fortsetzen, wir haben nur unsere Rechnungen dort beendet.

- Der innerste solche Punkt liegt bei $\log \frac{R}{R_s} \approx 2,7$. Wenn wir die optisch dünne Lösung von außen kommend bis dorthin verfolgen, so stellen wir fest, daß die optische Tiefe nach innen ansteigt. Dies ist zum Teil durch die zunehmende Säulendichte, hauptsächlich aber durch die wachsende Opazität bedingt. Die zunehmende optische Tiefe ist auch daran zu erkennen, daß die Temperatur sich dem Effektivwert annähert. Die Effektivtemperatur gibt ja gerade die Temperatur an, die ein schwarzer Körper, also ein Medium, das in allen Frequenzen eine optische Tiefe wesentlich größer als 1 hat, besitzt, der gleich viel Energie pro Fläche abstrahlt. Bei $\log \frac{R}{R_s} = 2,7$ hat die optische Tiefe einen Wert von $0,54$. Weiter innen nimmt die optische Tiefe weiter zu und die Scheibe geht über eine Zwischenschicht, in der $\tau \approx 1$ gilt, stetig in eine optisch dicke Region über.

- Auch bei $\log \frac{R}{R_s} = 4,1$ verschwindet die optisch dünne Lösung. In diesem Fall liegt das jedoch nicht daran, daß τ gegen 1 geht; bei $\log \frac{R}{R_s} = 4,1$ gilt für die optisch dünne Lösung $\tau \approx 6 \cdot 10^{-4}$. Der Grund dafür, daß hier die optisch dünne Lösung verschwindet, ist die nach außen abnehmende Energieabstrahlung. Eine geringere Energieabstrahlung kann entweder durch eine sinkende Temperatur oder durch eine niedrigere optische Tiefe erreicht werden. Die optische Tiefe kann jedoch nicht weiter sinken, da die Opazität bei der dort herrschenden Temperatur ihr Minimum annimmt. Bei einer weiter abnehmenden Temperatur würde die Opazität, und damit die optische Tiefe, so stark zunehmen, daß die Energieabstrahlung weiter steigen würde und nicht mit der lokalen Heizung im Gleichgewicht stehen könnte.

- Bei $\log \frac{R}{R_s} = 3,6$ liegt genau der umgekehrte Fall vor. Die Effektivtemperatur nimmt nach innen zu, deshalb muß auch die Zentraltemperatur, die nicht unter der Effektivtemperatur liegen kann, ansteigen. An dieser Stelle hat die Zentraltemperatur einen Wert von $1\,341\,K$ und die optische Tiefe von 4,4. Bei weiter zunehmender Temperatur nimmt die optische Tiefe so stark ab, daß die Energieabstrahlung nicht weiter ansteigen kann, was nötig wäre, um die zunehmende Heizrate zu kompensieren. Die Temperatur muß dann auf den optisch dünnen Zweig springen.

Im Gebiet $3,6 \leq \log \frac{R}{R_s} \leq 4,1$ existieren sowohl eine optisch dünne als auch eine optisch dicke Lösung. Die beiden Lösungen sind durch eine *verbotene Zone* im Temperaturintervall zwischen $1\,400$ und $2\,000\,K$ voneinander getrennt, die sich durch den steilen Anstieg der Opazität mit abnehmender Temperatur auszeichnet, und in der eine weitere, instabile Lösung liegt. Die Existenz mehrerer Lösungen bei gleichem Radius wurde bereits in [CW84] und [C-SD] erwähnt. Welche der beiden stabilen Lösungen realisiert ist, hängt von der Vorgeschichte des Systems ab. Jedenfalls muß zwischen $10^{4,1}$ und $10^{3,6}$ Schwarzschildradien die Lösung von optisch dick zu optisch dünn wechseln. In dieser Übergangsschicht nimmt die Temperatur stark zu, so daß unsere ständig gemachte Annahme, die Gradienten seien praktisch vertikal gerichtet, hier wohl nicht zu vertreten ist; die weitgehende Entkopplung von radialer und vertikaler Struktur wird aufgelöst. An der Stelle, wo die verbotene Zone durchschritten wird, könnte eine Instabilität entstehen, die sich in zeitlichen Veränderungen der Leuchtkraft oder der spektralen Zusammensetzung widerspiegelt. Um festzustellen, ob Beobachtungsbefunde existieren, die auf solche Instabilitäten zurückgeführt werden können, berechnen wir die viskose Zeitskala, die für solche Variabilitäten maßgeblich wäre;

$$\tau_{\mathrm{visk}} = \frac{R^2}{\nu} = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\beta\sqrt{GM}}\,. \tag{4.1}$$

Bei $\log\frac{R}{R_s} = 3,6$ bekommen wir als untere Schranke $\tau_{\mathrm{visk}} \approx 1,1 \cdot 10^4$ Jahre, und bei $\log\frac{R}{R_s} = 4,1$ als obere Schranke $\tau_{\mathrm{visk}} \approx 6,3 \cdot 10^4$ Jahre. Diese Zeitskalen sind leider so groß, daß sich diese Aussage einer empirischen Überprüfung entzieht.

Kapitel 5

Diskussion

In der vorliegenden Arbeit wurden Modelle für Akkretionsscheiben in Aktiven Galaktischen Kernen berechnet. Die Konzentration lag auf Bereichen, in denen das α-Modell zu selbstgravitierenden Scheiben führt. Es wurde untersucht, wie sich die Ergebnisse, die sich auf den β-Ansatz stützen, davon unterscheiden. Die Modellparameter bewegten sich zwischen 10^6 und 10^9 Sonnenmassen für das zentrale Schwarze Loch, 10^{-2}–10 Sonnenmassen pro Jahr als Akkretionsrate und einem Abstand vom Zentrum zwischen $10^{2,5}$ und 10^5 Schwarzschildradien. Es wurden Modelle mit β-Viskosität in optisch dicker und optisch dünner Näherung gerechnet, während im Fall der α-Viskosität das optisch dicke Modell ausreichend war. Der konvektive Beitrag zum Energietransport wurde vernachlässigt, wogegen Selbstgravitation in vertikaler Richtung in allen Fällen berücksichtigt wurde.

Der α-Ansatz weist der Viskosität den kleineren Wert zu. Ab dem Einsetzen der Selbstgravitation wächst die Flächendichte sehr stark an, die Scheiben werden ungeheuer dünn und nach außen fast messerscharf.
Mit der β-Beschreibung bewirkt die größere Viskosität zweierlei:

- Weite Bereiche der Scheibe werden optisch dünn.
- Der Einfluß der Selbstgravitation tritt erst viel weiter außen in Erscheinung.

Während eine detaillierte Berechnung der Spektren über die Zielsetzung dieser Arbeit hinausgeht, können doch grobe Abschätzungen vorgenommen werden, welche Veränderungen das β-Modell mit sich bringt. Für zwei typische Eigenschaften von Beobachtungsspektren scheint das β-Modell vielversprechende Erklärungsansätze zu bieten.

1. Im sichtbaren Spektralbereich werden Emissionslinien beobachtet. Im Standardmodell reicht die Gravitationsenergie, die im optisch dünnen Gebiet (das dort bei hohen Akkretionsraten nicht einmal existiert) freigesetzt wird, nicht aus, um diese Linien hervorzubringen. Diese fehlende Energie soll durch die Bestrahlung durch eine *äußere*

Röntgenquelle (das könnte z.B. die innerste Scheibenregion in der Nähe des Schwarzen Lochs sein) zugeführt werden, die die Scheibe zusätzlich aufheizt. Im selbstgravitierenden Fall, wo die Scheiben außen dünner werden, könnte die Strahlung auch nur mit Hilfe eines heißen, Compton-dünnen Mediums oberhalb der Scheibe, das die Strahlung reflektiert, zu den außen gelegenen Scheibengebiete gelangen (vgl. [C-SD]). Im β-Modell nehmen die optisch dünnen Gebiete auch bei hohen Akkretionsraten weite Bereiche der Scheibe ein und reichen näher bis zum Zentrum. Deshalb wird hier in den optisch dünnen Bereichen auch wesentlich mehr Gravitationsenergie freigesetzt und auf die Aufheizung durch eine Röntgenquelle kann vielleicht verzichtet werden. Der in Abb. 4.16 gezeigte Temperaturbereich der optisch dünnen Lösung von etwa $2\,300\,K - 5\,250\,K$ entspricht auch dem sichtbaren (bis nahen infraroten) Spektralbereich.

2. Die Ursache des sog. "5μ-bump" ist bis jetzt ungeklärt. So wird eine leichte, aber relativ breite Erhöhung des Spektrums bei einer Wellenlänge von etwa $5\mu m$ bezeichnet, die etlichen Objekten gemeinsam ist und erstmals von Edelson & Malkan [EM86] nachgewiesen wurde.
   Liegt der Übergang zwischen der optisch dünnen und der optisch dicken Phase von Abb. 4.16 bei $\log\frac{R}{R_s} = 3,9$, so herrscht an dieser Stelle eine Effektivtemperatur von $509\,K$. Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt die Wellenlänge mit der höchsten spektralen Energiedichte eines Schwarzen Körpers an als
   $$\lambda_{max}[cm] = 0,29 \cdot T[K]\,. \tag{5.1}$$
   Eine Temperatur von $509\,K$ entspricht auf diese Weise einer Wellenlänge von $4,9\,\mu m$. Wenn in diesem Bereich der Beitrag der optisch dicken Schicht einsetzt, könnte dies eine Erklärung für den 5μ-bump sein.

Die Ergebnisse dieser Arbeit deuten darauf hin, daß die β-Viskosität in den äußeren Gebieten von AGN's dem α-Ansatz überlegen ist. Für AGN's sind Beobachtungsdaten nicht in der gleichen Anzahl und Qualität vorhanden wie für enge Doppelsternsysteme und eine Ortsauflösung der Scheiben ist nicht möglich. Um die β-Viskosität noch besser zu testen, sind weitere theoretische Ergebnisse erforderlich. Geeignet dazu wären Untersuchungen der Spektren im stationären Fall, was aufgrund der optisch dünnen Gebiete recht aufwendig ist, und die Rechnung von zeitabhängigen Modellen.

Literaturverzeichnis

[AF] D.R.Alexander,J.W.Ferguson,1994: *Low–temperature Rosseland opacities*, Astrophysical Journal **437**,879

[Bl] R.D.Blandford,1992: *The black hole model of Active Galactic Nuclei* in W.J.Duschl,S.J.Wagner (ed.): „Physics of Active Galactic Nuclei" , Springer-Verlag

[BNW] R.D.Blandford,H.Netzer,L.Woltjer,1990: *Active Galactic Nuclei*, Springer-Verlag

[B-V] E.Böhm-Vitense,1989: *Introduction to stellar astrophysics* volume 2: *stellar atmospheres*, Cambridge University Press

[C93] J.K.Cannizzo,1993: *The limit cycle instability in dwarf nova accretion disks* in J.C.Wheeler (ed.): „Accretion disks in compact stellar systems" , Singapore: World Scientific

[C-S] S.Collin-Souffrin,1987: *Line and continuum radiation from the outer region of accretion discs in Active Galactic Nuclei*, Astronomy and Astrophysics **179**,60

[C-SD] S.Collin-Souffrin,A.M.Dumont1990: *Line and continuum emission from the outer regions of accretion discs in Active Galactic Nuclei*, Astronomy and Astrophysics **229**,292

[CW84] J.K.Cannizzo,J.C.Wheeler,1984:*The vertical structure and stability of α-model accretion disks*, Astrophysical Journal Supplement Series **55**,367

[DSB] W.J.Duschl,P.A.Strittmatter,P.L.Biermann,1997: *Viscosity in selfgravitating accretion disks*, Astrophysical Journal, eingereicht

[EM86] R.A.Edelson,M.A.Malkan,1986: *Spectral energy distributions of Active Galactic Nuclei between 0.1 and 100 microns*, Astrophysical Journal **308**,59

[FKR] J.Frank,A.R.King,D.J.Raine,1992: *Accretion power in astrophysics*, 2nd ed.,Cambridge University Press

[HCBP] J.-M.Huré,S.Collin-Souffrin,J.Le Bourlot,G.Pineau des Forêts,1994: *Structure of the outer regions of accretion disks in Active Galactic Nuclei*, Astronomy and Astrophysics **290**,19

[KW] R.Kippenhahn,A.Weigert,1990: *Stellar structure and evolution*, Springer-Verlag

[L52] R.Lüst,1952: Zeitschrift für Naturforschung **7a**,87

[LL] L.D.Landau,E.M.Lifshitz,1959: *Theoretical physics*, volume 6: *Fluid mechanics*, Pergamon Press Ltd.

[LP] D.N.C.Lin,J.Papaloizou, 1985: *On the dynamical origin of the solar system* in D.C.Black,M.S.Matthews (ed.): „Protostars & Planets II" ,The University of Arizona Press, Tucson, Arizona

[M83] M.A.Malkan,1983: *The ultraviolet excess of luminous quasars II – Evidence for massive accretion disks*, Astrophysical Journal **268**,582

[MM82] F.Meyer,E.Meyer-Hofmeister,1982: *Vertical structure of accretion disks*, Astronomy and Astrophysics **106**,34

[MM83] F.Meyer,E.Meyer-Hofmeister,1983: *Accretion disks in Cataclysmic Variables – The influence of the frictional parameter alpha on the structure*, Astronomy and Astrophysics **128**,420

[MM84] F.Meyer,E.Meyer-Hofmeister,1984: *Outbursts in dwarf novae accretion disks*, Astronomy and Astrophysics **132**,143

[MS82] M.A.Malkan,W.L.Sargent,1982: *The ultraviolet excess of Seyfert 1 galaxies and quasars*, Astrophysical Journal **254**,22

[MTW] C.W.Misner,K.S.Thorne,J.A.Wheeler,1973: *Gravitation*, W.H.Freeman and Company

[OpPj] *Opacities from the Opacity Project:* ftp://cdsarc.u-strasbg.fr/pub/cats/VI/80

[PTVF] W.H.Press,S.A.Teukolsky,W.T.Vetterling,B.P.Flannery,1992: *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd ed.,Cambridge University Press

[PVW] J.E.Pringle,F.Verbunt,R.A.Wade,1986: *Dwarf novae in outburst – Modelling the observations*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **221**,169

[Rees] M.J.Rees,1984: *Black hole models for Active Galactic Nuclei*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **22**,471

[SCK] A.Siemiginowska,B.Czerny,V.Kostyunin,1996: *Evolution of an accretion disk in an Active Galactic Nucleus*, Astrophysical Journal **458**,491

[SS73] N.I.Shakura,R.A.Sunyaev,1973: *Black holes in binary systems*, Astronomy and Astrophysics **24**,337

[SYMP] M.J.Seaton,Y.Yan,D.Mihalas,A.K.Pradhan,1994: *Opacities for stellar envelopes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **266**,805

[Ty81] R.Tylenda,1981: *Radiation from optically thin accretion discs*, Acta Astronomica **31**,127

[Ty88] R.Tylenda,1988: *Mean opacities and the structure of optically thin accretion discs*, Astronomy and Astrophysics **197**,225

[vW43] C.F.von Weizsäcker,1943: Zeitschrift für Astrophysik **22**,319

Danksagung

In erster Linie danke ich Herrn Prof. Dr. W.J.Duschl für die Bereitstellung des aktuellen Themas und die Betreuung der Arbeit. Seine Anregungen und Kommentare leiteten mein Tun, ohne meine Freiheit einzuengen.

Herrn Prof. Dr. M. Scholz danke ich für die Bereitschaft, die Erstellung des Zweitgutachtens zu übernehmen.

Thomas Walter hat mir oft durch wertvolle Hinweise und anregende Diskussionen weitergeholfen. Aber auch für die heitere Atmosphäre in unserem gemeinsamen Zimmer möchte ich ihm herzlich danken.

Bei allen anderen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Astrophysik möchte ich mich für ihre ständige Hilfsbereitschaft bedanken. Besonders genannt seien Joachim Theurer und Dr. Udo Ziegler, die beiden Netzwerkbetreuer Rainer Kürschner und Dr. Michael Däther sowie die WJD-Gruppe.

Der größte Dank gilt meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums in vielfältiger Weise unterstützt und dadurch erheblich zu dessen Gelingen beigetragen haben.

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 11.9.1997