Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Michael Wehrstedt
aus Waldeck/Hessen

2000

Staubdiffusion in protoplanetaren Akkretionsscheiben

Die Diplomarbeit wurde von Michael Wehrstedt ausgeführt am
Institut für Theoretische Astrophysik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. H.-P. Gail

Zusammenfassung

IR-Spektren vieler Kometen zeigen neben den bekannten Signaturen des amorphen Silikatstaubs deutliche Anzeichen für kristallines Silikat (vorwiegend Olivin) in beträchtlichen Mengen. Es ist wahrscheinlich, daß die Materie in den Kometen unverändertes, ursprüngliches Material aus der Zeit des solaren Urnebels darstellt, das seit seinem Einbau in die Kometesimale 'eingefroren' wurde. Da der Staub im interstellaren Medium ausschließlich in amorpher Form vorliegt, kommt als Herkunftsort des kristallinen Silikats nur die protoplanetare Akkretionsscheibe in Betracht. Ein möglicher Bildungsmechanismus ist die Kristallisation des amorphen Silikats (englisch: *annealing*) im warmen Innenbereich der Akkretionsscheibe. Infolge der Turbulenz in der optisch dicken Scheibe gelangt ein Teil des getemperten Silikatstaubs – mitgerissen vom Gas – in die kühlere Außenregion der Scheibe, wo dieser in größere Körper, z. B. die Kometesimale, eingebaut werden kann. Auch in der Matrix mancher Chondrite finden sich Indizien für Silikatstaub, der unter den Bedingungen des solaren Urnebels einem annealing-Ereignis ausgesetzt war. In dieser Arbeit wird die Diffusion und Kristallisation des Staubs in protoplanetaren Scheiben untersucht. Die Diffusionsgleichung für den Staub (annealing inbegriffen) wird zu diesem Zweck in einem eindimensionalen, zeitabhängigen numerischen Modell an die Gleichungen für die globale Entwicklung einer α-Scheibe gekoppelt. Die Ergebnisse sprechen dafür, daß der diffusive Transport den Staub großräumig über die Scheibe verteilt und damit eine Erklärung für das kristalline Silikat in den Urkörpern des Sonnensystems bietet.

Abstract

IR-spectra of many comets show clear evidence of crystalline silicate (predominantly olivine) in notable quantities, beside the known features of amorphous silicate dust. It is likely that the matter in comets represents unaltered pristine material from the time of the solar nebula, which has been 'frozen' since its integration in cometesimals. Since the dust in the interstellar medium is exclusively amorphous, the protoplanetary accretion disc must be the origin of crystalline silicate. A possible formation process is annealing of amorphous silicate in the warm inner zone of the accretion disc. Due to turbulence in the optically thick disc, a fraction of the annealed silicate dust reaches the cooler outer region of the disc by being carried along with the gas, where it may be built into larger bodies, e. g. cometesimals. In the matrix of some chondrites are also indications of silicate dust, which has experienced an annealing-event under the conditions of the solar nebula. This work investigates the diffusion and crystallisation of dust in protoplanetary discs. For this purpose the diffusion equation of the dust (including annealing) is linked to the equations for the global evolution of an α-disc within an one-dimensional, time-dependent numerical model. The results suggest that the diffusive transport spreads the dust globally throughout the disc, and therefore provides an explanation for crystalline silicate within the primordial bodies of the solar system.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Protoplanetare Akkretionsscheiben sind scheibenartige Gebilde aus Gas und Staub, die offenbar die meisten jungen Sterne umgeben. Ihre Eigenschaften hängen sehr stark von den Entstehungbedingungen neuer Sternsysteme ab.

Sterne entstehen nach heutiger Auffassung durch den gravitativen Kollaps eines verdichteten Kerns in einer rotierenden interstellaren Molekülwolke. Nach dem Jeans-Kriterium (Jeans [26]) stürzt der Wolkenkern bei Erreichen einer kritischen Masse und Dichte unter der eigenen Schwerkraft zusammen und bildet dabei im Zentrum einen (oder mehrere) Protostern(e).

Daß es überhaupt Verdichtungszentren innerhalb von Molekülwolken gibt, wird auf den Prozeß der Fragmentation (Silk [54]) zurückgeführt. Ein räumlich und zeitlich veränderliches Geschwindigkeitsprofil des Gases und Staubes, hervorgerufen durch Störungen des Umfelds (Sternwinde, gravitative Einwirkung nahegelegener Sterne), sorgt dafür, daß die Materie in einer Molekülwolke nie vollkommen homogen verteilt sein wird.

Durch den Drehimpuls des Wolkenkerns trifft nicht alles einfallende Material zentral auf den Protostern, sondern fällt auf Keplerbahnen um die neuentstandene Sonne. Da dies aus allen denkbaren Richtungen geschieht, prallt gegenläufiges Material aufeinander und bremst abrupt ab. Es sammelt sich in einem scheibenförmigen, nahezu axialsymmetrischen Gebilde um den Protostern, der Akkretionsscheibe. Die Ausrichtung der Drehachse wird dabei durch den Gesamtdrehimpuls des einfallenden Materials bestimmt.

Die Geschwindigkeit beim Aufprall ist in der Größenordnung der Einfallsgeschwindigkeit beim Kollaps, d. h. einige $10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (Morfill *et al.* [37]), und somit unter den vorherrschenden thermodynamischen Bedingungen stark überschallartig. Die Abbremsung erfolgt auf Unterschall-Geschwindigkeit[1] und somit in einer Stoßfront. Diese bildet gewissermassen eine Hülle um die Akkretionsscheibe, während von außerhalb weiter Materie aus der umgebenden Molekülwolke auf die Scheibe regnet.

Die Akkretionsscheibe ist in ihrer Ausdehnung vergleichbar mit der des Sonnensystems, und damit um 2 - 3 Größenordnungen kleiner als der anfängliche verdichtete Kern in der Molekülwolke ($\sim 0.05\,\mathrm{pc}$). Die Unterschiede in der Größenskala bergen ein gewisses Problem. Im heutigen Sonnensystem sind etwa 99,87 % der Masse im Zentralgestirn konzentriert, jedoch nur 0.54 % des Gesamtdrehimpulses. Nimmt man an, daß Planetensysteme in Akkretionsscheiben entstehen und das Sonnensys-

[1] Die vertikale Geschwindigkeitskomponente des Staubs in der Scheibe beträgt nur wenige $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

tem keinen Ausnahmefall darstellt, so muß es einen Prozeß geben, der sehr effektiv den Drehimpuls in den Scheiben nach außen trägt. Hierfür wurden bis dato verschiedene Prozesse vorgeschlagen, z.B. Turbulenz durch konvektive Instabilität (Cameron [9]; Lin & Papaloizou [32]) oder eine magnetohydrodynamische Instabilität (Balbus & Hawley [2]). Modellrechnungen des Kollapses eines Wolkenkerns legen bereits nahe, daß zumindest zur Entstehung von Einzelsternen mit stabiler Scheibe eine turbulente Viskosität vonnöten ist (Morfill, Tscharnuter und Völk [37]).

Die gerade formierte Scheibe ist in ihrer Anfangsphase einem noch sehr großen Massenzufluß aus der umgebenden Molekülwolke ausgesetzt. Das führt nach derzeitigen Vorstellungen zu heftigen Abläufen, wie thermischen Instabilitäten (Hartmann & Kenyon [22], Bell und Lin [4]) und gravitativen Instabilitäten (Toomre [58]). Letzlich machen es die Druck- und Temperaturverhältnisse wahrscheinlich, daß von planetaren Atmosphären her bekannte Wetterphänomene (Wolken, Niederschlag, Blitze) in der Scheibe auftreten.

Die Quelle für Material aus der Molekülwolke kann nach einiger Zeit aus unterschiedliche Gründe versiegen. Denkbar sind einerseits Supernovae oder starke Sternwinde von jungen O- und B-Sternen, die die Molekülwolke wegblasen und die Scheiben freilegen. Andererseits könnten die Einzugsgebiete benachbarter kollabierender Wolkenkerne beginnen, sich zu überlappen und weiteren Masseneinfall verhindern. Die Entwicklung der Akkretionsscheibe tritt daraufhin in eine eher ruhige, kontinuierliche Phase. Diese ist vom Drehimpulstransport in die äußeren Bereiche und von der langsamen Akkretion des Scheibenmaterials durch den Protostern bestimmt. Durch den Staub verbleibt die Scheibe optisch dick und ermöglicht so turbulente Konvektion durch den Temperaturunterschied zwischen Mittelebene und Ober- bzw. Unterseite der Scheibe. Während dieses Entwicklungsabschnitts sollte die Planetenentstehungen einsetzen.

Zunächst beginnen die ursprünglich μm-großen Staubteilchen miteinander zu koagulieren und wachsen relativ schnell zu Körpern im mm-Bereich. Begünstigt werden dürfte dies durch die stärkere Konzentration des Staubes hin zur Mittelebene der Scheibe, da die Staubpartikel im Gegensatz zum Gas keinerlei thermischen Druck verspüren. Das Gas dagegen ist senkrecht zur Mittelebene in guter Näherung hydrostatisch verteilt. Das weitere Wachstum von mm- zu m-Größe erweist sich in den theoretischen Modellen noch als etwas problematisch. Dies mag daran liegen, daß in der Realität die Staubpartikel nicht kugelförmig und homogen, sondern unförmig und fraktal ausgebildet sind ('Staubflusen') und daher effektiver als in den Modellen aneinander haften. Gesteinsbrocken ab m-Größe sind besser gefeit vor Zerstörung durch schnelle kleinere Körper. Zudem macht der wachsende geometrische Querschnitt Treffer wahrscheinlicher. Es entstehen km-große Körper, die Planetesimale, die ausreichend Masse besitzen, um über ihr Gravitationspotential andere Körper aufzusammeln.

Im Innenbereich der Scheibe bilden sich einige Hundert Protoplaneten, die später ihrerseits durch Kollisionen die terrestrischen Planeten bilden. In den Außenbereichen ist das Scheibengas kalt. Die Protoplaneten besitzen dort wegen der größeren Entfernung vom Stern eine ausgedehntere Hill-Sphäre, wodurch sie eine größere Zahl von Planetesimalen aufsammeln. Auf diese Weise können sie bis auf mehrere Erdmassen anwachsen, und das umgebende Gas kann gravitativ instabil gegenüber dem Steinkern werden. Durch die anschließende Akkretion auf den Steinkern entstehen die Gasplaneten.

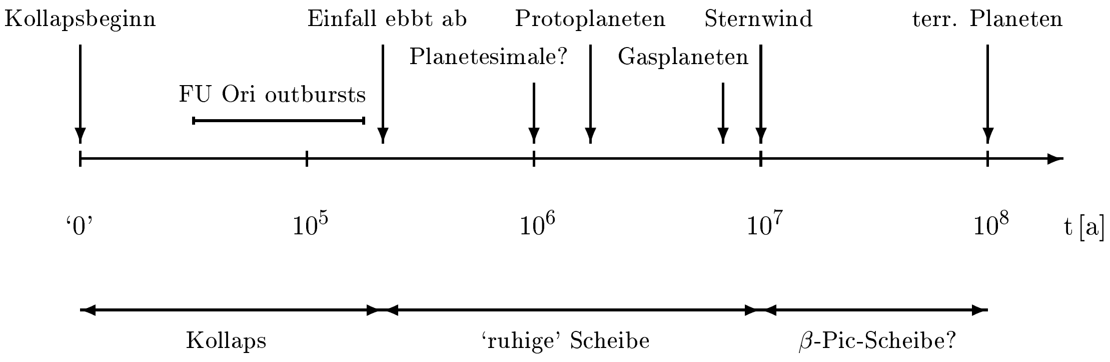

Abbildung 1.1: Zeitskalen für die Entstehung des Planetensystems vom Einsetzen des Kollapses bis zur Bildung der terrestrischen Planeten. Der Masseneinfall endet bei 200 000 Jahren. Man beachte die willkürliche Wahl des Zeit-Nullpunkts für die logarithmische Skala.

Seit seiner Bildung sendet der Protostern einen stetigen Wind (Shu *et al.* [53]) aus. Dieser hat nach ca. 10 Ma den Zwischenraum der Planeten vom verbliebenen Gas entleert. Übrig verbleibt eine Staubscheibe ('debris disc') um den Protostern, in der die Bildung der terrestrischen Planeten im inneren Teil des Planetensystems noch andauert. Nach einigen 10 Mio. Jahren ist der Protostern – falls er nicht zu massereich ist und sich aus diesem Grund sehr schnell entwickelt – auf der Hauptreihe angekommen. Dieser ist dann ein voll ausgebildeter, H-brennender Stern mit einem ihn umgebenden Planetensystem. Damit ist die Bildung des neuen Sonnensystems abgeschlossen. Die ungefähren Zeitskalen der beschriebenen Abläufe sind in Abb. 1.1 dargestellt. Eine Übersicht theoretischer Ansätze und numerischer Berechnungen der Prozesse bei der Planetenentstehung liefert Ruden [49].

Die Beobachtung scheint in Einklang mit der angeführten theoretischen Modellvorstellung zu sein. In großen Molekülwolkenkomplexen, wie in Orion und Taurus, lassen sich die Stadien der Entwicklung von Planetensystemen weitgehend nachvollziehen. Man beobachtet Wolkenkerne, Protosterne (T Tauri Sterne), Scheiben, Sternwinde von T Tauri Sternen und FU Orionis outbursts, die wahrscheinlich eine Folge von thermischen Instabilitäten (Hartmann & Kenyon [22]) in der Scheibe sind. Darüberhinaus identifiziert man die Herbig AE/BE-Objekte (Prototyp β-Pictoris) mit Sternen, die von den Staubscheiben in der späteren Phase der Entstehung des Planetensystems umgeben sind. Durch Instrumente wie ISO und das Hubble Space Telescope wurden die Erfolge bei der Beobachtungen der genannten Objekte maßgeblich vorangetrieben.

Die *direkte* Beobachtung von Planeten scheitert bislang am Auflösungsvermögen der heutigen Instrumente, so daß nur indirekte Schlüsse zur Planetengenese in jungen Sternsystemen möglich sind. Die Methode der Dopplerverschiebung zur Entdeckung von Planeten um fremde Sonnen hatte bisher lediglich Erfolg bei entwickelten Sonnensystemen (Marcy & Butler [34]). Ein weiteres Manko ist die unzureichende Statistik der Objekte, was die Bestimmung von Entwicklungsstadien und Zeitskalen unsicher macht.

Das Thema dieser Arbeit ist die Kristallisation und Diffusion des Staubes in der ruhigen Entwicklungphase der Akkretionsscheibe mit geringem Masseneinfall durch die Molekülwolke.

Modelle stationärer und zeitabhängiger viskoser Akkretionsscheiben haben bereits die wichtige Rolle der Chemie in der Scheibe, insbesondere des Staubes, aufgezeigt. Die Kristallisation des Staubes im warmen Innenbereich der Scheibe mit anschließendem diffusivem Transport nach außen war – unter voller Lösung der Diffusionsgleichung für die Staubkonzentration – jedoch bisher *nicht* Gegenstand von Modellrechnungen.

Ziel der vorliegende Arbeit ist zum einen die Herkunft des kristallinen Anteils von Silikatverbindungen in den vermutlich ursprünglichsten Körpern des Sonnensystems, den Kometen und den kohligen Chondriten, zu erklären.

Die Kometen sind offensichtlich Planetesimale, die weit außen in den kühleren Regionen der Scheibe gebildet wurden, in denen Wassereis auf den Festkörpern auskondensieren konnte. Sie enthalten daher neben Silikaten, Nickeleisen, organischen Verbindungen und anderen Eiskomponenten (vorwiegend CH_4 und NH_3) einen großen Anteil an Wassereis. Die Kenntnis der Zusammensetzung der Kometen wurde aus ihren Spektren abgeleitet. In den Spektren einiger Kometen tauchen auch deutliche Signaturen für kristalline Silikate, führend kristallines Olivin, auf. Der Ursprungsort dieses Materials ist mit großer Sicherheit in der Scheibe zu suchen, denn Silikatstaub liegt im interstellaren Medium nur in amorpher Form vor. Eine Erklärung für das Vorhandensein des kristallinen Silikats in manchen Kometen bietet der diffusive, turbulenzgetriebene Transportprozeß im solaren Urnebel an. Gelangt der amorphe Silikatstaub in die heiße Innenzone der Scheibe (wobei dieser an die Bewegung des Gases gekoppelt ist), kann dieser kristallisieren. Wird er daraufhin wieder nach außen getragen (weiter innen verdampft der Staub), kann er dort in größere Körper eingebaut werden. Sind diese Körper klein genug, um keine Aufschmelzungsprozesse oder andersartige Überprägungen des Gesteins im Innern zu erleiden, und sind sie zudem weit genug vom Zentralgestirn entfernt, daß chemische Prozesse eine untergordnete Rolle spielen, so kann der derartig kristallisierte Staub in ihnen bis heute unbeschadet überleben. Diese Arbeit soll klären, ob ein solch weiträumiger, nach außen gerichteter Transport von Staub in der Scheibe ($\gtrsim 10\,\mathrm{AE}$) möglich ist.

Auch in der Matrix bestimmter Meteorite, der kohligen Chondrite, gibt es Anzeichen für die Anwesenheit von kristallisiertem Silikat aus der Zeit des solaren Urnebels. Die Untersuchung von Meteoriten zeigt, daß diese zum überwiegenden Teil aus aufgeschmolzenem, differenziertem Material bestehen (Stein-, Stein-Eisen-, Eisen-Meteorite). Bei einem kleinen Teil der Steinmeteorite, den kohligen Chondriten, dagegen vermutet man aufgrund ihrer der Sonne ähnlichen Elementzusammensetzung und ihres Alters, daß sie das ursprünglichste, am wenigsten veränderte Material aus der solaren Urzeit darstellen. Eingebettet in ihrer Matrix befinden sich u.a. glasige, silikatische Einschlüsse, Chondren oder Chondrulen genannt, deren Herkunft bisher ungeklärt ist. Sie müssen bei ihrer Bildung schnellen Erhitzungs- und Abkühlungsprozessen unterworfen worden sein (Blitze (?), Impaktereignisse (?); s. z. B. Hewins, Jones & Scott [23]). Die Matrix ihrerseits setzt sich aus einer Melange zusammengebackener und verkeilter Staubkörner zusammen, von denen ein Teil in kristallisierter Form vorliegt. Hier ist allerdings in vielen Fällen das Silikat durch thermische Prozesse in ihren Mutterkörpern, den Asteroiden, überprägt worden. Die Trennung dieses Material von jenem, daß tatsächlich in der Akkretionsscheibe durch Kristallisation verändert wurde, erweist sich als eine bei der Untersuchung der Meteorite äußert schwierige Angelegenheit.

Zum anderen untersucht diese Arbeit die Auswirkung des kristallisierten Staubs auf

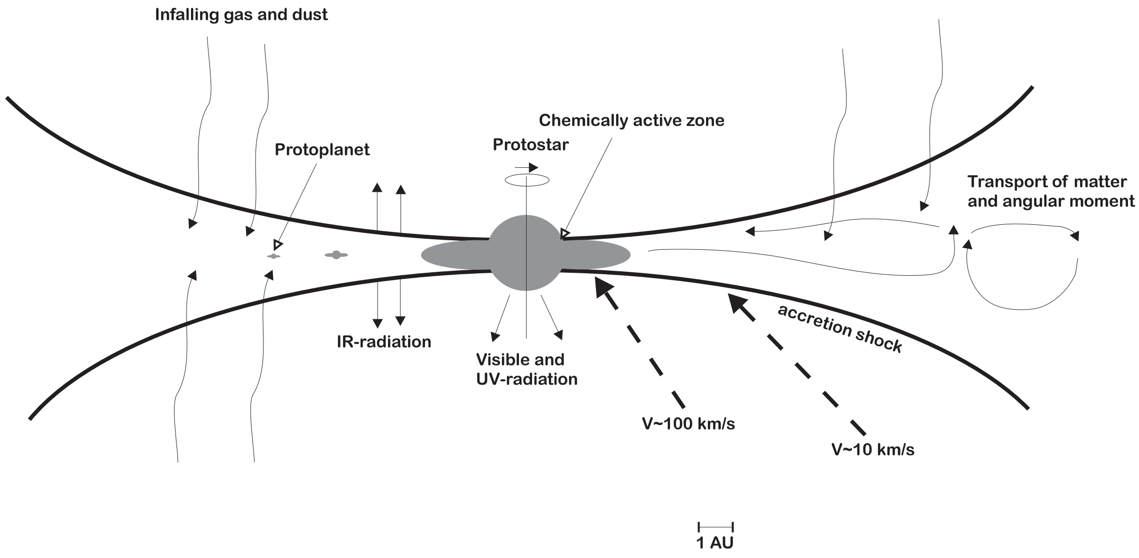

Abbildung 1.2: Abläufe in einer protoplanetaren Akkretionsscheibe mit geringen Masseneinfall (nach van Dishoeck *et al.* [13]).

die Scheibenentwicklung an sich. Kristallisierter Silikatstaub ist gegenüber amorphem bei optischen Wellenlängen deutlich transparenter. Dieser Sachverhalt wirkt auf die konvektiv getriebene Turbulenz der Scheibe zurück. In Bereichen, in denen die Staubopazität überwiegt, kann die Strahlung besser entweichen und kühlt auf diese Weise nahe der Mittelebene gelegenen Zonen. Dies läßt die Konvektion an Kraft verlieren, was sich auf alle relevanten physikalischen Größen (Temperatur, Dichte, Druck, Viskosität usw.) bei der Scheibenentwicklung auswirken sollte.

Abb. 1.2 zeigt schematisch die wichtigsten Abläufe, die für ein protoplanetare Scheibe mit geringem Masseneinfall angenommen werden.

Die Arbeit gliedert sich in vier weitere Kapitel. In Kapitel 2 wird zunächst ein stationäres Modell einer protoplanetaren Akkretionsscheibe untersucht. Hier wird auch der temperatur- und dichteabhängige Verlauf des Extinktionskoeffizienten und die Zustandsgleichung eingeführt. Im Kapitel 3 folgt die Behandlung eines zeitabhängigen Modells der Scheibe. Seine endgültige Form erhält das Modell in Kapitel 4 durch die Berücksichtigung der Staubkristallisation und -diffusion in der Scheibe. In Kapitel 5 erfolgt schließlich die Diskussion der Ergebnisse.

Kapitel 2

Stationäres Modell

Das stationäre Modell einer protoplanetaren Akkretionsscheibe in Einzonennäherung bildet die Grundlage für das weitere Vorgehen. Es dient später als Anfangsbedingung für die zeitabhängigen Modelle. Die Ergebnisse können als Momentaufnahme der Scheibe zu irgendeinem Entwicklungsstadium für moderate Abstände vom Stern aufgefaßt werden. Zudem vermittelt dieses Kapitel die grundsätzlichen Voraussetzungen und Einschränkungen für die Physik der Akkretionsscheibe, die in dieser Arbeit Gültigkeit besitzen.

2.1 Grundgleichungssystem

In Abb. 1.2 wurden bereits grob die Abläufe innerhalb der Scheibe skizziert. Für die Rechnung in einer Dimension (radiale Richtung) ist die Einzonennäherung zweckmäßig. Hierbei wird die exakte Form der vertikalen Struktur der Scheibe vernachlässigt und lediglich bestimmte Größen als Mittelwerte durch Mittelung über die vertikale Richtung aufgefaßt. Eine derartige Größe stellt die Flächendichte dar. Sie wird definiert als Grenzwert der Masse $M(r, \Delta r)$ in einem axialsymmetrischen Kreisring der Dicke Δr im Abstand r vom Zentrum, dividiert durch die Fläche des Kreisringes:

$$\Sigma(r,t) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{M(r, \Delta r)}{2\pi r \Delta r} \ . \tag{2.1}$$

Für die Berechnung der Scheibenstruktur wird nun das folgende Gleichungssystem verwendet, wie es in vergleichbarer Form erstmals Shakura & Sunyayev [50] als Grundlage für Modelle von Akkretionsscheiben diente.[1]

Dazu wird angenommen, daß die Masse der Scheibe vernachlässigbar klein gegenüber der Sternmasse ist. In dieser Näherung wird das Gravitationspotential der Scheibe ausschließlich vom Stern bestimmt. Vernachlässigt werden soll auch der Druckgradient in radialer Richtung. Die vertikale Ausdehnung der Scheibe wird als klein gegenüber der radialen Ausdehnung angenommen. Unter diesen Bedingungen erhält die Winkelgeschwindigkeit in der Einzonennäherung die einfache Form

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} \ , \tag{2.2}$$

[1] Im Gegensatz zu dieser Arbeit betrafen die Modelle von Shakura & Sunyayev Akkretionsscheiben um kompakte Objekte (Schwarze Löcher) in Doppelsternsystemen.

d.h. der Umlauf eines Materieelements in der Scheibe erfolgt auf einer kreisförmigen Keplerbahn. G ist die Gravitationskonstante, M_* die Masse des Protosterns und r der Abstand vom Zentrum.

Für die isotherme Schallgeschwindigkeit im Scheibengas gilt

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T_c}{\mu m_H}} \ . \tag{2.3}$$

k_B ist die Boltzmann-Konstante, T_c die Temperatur in der Mittelebene der Scheibe, μ das mittlere Molekulargewicht und m_H die Masse des Wasserstoff-Atoms.

Es wird angenommen, daß sich das Gas in vertikaler Richtung im hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Daraus folgt

$$h_s = \frac{c_s}{\Omega} \ . \tag{2.4}$$

h_s wird als Skalenhöhe der Scheibe bezeichnet. Sie gibt im wesentlichen die vertikale Ausdehnung der Scheibe an.

Für die Viskosität wird

$$\nu = \alpha \, h_s c_s \ . \tag{2.5}$$

angenommen. Dies ist der berühmte Ansatz von Shakura und Sunyayev [50]. Der Parameter α beinhaltet dabei die gesamte Unkenntnis über die viskosen Prozesse in der Scheibe, wie turbulente, magnetische und Scherungs-Viskosität.

Aus der Drehimpulserhaltung folgt

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}}\right) \ . \tag{2.6}$$

$\dot{M}$ ist die Massenakkretionsrate, R_* der Radius des Protosterns und Σ die Flächendichte. Gleichung (2.6) hat ihren Ursprung in der zeitabhängigen Form der Drehimpulserhaltung einer viskosen Keplerscheibe 3.1 (s. folgendes Kapitel), wenn man diese zum Zweck der Stationarität integriert. Der 2. Term auf der rechten Seite folgt aus der inneren Randbedingung, daß die Scheibenmaterie an der Sternoberfläche in einer engen Übergangsschicht von Keplerscher Umlaufsgeschwindigkeit ($\sim 1000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) auf die Rotationsgeschwindigkeit des Protosterns ($\sim 10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$)[2] abgebremst wird. Letztere wird für die innere Randbedingung vernachlässigt.

Für die zentrale Massendichte gilt

$$\rho_c = \frac{\Sigma}{2h_s} \ . \tag{2.7}$$

Die Opazität κ und das mittlere Molekulargewicht μ sind stark abhängig von den Temperatur- und Dichteverhältnissen der Umgebung:

$$\kappa = \kappa(\rho_c, T_c) \tag{2.8}$$

[2]Es wird hier aufgrund des Drehimpulstransportes angenommen, daß der Protostern nur einen geringen Teil des Drehimpulses der Molekülwolke mitbekommen hat und seine Äquatorgeschwindigkeit ungefähr der der Sonne ($2\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) entspricht.

$$\mu = \mu(\rho_c, T_c) \ . \tag{2.9}$$

Sie werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

Die vertikale optische Tiefe bis zur Scheibenmitte erhält man aus

$$\tau = \frac{1}{2}\Sigma\kappa \ . \tag{2.10}$$

Strenggenommen gilt dies nur für konstante Opazität. Für nicht-konstante Opazität ist (2.10) zumindest näherungsweise richtig.

In der Scheibe soll Dissipation kinetischer Energie durch viskose Prozesse einzige Energiequelle sein. Die Energieproduktion beschränkt sich dabei auf die Scheibenmittelebene. Das Material der Scheibe wird als viskose Flüssigkeit angesehen. Der Energietransport soll ausschließlich in vertikaler Richtung und allein durch Strahlung stattfinden, also konvektiver Energietransport vernachlässigt werden. Für eine dünne, näherungsweise ebene Scheibe folgt so für die Oberflächenleuchtkraft

$$\sigma T_{\mathrm{eff}}^4 = \frac{3\,GM_*\dot{M}}{8\pi r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}}\right) + \sigma T_{\mathrm{Wolke}}^4 \ . \tag{2.11}$$

T_{eff} ist die Effektivtemperatur der Scheibenoberfläche, σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und T_{Wolke} die Temperatur der umgebenden Molekülwolke. Der 2. Term in der Klammer rührt wieder von der inneren Randbedingung her.

Die vertikale Temperaturschichtung wird in Anlehnung an ebene Sternatmosphären durch die Eddington-Approximation berechnet. Damit ist die Temperatur in der Scheibenmitte durch

$$T_c^4 = T_{\mathrm{eff}}^4\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\tau\right) \tag{2.12}$$

bestimmt. Gleichung (2.12) ist nur für $\tau \gg 1$ exakt gültig, also für Bereiche, in denen die Scheibe optisch dick ist. Sie stellt jedoch immer noch eine gute Näherung für optisch dünne Regionen dar (Abweichung einige Prozent bei grauer Absorption). Die Scheibenoberfläche wird als die Fläche definiert, bei der $\tau = \frac{2}{3}$ ist. Von dieser Fläche stammt ein 'durchschnittliches' Photon, das einen äußeren Beobachter ungehindert erreicht.

(2.2) - (2.12) stellt einen vollständigen Satz von Gleichungen für die Beschreibung des radialen Aufbaus einer protoplanetaren Akkretionsscheibe in der Einzonennäherung dar.

Nach dessen Lösung läßt sich bei Bedarf schließlich der Zentraldruck

$$p_c = c_s^2\rho_c \tag{2.13}$$

und die radiale Driftgeschwindigkeit des Materials in der Scheibe

$$v_r = \frac{\dot{M}}{2\pi r\Sigma} \tag{2.14}$$

berechnen. Gleichung (2.14) folgt aus der Massenerhaltung. Der Massentransport findet nur in radialer Richtung statt.

2.2 Opazität

Bei der Modellierung protoplanetarer Akkretionsscheiben spielt der Massenextinktionskoeffizient eine entscheidende Rolle. Durch seine starke Temperaturabhängigkeit beeinflußt er wesentlich den Aufbau der Scheibe und wird seinerseits vom Scheibenaufbau mitbestimmt. Zur Bestimmung des Massenextinktionskoeffizient müssen Gas- und Staubkomponente gesondert betrachtet werden.

2.2.1 Staub und Eis

Die Bestimmung der Staubopazität erfordert die Kenntnis der Zusammensetzung und Größenverteilung des Staubes in der Akkretionsscheibe. Für interstellaren Staub schlugen Mathis, Rumpl & Nordsieck [35] eine geeignete Größenverteilung vor (kurz MRN-Verteilung). Beste Übereinstimmung des Frequenzgangs der interstellaren Extinktion mit Laborresultaten lieferte hierbei eine Mischung aus amorphem Magnesium-Eisen-Silikat $MgFeSiO_4$, das alles vorhandene Si und folglich alles in etwa gleichhäufige Mg und Fe bindet, und Kohlenstoffruß, wobei allerdings 40% des gesamten Kohlenstoffs in der Gasphase verbleiben. Als optimalste Häufigkeitsverteilung der Staubteilchenradien a (in μm) erhielt man

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a < a_\mathrm{u} \\ C \cdot a^{-\frac{7}{2}} & \text{für} \quad a_\mathrm{u} < a < a_\mathrm{o} \\ 0 & \text{für} \quad a > a_\mathrm{o} \end{cases} \tag{2.15}$$

mit der unteren und oberen Grenze

$$a_\mathrm{u} = 5\,\mathrm{nm} \qquad a_\mathrm{o} = 0.25\,\mu\mathrm{m} \ . \tag{2.16}$$

Die Konstante C ist für Kohlenstoff- bzw. Silikatstaub gegeben durch

$$\log C = \begin{cases} -15.24 & \text{für C-Staub} \\ -15.21 & \text{für Si-Staub} \end{cases} \ . \tag{2.17}$$

$f(a)$ gibt dabei die Zahl der Staubteilchen in einem Radius-Intervall in Einheiten μm pro Wasserstoffkern an. Die Teilchendichte der Staubteilchen mit MRN-Verteilung bestimmt sich dann einfach aus

$$N_\mathrm{S} = f(a)\, N_\mathrm{H} \ , \tag{2.18}$$

wobei N_H die Dichte der Wasserstoff-Kerne ist.

Die Staubzusammensetzung ist durch die unterschiedlichen Bedingungen in Sternentstehungsgebieten gegenüber dem interstellaren Medium und durch die Aufheizung beim Akkretionsstoß während des Durchgangs durch die Scheibenoberfläche gewissen Veränderungen unterworfen. Pollack *et al.* ([42] und [43]) erhielten aufgrund von theoretischen Untersuchungen und Beobachtungsmaterial ein differenziertes Bild der Zusammensetzung des auf die Scheibe herabregnenden Staubs.

Für die Bestimmung der Staubopazität benötigt man die komplexen Dielektrizitätskonstanten ϵ der vorhandenen Staubmaterialien. Diese sind weitgehend aus Labormessungen bekannt (Draine & Lee [14] mit Tabellen in [15], Huffman (private Mitteilung), Lide [31], Pollak *et al.* [43], Koike *et al.* [27], s. Anhang). Es wird der

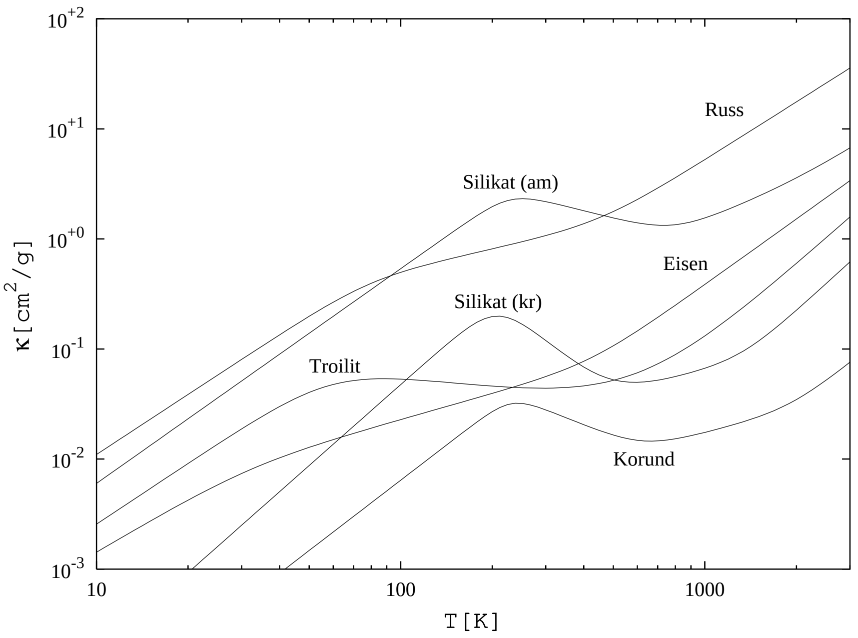

Abbildung 2.1: Rosselandmittel des Massenextinktionskoeffizienten abhängig von der Temperatur für verschiedene Staubkomponenten im Temperaturbereich $10 < T < 3\,000\,\mathrm{K}$, gemittelt über die MRN-Verteilung. Für kristallinen Silikatstaub wurden lediglich Daten von kristallinem Olivin (s. Anhang) berücksichtigt.

Einfachheit halber angenommen, daß die Staubpartikel Kugeln vom Radius a sind. Auf diese Weise läßt sich aus bekanntem ϵ jeder Staubkompenente durch die Mie-Theorie problemlos der jeweilige Absorptions- und Streuquerschnitt für alle Radien und Frequenzen berechnen. Das Ergebnis wird über die MRN-Verteilung gemittelt, und man erhält den Massenextinktionskoeffizienten κ_ν jeder Staubsorte. Für die hier interessanten Bereiche der Scheibe mit $\tau \gg 1$ schließlich ist die Berechnung des Rosselandmittels von κ_ν erforderlich. Das Ergebnis für die unterschiedlichen Staubsorten, die hier berücksichtigt werden, zeigt Abb. 2.1. Die verwendeten Interpolationsformeln sind im Anhang zu finden.

In der Abbildung ist auch die Rosseland-Extinktion von kristallinem Silikatstaub aufgetragen. Hier wurde mangels Daten anderer Silikate (vorwiegend Pyroxen) ausschließlich kristallines Olivin berücksichtigt. Der kristalline Anteil des Staubes wird später bei den Modellen mit Staubdiffusion wichtig, wenn Kristallisation amorpher Teilchen im warmen Innenbereich der Scheibe in die Rechnung mit aufgenommen wird.

Im kühleren Außenbereich der Scheibe kann Wasser als Reif auf den Staubteilchen ausfrieren ($T \lesssim 150\mathrm{K}$). Unter der Annahme von Kugelsymmetrie und einheitlicher Dicke der Eisschicht läßt sich mit Hilfe der beschriebenen Prozedur auf gleiche Weise das Rosselandmittel des Extinktionskoeffizienten für die eisummantelten Staubkörner berechnen. Dieses ist abhängig von der Temperatur und dem Kondensationsgrad des vorhandenen Wasserdampfes im Eis f_{Eis} in Abb. 2.2 aufgetragen.

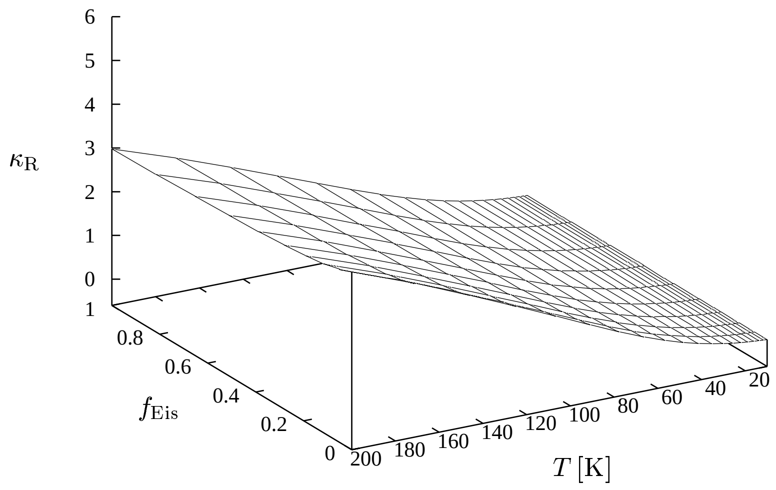

Abbildung 2.2: Rosselandmittel des Massenextinktionskoeffizienten in Einheiten $cm^2\,kg^{-1}$ für Silikat-Staubteilchen mit Eismänteln, aufgetragen gegen die Temperatur und den Kondensationsgrad des vorhandenen Wasserdampfes im Eis f_{Eis} (Gail, private Mitteilung).

2.2.2 Gasopazität

Im heißen Innenbereich der Scheibe ist aller Staub verdampft ($T \gtrsim 2000$K). Dort wird die Opazität durch Absorption und Streuung an den Gasteilchen bestimmt. Unterschiedliche Temperaturbereiche erfordern eine gesonderte Betrachtung.

Bis ca. 4 000 K wird die Extinktion durch die Moleküle H_2O, CO und TiO dominiert. H_2O und CO fallen durch ihre zahlreichen Rotations-Schwingungs-Banden im IR ins Gewicht. Titanoxid ist trotz der geringen Häufigkeit des Titans wichtig, weil das TiO-Molekül durch seine energetisch tiefliegenden, elektronisch angeregten Zustände einen starken Absorber im optischen Spektralbereich darstellt. Bei den meisten anderen Molekülen setzt die entsprechende Absorption erst im UV ein.

Im Bereich von $4\,000 < T < 8\,000$ K wird die Extinktion hauptsächlich vom H^--Ion bestimmt. Das H^- besitzt einen einzigen gebundenen Zustand lediglich 0.75 eV unter dem Kontinuum, der zu gf- und ff-Übergängen bei optischen Wellenlängen führt. Die Zustände anderer Elemente sind bei den betrachteten Temperaturen derart nah am Kontinuum nicht ausreichend besetzt und kommen daher für einen signifikanten Beitrag zur Extinktion nicht in Frage. Neben dem negativen Wasserstoff-Ion sind in diesem Temperaturbereich noch die gf- und ff-Übergänge einiger Metalle wichtig.

Bei Temperaturen über 8 000 K wird das H^--Ion dissoziiert. Hier dominieren die gf- und ff-Übergänge von H, He und einiger Metalle sowie eine reichliche Anzahl von Metalllinien im UV. Dazu kommen bei H und He Übergänge von hochangeregten Zuständen, die durch die hohen Temperaturen (teilweise Ionisation) ausreichend bevölkert sind.

Über 30 000 K sind Wasserstoff und Helium so gut wie vollständig ionisiert. Nun wird die Extinktion durch Thompson-Streuung an freien Elektronen bestimmt.

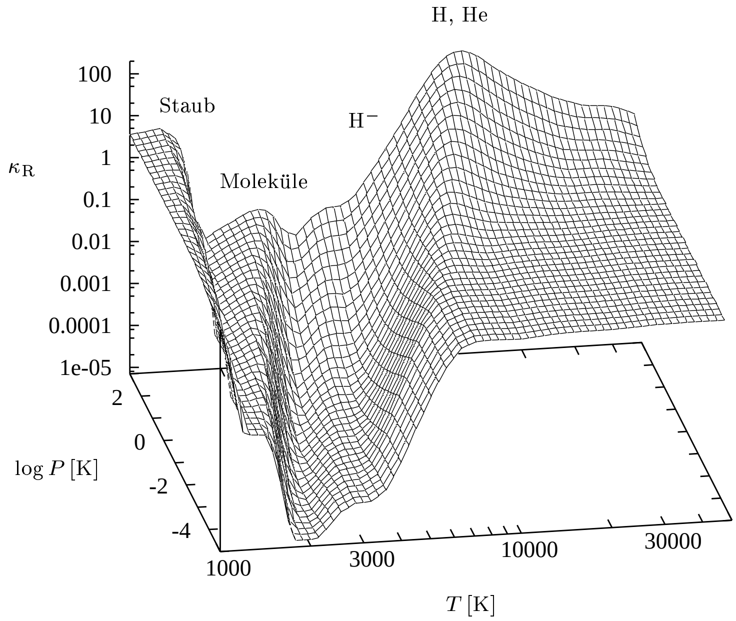

Abbildung 2.3: Rosselandmittel des Massenextionktionskoeffizienten in Einheiten $\mathrm{cm}^2\,\mathrm{kg}^{-1}$ für die Gaskomponente der Scheibe für $T \geq 1\,000\,K$. Daten aus Alexander & Ferguson [1] und Iglesias & Rogers [25].

Eine numerische Berechnung des Rosselandmittels des Extinktionskoeffizienten für eine Chemie, wie sie in protoplanetaren Akkretionsscheiben vorliegt, ist z.B. im Temperaturbereich bis 10 000 K durch Alexander & Ferguson [1] erfolgt. Über 10 000 K sind Daten von Iglesias & Rogers [25] verfügbar. Bei den Rechnungen für niedrige Temperaturen wurden hierbei 21 Moleküle mit rund 60 Millionen Linien berücksichtigt, bei höheren Temperaturen eine Anzahl von ca. 8 Millionen atomare Linien. Das Ergebnis dieser Rechnungen zeigt Abbildung 2.3. Das Rosselandmittel von κ ist hier gegen die Temperatur und den Druck aufgetragen. Das kleine Zwischenmaximum im Bereich der Molekülabsorption wird durch die Dissoziation des Wasserdampfes hervorgerufen.

2.2.3 Näherung für die Opazität

Für numerische Modellrechnungen von protoplanetaren Scheiben ist es günstig, sich einfache, analytische Näherungen des Extinktionskoeffizienten in den unterschiedlichen Temperaturbereichen vorzugeben. In dieser Arbeit wird eine Interpolation verwendet, wie sie bereits in ähnlicher Form z.B von Bell & Lin [4] angegeben wurde. Diese ist in Abb. 2.4 zu sehen.

Der wichtigste Unterschied zu [4] besteht darin, daß zum Zweck der Berechnung der Scheibenstruktur der Extinktionskoeffizient ab dem Temperaturbereich der Molekülextinktion konstant gesetzt wird (durchgezogene Linie in Abb. 2.4). Der Grund hierfür ist der starke Anstieg der Opazität durch die Molekül- ($\kappa \propto T_\mathrm{c}^3$) bzw. die H$^-$-

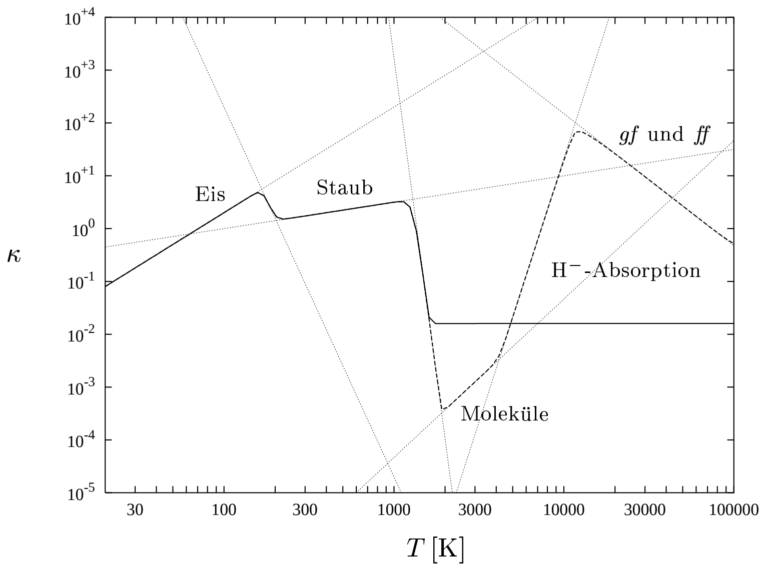

Abbildung 2.4: Approximation des Massenextionktionskoeffizienten (in $\mathrm{cm}^2\,\mathrm{kg}^{-1}$ als Funktion der Temperatur. Die Dichte hat hier den repräsentativen Wert $\rho = 10^{-8}\,\mathrm{g\,cm}^{-3}$. Die gestrichelte Kurve zeigt die Interpolation nach Bell & Lin [4], die durchgezogene Kurve die in dieser Arbeit verwendete Interpolation. Die gepunkteten Geraden stellen die unterschiedlichen Grenzfälle von κ dar (s. Anhang A).

Absorption ($\kappa \propto T_\mathrm{c}^{10}$). Den Untersuchungen von Hartmann & Kenyon [22] zufolge tritt für $\kappa \propto T_\mathrm{c}^{\beta}$ mit $\beta \gtrsim 3$ eine thermische Instabilität in der Akkretionsscheibe auf. In zeitlichen Abständen auftretende thermische Instabilitäten liefern offensichtlich die Erklärung für das Phänomen der sog. FU Orionis outbursts. Veränderliche vom Typ FU Orionis sind sehr jungen Systemen zuzuordnen. Sie zeigen einige Monate andauernde Helligkeitsausbrüche in Zeitabständen von etwa 1000 a. Bell & Lin [4] rechneten auf dieser Grundlage Entwicklungsmodelle der FU Orionis-Ausbrüche in protoplanetare Scheiben, natürlich unter Berücksichtigung der Extinktion durch die Molekül- und H^--Absorption. Die damit verbundenen numerischen Komplikationen sollen jedoch in dieser Arbeit vermieden werden. Die Molekülextinktion wird daher auf einen konstanten Wert gesetzt. Dies war auch die Vorgehensweise von Ruden & Pollack [48], die mit dieser Arbeit vergleichbare Modelle von protoplanetaren Akkretionsscheiben rechneten. Für die Bereiche der Scheibe, in denen Staub existiert und damit die Staubdiffusion wichtig ist, sollte diese grobe Näherung zu nicht allzugroßen Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Scheibenstruktur führen.

Ein weiterer Unterschied zur Interpolation von Bell & Lin besteht in der Verschiebung der Flanke der Staubverdampfung bei $\sim 1\,500\,\mathrm{K}$, die die Extinktion um einige Größenordnungen abfallen läßt. Aus Kondensations-Rechnungen (z.B. in [28]) wird deutlich, daß die letzten Staubkomponenten unter typischen Drucken und Dichten, wie sie in protoplanetaren Scheiben herrschen, im Mittel nicht schon bei $1\,500\,\mathrm{K}$, sondern erst bei ca. $1\,700\,\mathrm{K}$ verdampfen. Die Näherungen für den Extinktionskoeffizienten in den einzelnen Temperaturbereichen finden sich im Anhang A.

2.3 Mittleres Molekulargewicht

In protoplanetaren Scheiben ist das Gas bei moderaten Abständen vom Stern stark verdünnt. Folglich läßt es sich als ideales Gas behandeln. Die Zustandsgleichung des Gases lautet damit

$$P = \sum_i N_i \, k_\mathrm{B} \, T \ . \tag{2.19}$$

Hier muß strenggenommen über alle Teilchensorten i mit den Teilchendichten N_i summiert werden. Die Häufigkeit der Elemente in der Scheibe wird allerdings nicht allzu weit von der kosmischen Häufigkeitsverteilung abweichen. Angesichts dieser Tatsache wird lediglich der Anteil von Wasserstoff und Helium berücksichtigt ($\sim$99.87 %) und die Teilchendichten aller anderen Elemente vernachlässigt.

In die Berechnung des mittleren Molekulargewichts μ wird nur die Dissoziation des H_2-Moleküls einbezogen. Ionisation von H bzw. He tritt erst bei Temperaturen $\gtrsim 10\,000\,\mathrm{K}$ auf und betrifft ausschließlich den innersten Teil der Scheibe. Da die Scheibe optisch dick ist, befindet sich die Materie im Inneren der Scheibe im lokalen thermischen Gleichgewicht. Die Dissoziation läßt sich daher mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes bestimmen.

Für das Gleichungssystem (2.2) - (2.12) ist das mittlere Molekulargewicht unter Vorgabe von Dichte und Temperatur zu berechnen. Zu diesem Zweck wird der fiktive Partialdruck aller Wasserstoff-Kerne P_H benötigt, falls diese alle als freie Atome vorlägen. Dieser ist gegeben durch

$$P_\mathrm{H} = \frac{\rho \, k_\mathrm{B} T}{m_\mathrm{H}(1 + A_\mathrm{He} \, \varepsilon_\mathrm{He})} \ . \tag{2.20}$$

ρ ist die Massendichte und A_He das Atomgewicht von He, das hier $A_\mathrm{He} = 4$ gesetzt wird. Andererseits ergibt sich für P_H der Ausdruck

$$P_\mathrm{H} = p_\mathrm{H} + 2\, p_{\mathrm{H}_2} \ . \tag{2.21}$$

p_H und p_{H_2} sind die Partialdrucke des freien Wasserstoffs bzw. der H_2-Moleküle. Die Anwendung des Massenwirkungsgesetzes liefert einen Zusammenhang zwischen den Partialdrucken in der Form

$$p_{\mathrm{H}_2} = p_\mathrm{H}^2 \, K_p(T) \ , \tag{2.22}$$

wobei $K_p(T)$ die Massenwirkungskonstante ist. Für diese gilt

$$K_p(T) = e^{-\frac{\Delta G}{RT}} \ . \tag{2.23}$$

R ist die Gaskonstante und ΔG die Gibbsche Energie der Molekülbildung. Zur numerischen Handhabung bedient man sich einer Polynomapproximation für ΔG, die aus theoretischen Rechnungen ermittelt wurde. Derartige Untersuchungen (Sharp & Huebner [51]) lieferten für das H_2-Molekül

$$\Delta G = \frac{425321}{T} - 107123 + (54.4756 + (5.4828 \cdot 10^{-4} - 3.81498 \cdot 10^{-8} \cdot T) \cdot T) \cdot T \ , \tag{2.24}$$

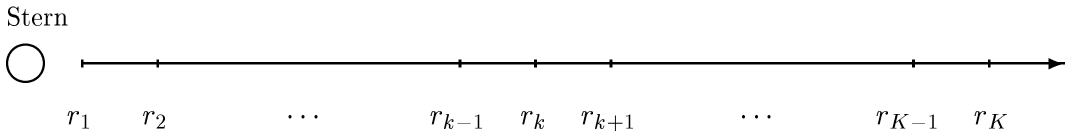

Abbildung 2.5: Radius-Gitter in der Einzonennäherung.

(in Einheiten von cal mol^{-1}) wenn der Druck in cgs-Einheiten angegeben wird. R ist die Gaskonstante mit $R = 1.987165\,\mathrm{cal\,K^{-1}mol^{-1}}$. (2.21) und (2.22) stellen ein Gleichungssystem für p_H und p_{H_2} dar, daß durch

$$p_\mathrm{H} = \sqrt{\frac{1}{16\,K_p^2} + \frac{P_\mathrm{H}}{2\,K_p}} - \frac{1}{4\,K_p} \tag{2.25}$$

gelöst wird. p_{H_2} erhält man durch Einsetzen in (2.22). Schließlich benötigt man den Partialdruck des Heliums

$$p_\mathrm{He} = \varepsilon_\mathrm{He} P_\mathrm{H} \ , \tag{2.26}$$

wobei der Heliumanteil $\varepsilon_\mathrm{He} = 0.1$ beträgt. Auf diese Weise läßt sich das mittlere Molekulargewicht aus

$$\mu = \frac{\rho\, k\, T}{m_\mathrm{H}(p_\mathrm{H} + p_{\mathrm{H}_2} + p_\mathrm{He})} \ . \tag{2.27}$$

berechnen. Das Ergebnis muß dann in (2.9) eingesetzt werden.

Als Grenzfälle für Gebiete ohne bzw. mit vollständiger Dissoziation von H_2 erhält man

$$\mu_{\mathrm{H}_2} = \frac{2 + 8\,\varepsilon_\mathrm{He}}{1 + 2\,\varepsilon_\mathrm{He}} = \frac{7}{3} \quad , \qquad \mu_\mathrm{H} = \frac{1 + 4\,\varepsilon_\mathrm{He}}{1 + \varepsilon_\mathrm{He}} = \frac{14}{11} \ . \tag{2.28}$$

2.4 Numerische Behandlung

(2.2) - (2.12) stellt ein stark nicht-lineares Gleichungssystem dar, das numerisch mit einem geeigneten Verfahren gelöst werden muß. Die Scheibenstruktur soll in Abhängigkeit des Abstands vom Stern(mittelpunkt) berechnet werden. Der Radiusvariable r muß also diskretisiert werden (Abb. 2.5). Da die Veränderung der physikalischen Größen am deutlichsten im inneren Teil der Scheibe nahe dem Stern ist, wird ein logarithmisches (sich nach innen verdichtendes) Abstandsgitter gewählt. Für jedes k berechnen sich daher die Stützstellen r_k aus

$$r_k = r_1 10^{\frac{(k-1)}{(K-1)} \log_{10}\left(\frac{r_K}{r_1}\right)} \ . \tag{2.29}$$

K ist die Gesamtzahl der Gitterpunkte, r_1 und r_K die radialen Abstände von Innen- bzw. Außenrand der Scheibe vom Stern.

Die Berechnung der Scheibenstruktur wird mittels eines Newton-Raphson-Verfahrens für die Temperatur in der Scheibenmittelebene T_c *und* das mittlere Molekulargewicht

μ durchgeführt. Dazu werden Startwerte für T_c und μ am Außenrand r_K vorgegeben und in das Gleichungssystem gegeben.[3] Durch die Newton-Raphson-Iteration werden diese jeweils bis zur Selbstkonsistenz gebracht. Indem der Wert am 'alten' Gitterpunkt r_{k+1} immer als Startwert für den 'neuen' Gitterpunkt r_k aufgefaßt wird, hangelt sich der Algorithmus auf diese Weise bis zum Innenrand der Scheibe r_1 vor. Grundsätzlich könnte man auch allein in T_c iterieren. Es erweist sich allerdings für die Konvergenz des Verfahrens im Bereich der H_2-Dissoziation als vorteilhaft, μ aufgrund seiner starken Temperaturabhängigkeit mit in die Newton-Raphson-Iteration hineinzunehmen.

2.5 Parameter

In Tab. 2.1 ist die Wahl eines typischen Parametersatzes für die Berechnung der Scheibenstruktur aufgeführt. Der Protostern befindet sich in der ruhigen Entwicklungsphase der Scheibe nach einhelliger Meinung im Stadium eines klassischen T Tauri-Sterns (*Class II objects* bei Natta [39]). Oberflächentemperatur und Leuchtkraft erhalten daher für einen T Tauri-Stern charakteristische Werte. Der Sternradius ergibt sich dann aus der Leuchtkraft-Radius-Beziehung:

$$R_* = \sqrt{\frac{L_*}{4\pi\sigma T_{\rm eff}^4}}\ . \tag{2.30}$$

Dementsprechend wird die Lage des Innenrandes des Radiusgitters (etwas willkürlich) auf den doppelten Sternradius festgelegt.

Die Massenakkretionsrate erhält ebenfalls typische Zahlenwerten, wie sie aus Beobachtungsdaten protoplanetarer Scheiben gewonnen werden (z.B. Calvet, Hartmann und Strom [8]). Die Wahl von α ist in der Literatur der letzten Jahre recht umstritten. Das liegt wahrscheinlich in der Natur der Sache, daß der α-Ansatz nicht akkurat genug den Aufbau von Akkretionsscheiben beschreibt. Es wird hier für die stationären Modelle $\alpha = 10^{-3}$ gesetzt. In jüngerer Zeit ist bei den Autoren, die Scheibenmodelle an Beobachtungsdaten anpassen, allerdings eine Tendenz zu größeren Werten festzustellen ($\alpha \geq 10^{-2}$, Nakamoto & Nakagawa [38], Stepinski [56]). Cabot *et al.* [7] errechnete dagegen aus einer Theorie für großskalige konvektive Turbulenz $10^{-4} \lesssim \alpha \lesssim 10^{-2}$. Zudem ist α offenbar in den Modellen nicht unabhängig vom Gesamtdrehimpuls der Scheibe (Nakamoto & Nakagawa [38], Stepinski [56]). Die Diskussion einer geeigneten Wahl des Wertes von α wird in dieser Arbeit daher nochmals bei den zeitabhängigen Modellen mit Staubdiffusion aufgegriffen, für die auch der Scheiben-Gesamtdrehimpuls als Parameter vorgegeben werden muß.

Als Startwerte der Iteration für T_c bzw. μ am Außenrand eignen sich die Temperatur der Molekülwolke ($T_{c,K} = 20\,\mathrm{K}$) und das mittlere Molekulargewicht bei vollständiger Assoziation von H zu H_2 ($\mu = 7/3$).

[3] Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es sich hier *nicht* um ein Anfangswert-Problem handelt.

[1] $1\,\dot{\mathrm{M}}_{-8} = 1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{M}_\odot\,\mathrm{a}^{-1}$

Tabelle 2.1: Typischer Satz von Parameter für das stationäre Scheibenmodell.

Sternmasse	M_*	$1\,\mathrm{M}_\odot$
Oberflächentemperatur des Sterns	T_*	$4\,500\,\mathrm{K}$
Leuchtkraft des Sterns	L_*	$5\,\mathrm{L}_\odot$
Sternradius	R_*	$3.7\,\mathrm{R}_\odot$
Innenrand des Gitters	r_1	$2 \cdot R_*$
Außenrand der Gitters	r_K	$100\,\mathrm{AE}$
Massenakkretionsrate	$\dot{M}$	$10,\ 1,\ 0.1\,\dot{\mathrm{M}}_{-8}$ [1]
Viskositätsparameter	α	$1 \cdot 10^{-3}$
Temperatur der Molekülwolke	T_{Wolke}	$20\,\mathrm{K}$
Gitterpunkte pro Dekade		100

2.6 Ergebnisse

Abb. 2.6 zeigt das Ergebnis eine Modellrechnung unter Verwendung des Parametersatzes von Tab. 2.1 mit verschiedenen Massenakkretionsraten. Die Größen sind jeweils in Abhängigkeit des radialen Abstands vom Stern aufgetragen.

In (a) ist die Temperatur in der Scheibenmittelebene T_c und in (b) die Flächendichte Σ dargestellt. Deren radiale Verläufe unterstreichen die wichtige Rolle der Chemie in der Scheibe. Ohne die Berücksichtigung chemischer Prozesse und deren Rückwirkung auf die Opazität bzw. das mittlere Molekulargewicht erhält man für T_c bzw. Σ nach außen abfallende Potenzgesetze. Unter Einbeziehung der Chemie weist der radiale Verlauf von T_c jedoch zwei Plateaus auf. Das erste bei $T_c \sim 200\,\mathrm{K}$ rührt von der Eisverdampfung, das zweite bei $T_c \sim 1\,500\,\mathrm{K}$ von der Verdampfung des Staubes her. Hier erreicht die Opazität jeweils ein lokales Minimum. In den entsprechenden Regionen kann Strahlung aus der Scheibe effektiver entweichen, was einen Kühlmechanismus für die Scheibe bedeutet. Im Gegensatz dazu steigt die Flächendichte in den Bereichen der Temperaturplateaus nach innen hin stärker an. Die Ursache hierfür liegt im Zusammenhang zwischen Σ und T_c, der aus dem Gleichungssystem resultiert und ein gegensätzliches Krümmumgsverhalten der zugehörigen Kurven zur Folge hat. Anschaulich ausgedrückt 'staut' sich Materie in Bereichen der Scheibe mit geringer Opazität. Eine weitere Signatur zeigt sich bei hoher Massenakkretionsrate nah am Innenrand, wenn die Temperatur $\sim 3\,000\,\mathrm{K}$ übersteigt. Dort setzt die Dissoziation des H_2-Moleküls ein und führt wegen $\Sigma \propto \mu$ zu einem Abfall der Flächendichte zum Scheibenzentrum hin.

In (c) ist der Verlauf des Massenextinktionskoeffizient κ und in (d) der vertikalen optischen Tiefe τ wiedergegeben. Beide entsprechen der Form nach dem Verlauf der Extinktion in Abb. 2.4 mit deren charakteristischen Signaturen im Bereich der Existenz von Eis und Staub (s. Glg. (2.10)). Die Dichteabhängigkeit der Opazität spielt nur eine untergeordnete Rolle (vergleiche A.1). Zu beachten ist, daß für $\tau \lesssim 1$ die Scheibe für Strahlung durchlässig wird und daher in den entsprechenden Bereichen zumindest die konvektionsgetriebene Turbulenz beendet wird. Der hier interessante innere Teil der Scheibe erweist sich allerdings selbst für geringes $\dot{M}$ als optisch dick.

Tabelle 2.2: Scheibenmasse M_S (in Einheiten von $M_\odot$) und Scheiben-Gesamtdrehimpuls J_ges (in Einheiten von $10^{45}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$) für die Modelle mit unterschiedlichem $\dot{M}$ (in Einheiten von $M_\odot\,\mathrm{a}^{-1}$).

$\dot{M}$	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
M_S	3.3	0.5	0.06
J_ges	431	60	6.7

Abb. 2.6 (e) zeigt den Verlauf der Temperatur der Scheibenoberfläche T_eff. Nach (2.11) gilt über ein weites Gebiet der Scheibe $T_\mathrm{eff} \propto \dot{M}^{1/4}\,r^{-3/4}$. Daher ergibt sich im Gegensatz zu den bisherigen Größen ein einfaches Potenzgesetz.

In (f) ist schließlich die (negative) radiale Driftgeschwindigkeit v_r gegen r aufgetragen. Deren Abbildung an dieser Stelle soll als ein Vorgriff auf das Einfügen der Staubdiffusion in die Berechnung des Scheibenaufbaus aufgefaßt werden. Dann wird für die Behandlung der Advektion des Staubes die Kenntnis der radialen Driftgeschwindigkeit bei jedem Radius vonnöten sein.

In Tab. 2.2 sind die resultierenden Scheibenmassen M_S und Scheiben-Gesamtdrehimpulse J_ges für die Modelle mit den unterschiedlichen Akkretionsraten aufgetragen. Zu beachten ist, daß bei großen Scheibenmassen die Selbstgravitation der Scheibe nicht mehr vernachlässigt werden kann. Einen Richtwert hierfür stammt von Shu *et al.* [52]. Unterhalb des kritischen Wertes

$$M_\mathrm{S} = \frac{3}{4\pi - 3}\,M_* \approx 0.314\,M_* \tag{2.31}$$

sind danach protostellare Scheiben stabil gegen gravitative Störungen jeglicher Art, und die Selbstgravitation der Scheibe hat kaum Einfluß auf den Scheibenaufbau. Diese Bedingung ist strenggenommen nur für das Modell mit $\dot{M} = 10^{-9}$ erfüllt. Es sei jedoch betont, daß die Annahme eines konstanten $\dot{M}$ bei den stationären Modellen über die gesamte radiale Ausdehnung der Scheibe zu unnatürlich hohen Scheibenmassen führt. Auch die zugehörigen Gesamtdrehimpulse der Scheiben sind aus diesem Grund überhöht. Es soll an dieser Stelle allerdings auf eine eingehende Diskussion von Scheibenmassen und -drehimpulsen im Vergleich zu Beobachtungsdaten verzichtet werden. Diese folgt bei der Behandlung der zeitabhängigen Modelle, bei denen sich die Massenakkretionsrate als radial stark veränderlich herausstellt und in Folge dessen die Scheibenmassen und -drehimpulse auf vernünftige Werte reduziert werden.

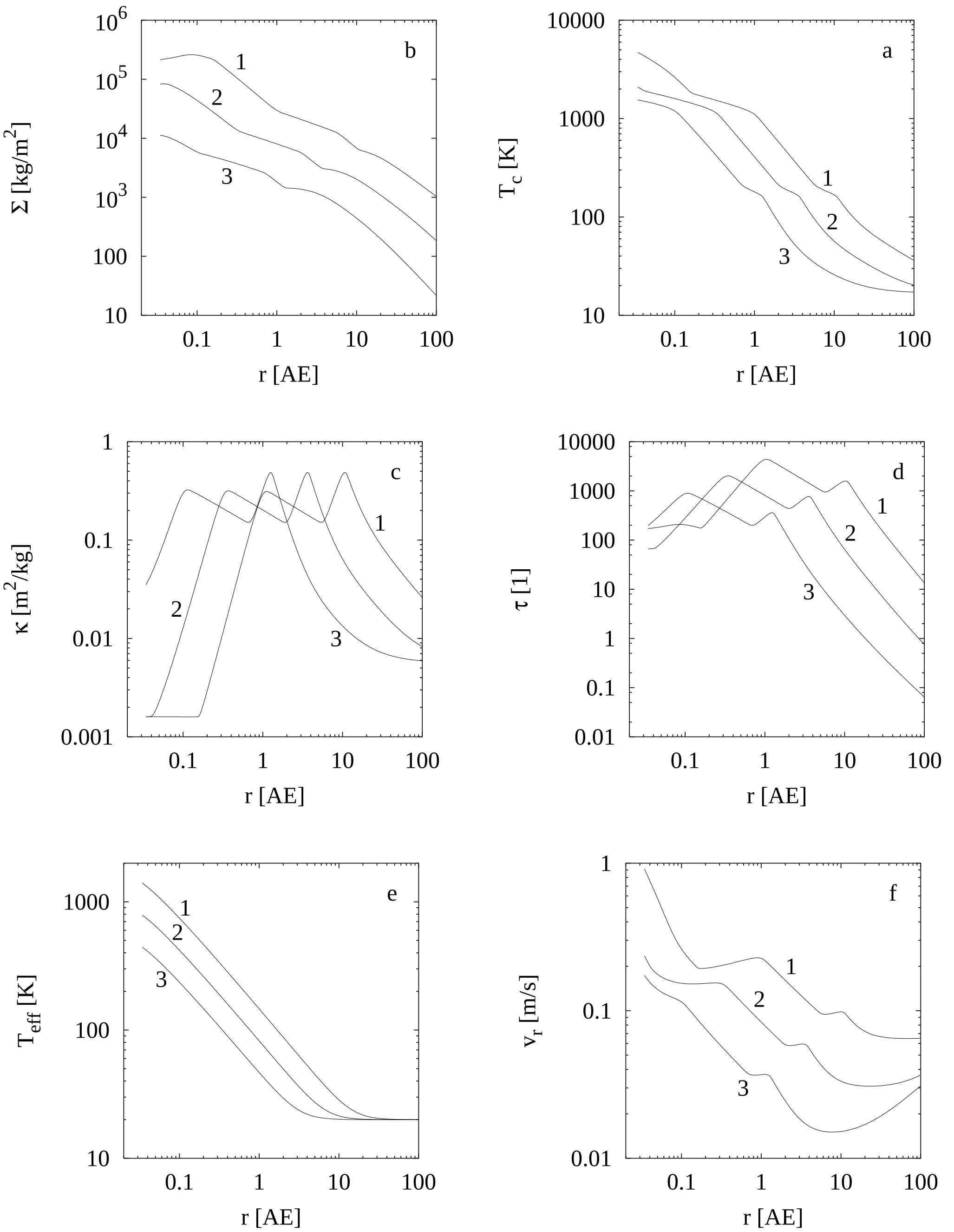

Abbildung 2.6: Stationäres Modell einer protoplanetaren Akkretionsscheibe in Einzonennäherung für unterschiedliche Massenakkretionsraten $\dot{M}$: 10^{-7} (1), 10^{-8} (2) bzw. $10^{-9}\,\mathrm{M}_\odot\,\mathrm{a}^{-1}$ (3). Aufgetragen ist (a) die Flächendichte Σ, (b) die Temperatur in der Scheibenmittelebene T_c, (c) der Massenextinktionkoeffizient κ, (d) die vertikale optische Tiefe τ, (e) die Effektivtemperatur an der Scheibenoberfläche $T_{\rm eff}$ und (f) die nach innen gerichtete Driftgeschwindigkeit v_r gegen den Abstand vom Stern.

Kapitel 3

Zeitabhängiges Modell ohne Staubdiffusion

Nachdem im letzten Kapitel der Aufbau einer protoplanetaren Akkretionsscheibe stationär behandelt wurde, folgt nun ein Modell der zeitlichen Entwicklung. Es soll weiterhin eine dünne Keplerscheibe angenommen werden, deren Aufbau in der Einzonennäherung berechnet wird. Die vertikale Druckschichtung sei nach wie vor hydrostatisch. Äußerer Masseneinfall soll ignoriert werden, was für die späte, ruhige Entwicklungsphase der Scheibe gerechtfertigt ist.

3.1 Grundgleichungssystem

Unter den geltenden Annahmen bleibt das Gleichungssystem (2.2) - (2.12) für die radiale Struktur der Scheibe mit Ausnahme von drei Gleichungen unverändert.

Die entscheidende Änderung widerfährt Gleichung (2.6). Diese wird durch ihr zeitabhängiges Original

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r}\frac{\partial}{\partial r}\nu\Sigma\sqrt{r} \tag{3.1}$$

ersetzt. Das Ergebnis folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses für viskose Keplerscheiben (Pringle [45] oder Lin & Papaloizou [33]).

Unter den gegebenen Umständen geht die Massenakkretionsrate (2.14) nicht mehr als freier Parameter in die Rechnung ein, sondern erhält die Form

$$\dot{M} = -6\pi\sqrt{r}\frac{\partial}{\partial r}\nu\Sigma\sqrt{r}\ . \tag{3.2}$$

Damit wird $\dot{M}$ zeit- *und* ortsabhängig.

Der Ausdruck für die Effektivtemperatur (2.11) lautet nun

$$\sigma T_{\mathrm{eff}}^4 = \frac{9}{8}\Omega^2\nu\Sigma + \sigma T_{\mathrm{Wolke}}^4\ . \tag{3.3}$$

Der Einbau von (3.1) - (3.3) in das vorliegende Gleichungssystem liefert auf diese Weise einen vollständigen Satz von Gleichungen, der den Aufbau und die zeitliche Entwicklung der Scheibe festlegt.

Im Laufe der Zeit nimmt der Stern durch die Akkretion der Scheibenmaterie an Masse zu. Die Masse des Protosterns ist folglich zu jedem Zeitpunkt durch

$$M_* \;=\; M_*(t) \;=\; M_*(0) + |\, M_{\mathrm{S}}(t) - M_{\mathrm{S}}(0)\,| \tag{3.4}$$

gegeben, wobei die Scheibenmasse durch

$$M_{\mathrm{S}}(t) = \int_{r_1}^{r_K} 2\pi r\, \Sigma(t)\, dr \tag{3.5}$$

bestimmt ist. r_1 und r_K bezeichnen den Innen- bzw. Außenrand der Scheibe[1]. Die Winkelgeschwindigkeit (2.2) wird nun zeitabhängig,

$$\Omega \;=\; \Omega(t) \;=\; \sqrt{\frac{GM_*(t)}{r^3}}\ . \tag{3.6}$$

Der Gesamtdrehimpuls der Scheibe läßt sich unter diesen Vorgaben aus

$$J_{\mathrm{ges}}(t) = \int_{r_1}^{r_K} 2\pi r\, \Sigma(t)\, r^2\, \Omega(t)\, dr \tag{3.7}$$

ermitteln.

3.2 Numerische Behandlung

Die Differentalgleichung (3.1) ist partiell und von 2. Ordnung im Ort. Aus mathematisch Sicht handelt es sich um eine parabolische Differentialgleichung, physikalisch gesehen ist sie vom Typ her eine (nichtlineare) Diffusionsgleichung. Die Flächendichte breitet sich also mit der Zeit diffusionsartig im Raum aus.

3.2.1 Substitution

Zum Zweck der numerischen Handhabung ist es günstig die Substitution

$$x = 2\sqrt{r} \qquad\qquad S = x \cdot \Sigma \tag{3.8}$$

durchzuführen (Bath & Pringle [3]). Daraus ergibt sich eine neue Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{12}{x^2}\,\frac{\partial^2 \nu S}{\partial x^2}\ , \tag{3.9}$$

woraus zu ersehen ist, daß sich die Größe S ebenfalls diffusionsartig verhält. Auf der rechten Seite von (3.9) tritt nun gegenüber Gleichung (3.1) kein Term mehr von erster Ableitung in der Ortsvariable auf.

Für die Massenakkretionsrate (3.2) und die Effektivtemperatur (3.3) erhält man die neuen Ausdrücke

$$\dot{M} = -3\pi \frac{\partial \nu S}{\partial x} \tag{3.10}$$

[1]Die Beiträge zur Scheibenmasse für $r < r_1$ und $r > r_K$ werden vernachlässigt, da der innerste Ring um den Stern nur wenig Masse enthält und im Außenbereich die Flächendichte bei ausreichend großer Wahl von r_K bereits stark abgefallen ist.

und

$$\sigma T_{\mathrm{eff}}^4 = 72\,\frac{GM}{x^7}\nu S + \sigma T_{\mathrm{Wolke}}^4 \ . \tag{3.11}$$

Auf gleiche Weise substituiert man im gesamten Gleichungssystem.

3.2.2 Diskretisierung

Die numerische Behandlung erfordert die Diskretisierung der neuen Radiusvariablen x. An die Stelle der r_k treten jetzt die Stützstellen x_k mit $k = 1 \ldots K$. Das Radiusgitter wird analog zu (2.29) logarithmisch gewählt. Zusätzlich wird die Zeitvariable t in einzelne Zeitpunkte t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, ... diskretisiert, beginnend mit $n = 0$.

Zur Lösung des zeitabhängigen Gleichungssystem auf dem beschriebenen Gitter bietet sich das folgende Verfahren an. Zunächst wird gesondert die Zeitableitung betrachtet und Gleichung (3.9) über die Zeit von $t = t_n$ bis $t = t_{n+1}$ integriert. Dies liefert

$$S^{n+1} - S^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{12}{x^2}\frac{\partial^2 \nu S}{\partial x^2}\,dt \ . \tag{3.12}$$

Das Integral wird nun durch eine geeignete Summenformel ersetzt. Man erhält,

$$S^{n+1} = S^n + \left\{ \Theta \cdot \left[\frac{12}{x^2}\frac{\partial^2 \nu S}{\partial x^2}\right]_{t_n} + (1-\Theta)\cdot\left[\frac{12}{x^2}\frac{\partial^2 \nu S}{\partial x^2}\right]_{t_{n+1}} \right\} \Delta t \ , \tag{3.13}$$

wobei $0 \leq \Theta \leq 1$ gilt. Für $\Theta = \frac{1}{2}$ entspricht Gleichung (3.13) der bekannten Trapezregel. An die Stelle des Differentials dt tritt die Zeitschrittweite[2]

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \tag{3.14}$$

zwischen den zwei Zeitmarken t_n und t_{n+1}.

Als nächstes werden die Ortsableitungen durch Differenzenquotienten ausgedrückt. Um den Wert von S_k^{n+1} zu bestimmen, wird eine Taylorentwicklung der Funktion νS an den Stellen x_{k-1} und x_{k+1} um x_k durchgeführt. Mit der Einführung der Hilfsgrößen

$$h_l = x_k - x_{k-1} \qquad , \qquad h_r = x_{k+1} - x_k \ . \tag{3.15}$$

ergibt die Taylorentwicklung

$$(\nu S)_{k+1} = (\nu S)_k + h_r \left.\frac{\partial \nu S}{\partial x}\right|_k + \frac{1}{2}h_r^2 \left.\frac{\partial^2 \nu S}{\partial x^2}\right|_k + \frac{1}{6}h_r^3 \left.\frac{\partial^3 \nu S}{\partial x^3}\right|_k + \ldots \tag{3.16}$$

$$(\nu S)_{k-1} = (\nu S)_k - h_l \left.\frac{\partial \nu S}{\partial x}\right|_k + \frac{1}{2}h_l^2 \left.\frac{\partial^2 \nu S}{\partial x^2}\right|_k - \frac{1}{6}h_l^3 \left.\frac{\partial^3 \nu S}{\partial x^3}\right|_k + \ldots \tag{3.17}$$

Faßt man dies als lineares Gleichungssystem für die 1. und 2. Ableitung von νS auf und vernachlässigt alle Terme höherer Ordnung, so erhält man als Lösungen

$$\left.\frac{\partial \nu S}{\partial x}\right|_k = -\frac{h_r}{h_l(h_l+h_r)}(\nu S)_{k-1} + \frac{h_r - h_l}{h_l h_r}(\nu S)_k + \frac{h_l}{h_r(h_l+h_r)}(\nu S)_{k+1} \tag{3.18}$$

[2]Für die Berechnung ist immer nur die momentane Zeitschrittweite interessant. Daher wird hier auf die Indizierung von Δt verzichtet.

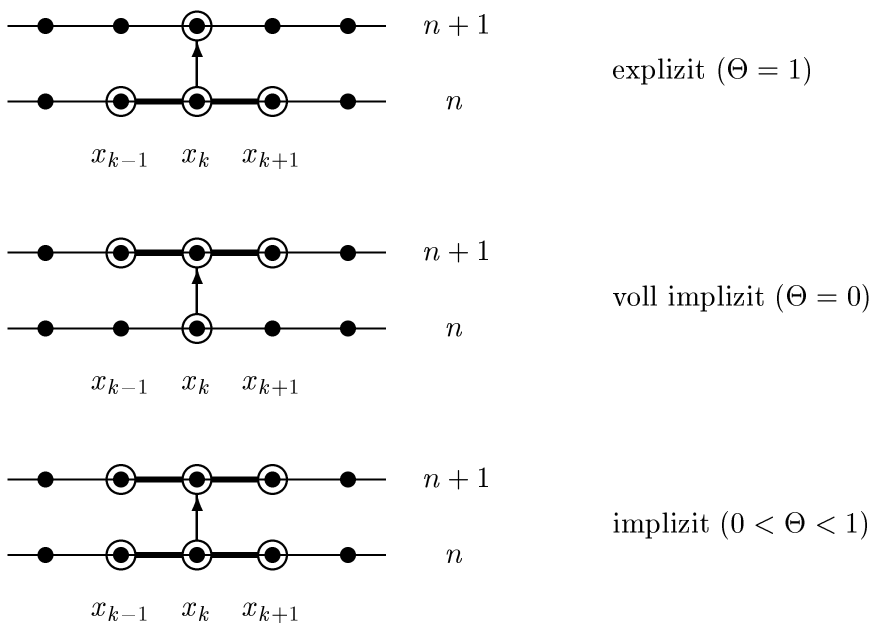

Abbildung 3.1: Zeitschritt bei der numerischen Behandlung der Diffusionsgleichnung im expliziten, voll impliziten und impliziten Fall (s. Text).

$$\left.\frac{\partial^2 \nu S}{\partial x^2}\right|_k = \frac{2}{h_l(h_l+h_r)}\,(\nu S)_{k-1} - \frac{2}{h_l h_r}\,(\nu S)_k + \frac{2}{h_r(h_l+h_r)}\,(\nu S)_{k+1}\ . \tag{3.19}$$

Einsetzen von (3.19) in (3.13) liefert schließlich die gesuchte Gleichung für die Größe S zum Zeitpunkt t_{n+1} am Ort x_k

$$\begin{aligned} S_k^{n+1} &= S_k^n + \Theta\,\Delta t\,\frac{12}{x_k^2}\,\left(d_{lk}(\nu S)_{k-1}^n + d_{mk}(\nu S)_k^n + d_{rk}(\nu S)_{k+1}^n\right) \\ &+ (1-\Theta)\ \Delta t\,\frac{12}{x_k^2}\,\left(d_{lk}(\nu S)_{k-1}^{n+1} + d_{mk}(\nu S)_k^{n+1} + d_{rk}(\nu S)_{k+1}^{n+1}\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

mit den Koeffizienten

$$d_{lk} = \frac{2}{h_l(h_l+h_r)} \qquad d_{mk} = -\frac{2}{h_l h_r} \qquad d_{rk} = \frac{2}{h_r(h_l+h_r)}\ . \tag{3.21}$$

Die Akkretionsrate (3.10) bestimmt sich in diskretisierter Form zu

$$\dot M = 3\pi\left[\frac{h_r}{h_l(h_l+h_r)}\,(\nu S)_{k-1} - \frac{h_r-h_l}{h_l h_r}\,(\nu S)_k - \frac{h_l}{h_r(h_l+h_r)}\,(\nu S)_{k+1}\right]\ . \tag{3.22}$$

3.2.3 Lösungsverfahren

Wie man anhand des Gleichungssystems (3.20) feststellen kann, ist zur Bestimmung der S_k^{n+1} die Kenntnis der Nachbarwerte zum alten und/oder neuen Zeitgitterpunkt erforderlich. Die vorliegende Situation ist in Abb. 3.1 dargestellt. Die Art des Verfahrens hängt dabei von der Wahl des Parameters Θ ab.

Ist $\Theta = 1$, liegen der Berechnung von S_k^{n+1} ausschließlich die Werte an den Stützstellen $k-1$, k und $k+1$ des *vorigen* Zeitpunkts t_n zugrunde. Das Verfahren heißt explizit.
Ist $\Theta = 0$, verwendet man entsprechend nur die Werte vom *folgenden* Zeitpunkt t_{n+1}. Das Verfahren heißt voll implizit.
Ist schließlich $0 < \Theta < 1$, nimmt man eine Mischung der Werte an den Stützstellen zu *beiden* Zeitpunkten. Die Gewichtung hängt von der Wahl der Größe von Θ ab. Das Verfahren heißt implizit.

Es läßt sich leicht erkennen, daß für $\Theta = 1$ das Gleichungssystem (3.20) deutlich vereinfacht wird. Es kann ohne ein aufwendigeres Iterationsverfahren gelöst werden. Der Nachteil des expliziten Schemas ist jedoch eine Begrenzung in der Wahl der Zeitschrittweite Δt. Eine Richtlinie für diese Einschränkung von Δt liefert das Stabilitätskriterium für die numerische Behandlung der *linearen* Diffusionsgleichung (Richtmyer & Morton [47]).

$$\begin{aligned} \Delta t \;\; &\leq \frac{(\Delta x)^2}{2D}\frac{1}{2\Theta - 1} \qquad &\text{für} \qquad & 0 \leq \Theta < \frac{1}{2} \\ \Delta t \;\; &\qquad \text{beliebig} &\text{für} \qquad & \frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1\ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Δx ist der typische Abstand zweier Punkte im Gitter der Radiusvariable x und D die Diffusionskonstante des Problems. Im vorliegenden Fall einer *nicht-linearen* Diffusionsgleichung ist D jedoch nicht konstant, sondern ortsabhängig. Daher wird das Stabilitätskriterium für verschiedene Modelle unterschiedlich ausfallen und die Beschränkung von Δt abhängig vom verwendeten Modell sein. Das voll implizite Verfahren umgeht diese Beschränkung der Zeitschrittweite, allerdings auf Kosten der Einfachheit der Gleichungen. Darüberhinaus bietet sich das Crank-Nicholson-Verfahren ($\Theta = \frac{1}{2}$, Spezialfall eines impliziten Zeitschritts) als mögliche Vorgehensweise an (Crank & Nicholson [11]). Der Fehler der zeitlichen Approximation geht hier mit 2. Ordnung in Δt, während das explizite und das voll implizite Verfahren nur in 1. Ordnung genau sind (Press *et al.* [44]). Trotz dieses Vorteils gegenüber dem voll impliziten Verfahren ist aufgrund der Nichtlinearität des Problems nie gewährleistet, daß das Verfahren für $\Theta = \frac{1}{2}$ stabil bleibt. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit eine voll implizite Behandlung vorgezogen.

Das Gleichungssystem (3.20) wird nun allgemein für ein frei wählbares Θ mit $0 \leq \Theta \leq 1$ gelöst. Zu dessen Lösung kommt wieder das Newton-Raphson-Iterationsverfahren zur Anwendung. Beginnend mit einem Schätzwert für die unbekannten S_k^{n+1}, z.B. die Werte von S_k^n, ermittelt man mit Hilfe der Scheibengleichungen (2.2) - (2.12) die neuen Viskositäten ν_k^{n+1}. Gleichung (3.20) ist damit jedoch noch nicht gelöst, denn i.a. bleibt ein Rest

$$\begin{aligned} R_k \;=\; & S_k^{n+1} - S_k^n - \Theta\,\Delta t\,\frac{12}{x_k^2}\,\left(d_{lk}(\nu S)_{k-1}^n + d_{mk}(\nu S)_k^n + d_{rk}(\nu S)_{k+1}^n\right) \\ & - (1-\Theta)\;\Delta t\,\frac{12}{x_k^2}\,\left(d_{lk}(\nu S)_{k-1}^{n+1} + d_{mk}(\nu S)_k^{n+1} + d_{rk}(\nu S)_{k+1}^{n+1}\right)\ . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Angestrebt wird $R_k = 0$. Zu diesem Unterfangen sei

$$\mathfrak{S}_k^{n+1} = S_k^{n+1} \,+\, \delta S_k^{n+1} \tag{3.25}$$

definiert als die gesuchte Lösung des Problems mit den unbekannten Korrekturen δS_k^{n+1}. Jetzt ist zu beachten, daß die Viskosität ν eine Funktion der Größe S ist.

Man erhält durch eine Taylorentwicklung

$$\nu(\mathfrak{S}_k^{n+1}) = \nu(S_k^{n+1}) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial S}\right)_k^{n+1} \delta S_k^{n+1} \; . \tag{3.26}$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial \nu}{\partial S}$ läßt sich als Differenzenquotient

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial S}\right)_k^{n+1} = \frac{\tilde{\nu}_k^{n+1} - \nu_k^{n+1}}{\tilde{S}_k^{n+1} - S_k^{n+1}} \tag{3.27}$$

darstellen und kann ebenfalls aus dem anfänglichen Schätzwert bestimmt werden. Dabei muß der Algorithmus für die Lösung der Aufbaugleichungen für die Scheibe ein zweitesmal für

$$\tilde{S}_k^{n+1} = S_k^{n+1}\,(1+\eta) \tag{3.28}$$

mit $\eta \ll 1$ (hier $\eta = 10^{-3}$) durchlaufen werden. Daraus können die Werte von $\tilde{\nu}_k^{n+1}$ ermittelt werden.

Durch Einsetzen von Gleichung (3.26) in (3.24) erhält man ein neues Gleichungssystem, nun aber eines der Korrekturen δS_k^{n+1}. Dieses hat die Form

$$X_k\,\delta S_{k-1}^{n+1} \;+\; Y_k\,\delta S_k^{n+1} \;+\; Z_k\,\delta S_{k+1}^{n+1} = -R_k \tag{3.29}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
X_k &= - (1-\Theta)\;\Delta t\,\frac{12}{x_k^2}\,d_{lk} \quad \left[\nu_{k-1}^{n+1} + \left(S\frac{\partial \nu}{\partial S}\right)_{k-1}^{n+1}\right] \\
Y_k &= 1 - (1-\Theta)\;\Delta t\,\frac{12}{x_k^2}\,d_{mk} \quad \left[\nu_{k}^{n+1} + \left(S\frac{\partial \nu}{\partial S}\right)_{k}^{n+1}\right] \\
Z_k &= - (1-\Theta)\;\Delta t\,\frac{12}{x_k^2}\,d_{rk} \quad \left[\nu_{k+1}^{n+1} + \left(S\frac{\partial \nu}{\partial S}\right)_{k+1}^{n+1}\right] \; .
\end{aligned} \tag{3.30}$$

X_k, Y_k, Z_k und R_k lassen sich also für gegebenes S_k^{n+1} berechnen.

Gleichung (3.29) stellt ein tridiagonales Gleichungssystem dar. In Matrixschreibweise bilden die Werte von X_k, Y_k und Z_k die Haupt- und Nebendiagonalen einer Matrix mit tridiagonaler Gestalt. Die Lösung des Gleichungssystems kommt also der Inversion der Matrix gleich. Dies gelingt mit der Rekursionformel (z.B. in Press *et al.* [44])

$$\delta S_k^{n+1} = U_k\,\delta S_{k+1}^{n+1} + V_k \; . \tag{3.31}$$

Gleichung (3.31) wird in (3.29) eingesetzt

$$X_k\,\left(U_{k-1}\,\delta S_k^{n+1} + V_{k-1}\right) \;+\; Y_k\,\delta S_k^{n+1} \;+\; Z_k\,\delta S_{k+1}^{n+1} = -R_k \; , \tag{3.32}$$

mit dem Ergebnis

$$\delta S_k^{n+1} = -\frac{Z_k}{U_{k-1}\,X_k + Y_k}\,\delta S_{k+1}^{n+1} \;-\; \frac{R_k + V_{k-1}\,X_k}{U_{k-1}\,X_k + Y_k} \; . \tag{3.33}$$

Der Koeffizientenvergleich mit (3.31) ergibt

$$U_k = -\frac{Z_k}{U_{k-1}\,X_k + Y_k} \qquad\qquad V_k = -\frac{R_k + V_{k-1}\,X_k}{U_{k-1}\,X_k + Y_k}\ . \tag{3.34}$$

Mit diesen beiden Rekursionformeln für die Hilfsgrößen U_k und V_k lassen sich die gesuchten Korrekturen δS_k^{n+1} für S im Gitterpunkt $(k, n+1)$ bestimmen. Mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens wird S_k^{n+1} durch mehrmaliges Durchlaufen des Lösungsalgorithmus bis zur Selbstkonsistenz gebracht. Auf diese Weise wird sukzessiv jeder Zeitschritt ausgeführt.

3.2.4 Rand- und Anfangsbedingungen

Die partielle Differentialgleichung (3.9) benötigt zur Lösung natürlich Rand- und Anfangsbedingungen. Die Flächendichte an den Rändern der Scheibe wird für jeden neuen Zeitschritt auf

$$\Sigma_1^{n+1} = 0 \qquad\qquad (\,S_1^{n+1} = 0\,) \tag{3.35}$$

$$\Sigma_K^{n+1} = 0 \qquad\qquad (\,S_K^{n+1} = 0\,) \tag{3.36}$$

festgelegt. Im Unendlichen strebt die Flächendichte des Scheibenmaterials gegen Null. Von daher ist Wahl der Außenrandbedingung für Σ – zumindest für Scheiben ohne äußeren Masseneinfall – gerechtfertigt. In der Nähe des Sterns nimmt die Flächendichte dagegen große Werte an. Die obige Wahl der Innenrandbedingung bedeutet, daß alle Materie, die den Punkt r_1 passiert, dem System endgültig entnommen wird und auf den Protostern fällt.

Die Korrekturen werden dem entsprechend

$$\delta S_1^{n+1} = 0 \qquad\qquad \delta S_K^{n+1} = 0 \tag{3.37}$$

gesetzt. Für die Rekursionsformeln folgt somit

$$U_1 = 0 \qquad\qquad V_1 = 0 \tag{3.38}$$

$$U_K = 0 \qquad\qquad V_K = 0\ . \tag{3.39}$$

Die Anfangsbedingung für die Scheibe zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird durch die Vorgabe der Flächendichte an jeder radialen Stützstelle gegeben. Durch diese Vorgabe sind die anfänglichen Werte der Scheibenmasse und des Gesamtdrehimpulses der Scheibe eindeutig bestimmt. Die Situation des Anfangs- und Randwertproblems zeigt Abb. 3.2.

Die Wahl der Anfangsbedingung wird durch die Tatsache erschwert, daß aus der Beobachtung noch wenig über die Eigenschaften von Akkretionsscheiben um neu entstehende Sterne bekannt ist. Hier hilft weiter, daß die zeitliche Entwicklung der Scheiben durch einen diffusionsartigen Prozeß beschrieben wird. Nach einiger Zeit der Rechnung sollte daher die Erinnerung an die spezielle Form des Anfangsmodells weitgehend verloren gehen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß – je nach Anfangsmodell – bereits während der Anlaufphase der Rechnung ein merklicher Teil der Masse der Scheibe an den Stern verlorengeht. Damit die Scheibe später nicht zu massearm wird, sollte in solchen Fällen die Scheibenmasse anfänglich nicht zu niedrig angesetzt werden. Der Gesamtdrehimpuls nimmt mit der Entleerung der Scheibe ebenfalls ab,

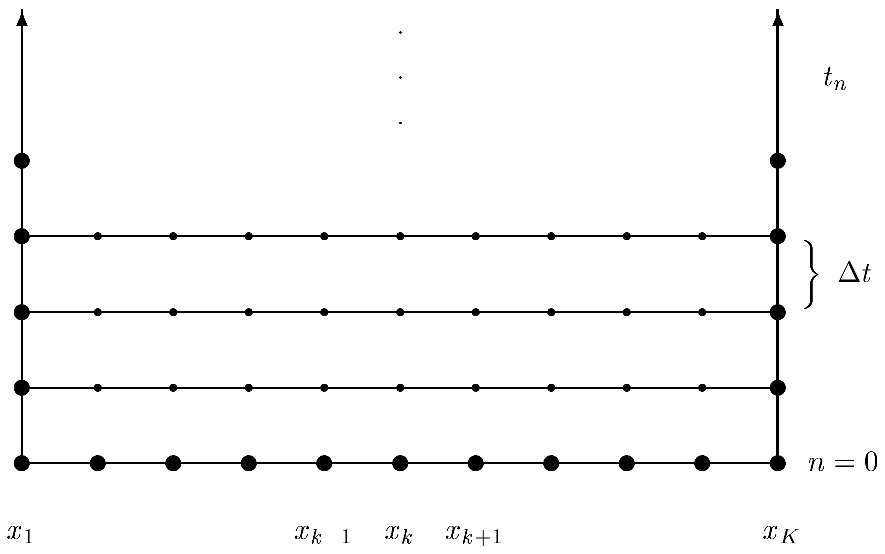

Abbildung 3.2: Gitterstruktur für die Berechnung der zeitabhängigen Scheibenmodelle. Das Gitter (kleine Punkte) wird durch die Rand- und Anfangsbedingungen (große Punkte) umrahmt. Zur Berechnung der Scheibenstruktur im Zeitpunkt t_n dient das Modell der Scheibe zum Zeitpunkt t_{n-1}.

aufgrund des Drehimpulstransports allerdings nur um wenige Prozent (Ruden & Pollack [48]).

In der Testphase der Rechnungen wurde mit unterschiedlichen Anfangsmodellen operiert. Der radiale Verlauf der Flächendichte wurde dabei wahlweise durch ein kastenförmiges Profil, durch eine Gauss-Verteilung (analytisches Modell nach Cassen [10]) oder durch ein stationäres Modell vorgegeben. Als günstigste Wahl stellte sich die eines stationären Anfangsmodells heraus. Durch dieses wurde die asymptotische Lösung in kürzerer Zeit erreicht als bei den anderen Anfangs-Verteilungen der Flächendichte. Dieser Umstand ist darauf zurückzuführen, daß $\dot{M}$ im Fall des stationären Anfangsmodells gegenüber den anderen Anfangsmodellen während der Zeitentwicklung am wenigsten modifiziert wird.

Die anfänglichen Wahl der Zeitschrittweite Δt sollte nicht zu groß ausfallen, um in der Einschaltphase die Einstellung auf das Anfangsmodell zu ermöglichen (z. B. 10^{-6} a). Sie kann dann während der Rechnung langsam vergrößert werden. Die Zeitschrittweite wird allerdings veringert, wenn sich relevante Scheibengrößen, wie z. B. die Flächendichte, zwischen zwei Zeitpunkten zu stark verändern (hier bei Veränderung von mehr als 3 %).

3.3 Testlauf für eine δ-Quelle der Flächendichte

Abb. 3.3 zeigt das Ergebnis eines Testlaufs der zeitlichen Entwicklung der Flächendichte für eine anfängliche Rechteckverteilung. Es ist deutlich zu erkennen, wie sich die Materie im Laufe der Zeit diffusiv über die Scheibe ausbreitet. Dem überlagert

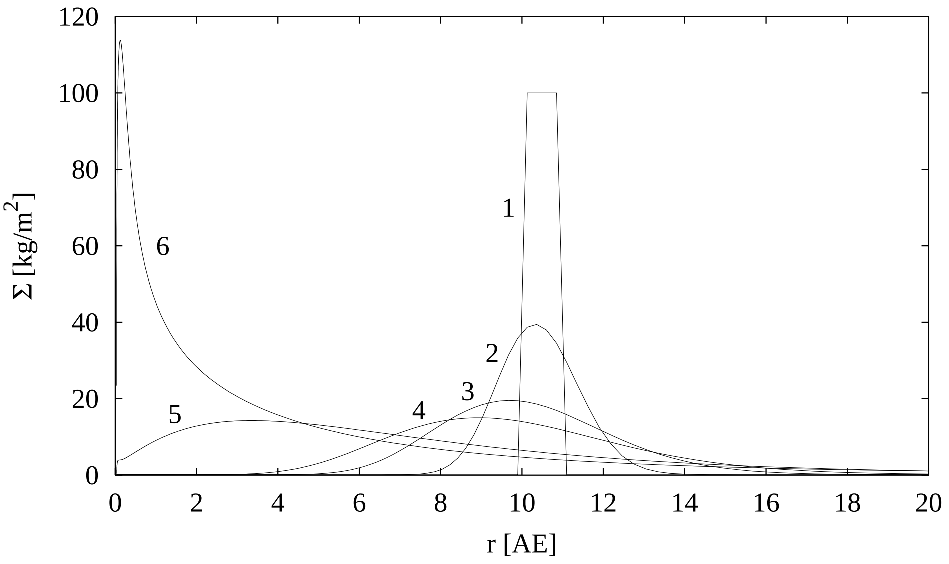

Abbildung 3.3: Verlauf der Flächendichte Σ für ein rechteckiges Anfangsmodell (1) nach 10^4 a (2), $5 \cdot 10^4$ a (3), 10^5 a (4), $5 \cdot 10^5$ a (5) und 10^6 a (6).

ist der Massentransport in Richtung Protostern. Nach ca. 0.5 Ma erreicht die Materie den Innenrand. Der ausgeprägte Peak nach 1 Ma ist darauf zurückzuführen, daß die Flächendichte nach Definition auf die Fläche eines Kreisringes im Abstand r vom Stern bezogen ist. Nach einigen Ma ist die Materie gänzlich im Stern verschwunden.

3.4 Ergebnisse

Die Untersuchung von protoplanetaren Scheiben ohne Staubdiffusion beschränkt sich in dieser Arbeit auf ein Modell mit der Anfangs-Scheibenmasse $M_S(t=0) = 0.245\,\mathrm{M}_\odot$, dem initialem Scheiben-Drehimpuls von $J_{\mathrm{ges}}(t=0) = 5.74 \cdot 10^{45}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ und dem Viskositätsparameter $\alpha = 10^{-2}$. Dies sind exakt die Scheibenparameter, die schon in einem der Modelle von Ruden & Pollack [48] für die numerische Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Struktur von protoplanetaren Akkretionsscheiben verwendet wurden (Abbildungen 3.4 und 3.5 oben). Im Vergleich dazu sind die Ergebnisse der Rechnungen dieser Arbeit dargestellt (Abbildungen 3.4 und 3.5 unten).

Die Annahmen über den Aufbau der Scheiben bei Ruden & Pollack [48] sind mit jenen in dieser Arbeit weitesgehend identisch: α-Scheiben in Einzonennäherung mit ähnlicher Chemie (äquivalenter Ansatz für die Opazität, jedoch keine H_2-Dissoziation und kein akkretiver Massenzuwachs des Sterns). Der wichtigste Unterschied besteht in der Annahme von Ruden & Pollack [48], daß turbulente Konvektion die einzige Ursache der (nicht-molekularen) Viskosität ist. Unterschreitet an einem Ort die vertikale optische Tiefe einen kritischen Wert ($\tau_{\mathrm{crit}} = 1.78$), so verschwindet die Konvektion, weil dort die Scheibe optisch dünn wird. Mit τ_{crit} ist eine radialabhängige kritische Flächendichte $\Sigma_{\mathrm{crit}}(r)$ verbunden, die dem Grenzkriterium der Scheibe gegen konvektive Instabilität entspricht, und ein 'Abbruchradius', außerhalb dem die Flächendichte Null gesetzt wird (Abb. 3.4 (a)). Die Folge ist, daß die Scheiben von Ruden & Pollack [48] nach einiger Zeit einen stationären Endzustand erreichen, während sich die Scheiben in dieser Arbeit noch weiter entwickeln (Abb. 3.4 (e)). Diese Tatsache spiegelt sich bei allen abgebildeten Größen wieder.

Ein weiterer Unterschied zwischen den Modellen besteht in der Wahl des Anfangsmodells für die Flächendichte (gepunktete Linien in Abb. 3.4 (a) und (e)). Ruden & Pollack [48] wählten eine Verteilung $\Sigma(r) = \Sigma_0[1 + (r/r_0)]^{-n}$, wobei Σ_0, r_0 und n Masse und Drehimpuls der Scheibe bestimmen. Dagegen wird hier zum Zeitpunkt $t = 0$ aus angesprochenen Gründen (Abschnitt 3.2.4) ein stationäres Modell verwendet. Um sich die Scheibenmasse und den Gesamtdrehimpuls beliebig vorgeben zu können, muß dazu das stationäre Modell modifiziert werden. Die bisherige Wahl eines konstanten Wertes der Massenakkretionsrate $\dot{M}$ wird zu diesem Zweck durch eine radiale Verteilung der Form

$$\dot{M}(r) = \begin{cases} \dot{M}_0 & \text{für} \quad r < r_0 \\ \dot{M}_0 \left(\dfrac{\dot{M}_1}{\dot{M}_0} \right)^{\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - r_1^2}} & \text{für} \quad r_0 < r < r_1 \\ \dot{M}_1 & \text{für} \quad r > r_1 \end{cases} \tag{3.40}$$

ersetzt. $\dot{M}_0$ legt die Akkretionsrate innerhalb des Radius' r_0 und $\dot{M}_1$ die Akkretionsrate außerhalb des Radius' r_1 fest. Im Zwischenbereich fällt die Akkretionsrate gemäß einer Gauss-Verteilung ab. Im obigen Modell ist $r_0 = 5\,AE$, $r_1 = 50\,AE$, $\dot{M}_0 = 1.77 \cdot 10^{-5}$ und $\dot{M}_1 = 6.85 \cdot 10^{-17}$.

Anhand der Verläufe der Flächendichte Σ und der Zentraltemperatur T_c (Abb. 3.4 (e) und (f)) lassen sich die Signaturen der stationären Modelle wiedererkennen. Für die Temperaturplateaus sind demzufolge die Verdampfung von Eis und Staub verantwortlich. Deutlich ist auch der Massenverlust der Scheibe unter gleichzeitigem Massen- und Drehimpulstransport nach außen zu erkennen. Am Innenrand fallen die physikalischen Größen durch die unnatürliche Innenrandbedingung steil ab. Erst für $r \gtrsim 0.1$ AE liegen physikalische Resultate vor. In der heißesten Zone der Scheibe ist die Flächendichte gegenüber dem Modell von Ruden & Pollack [48] vermindert. Dies ist auf die H_2-Dissoziation oberhalb $T_c \approx 2000\,\mathrm{K}$ zurückzuführen.

Die Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ und nahezu auch der Zentraldruck p_c zeigen Verläufe, die glatten Potenzgesetzen entsprechen (Abb. 3.4 (g) und (h)). Weit außen fällt die Oberflächentemperatur der Scheibe auf die Temperatur der Molekülwolke ab.

In Abb. 3.5 sind neben der Zentraldichte ρ_c ((a) bzw. (e)) und der vertikalen optischen Tiefe τ ((c) bzw. (g)) in (b) das Verhältnis von Scheibenhöhe zu Radius h_s/r und in (d) der Toomre-Parameter Q aufgetragen. In den unteren Plots treten an deren Stelle das Rosselandmittel des Massenextinktionskoeffizienten κ und die radiale Driftgeschwindigkeit v_r ((f) bzw. (h)). Der Toomre-Parameter stellt ein Maß für die gravitative Stabilität der Scheibe dar: für $Q > 1$ ist die Scheibe lokal stabil gegenüber axialsymmetrischen gravitativen Störungen (Toomre [58], Goldreich & Lynden-Bell [19]).

Die Kurven von κ und τ spiegeln in ähnlicher Weise die chemischen Prozesse in der Scheibe wieder. Lokale Minima treten dort auf, wo festes Material (Eis bzw. Staub) verdampft. Der radiale Verlauf von v_r verdeutlicht nochmals den einwärts und auswärts gerichteten Massentransport in der Scheibe. Zu beachten ist, daß die physikalischen Größen in dieser Arbeit in SI-Einheiten anstatt im cgs-System dargestellt sind.

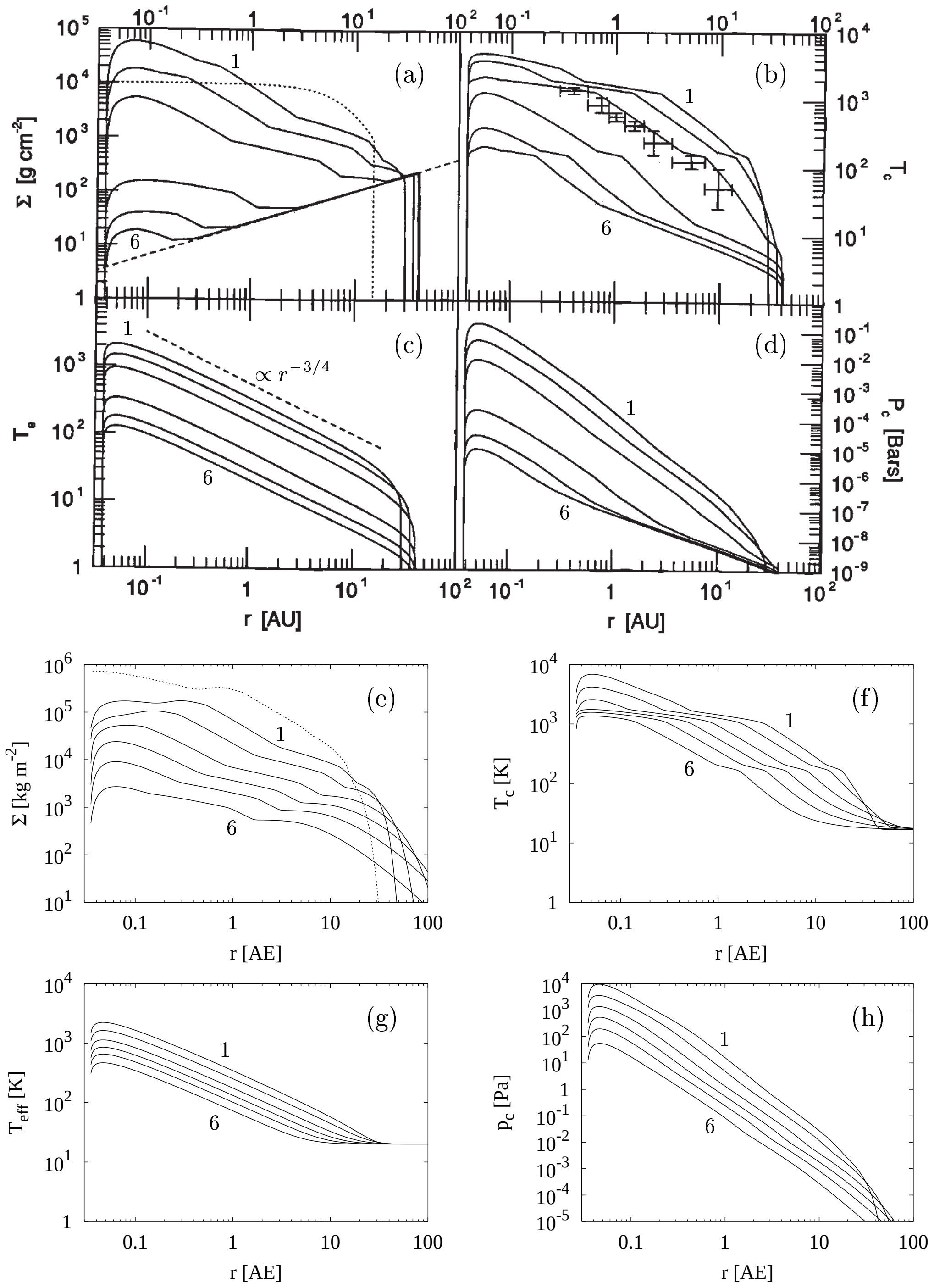

Abbildung 3.4: Radialer Scheibenaufbau des Modells mit $M_\mathrm{S}(t=0) = 0.245\,\mathrm{M}_\odot$, $J_\mathrm{ges}(t=0) = 5.74 \cdot 10^{45}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ und $\alpha = 10^{-2}$ nach $t = 10^4,\ 3 \cdot 10^4,\ 10^5,\ 3 \cdot 10^5,\ 10^6$ und $3 \cdot 10^6\,\mathrm{a}$ (Kurven (1) - (6)). (a) - (d) Modell nach Ruden & Pollack [48]. (e) - (h) Modell dieser Arbeit. (a) + (e) Entwicklung der Flächendichte Σ. Die gepunkteten Kurven zeigen die Startmodelle. (b) + (f) Zentraltemperatur T_c. Die Kreuze sind die von Lewis [30] angegebene Abschätzung für die Temperatur im Sonnennebel zum Zeitpunkt der Planetenentstehung. (c) + (g) Effektivtemperatur T_eff. Die gestrichelte Kurve gibt den Verlauf im stationären Modell an. (d) + (h) Zentraldruck ρ_c.

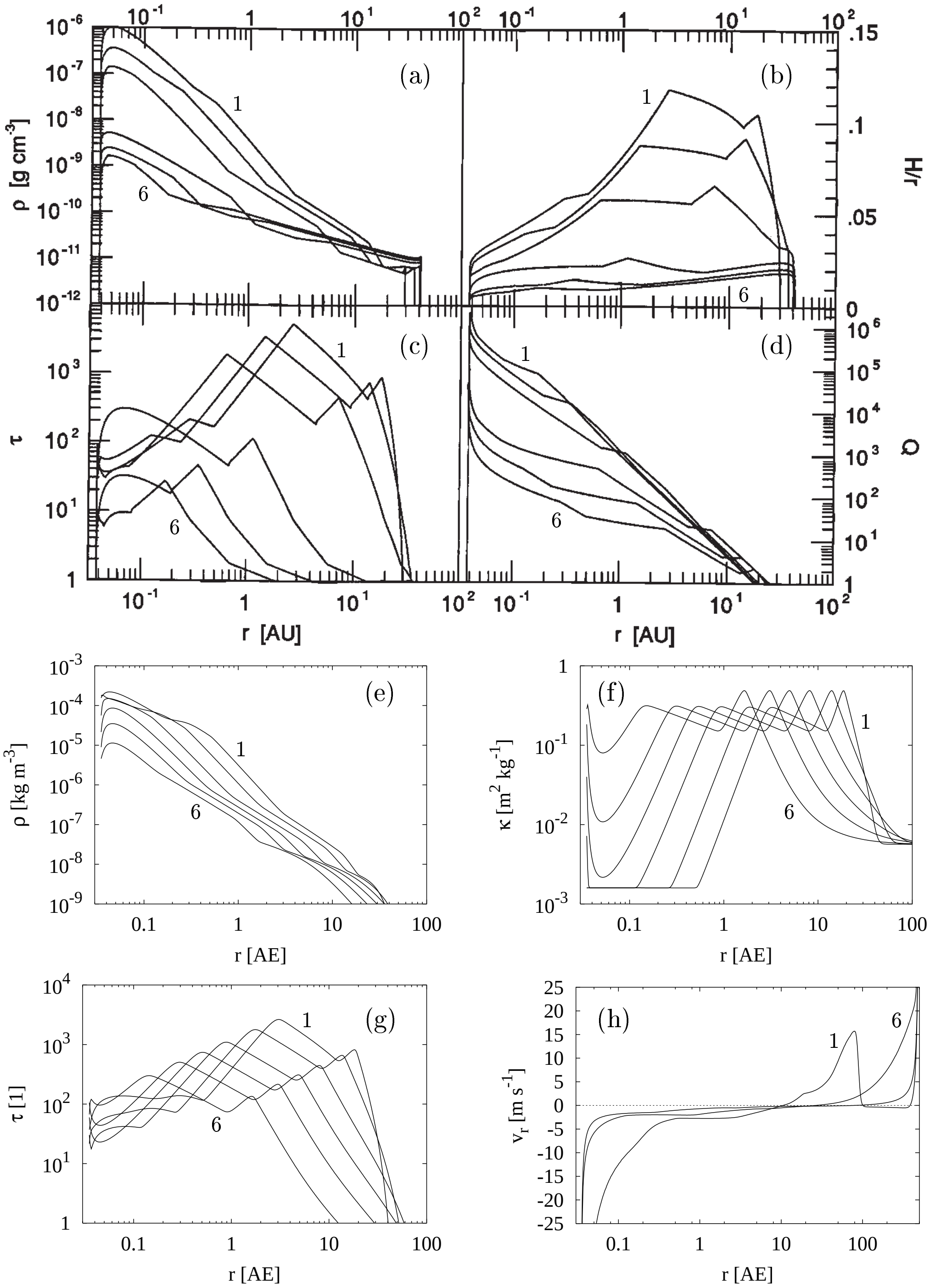

Abbildung 3.5: Radialer Scheibenaufbau des Modells wie in Abb. 3.4. (a) - (d) Modell nach Ruden & Pollack [48]. (e) - (h) Modell dieser Arbeit. (a) + (e) Zentrale Massendichte ρ_c. (b) Aspekt-Verhältnis H/r der Scheibe. (c) + (g) Vertikale optische Tiefe τ. (d) Toomre-Stabilitätsparameter Q. (f) Rosselandmittel des Massenextinktionskoeffizienten κ. (h) Radiale Driftgeschwindigkeit v_r.

Kapitel 4

Zeitabhängiges Modell mit Staubdiffusion

Aufbauend auf das vorige Kapitel wird in diesem Kapitel das zeitabhängige Modell einer protoplanetaren Akkretionsscheibe modifiziert durch die Einbeziehung der Staubdiffusion in die Rechnung. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Silikatstaubkomponente gerichtet. Der ursprünglich amorphe Silikatstaub kann nach dem Transport in den warmen Innenbereich der Scheibe kristallisieren. Der Prozeß des Ausheilens von Gitterdefekten in Festkörpern bei ausreichnend hohen Temperaturen wird als *Ausglühen*, *Tempern* oder in der angelsächsischen Literatur als *annealing* bezeichnet.

4.1 Diffusionsgleichung für den Staub

Die Materie in der Scheibe wird, wie gesehen, durch turbulente Prozesse diffusiv durchmischt. Diese Durchmischung betrifft auch den Staub, der in das Trägergas eingebettet ist, und je nach Größe der Staubpartikel mehr oder weniger effektiv mitbewegt wird. Aufgrund der geringen Teilchendichte des Staubes kann man das Diffusionproblem auf die Betrachtung eines einzelnen Staubpartikels innerhalb des Trägergases mit höherer Teilchendichte reduzieren und die Wechselwirkung der Staubteilchen untereinander vernachlässigen. Die Diffusionsgleichung für feste Körper, die sich durch ein gasförmiges Medium bewegen, hat die Form (Hirschfelder *et al.* [24])

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} n_i v_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} n \, D_{sg} \, \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{n_i}{n} + Q_i \; . \tag{4.1}$$

n_i ist hier die Teilchendichte der Staubkomponente i, n die Gesamt-Teilchendichte (bestimmt durch H_2 und He), v_μ die mittlere Teilchengeschwindigkeit in x_μ-Richtung, D_{sg} der binäre Diffusionskoeffizient der (seltenen) Staubpartikel im (dichten) Trägergas und Q_i der Quellterm für Gewinn und Verlust der Spezies i.

Zur Behandlung von Akkretionsscheiben ist die Wahl von Zylinderkoordinaten günstig. Zunächst aber wird die Teilchendichte durch die Konzentration $c_i = n_i/n$ der Spezies i ersetzt und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} v_\mu n = 0 \tag{4.2}$$

ausgenutzt. Es folgt

$$n\,\frac{\partial c_i}{\partial t} + n\,v_\mu\,\frac{\partial c_i}{\partial x_\mu} = n\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\,D_{sg}\,\frac{\partial c_i}{\partial x_\mu} + D\left(\frac{\partial n}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_\mu}\right) + Q_i\ . \tag{4.3}$$

Hier wurde zusätzlich der Diffusionsterm in Gleichung (4.1) mit der Produktregel ausdifferenziert. Obwohl die charakteristische Länge der radialen Änderung der Konzentration c_i die gleiche Größenordnung erreichen kann, wie die charakteristische Länge der radialen Änderung der Teilchendichte n (vergleiche spätere Ergebnisse), wird der zweite Term der rechten Seite von (4.3) der Einfachheit halber vernachlässigt. Die Teilchendichte wird herausgekürzt und die Gleichung über die z-Richtung integriert. Da kein äußerer Masseneinfall angenommen werden soll, fällt der Diffusionsterm in z-Richtung bei der Integration weg. Unter Vernachlässigung der azimuthalen Koordinate erhält man

$$\boxed{\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\underbrace{-\frac{\partial}{\partial r} r D_{sg}\,\frac{\partial c_i}{\partial r}}_{(1)} + \underbrace{v_r\,\frac{\partial}{\partial r} r c_i}_{(2)}\right) = \underbrace{\frac{c_{i-1}}{\tau_{i-1,i}} - \frac{c_i}{\tau_{i,i+1}}}_{(3)} + \underbrace{q_i}_{(4)}}\ . \tag{4.4}$$

Dies ist die Diffusionsgleichung für den Staub in der Mittelebene der Scheibe. Die mit (1) - (4) deklarierten Terme der Diffusionsgleichung (4.4) werden nun im einzelnen erläutert. Insbesondere wurde der Quellterm Q_i aufgeteilt in die beiden Ratenterme (3) und einen Quellterm für den äußeren Masseneinfall (4). Die unterschiedlichen Komponenten i entsprechen dabei Silikatstaub unterschiedlichen (diskreten) Kristallisationsgrades.

(1) **Diffusionsterm**: Die Kopplung der Staubbewegung an die des Gases führt auf eine Beziehung zwischen der (kinematischen) Viskosität ν und dem binären Diffusionskoeffizienten der Staubdiffusion D_{sg}. Es gilt

$$D_{sg} = \tilde{S}\,\nu\ , \tag{4.5}$$

wobei $\tilde{S}$ Schmidtzahl genannt wird. Im Falle von Durchmischungsvorgängen aufgrund von Turbulenz im Gas von Akkretionsscheiben, in dem kleine Partikel in ihrer Bewegung mitgerissen werden, erhält man $D_{sg} = \nu$ (Morfill [36]). Größere Körper beginnen unter typischen Bedingungen von protoplanetaren Akkretionsscheiben erst im dm-Bereich von der Gasbewegung zu entkoppeln (Weidenschilling [61]). Im Anbetracht des Vorhandenseins höchstens μm-großer Staubpartikel in der frühen Phase der Scheibenentwicklung wird in dieser Arbeit $\tilde{S} = 1$ gesetzt.

(2) **Advektionsterm**: Die Kopplung an die Gasbewegung läßt den Staub zusätzlich zur diffusiven Durchmischung eine radiale Bewegungskomponente aufgrund des Massentransportes in der Scheibe erfahren. Diese wird durch die radiale Driftgeschwindigkeit der Scheibenmaterie (2.14) beschrieben. In Gleichung (4.1) wurde daher die mittlere Teilchengeschwindigkeit v_μ durch die radiale Driftgeschwindigkeit v_r ersetzt.[1]

Eine weitere radiale Bewegungskomponente erhält der Staub durch den gegenüber dem Scheibengas fehlenden Druckgradienten in der Bewegungsgleichung für den

[1]Die mittlere Teilchengeschwindigkeit in radialer Richtung aufgrund diffusiver Durchmischung verschwindet aus Symmetriegründen identisch.

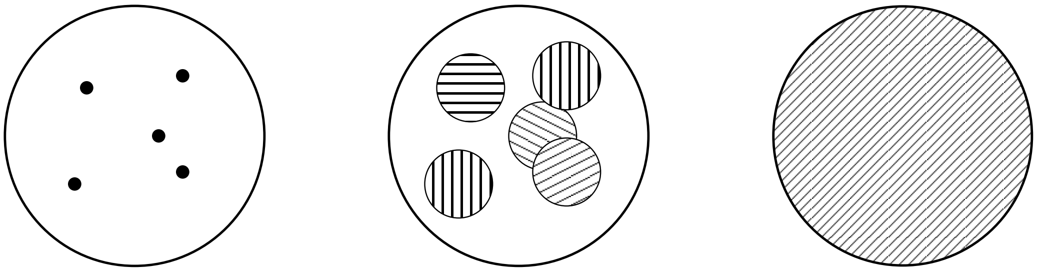

Abbildung 4.1: Wachstum der kristallierten Gebiete in einem Silikatstaubteilchen (Mitte), beginnend an den Keimzentren (links), bis zur vollständigen Kristallisation des Staubteilchens.

Staub. Die Relativgeschwindigkeit in radialer Richtung zwischen dem Staub von höchstens μm-Größe (MRN-Verteilung!) und dem Gas beträgt in typischen Scheiben maximal $10^{-4}\,\mathrm{ms}^{-1}$ (Weidenschilling [61], Interpolation der Relativgeschwindigkeit im Knudsen-Fall zu kleinen Teilchenradien hin). Im Vergleich dazu liegen charakteristische Driftgeschwindigkeiten um drei Größenordnungen höher. Der Einfluß des Druckterms kann daher für die Behandlung der Advektion des Staubes getrost vernachlässigt werden.

(3) **Gewinn und Verlust**: Die zeitabhängigen Modelle ohne Staubdiffusion haben gezeigt, daß der Massentransport durch die Scheibe innerhalb eines gewissen Radius' einwärts gerichtet ist. Ein Teil des Staubes gelangt auf diese Weise in die wärmere Innenregion der Scheibe. Die Silikate beginnen dort ihre Gitterdefekte 'auszukurieren' und auszukristallieren.
Bei ausreichend hohen Temperaturen gewinnen die SiO_4-Tetraeder im ungeordneten Silikatgitter genügend Energie, um Energiebarrieren (abstoßende Potentiale zwischen Atomen und Atomgruppen) zu überwinden, die sie in eine energetisch günstigere Position oder Orientierung im Gitter bringen. Die Folge ist eine Umlagerungswelle im großen Maßstab, durch die das Atomgitter der Silikatstaubteilchen eine in Teilen oder vollständig regelmäßige Anordnung erhält.[2] Dabei nimmt man an, daß kleine Bereiche im Gitter mit hohem Ordnungszustand, die bei der Kondensation der Staubteilchen wegen der großen Teilchenzahlen aus statistischen Gründen immer entstehen sollten, als Keimzentren der Kristallisation dienen.
Für die anderen wichtigen Staubkomponenten (Kohlenstoff- und Eisenstaub) existieren vergleichbaren Prozesse, die dem Gitter eine regelmäßigere Struktur verleihen. Allerdings wird die Opazität bei diesen Materialen nur unwesentlich verändert, so daß der Einfluß auf die Scheibenstruktur aufgrund deren Kristallisation vernachlässigbar ist.
Zur Lösung der Differentialgleichung (4.4) benötigt man die Kenntnis der charakteristischen Zeit des Ausglühens $\tau_{i,i+1}$, während der der Übergang von einer Staubkomponente i mit niedrigerem Kristallisationsgrad zu einer Staubkomponente $i+1$ mit höherem Kristallisationsgrad erfolgt. Für eine bestimmte Komponente i bedeutet dies eine Vergrößerung der Konzentration c_i durch Zuwachs von der Komponente $i-1$ (Gewinn) und eine Veringerung durch Abgabe an die Komponente $i+1$ (Verlust).

[2] Desintegration des Materials in mikrokristalline Bereiche mit unterschiedlicher Zusammensetzung und Austrieb eventuell vorhandener Verunreinigungen wird hier nicht betrachtet.

Es soll nun ein Zusammenhang für $\tau_{i,i+1}$ hergeleitet werden. Dazu wird stark vereinfachend angenommen, daß die Staubteilchen kugelförmig sind und die kristallinen Gebiete sich kubisch ausbreiten (Abb. 4.1; Anmerkung: die Abbildung zeigt *sphärisch* expandierende Gebiete). Deren Wachstum soll sich auch dann fortsetzen, wenn die Gebiete sich zu überlappen beginnen oder die Oberfläche des Staubteilchens erreichen. Mit anderen Worten 'sehen' sich die getemperten Regionen unter dieser vereinfachenden Voraussetzung nicht. Das Staubteilchen ist voll kristallisiert, wenn das Volumen der kriallisierten Würfel mit dem Volumen des Staubteilchens übereinstimmt.
Unter diesen Umständen gilt für das temperaturabhängige Wachstum der kristallisierten Bereiche

$$\frac{dV_{\mathrm{kr}}}{dt} = V_0 \cdot 6 \left(\frac{V_{\mathrm{kr}}}{V_0}\right)^{\frac{2}{3}} \nu_{\mathrm{ann}}\, e^{-\frac{E_{\mathrm{a}}}{kT}} \tag{4.6}$$

(Gail [18]). V_{kr} ist das Volumen der kristallisierten Regionen, ν_{ann} die charakteristische Frequenz beim annealing (Anzahl der Versuche einer Lage- oder Orientierungsänderung der SiO_4-Tetraeder pro Zeiteinheit), E_{a} die Aktivierungenergie für eine Veränderung der Lage oder Orientierung und

$$V_0 = \frac{A\, m_{\mathrm{H}}}{\rho_{\mathrm{s}}} \tag{4.7}$$

das Volumen, das ein SiO_4-Tetraeder im Kristall einnimmt. A ist das Atomgewicht der Verbindung und ρ_{s} die Massendichte des Festkörpers.
Wenn f_{kr} die Zahl der Keimzentren pro SiO_4-Tetraeder ist, läßt sich der Kristallisationsgrad des Silikatstaubteilchens definieren durch

$$x_{\mathrm{kr}} = min\left(1, \frac{f_{\mathrm{kr}}\, V_{\mathrm{kr}}}{V_0}\right) \tag{4.8}$$

($0 \leq x_i \leq 1$). Damit kann man (4.6) umschreiben in

$$\frac{dx_{\mathrm{kr}}}{dt} = \begin{cases} 6\, x_{\mathrm{kr}}^{\frac{2}{3}}\, f_{\mathrm{kr}}^{\frac{1}{3}}\, \nu_{\mathrm{ann}}\, e^{-\frac{E_{\mathrm{a}}}{kT}} & \text{für } x_{\mathrm{kr}} < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{4.9}$$

Mit Hilfe der Substitution $\xi = x_{\mathrm{kr}}^{\frac{1}{3}}$ bekommt man

$$\frac{d\xi_{\mathrm{kr}}}{dt} = \begin{cases} 2\, f_{\mathrm{kr}}^{\frac{1}{3}}\, \nu_{\mathrm{ann}}\, e^{-\frac{E_{\mathrm{a}}}{kT}} & \text{für } \xi_{\mathrm{kr}} < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \tag{4.10}$$

wobei die rechte Seite jetzt nicht mehr von der Variablen abhängt. Als nächster Schritt werden in Gleichung (4.4) ausschließlich die Ratenterme betrachtet:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \frac{c_{i-1}}{\tau_{i-1,i}} - \frac{c_i}{\tau_{i,i+1}} . \tag{4.11}$$

Vollzieht man nun den Übergang von den kontinuierlichen x_{kr} zu den diskreten x_i (bzw. von ξ_{kr} zu ξ_i), so erhält man durch eine Taylorentwicklung des ersten Terms auf der rechten Seite um ξ_i

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{c_{i-1}}{\tau_{i-1,i}}\right)(\xi_i - \xi_{i-1}) + \left(O((\xi_i - \xi_{i-1})^2)\right) , \tag{4.12}$$

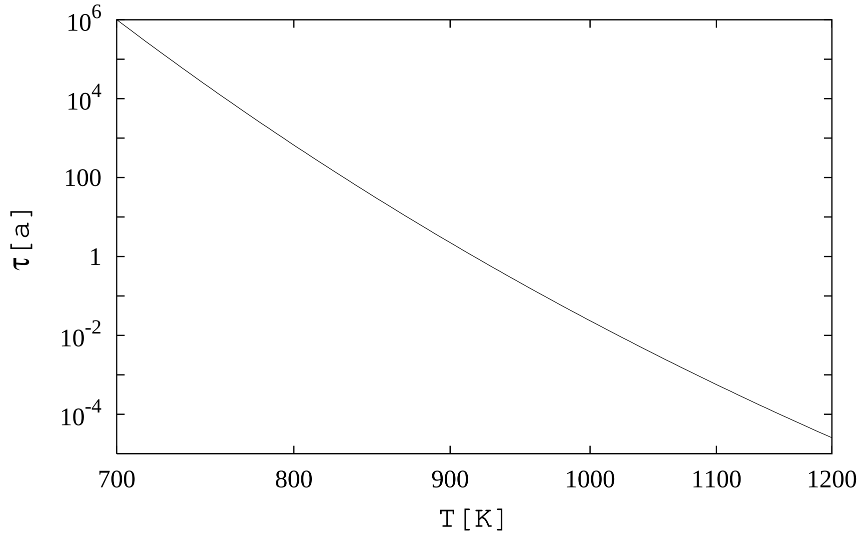

Abbildung 4.2: Charakteristische Zeit für vollständiges Ausglühens von Silikatstaubteilchen in Abhängigkeit von der Temperatur (s. Gleichung (4.14)).

wobei hier $c_i = c(\xi_i)$ ist. Daraus folgt für die charakteristische Ausglühzeit

$$\tau_{i-1,i} = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^{-1} (\xi_i - \xi_{i-1}) \tag{4.13}$$

oder unter Verwendung von (4.10) und anschließender Resubstitution

$$\tau_{i,i+1} = \frac{x_{i+1}^{1/3} - x_i^{1/3}}{2\, f_{\mathrm{kr}}^{1/3}\, \nu_{\mathrm{ann}}}\, e^{\frac{E_\mathrm{a}}{kT_\mathrm{c}}} \ . \tag{4.14}$$

für $x_i < 1$. Für die Temperatur wurde die Temperatur in der Scheibenmittelebene T_c eingesetzt.
Die unbekannten Werte von ν_{ann} und E_a lassen sich aus annealing-Experimenten amorpher Silikate ableiten. Für Mg_2SiO_4-Rauch erhielten Fabian *et al.* [17]

$$\nu_{\mathrm{ann}} = 2 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1} \qquad\qquad E_\mathrm{a}/k = (39\,100 \pm 400)\,\mathrm{K} \ . \tag{4.15}$$

Dies bestätigt frühere annealing-Experimente (Nuth & Donn [40]), aus denen $E_\mathrm{a}/k = 41\,000\,K$ für Silikate vom Typ des Olivin abgeleitet wurde (Lenzuni *et al.* [29], Duschl *et al.* [16]). Es sei nochmals betont, daß für kristallines Silikat lediglich Olivin, nicht aber Pyroxen in die Rechnung einbezogen ist (s. Anhang). Die Zahl der Keimzentren pro SiO_4-Tetraeder wird auf $f_{\mathrm{kr}} = 10^{-5}$ gesetzt. Aufgrund der Abhängigkeit $\tau_{i,i+1} \propto f_{\mathrm{kr}}^{-1/3}$ sollte die charakteristische Dauer des Ausheilungsprozesses nicht allzu stark von der Wahl von f_{kr} abhängen.
In Abb. 4.2 ist die charakteristische Zeit (4.14) für *vollständiges* Ausglühen der Silikatstaubteilchen gegen die Temperatur aufgetragen ($\tau_{1,N}(T)$ mit $x_1 = 0$ und $x_N = 1$). Es läßt sich erkennen, daß der Kristallisationsprozeß in einer protoplanetaren Akkretionsscheibe bei etwa 800 K wichtig wird ($\tau_{1,N} \approx 670\,\mathrm{a}$). Bereits ab 900 K läuft das annealing des Silikatstaubs verglichen mit der Lebensdauer von Scheiben praktisch instantan ab ($\tau_{1,N} \approx 2.2\,\mathrm{a}$).

(4) **Quellterm**: Zieht man mit in Betracht, daß auch während der ruhigen Phase der Scheibenentwicklung aus der Molekülwolke weiter Material auf die Scheibe

herabregnen kann, so bedeutet dies neben dem Massenzuwachs der Scheibe (vorwiegend durch die Gaskomponente) auch eine Quelle an frischem (amorphem) Staub. Masseneinfall auf die Scheibe wird in dieser Arbeit jedoch außer Acht gelassen. Für Gleichung (4.4) folgt damit

$$q_i = 0 \tag{4.16}$$

für jede Silikat-Staubkomponente i.

4.2 Auswirkung auf das Glgs.system für den Scheibenaufbau

Hat man Gleichung (4.4) für die Konzentrationen c_i der unterschiedlichen Komponenten i gelöst (s. folgender Abschnitt), wirkt sich dies wie folgt auf das Gleichungssystem (2.3) - (2.12) mit (3.1) - (3.6) zur Bestimmung des Aufbaus und der zeitlichen Entwicklung der Scheibe aus. Betroffen von einer Änderung ist lediglich die Berechnung der Opazität (2.8) (Details in (A.3) und Tab. A.1). Wie bereits anhand Abb. 2.1 festgestellt wurde, besitzen kristalline Silikate im Vergleich zu amorphen Silikaten eine wesentlich geringere Opazität. Um diesen Sachverhalt in der Behandlung der Aufbaugleichungen der Scheibe zu berücksichtigen, wird die frequenzgemittelte Näherung des Massenextinktionskoffizienten für den Staub κ_3 in Tab. A.1 ersetzt durch[3]

$$\kappa_3 = \kappa_{\mathrm{Staub}} = f_{\mathrm{Fe}}\,\kappa_{\mathrm{Fe}} + f_{\mathrm{C}}\,\kappa_{\mathrm{Ruß}} + f_{\mathrm{Sil}}\,\kappa_{\mathrm{Sil}}\ . \tag{4.17}$$

f_{Fe}, f_{C} und f_{Sil} sind die Kondensationsgrade von Eisen, Kohlenstoff bzw. Silikat in Festkörpern (Staub) innerhalb der Scheibe und κ_{Fe}, $\kappa_{\mathrm{Ruß}}$ und κ_{Sil} die Extinktionskoeffizienten von Eisenstaub, Ruß bzw. Silikatstaub. Der letztere berechnet sich näherungsweise aus

$$\kappa_{\mathrm{Sil}} = \sum_{i=1}^{N} c_i\,(x_i\,\kappa_{\mathrm{Sil,kr}} + (1-x_i)\,\kappa_{\mathrm{Sil,am}}) \tag{4.18}$$

durch Summierung über alle Silikatstaubkomponenten $i = 1\ldots N$. $\kappa_{\mathrm{Sil,kr}}$ und $\kappa_{\mathrm{Sil,am}}$ sind die Extinktionskoeffizienten von kristallinem bzw. amorphem Silikatstaub und x_i der Kristallisationsgrad der i-ten Komponente (s. Gleichung (4.14)). Strenggenommen müßte man zur Bestimmung von κ_{Sil} das Rosselandmittel des Gemischs von Silikatstaubkörnern unterschiedlichen Kristallisationsgrades nehmen. Die Frequenzabhängigkeit von κ_{Sil} ist jedoch nicht allzu stark und wird in (4.18) vernachlässigt. Die Staubkonzentration c_i jeder Komponente i ist nun mittels (4.17) und (4.18) in die Berechnung des Scheibenaufbaus einbezogen.

Für $\kappa_{\mathrm{Sil,am}}$, $\kappa_{\mathrm{Ruß}}$, $\kappa_{\mathrm{Sil,kr}}$ und κ_{Fe} werden die temperaturabhängigen Approximationen (A.4) - (A.7) nach Gail (private Mitteilung) verwendet. Die Kondensationsgrade von Eisen, Kohlenstoff und Silikat werden in der Behandlung konstant auf

$$f_{\mathrm{Fe}} = 0.4 \qquad f_{\mathrm{C}} = 0.55 \qquad f_{\mathrm{Sil}} = 1.0 \tag{4.19}$$

[3]Die Addition von Rosseland-gemittelten Extinktionskoeefizienten unterschiedlicher Komponenten ist strenggenommen nur erlaubt, wenn $\kappa(\nu) \approx \mathrm{const.}$ ist.

gesetzt (Pollack *et al.* [43]). Der Kondensationsgrad von Silikat ist natürlich identisch eins, da es unter präsolaren Bedingungen nicht im gasförmigen Zustand vorkommen kann. Der Wert von $f_{\rm Fe}$ kommt unter der Annahme zustande, daß Quarz – im Gegensatz zur Annahme in Pollack *et al.* [43] – in der Scheibe nicht vorhanden ist.

Sind die c_i nach Lösung von (4.4) bekannt, läßt sich auch der mittlere Kristallisationsgrad des Silikatstaubs angeben. Er ist gegeben durch den Ausdruck

$$c = \sum_{i=1}^{N} x_i \, c_i \ . \tag{4.20}$$

Die neben Silikat-, Eisen und Kohlenstoffstaub vorkommenden Staubsorten in der Scheibe (vorwiegend Troilit und Korund) werden in der Berechnung der Staub-Opazität (4.17) vernachlässigt.

4.3 Numerische Behandlung der Diffusionsglg. für den Staub

Im physikalischen Sinne handelt es sich bei (4.4) um eine Differentialgleichung vom Typ einer Advektions-Diffusionsgleichung. Im Vergleich zur Diffusionsgleichung (3.1) für die Flächendichte Σ bzw. (3.9) für die substituierte Größe S treten in (4.4) die oben beschriebenen Zusatzterme für die Advektion bzw. für den Gewinn und Verlust auf. Zum Zwecke der numerischen Behandlung ist der folgende Sachverhalt nützlich. Die Driftgeschwindigkeit v_r stellt eine – zumindest für einen weiten Scheibenbereich – mit der Zeit schwach veränderliche Funktion dar (s. Abb. 3.5). Daher wird der Advektionsterm in Gleichung (4.4) bei jedem Zeitschritt gesondert von den anderen Termen behandelt. Diese Verfahrensweise ist unter dem Begriff *operator splitting* bekannt.

4.3.1 Diffusion und Kristallisation

Als erster Schritt erfolgt die numerische Behandlung des Diffusionsterms gemeinsam mit dem Ratenterm. Die Differentialgleichung (4.4) reduziert sich aufgrund der getrennten Bearbeitung des Advektionsterms zu

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r D_{sg} \frac{\partial c_i}{\partial r} + \frac{c_{i-1}}{\tau_{i-1,i}} - \frac{c_i}{\tau_{i,i+1}} \ . \tag{4.21}$$

Zunächst benötigt man ein diskretes Gitter für den Kristallisationsgrad (Abb. 4.3). Daraufhin ist aber Gleichung (4.4) bereits zugeschnitten, denn sie unterscheidet aufgrund des Indixes i zwischen N Komponenten mit *diskretem* Kristallisationsgrad $x_1 \dots x_N$.[4] Es wird hier $N = 11$ gesetzt, d. h. $x_1 = 0.0$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0.2, \dots,$ $x_{10} = 0.9$, $x_{11} = 1.0$.

Die weitere Vorgehensweise zur numerischen Behandlung gründet wieder auf einer finiten Differenzen-Methode, ähnlich der in Kapitel 3.2 beschriebenen. Gleichbedeutend einer Taylorentwicklung der Ableitungen in (4.21) unter Vernachlässigung

[4] Strenggenommen müßte man eine kontinuierliche Variable x für den Kristallisationsgrad einführen, um das Problem physikalisch korrekt zu beschreiben.

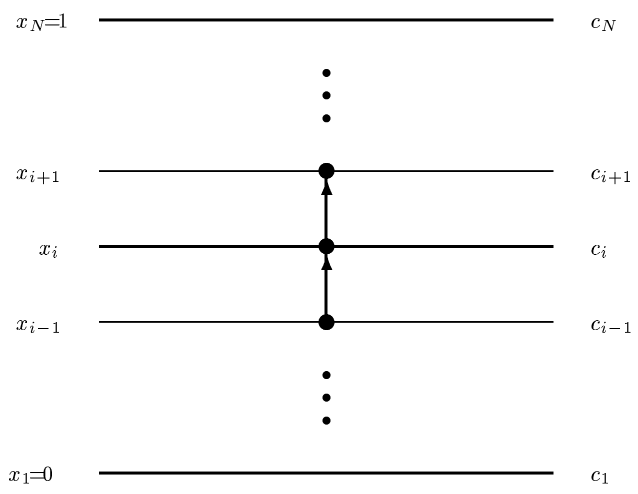

Abbildung 4.3: Diskretes Niveauschema für den Kristallisationsgrad. Die Konzentration c_i der Komponente i ist identisch mit der Besetzungszahl des Niveaus x_i.

der Terme höherer Ordnung (vergleiche (3.18) und (3.19)) ist der 'direkte' Weg der Umformung durch die Darstellung in Differenzen-Quotienten. Unter Verwendung des bisherigen Raum-Zeit-Gitters erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{c_{i,k}^{n+1}-c_{i,k}^{n}}{\Delta t} &= \zeta \frac{1}{r_k} \frac{(rD)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{c_{i,k+1}^{n+1}-c_{i,k}^{n+1}}{r_{k+1}-r_k} - (rD)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{c_{i,k}^{n+1}-c_{i,k-1}^{n+1}}{r_k-r_{k-1}}}{\frac{1}{2}(r_{k+1}-r_{k-1})} \\
&+ (1-\zeta)\frac{1}{r_k} \frac{(rD)_{k+\frac{1}{2}}^{n} \frac{c_{i,k+1}^{n}-c_{i,k}^{n}}{r_{k+1}-r_k} - (rD)_{k-\frac{1}{2}}^{n} \frac{c_{i,k}^{n}-c_{i,k-1}^{n}}{r_k-r_{k-1}}}{\frac{1}{2}(r_{k+1}-r_{k-1})} \qquad (4.22) \\
&+ \zeta \left[\frac{c_{i-1,k}^{n+1}}{\tau_{i-1,i,k}^{n+1}} - \frac{c_{i,k}^{n+1}}{\tau_{i,i+1,k}^{n+1}} \right] + (1-\zeta) \left[\frac{c_{i-1,k}^{n}}{\tau_{i-1,i,k}^{n}} - \frac{c_{i,k}^{n}}{\tau_{i,i+1,k}^{n}} \right] .
\end{aligned}$$

Hier ist ζ der Stabilitätsparameter der Staubdiffusion und

$$(rD)_{k+\frac{1}{2}}^{n} = \frac{1}{2}\left(r_{k+1}D_{k+1}^{n} - r_k D_k^n\right) \quad , \quad (rD)_{k-\frac{1}{2}}^{n} = \frac{1}{2}\left(r_k D_k^n - r_{k-1}D_{k-1}^{n}\right) \ . \qquad (4.23)$$

In diesem Ausdruck ist neben der Konzentration c_i der Diffusionskoeffizient D und die charakteristische Ausglühzeit $\tau_{i,i+1}$ vollständig diskretisiert worden. Nun erfolgt die Zusammenfassung

$$E_k\, c_{i,k-1}^{n+1} + F_{i,k}\, c_{i,k}^{n+1} + G_k\, c_{i,k+1}^{n+1} = -P_{i,k} \qquad (4.24)$$

(vergleiche (3.29)). Dies sind N (über den Index i gekoppelte) Gleichungssysteme von tridiagonaler Form, deren Lösung die Konzentration $c_{i,k}^{n+1}$ jeder Komponente i im neuen Zeitgitterpunkt $n+1$ an jeder Stützstelle k angibt. Für die Koeffizienten auf der linken Seite bekommt man

$$\begin{aligned}
E_k &= (1-\zeta)\,\Delta t\, g_{lk}^{n+1} \qquad G_k = (1-\zeta)\,\Delta t\, g_{rk}^{n+1} \\
F_{i,k} &= \begin{cases} -E_k - G_k - 1 & \text{für} \quad i = N \\ -E_k - G_k - 1 - (1-\zeta)\,\Delta t/\tau_{i,i+1,k}^{n+1} & \text{sonst} \end{cases} \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} g_{lk}^n &= \frac{2}{r_k\,(r_{k+1}-r_{k-1})\,(r_k-r_{k-1})}\,(rD)_{k-\frac{1}{2}}^n \\ g_{rk}^n &= \frac{2}{r_k\,(r_{k+1}-r_{k-1})\,(r_{k+1}-r_k)}\,(rD)_{k+\frac{1}{2}}^n \;. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Auf der rechten Seite von (4.24) verbleibt ein Rest der Gestalt

$$P_{i,k} = c_{i,k}^n + \zeta\,\Delta t\,\left[g_{rk}^n\,(c_{i,k+1}^n - c_{i,k}^n) - g_{lk}^n\,(c_{i,k}^n - c_{i,k-1}^n)\right] + A_{i,k} \tag{4.27}$$

mit

$$A_{i,k} = \begin{cases} -\zeta\,\Delta t\,\dfrac{c_{i,k}^n}{\tau_{i,i+1,k}^n} & \text{für} \quad i=1 \\[2ex] (1-\zeta)\,\Delta t\,\dfrac{c_{i-1,k}^{n+1}}{\tau_{i-1,i,k}^{n+1}} + \zeta\,\Delta t\,\dfrac{c_{i-1,k}^n}{\tau_{i-1,i,k}^n} & \text{für} \quad i=N \\[2ex] (1-\zeta)\,\Delta t\,\dfrac{c_{i-1,k}^{n+1}}{\tau_{i-1,i,k}^{n+1}} + \zeta\,\Delta t\left(\dfrac{c_{i-1,k}^n}{\tau_{i-1,i,k}^n} - \dfrac{c_{i,k}^n}{\tau_{i,i+1,k}^n}\right) & \text{sonst} \end{cases} \;. \tag{4.28}$$

Für die Lösung von (4.24) wird wieder eine Rekursionsformel

$$c_{i,k}^{n+1} = H_{i,k}^{(1)}\,c_{i,k+1}^{n+1} + H_{i,k}^{(2)} \tag{4.29}$$

angesetzt. Mittels Einsetzen in Gleichung (4.24) erhält man durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten

$$H_{i,k}^{(1)} = -\frac{G_k}{H_{i,k-1}^{(1)}\,E_k + F_k} \qquad H_{i,k}^{(2)} = -\frac{P_{i,k} + H_{i,k-1}^{(2)}\,E_k}{H_{i,k-1}^{(1)}\,E_k + F_k} \tag{4.30}$$

(vergleiche (3.31) - (3.34)). Zur Berechnung der Werte der $c_{i,k}^{n+1}$ für alle k und *festes* i mittels (4.29) hangelt sich der Algorithmus, beginnend bei der Stützstelle K, sukzessive im radialen Ortsgitter nach innen.

Der neue Stabilitätsparameter ζ zeigt an, daß der Zeitschritt wieder wahlweise voll implizit ($\zeta = 0$), implizit ($0 < \zeta < 1$) oder explizit ($\zeta = 1$) ausgeführt werden kann. Mit der gleichen Argumentation wie in Kapitel 3.2 wird hier das voll implizite Verfahren bevorzugt ($\zeta = 0$).

Der entscheidende Unterschied im Vergleich zum tridiagonalen Gleichungssystem (3.29) für die Korrekturgröße δS_k^{n+1} besteht in dem zusätzlichen Ratenterm aufgrund des annealings der Silikatstaubkörner. Dies führt zu den Fallunterscheidungen in (4.25) bzw. (4.28). Im tiefsten Niveau $i = 1$ kann nur Material verloren gehen und im obersten Niveau $i = N$ nur gewonnen werden. In jedem sonstigen Niveau tritt Gewinn *und* Verlust auf.

Die Art die Problemstellung läßt ausschließlich Zuwachs in aufsteigender Richtung von i zu (kristallisiertes Material kann durch thermische Prozesse nicht wieder amorph werden!), wie in Abb. 4.3 bereits angedeutet. Für das Lösungsverfahren bedeutet dies, daß zunächst das tridiagonale Gleichungssystem für das 1. Niveau, dann für das 2. Niveau, usw. und schließlich für das N. Niveau gelöst werden

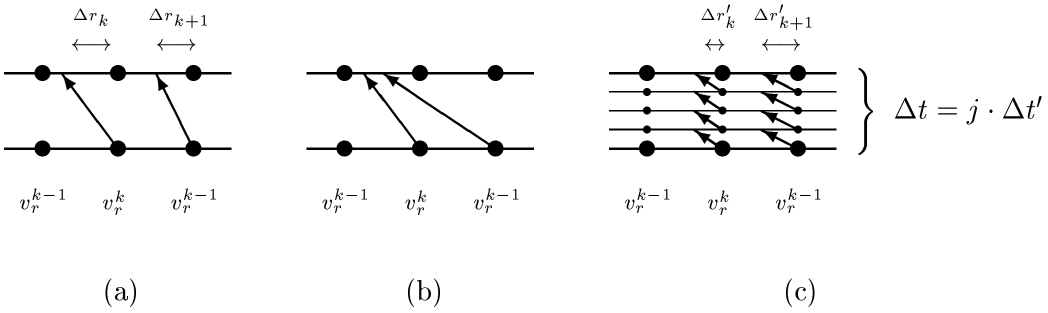

Abbildung 4.4: Schematische Darstellung der numerische Behandlung der Advektion des Staubes (s. Text).

muß. Genaugenommen ist aus diesem Grund das Differenzen-Schema (4.22) nur für $i = 2, \ldots, N-1$ gültig. Für $i = 1$ fallen die Terme mit $\tau^n_{i-1,i,k}$ und für $i = N$ die Terme mit $\tau^n_{i,i+1,k}$ weg.

Die Einbindung in den Gesamt-Algorithmus, d. h. die Kopplung an das vollständige System der Aufbaugleichungen der Scheibe, wird mit Hilfe einer Fixpunktiteration des Massenextinktionskoeffizienten κ bewerkstelligt. κ wird auf diese Weise bis zu einer Genauigkeit von 10^{-5} zur Selbstkonsistenz gebracht.[5]

Eine Kontrollhilfe für die Richtigkeit der Berechnung der $c^{n+1}_{i,k}$ stellt die Normierung

$$\sum_{i=1}^{N} c^{n+1}_{i,k} = 1 \tag{4.31}$$

für jedes k und $n+1$ dar. Eine Abweichung von Eins darf nur durch numerische Rundungsfehler bedingt sein und daher nicht größer als $\sim 10^{-6}$ werden.

4.3.2 Advektion

Mit Hilfe des *operator splitting* kann die numerische Behandlung der Staubdrift, wie gesehen, gesondert erfolgen. Grundsätzlich könnte man den Advektionsterm (2) in (4.4) wieder auf ein finites Differenzen-Schema bringen. Darauf wird hier jedoch verzichtet und stattdessen eine Vorgehensweise gewählt, die das Problem gewissermaßen physikalisch anschaulicher in Angriff nimmt.

Die grundsätzlichen Verhältnisse sind in Abb. 4.4 dargestellt. (a) veranschaulicht den Normalfall für Einwärtsdrift. Der Staub bewegt sich vom Gitterpunkt k mit der Geschwindigkeit v_r^k (< 0 für Einwärtsdrift!) weg und erreicht in der Zeit Δt den Ort $r_k - \Delta r_k$ (Spitze des Pfeils). Der Wert der Driftgeschwindigkeit v_r^k ist durch das Scheibenmodell des vorigen Zeitpunkts n bekannt. Es gilt also

$$\Delta r_k = v_r^k \, \Delta t \ . \tag{4.32}$$

[5]Die 'natürliche' Vorgehensweise der Iteration der $c^{n+1}_{i,k}$ bis zur Selbstkonsistenz erfordert einen wesentlich größeren Aufwand an Rechenzeit.

Damit ist die Staubkonzentration jeder Komponente i am Ort $r_k - \Delta r_k$ für alle k durch den Wert von $c^n_{i,k}$ gegeben. Zur Bestimmung der gesuchten $c^{n+1}_{i,k}$ verhilft die Interpolationsformel[6]

$$c^{n+1}_{i,k} = c^n_{i,k} - \frac{\Delta r_k \, (c^n_{i,k+1} - c^n_{i,k})}{r_{k+1} - r_k + \Delta r_{k+1} - \Delta r_k} \; . \tag{4.33}$$

In (b) ist der Fall aufgezeigt, daß an einer Stützstelle $(k-1)$ eine derart hohe Driftgeschwindigkeit auftritt, daß der benachbarte Gitterpunkt k übersprungen wird. Diese Situation tritt vorwiegend am Innenrand der Scheibe auf, wo das logarithmische Ortsgitter am dichtesten ist und aufgrund der Randbedingung (3.35) der Betrag der Driftgeschwindigkeit die größten Werte annimmt. Im schlimmsten Fall überschneiden sich die Pfeile sogar. Physikalisch entspricht dies der Ausbildung einer Stoßfront, da weiter innen befindliches Scheibenmaterial von weiter außen gelegenem 'eingeholt' wird. In der protoplanetaren Scheibe tritt eine solche Situation jedoch aufgrund des glatten radialen und zeitlichen Verlaufs der Driftgeschwindigkeit nicht ein. Um dies also zu vermeiden, wird der Zeitschritt der Länge Δt in j äquivalente Intervalle der Länge $\Delta t'$ unterteilt (c). Bewirkt ein zu großes

$$\Delta r'_k = v^k_r \, \Delta t' \; , \tag{4.34}$$

bereits die Überschreitung des benachbarten Gitterpunkts, wird j soweit erhöht, bis für jedes Intervall in (c) wieder Verhältnisse wie in (a) vorliegen. Eine andere Möglichkeit zur Behebung des Problems besteht in der Veringerung der Zeitschrittweite Δt. Dies treibt jedoch die durch den Gesamt-Algorithmus aufgewendete Rechenzeit inakzeptabel in die Höhe. Zudem ist die Intervallschachtelung günstig für die Genauigkeit der Berechnung der $c^{n+1}_{i,k}$.

4.3.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Die Werte der Staubkonzentration am Innen- und Außenrand werden für jeden Zeitschritt von t_n nach t_{n+1} auf

$$c^{n+1}_{i,1} = \begin{cases} 1 & : \quad i = N \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad\qquad c^{n+1}_{i,K} = \begin{cases} 1 & : \quad i = 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{4.35}$$

festgelegt. Diese Wahl entspricht einer Quelle für vollständig kristallinen Silikatstaub am innersten Punkt der Scheibe in der Einschaltphase der Rechnung. Sie ist numerisch gesehen günstig, weil zu späteren Zeiten der Scheibe der Silikatstaub in der Nähe des (heißen) Innenrandes gänzlich kristallisiert sein wird. Die Anfangsbedingung lautet

$$c^0_{i,k} = \begin{cases} 1 & : \quad i = 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \; . \tag{4.36}$$

Der Silikatstaub soll zu Beginn der Rechnung in der ganzen Scheibe in amorpher Form vorliegen.

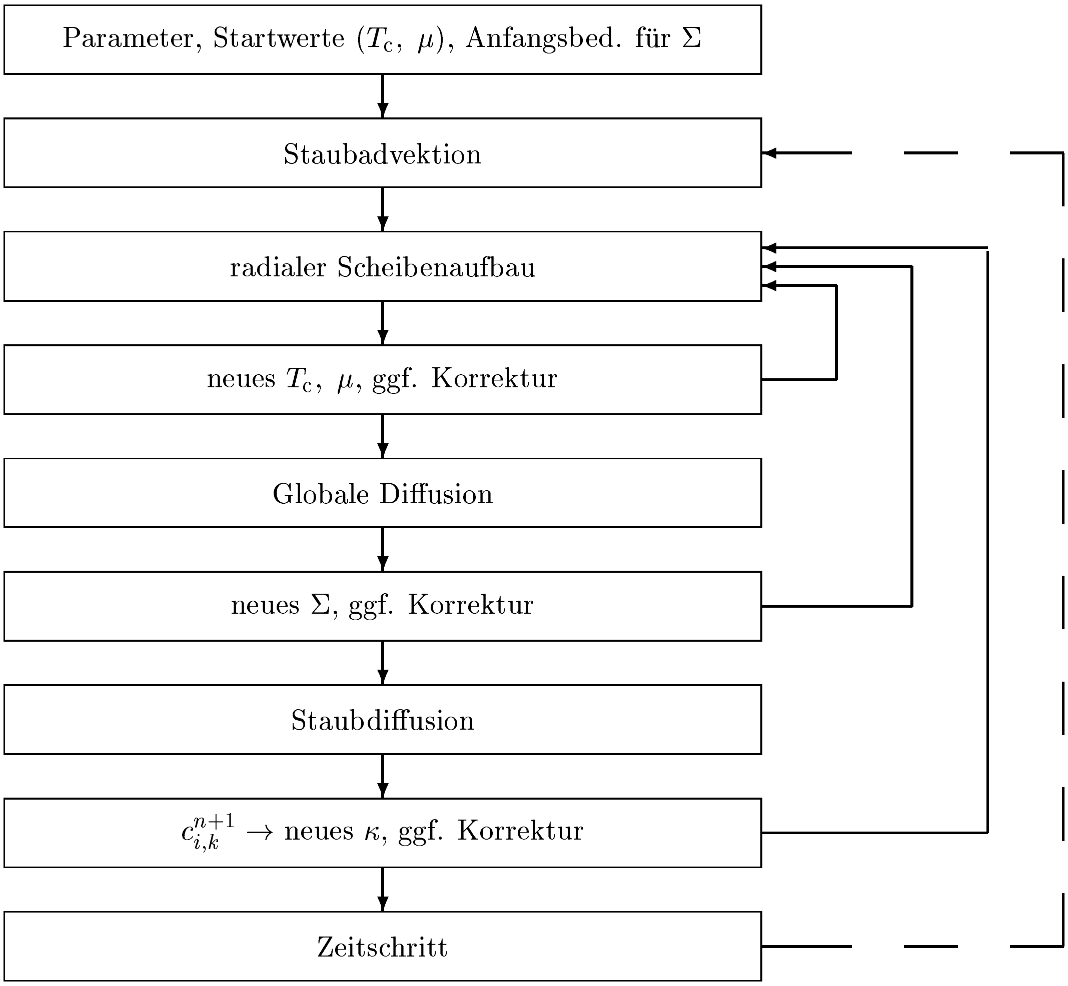

Abbildung 4.5: Baumdiagramm für die Programmstruktur.

4.3.4 Programmstruktur

Abb. 4.5 zeigt den Aufbau des Programms in einem Baumdiagramm. Eingetragen sind die drei Iterations-Schleifen, die vor der Ausführung eines Zeitschritts durchlaufen werden müssen: die innere der Newton-Raphson-Iteration für T_c und μ zur Bestimmung des radialen Scheibenaufbaus, die mittlere der Fixpunktiteration für Σ zur Behandlung der globalen Diffusion und die äußere der Fixpunktiteration für κ nach der Behandlung der Staubdiffusion. Dazu tritt die getrennte Berechnung der Staubadvektion.

4.4 Parameter

In Tab. 2.1 wurde ein geeigneter Satz von Parametern für das System Stern-Scheibe-Wolke bei der stationären Behandlung der Scheibe vorgestellt. Für die zeitabhängi-

[6]Die Interpolationsformel täuscht ein explizites Verfahren vor, es ist jedoch tatsächlich implizit.

Tabelle 4.1: Beziehung zwischen dem Viskositätsparameter α und dem Scheiben-Gesamtdrehimpuls (in Einheiten von $10^{45}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$) nach Stepinski [56] ($J_{\mathrm{St}}$) und Nakamoto & Nakagawa [38] (J_{NN}) für $M_{\mathrm{S}} = 0.2\,M_\odot$ bzw. $M_* = 1\,M_\odot$ und die daraus abgeleiteten Scheiben-Drehimpulse zum Zeitpunkt $t = 0$ der Rechnung.

α	J_{St}	J_{NN}	$J_{\mathrm{ges}}(t=0)$
10^{-3}	7	6.5	5
10^{-2}	13	9	10
10^{-1}	24	20	20

ge Berechnung der Scheibenstruktur fällt die Vorgabe von $\dot{M}$ weg. Es muß jedoch als Anfangsbedingung – wie gesehen – die Flächendichte an jedem radialen Punkt festgelegt werden. Dadurch werden die Masse und der Gesamtdrehimpuls der Scheibe eindeutig bestimmt. Beim zeitabhängigen Modell ohne Staubdiffusion wurde zum Vergleich mit dem Modell von Ruden & Pollack [48] die gleichen Parameter $M_{\mathrm{S}} = 0.245\,M_\odot$ und $J_{\mathrm{ges}} = 5.74 \cdot 10^{45}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ verwendet. Der Viskositätsparameter hatte den Wert $\alpha = 10^{-2}$.

Im folgenden wird die Wahl der Parameter für die zeitabhängigen Modelle mit Staubdiffusion diskutiert. Für die Scheibenmasse wird hier $M_{\mathrm{S}} = 0.2\,M_\odot$ gewählt. Dieser Wert orientiert sich einerseits daran, daß sich im solaren Urnebel ursprünglich wesentlich mehr Masse befunden haben muß, als heute in den Planeten des Sonnensystems vorhanden ist ($1.35 \cdot 10^{-3}\,M_\odot$). Andererseits sollte die Scheibenmasse aufgrund der dann nicht mehr zu vernachlässigenden Selbstgravitation und aufgrund gravitativer Instabilität (s. Gleichung (2.31)) nicht zu groß ausfallen. Der Beobachtung zufolge liegen Scheibenmassen im Bereich $0.003 - 0.3\,M_\odot$ (Natta [39]).

Der Viskositätsparameter wird in verschiedenen Modellen dieser Arbeit auf 10^{-3}, 10^{-2} bzw. 10^{-1} gesetzt, um einen weiten Parameterbereich abzudecken. In neueren Arbeiten, in denen die Ergebnisse der Berechnung von Scheibenmodellen mit Beobachtungsdaten von Scheiben verglichen werden, wurde ein ausgeprägter Zusammenhang zwischen dem Viskositätsparameter α und Scheiben-Gesamtdrehimpuls J_{ges} gefunden (Stepinski [56], Nakamoto & Nakagawa [38]). Tab. 4.1 zeigt die diesbezüglichen Resultate. Stepinski [56] leitet aus seinen Untersuchungen $J_{\mathrm{St}} = 46\,\alpha^{0.28}$ (in Einheiten von $10^{45}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$) für Sterne mit $M_* \approx 1\,M_\odot$ ab. Nakamoto & Nakagawa [38] erhalten dagegen einen numerischen Zusammenhang zwischen α, J_{ges} und M_{S}/M_*, dem Verhältnisse von Scheiben- zu Sternmasse. Dieser Zusammenhang gilt allerdings für weit entwickelte Scheiben (Alter ca. 1 Ma). Will man hieraus für ein vorgegebenes α einen Wert von J_{ges} bestimmen, muß das initiale Verhältnisse von Scheiben- zu Sternmasse $M_{\mathrm{S}}(t=0)/M_*(t=0)$ auf das Verhältnis M_{S}/M_* der in der Entwicklung fortgeschrittenen Scheibe extrapoliert werden. Für $\alpha \gtrsim 10^{-3}$ haben Scheiben nach 1 Ma (unter der Annahme von turbulenter Konvektion als einziger Ursache für die Viskosität) etwa die Hälfte ihrer Masse eingebüßt (Ruden & Pollack [48]). Auf diese Weise erhält man für eine Scheibe mit der initialen Masse $M_{\mathrm{S}}(t=0) = 0.2\,M_\odot$ die in Tab. 4.1 angegebenen Werte von J_{NN}. Die J_{NN} bilden gemeinsam mit den J_{St} einen Richtwert für die Wahl des anfänglichen Gesamtdrehimpulses $J_{\mathrm{ges}}(t=0)$.

4.5 Testläufe

4.5.1 Testläufe für die Advektion

In Abb. 4.6 ist das Ergebnis zweier Testläufe der Berechnung einer Scheibe unter Berücksichtigung der Staubadvektion und Nicht-Berücksichtigung der Staubdiffusion/-kristallisation mit unterschiedlicher Stützstellen-Dichte dargestellt. Die Scheibenmasse und der Scheibendrehimpuls betragen wieder wie bei Ruden & Pollack [48] $M_{\rm S}(t=0) = 0.245\,{\rm M}_\odot$ bzw. $J_{\rm ges}(t=0) = 5.74 \cdot 10^{45}\,{\rm kg\,m^2\,s^{-1}}$. Der Viskositätsparameter hat den Wert $\alpha = 10^{-3}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die radiale Verteilung der Konzentration des Silikatstaubs eine Sprungfunktion, so daß für $r > 3.3\,{\rm AE}$ vollständig amorphes und für $r \leq 3.3\,{\rm AE}$ vollständig kristallines Material vorliegt. Nach $t \approx 80\,000\,{\rm a}$ erreicht der Staub den Stern. Die Interpolationsroutine für die Advektion (vergleiche Abschnitt 4.3.2) bewirkt eine Ausschmierung der Sprungfunktion, die um so ausgeprägter ist, je geringer die Dichte der radialen Stützstellen gewählt wird. Aufgrund einer deutlichen Vergrößerung der Rechenzeit bei der Wahl eines feineren Gitters werden die Scheibenmodelle auf einem Gitter mit 100 Stützstellen pro Dekade gerechnet.

4.5.2 Testlauf für die Diffusion/Kristallisation

In Abb. 4.7 ist das Ergebnis eines Testlaufs zu sehen, bei dem die Berechnung der Staubadvektion weggelassen und folglich ausschließlich die Staubdiffusion und -kristallisation betrachtet wurde. Die Scheibenparameter stimmen mit jenen der Advektions-Testläufe (voriger Abschnitt) überein. Anfangs ist noch kein kristalliner Silikatstaub in der Scheibe vorhanden. In kurzer Zeit bewirkt das annealing die vollständige Kristallisation des Silikatstaubs innerhalb der innersten 4 AE. In der weiteren Entwicklung wird das Scheibenmaterial durch die Diffusion sehr effektiv über die Scheibe verteilt. Der Vergleich mit Abb. 4.6 zeigt, daß der diffusive Transport die Scheibenmaterie um etwa eine Größenordnung stärker über die Scheibe 'verschmiert', als dies durch die Ungenauigkeit der Interpolation bei der Behandlung der Advektion in gleichen Zeitskalen hervorrufen wird. Die Wahl eines größeren Wertes von α (wie in dieser Arbeit, s. o.) verstärkt darüberhinaus den viskosen Massentransport in der Scheibe. Dies rechtfertigt die Wahl der Stützstellen-Dichte von nicht mehr als 100 Gitterpunkten pro Dekade.

4.6 Ergebnisse

4.6.1 Modell mit $\alpha = 10^{-2}$

Die Vorstellung der Ergebnisse konzentriert sich zunächst auf das Modell mit dem Viskositätsparameter $\alpha = 10^{-2}$, der Scheibenmasse $M_{\rm S} = 0.2\,M_\odot$ und dem Gesamtdrehimpuls $J_{\rm ges} = 10 \cdot 10^{45}\,{\rm kg\,m^2\,s^{-1}}$. Es wird im folgenden als Standardmodell bezeichnet. Die weiteren Scheibenmodelle mit $\alpha = 10^{-3}$ bzw. 10^{-1} werden im anschließenden Abschnitt behandelt.

Die Resultate für die Scheibe des Standardmodells sind in den Abbildungen 4.8 - 4.10 zusammengestellt. Die Größen in den Abbildungen sind jeweils in Abhängigkeit

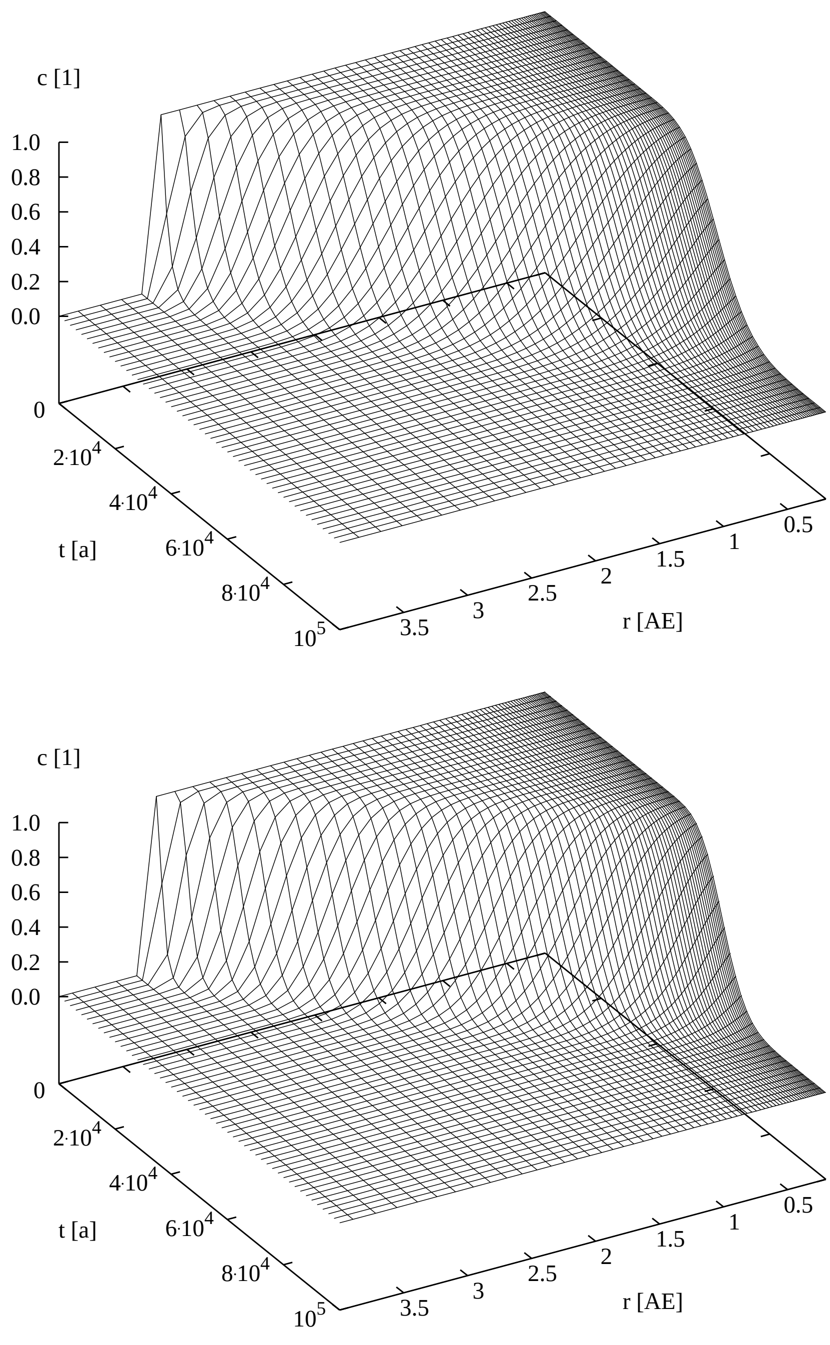

Abbildung 4.6: Testläufe der Berechnung einer Scheibe unter Einbeziehung der Staubadvektion und Nicht-Berücksichtigung der Staubdiffusion/-kristallisation. Aufgetragen ist der mittlere Kristallisationsgrad c gegen den radialen Abstand r die Entwicklungszeit t. Oben: 100 radiale Stützstellen pro Dekade. Unten: 200 radiale Stützstellen pro Dekade. Die Modellparameter sind $M_{\mathrm{S}}(t=0) = 0.245\,\mathrm{M}_{\odot}$, $J_{\mathrm{ges}}(t=0) = 5.74 \cdot 10^{45}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ und $\alpha = 10^{-3}$.

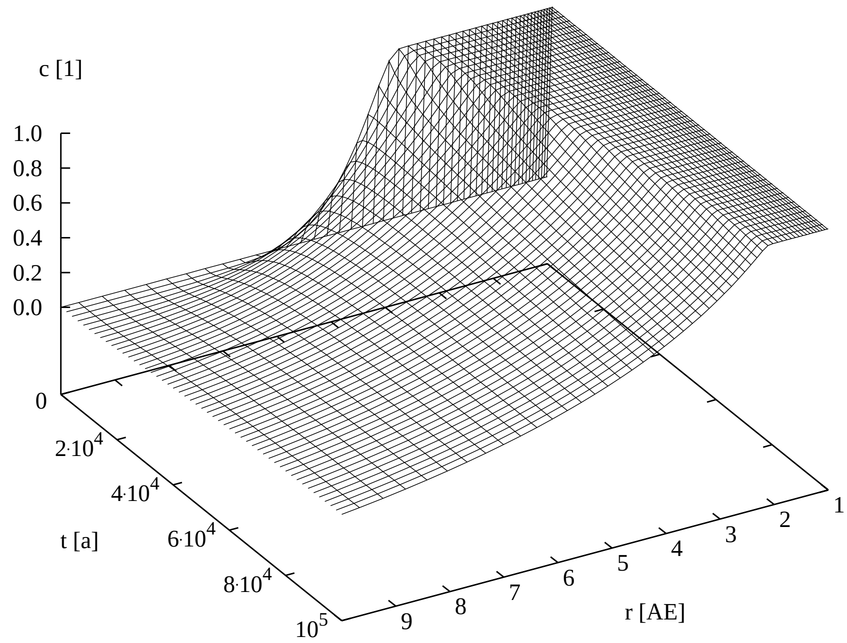

Abbildung 4.7: Testlauf der Berechnung einer Scheibe unter Einbeziehung der Staubdiffusion/-kristallisation und Nicht-Berücksichtigung der Staubadvektion. Aufgetragen ist der mittlere Kristallisationsgrad c gegen den radialen Abstand r die Entwicklungszeit t. Die Dichte des radialen Gitter beträgt 100 Stützstellen pro Dekade (Modellparameter wie in Abb. 4.6).

vom radialen Abstand aufgetragen. In Abb. 4.8 ist die Flächendichte Σ und die Temperatur in der Scheibenmittelebene T_c dargestellt. (a) und (b) zeigen den globalen Verlauf der beiden Größen nach 10^4, 10^5 und 10^6 a. Die gestrichelten und durchgezogenen Kurven sind jeweils das Ergebnis der Modelle ohne bzw. mit Einbeziehung der Staubdiffusion in die Rechnung. Die gepunktete Kurven deuten das Anfangsmodell an. Die Anfangsbedingung für die Flächendichte ist wieder die Lösung eines stationären Modells mit einem radiusabhängigen $\dot{M}$ gemäß (3.40), mit dessen Hilfe gerade die gewünschte Scheibenmasse und der gewünschte Scheiben-Drehimpuls vorgegeben wird. In (c) und (d) ist das Verhältnis zwischen den Flächendichten bzw. Zentraltemperaturen der Modelle mit und ohne Staubdiffusion $\Sigma^{\mathrm{m}}/\Sigma^{\mathrm{o}}$ bzw. $T_{\mathrm{c}}^{\mathrm{m}}/T_{\mathrm{c}}^{\mathrm{o}}$ nach den entsprechenden Entwicklungszeiten aufgetragen.

Die Auswirkung der Kristallisation und Diffusion des Silikatstaubs auf den Scheibenaufbau beschränkt sich auf die Zone der Scheibe, in der $200\,\mathrm{K} \lesssim T_c \lesssim 1\,000\,\mathrm{K}$ gilt. In diesem Temperaturbereich dominiert der Staub die Opazität. Hier kann der kristallisierte Silikatstaub folglich die Scheibenstruktur beeinflussen. Die relative Abweichung gegenüber dem Modell ohne Staubdiffusion beträgt für Σ bzw. T_c während der Scheibenentwicklung bis zu 10 %. Lediglich für das Anfangsmodell ergibt sich für T_c eine größere maximale Abweichung (durchgezogene Kurve in Abb. 4.8 (d)). Diese hat ihre Ursache im modifizierten Ansatz für die Staubopazität im Modell mit Staubdiffusion (vergleiche κ_3 gemäß (A.1) und Tab A.1 mit (4.17), (4.18) und

(A.4) - (A.7)). Aus diesem Grund ist die Staubopazität – obwohl durch die Anfangsbedingung kein kristalliner Silikatstaub vorgegeben wird – gegenüber dem Modell ohne Staubdiffusion bereits zum Zeitpunkt $t = 0$ der Rechnung verändert. Dadurch weichen die stationären Anfangsmodelle, also auch die zugehörigen radialen Verläufe der Zentraltemperatur der Scheibe voneinander ab.

Im Laufe der zeitlichen Entwicklung der Scheibe stellt sich annäherend konstant bei $T_c = 500\,\mathrm{K}$ die deutlichste Abweichung zwischen den Modellen ein. Dies läßt sich wie folgt interpretieren. Bei Temperaturen um 800 K wird das annealing des Silikatstaubs bedeutend (vergleiche Abb 4.2). Der diffusive Transport reichert die kristallisierte Komponente auch in kühleren Regionen der Scheibe an. Dort wird die Scheibenmittelebene aufgrund der veringerten Opazität gekühlt, d. h. T_c verkleinert, und Σ vergrößert (Abb. 4.8).

Abb. 4.9 zeigt eine 'Galerie' weiterer Scheibengrößen in ihrer zeitlichen Entwicklung: (a) die Effektivtemperatur der Scheibenoberfläche T_{eff}, (b) den Druck in der Scheibenmittelebene p_c, (c) die Dichte in der Scheibenmittelebene ρ_c, (d) das Rosselandmittel des Massenextinktionskoeffizienten κ, (e) die vertikale optische Tiefe in der Scheibenmittelebene τ und (f) die radiale Driftgeschwindigkeit v_r. T_{eff} und p_c werden durch die Staubdiffusion/-kristallisation nicht bzw. kaum beeinflußt. Die relativen Abweichungen für ρ_c und v_r liegen in der gleichen Größenordnung wie die für Σ und T_c (max. 15 %). Die deutlichste Veränderung bewirkt das annealing in den Größen κ und τ. Die Opazität und die vertikale optische Tiefe fallen im Bereich, in dem der Staub die Extinktion dominiert, bis auf minimal 60 % ihres Wertes des Modells ohne Staubdiffusion ab.

Abb. 4.10 zeigt das Verhalten des Silikatstaubs in der Akkretionsscheibe. In (a) ist der mittlere Kristallisationsgrad des Silikatstaubs und in (b) - (f) die Konzentration der Silikatstaubkomponenten mit den unterschiedlichen Kristallisationsgraden $x = 0.0$, 0.1, 0.5, 0.9 bzw. 1.0 aufgetragen. Mit anderen Worten zeigt (b) die Konzentration der amorphen Komponente und (f) die Konzentration der vollständig kristallisierten Komponente des Silikatstaubs. In (c) - (e) ist der Silikatstaub teilweise kristallisiert.

Es ist anhand der Abb. 4.10 deutlich zu erkennen, daß der kristallisierte Silikatstaub durch den diffusiven Transport in nennenswerter Konzentration weit über die protoplanetare Akkretionsscheibe verteilt wird. Bei 5 AE beispielsweise beträgt der mittlere Kristallisationsgrad des Silikats (a) über die gesamte Dauer der Scheibenentwicklung mehr als 10 %! Oberhalb einer kritischen Temperatur (ca. 900 K) liegt ausschließlich getempertes Silikat vor, bzw. die amorphe Komponente verschwindet (Abbruchkante in (b)). Im Laufe der Entwicklung bewirkt die Entleerung und damit Abkühlung der Scheibe eine radiale Verschiebung dieser Abbruchkante nach innen. Teilweise kristallisiertes Material ((c) - (e)) kommt nur in geringen Mengen vor. Der Anteil am gesamten Silikatstaub übersteigt für jede der Komponenten mit $0.1 < x < 0.9$ an keinem Ort der Scheibe 10^{-2} (dies gilt auch für die nicht abgebildeten Plots der Komponenten mit $x = 0.2$, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7 bzw. 0.8). Das bedeutet, daß der Gesamtanteil des teilweise kristallisierten Silikatstaubs nirgendwo in der Scheibe mehr als 1 - 2 % beträgt, also der Staub praktisch entweder in amorpher oder vollständig kristallisierter Form vorliegt. Dies ist auch der Grund dafür, warum der Verlauf der Kurve für die Konzentration des vollständig kristallisierten Materials (f) mit dem Kurvenverlauf für den mittleren Kristallisationsgrad (a) übereinstimmt.

4.6.2 Modelle mit $\alpha = 10^{-3}$ und 10^{-1}

In den Abbildungen 4.11 - 4.13 bzw. 4.14 - 4.16 sind die Ergebnisse der Scheibenmodelle mit $\alpha = 10^{-3}$ und $J_{\text{ges}} = 5 \cdot 10^{45}\,\text{kg}\,\text{cm}^2\,\text{s}^{-1}$ bzw. $\alpha = 10^{-1}$ und $J_{\text{ges}} = 20 \cdot 10^{45}\,\text{kg}\,\text{cm}^2\,\text{s}^{-1}$ (vergleiche Tab. 4.1) zusammengestellt. Die Scheiben-Anfangsmasse beträgt jeweils wie bisher $0.2\,M_\odot$. Zu beachten ist, daß passend zu den Plots des Standardmodells (Abb. 4.8 - 4.10) identische Skalenbereiche gewählt wurden.

Die Ergebnisse des Standardmodells sind weitgehend auf die Modelle mit kleinerem bzw. größerem Viskositätsparameter übertragbar. Die Veränderung der globale Scheibenstruktur erweist sich sowohl in ihrer Form als auch in ihrem Ausmaß als nahezu identisch (Abb. 4.11 und 4.12 bzw. 4.14 und 4.15). Am augenfälligsten ist wiederum die 'Senke' der Opazität im Bereich der Dominanz der Staubextinktion (Abb. 4.12 (d) bzw. Abb. 4.15 (d)). Der kristallisierte Silikatstaub wird wie schon im Standardmodell in großem Maße über die Scheibe verteilt. Bei 5 AE ist zu allen Zeiten der Entwicklung mehr als 10 % des Silikats kristallisiert.

Der deutlichste Unterschied zwischen den Modellen mit den unterschiedlichen Viskositätsparametern (und Drehimpulsen) besteht in der jeweiligen Entwicklungszeitskala. Die Entwicklung der Scheibe geht bei größerem (kleinerem) α schneller (langsamer) vonstatten, da die viskosen Transportprozesse effektiver (ineffektiver) ablaufen. Das läßt sich daran erkennen, daß die Scheibe für das größte (kleinste) α am schnellsten (langsamsten) entleert wird.[7] Aufgrund der kürzeren viskosen Zeitskala wurde das Modell mit $\alpha = 10^{-1}$ auch nur bis 500 000 a gerechnet. Der Staub wird in diesem Modell am weitesten in die Außenregion der Scheibe getragen. Natürlich ist hier zu beachten, daß konvektive Turbulenz in den äußeren Zonen – sobald $\tau \lesssim 1$ wird – eigentlich bereits zum Erliegen gekommen ist. Ist die Konvektion die Hauptursache für den viskosen Materietransport in der Scheibe, so müßte dies in den Modellrechnungen (auf ähnliche Weise wie bei Ruden & Pollack [48]) berücksichtigt werden.

[7] Dies ist natürlich kein neues Resultat, sondern war bereits die Feststellung von Ruden & Pollack [48].

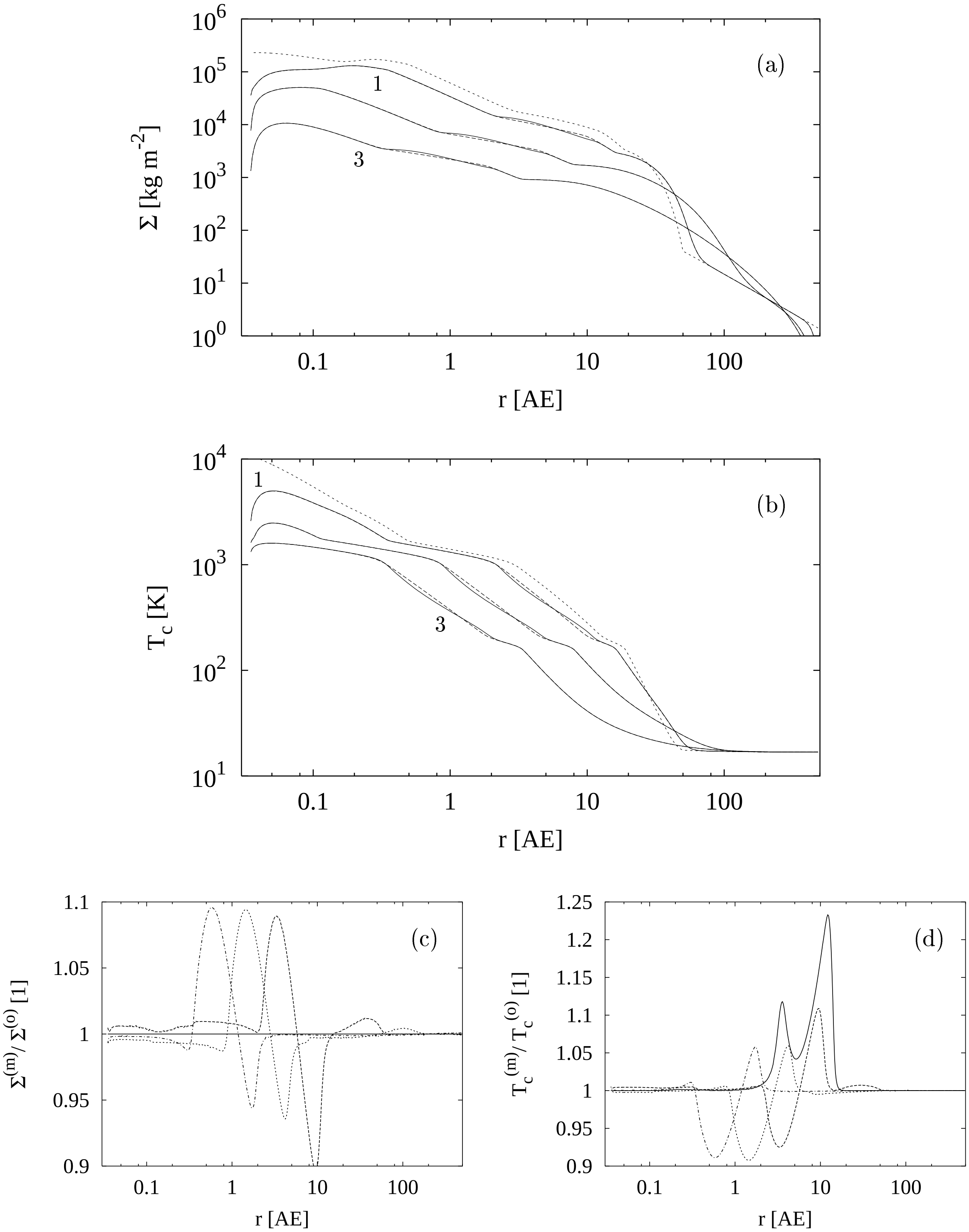

Abbildung 4.8: Radialer Scheibenaufbau des Modells mit $\alpha = 10^{-2}$. (a) Flächendichte Σ nach 10^4, 10^5 und 10^6 a (Kurven 1 - 3) mit und ohne Einbeziehung der Staubdiffusion (durchgezogene bzw. gestrichelte Linien). Die gepunktete Kurve zeigt das Anfangsmodell. (b) Temperatur in der Scheibenmittelebene T_c (sonst wie (a)). (c) Verhältnis zwischen der Flächendichte des Modells mit Staubdiffusion $\Sigma^{(m)}$ und der Flächendichte des Modells ohne Staubdiffusion $\Sigma^{(o)}$ nach 0, 10^4, 10^5 und 10^6 a (durchgezogene, gestrichelte, punktierte bzw. strich-punktierte Kurve). (d) Entsprechendes Verhältnis der Zentraltemperaturen (sonst wie (c)).

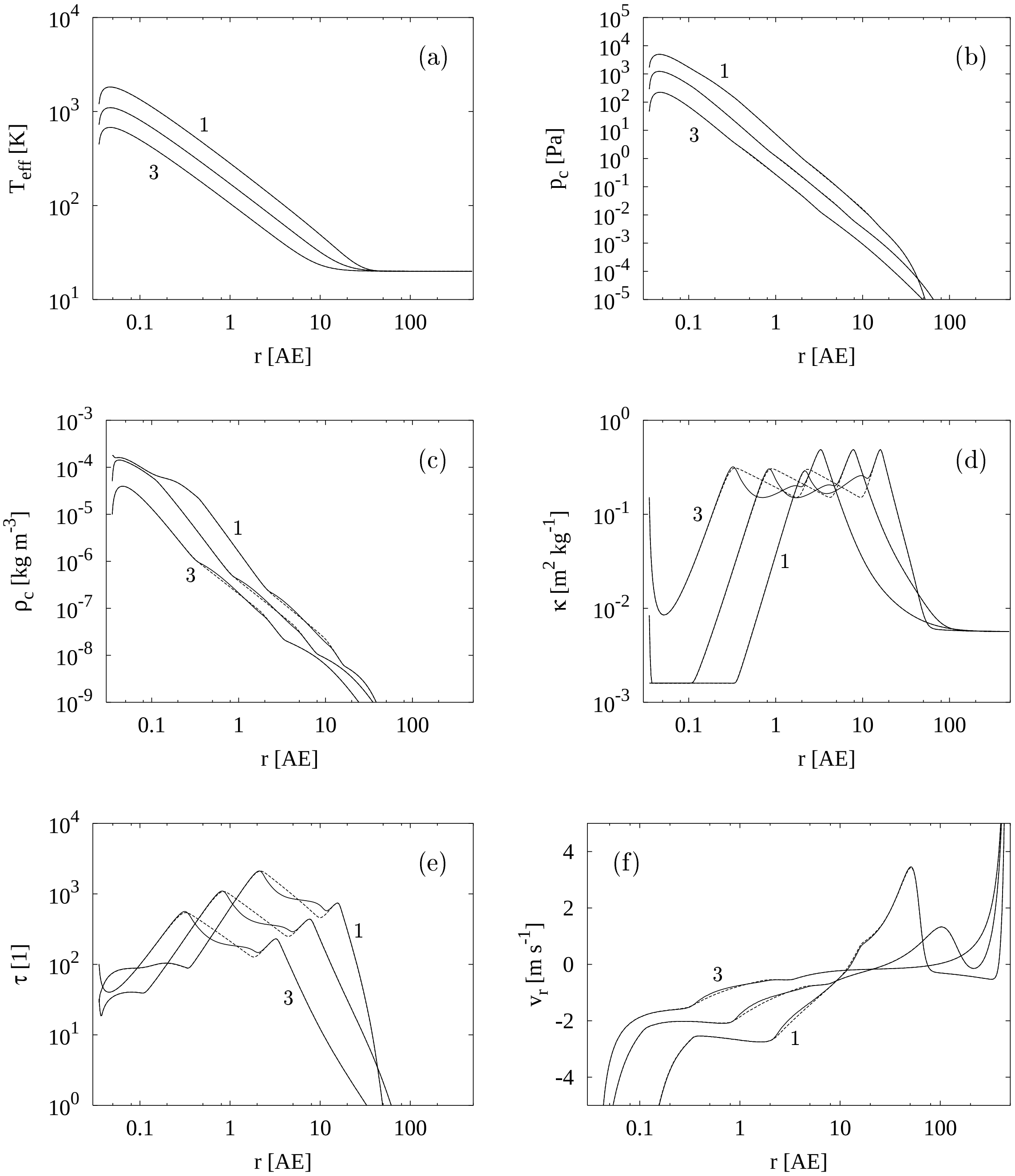

Abbildung 4.9: Radialer Scheibenaufbau des Modells mit $\alpha = 10^{-2}$ nach 10^4, 10^5 und 10^6 a (Kurven 1 - 3) mit und ohne Einbeziehung der Staubdiffusion (durchgezogene bzw. gestrichelte Linien). (a) Effektivtemperatur der Scheibenatmosphäre T_{eff}. (b) Druck in der Scheibenmittelebene p_c. (c) Dichte in der Scheibenmittelebene ρ_c. (d) Rosselandmittel des Massenextinktionskoeffizienten κ. (e) Vertikale optische Tiefe in der Scheibenmittelebene τ. (f) Radiale Driftgeschwindigkeit v_r.

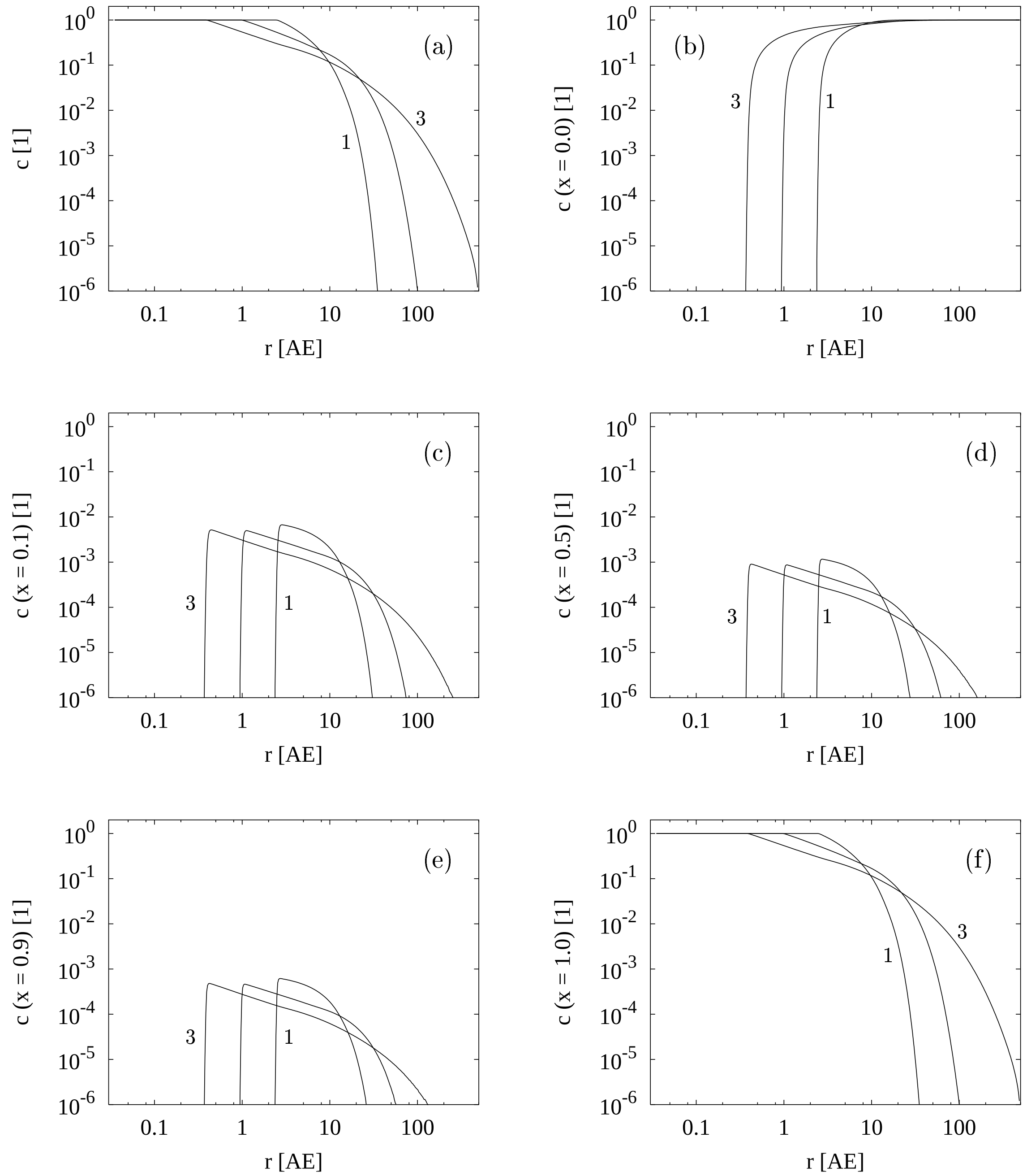

Abbildung 4.10: Radiale Verteilung des Silikatstaubs für das Modell mit $\alpha = 10^{-2}$ nach 10^4, 10^5 und 10^6 a (Kurven 1 - 3). (a) Mittlerer Kristallisationsgrad des Silikatstaubs. (b) Konzentration der amorphen Komponente. (c) - (e) Konzentration der Komponente mit dem Kristallisationsgrad 0.1, 0.5 bzw. 0.9. (f) Konzentration der vollständig kristallisierten Komponente.

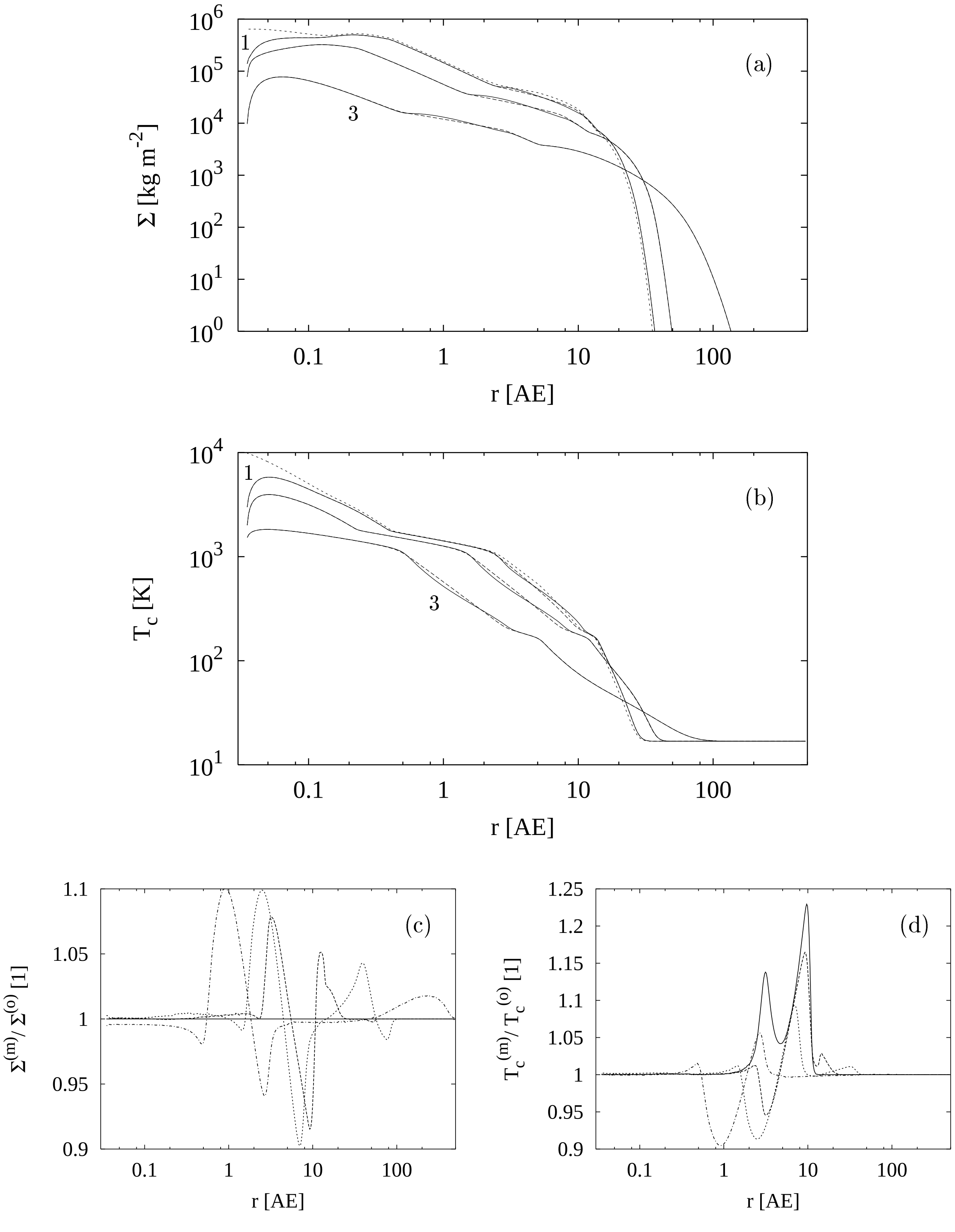

Abbildung 4.11: Radialer Scheibenaufbau des Modells mit $\alpha = 10^{-3}$. Sonst wie Abb. 4.8.

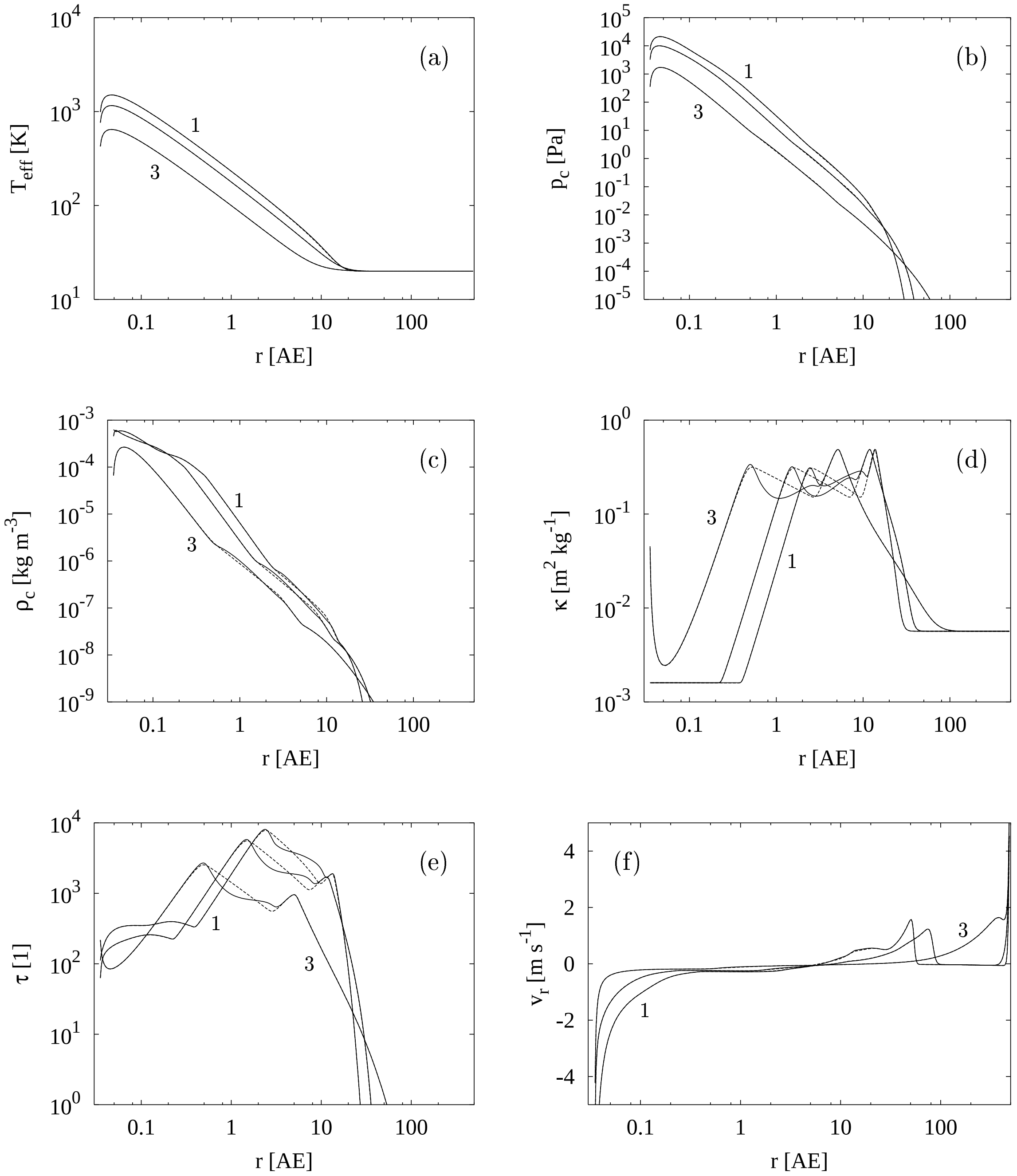

Abbildung 4.12: Radialer Scheibenaufbau des Modells mit $\alpha = 10^{-3}$. Sonst wie Abb. 4.9.

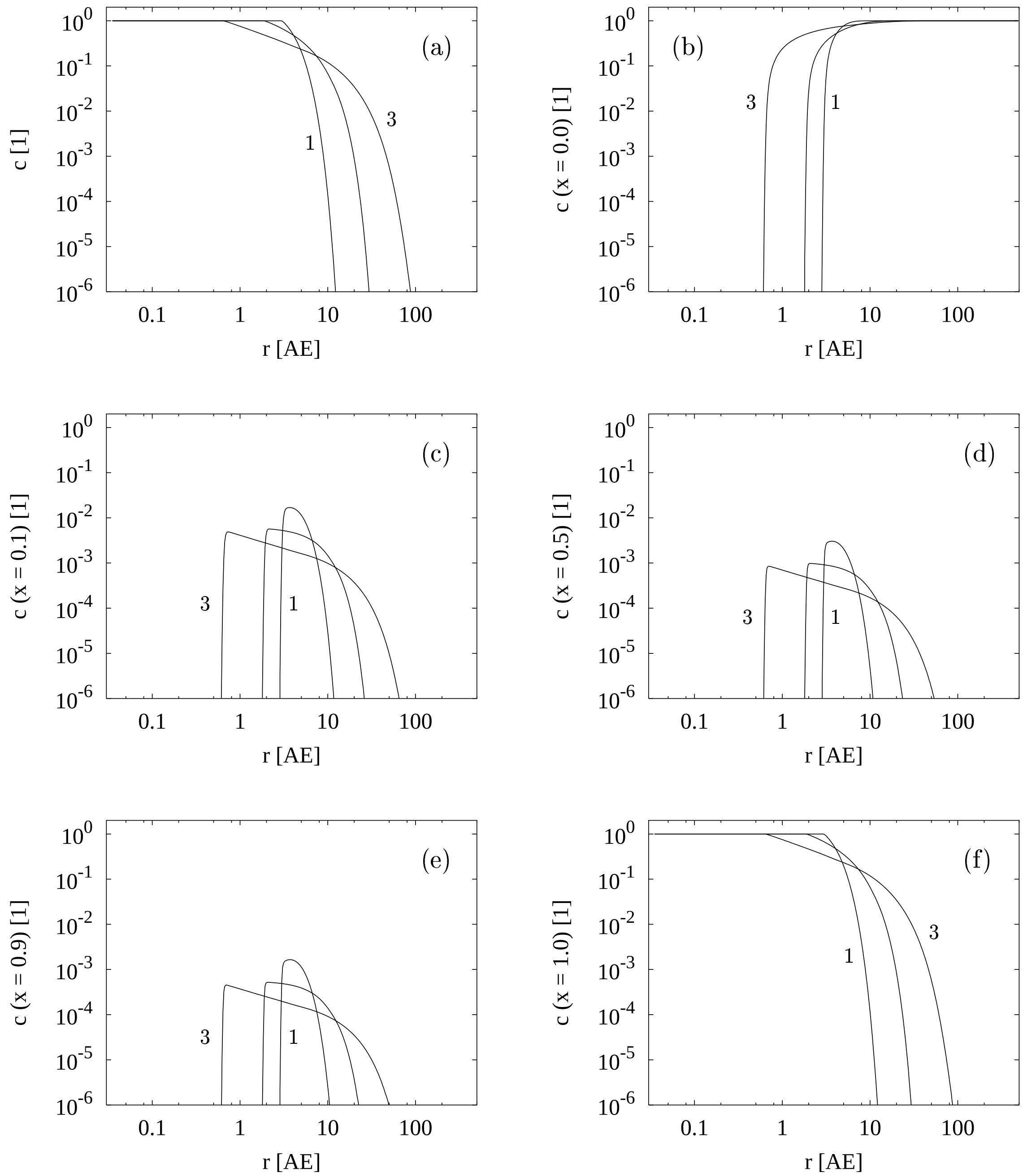

Abbildung 4.13: Radiale Verteilung des Silikatstaubs für das Modell mit $\alpha = 10^{-3}$. Sonst wie Abb. 4.10.

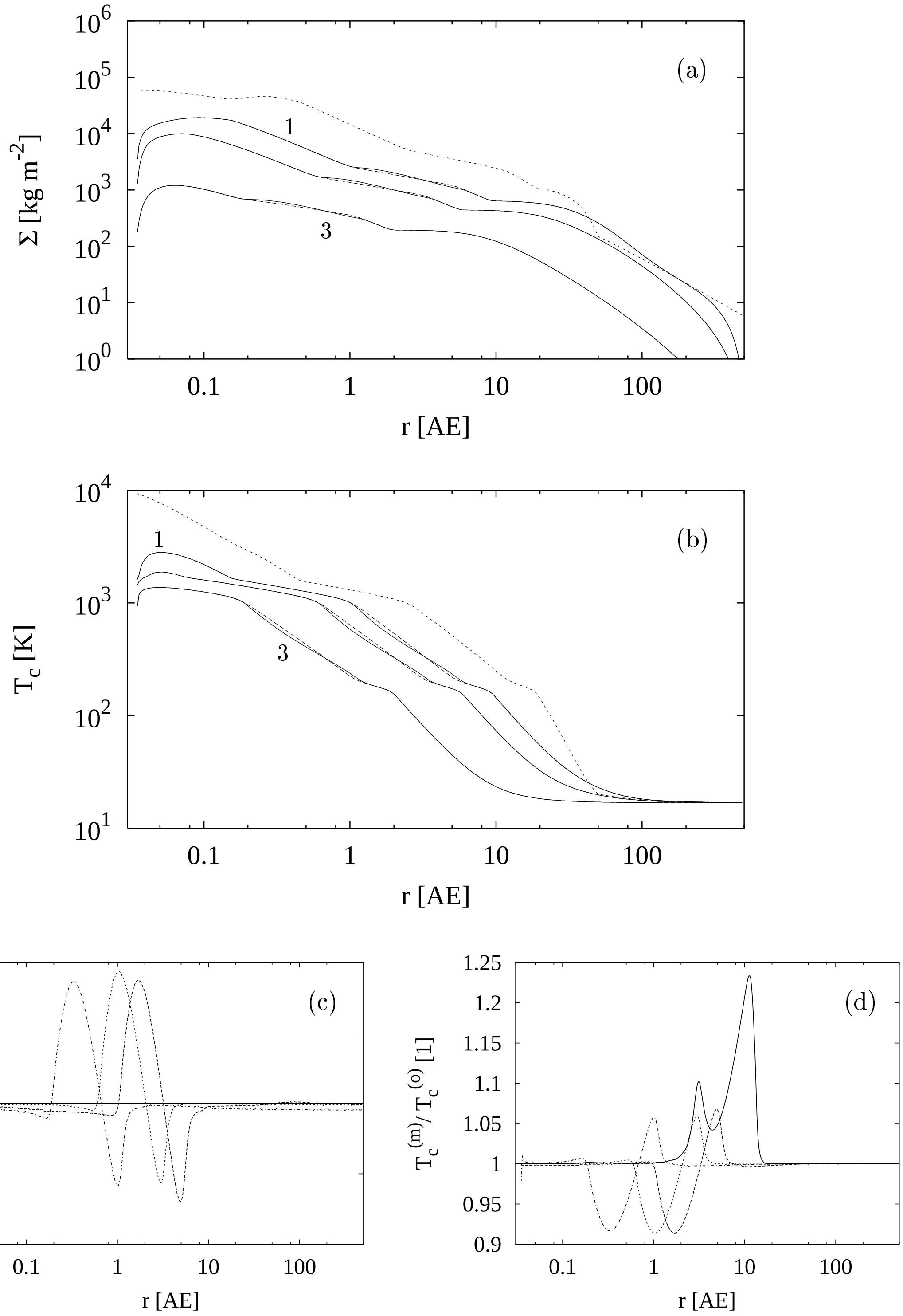

Abbildung 4.14: Radialer Scheibenaufbau des Modells mit $\alpha = 10^{-1}$ nach 10^4, 10^5 und $5 \cdot 10^5$ a (Kurven 1 - 3). Sonst wie Abb. 4.8.

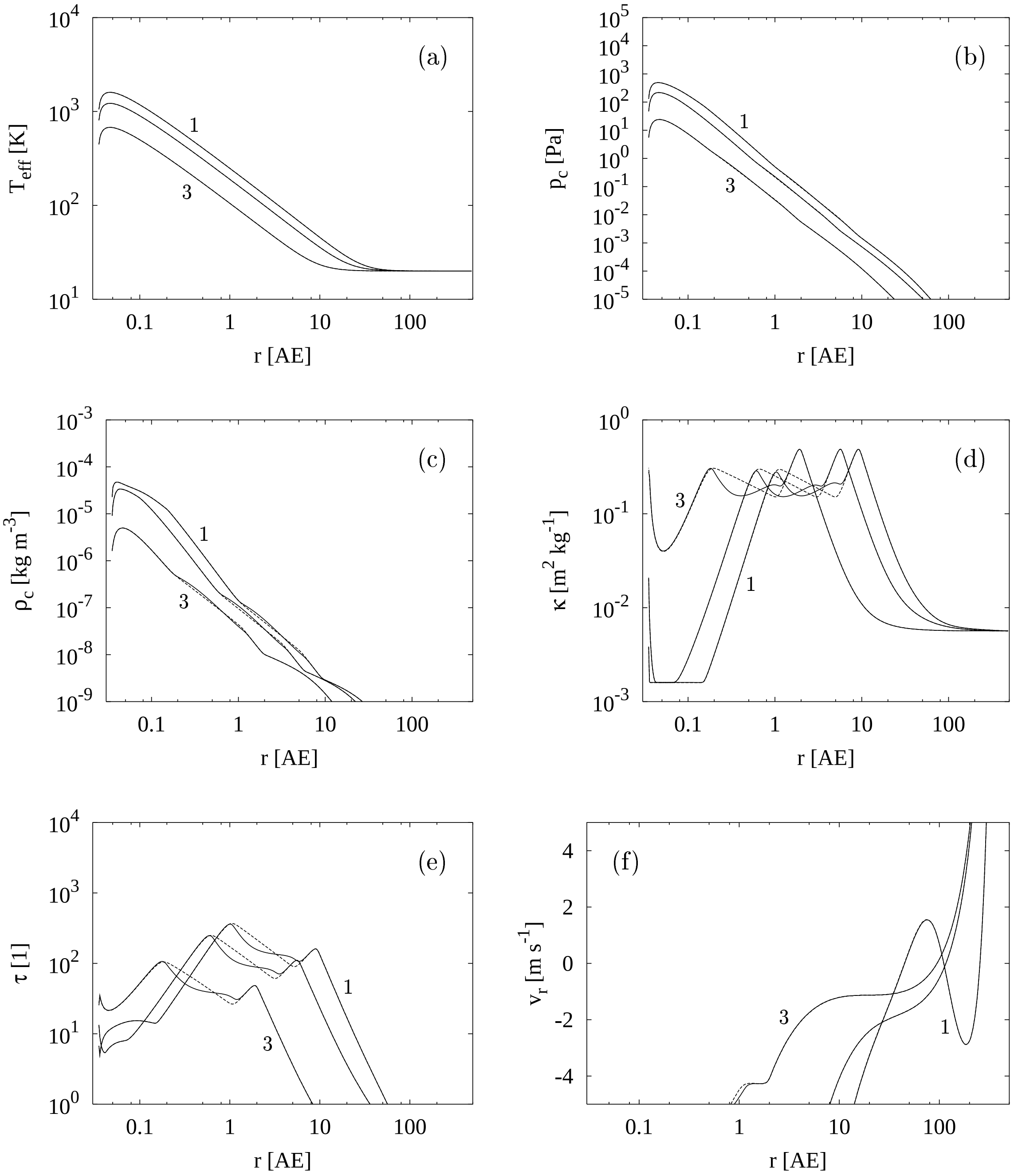

Abbildung 4.15: Radialer Scheibenaufbau des Modells mit $\alpha = 10^{-1}$ nach 10^4, 10^5 und $5 \cdot 10^5$ a (Kurven 1 - 3). Sonst wie Abb. 4.9.

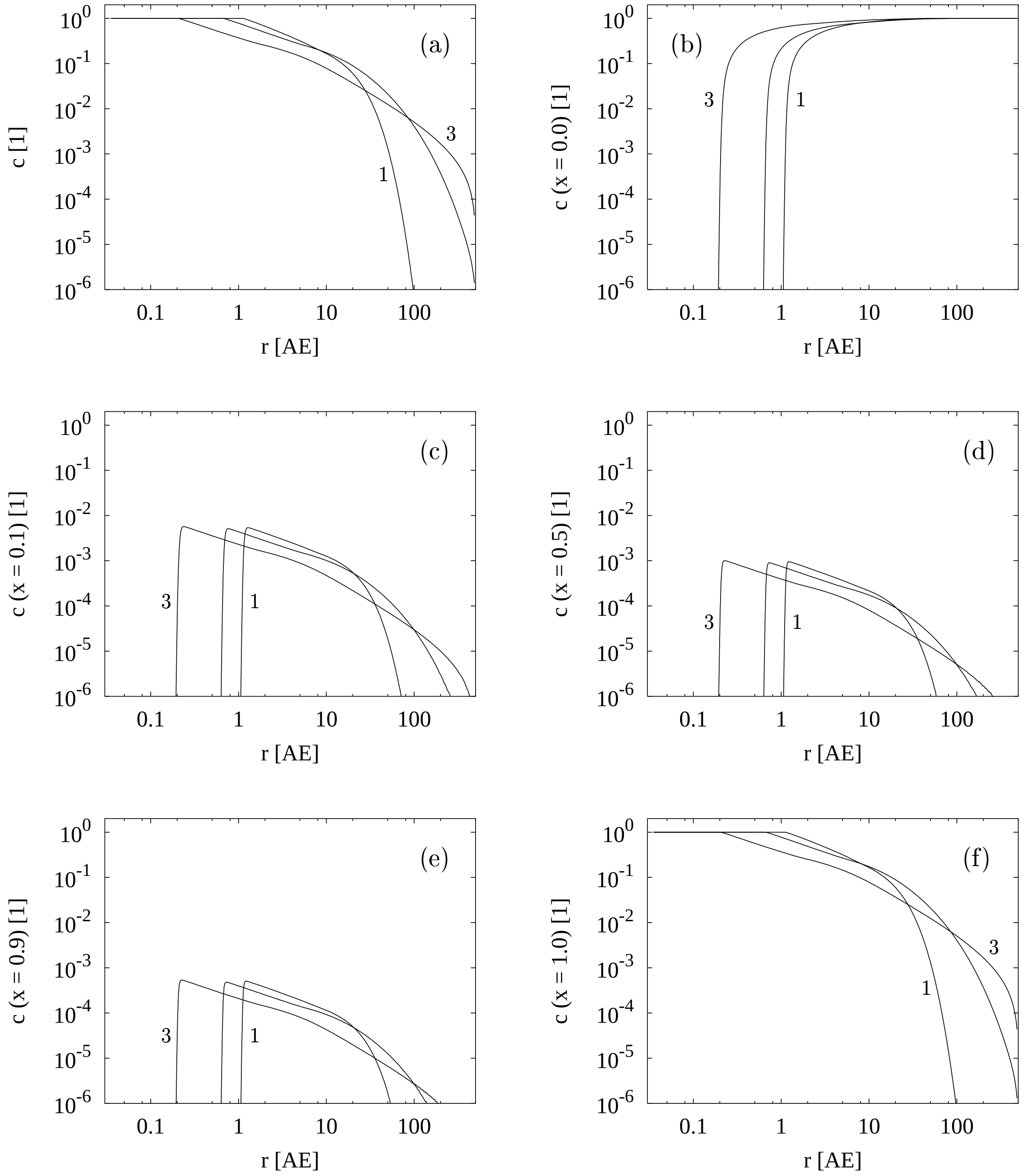

Abbildung 4.16: Radiale Verteilung des Silikatstaubs für das Modell mit $\alpha = 10^{-1}$ nach 10^4, 10^5 und $5 \cdot 10^5$ a (Kurven 1 - 3). Sonst wie Abb. 4.10.

Kapitel 5

Diskussion

In dieser Arbeit wurde die Kristallisation und Diffusion des Silikatstaubs in protoplanetaren Akkretionsscheibe mittels eines zeitabhängigen, numerischen Modells untersucht. Die Berechnung des Scheibenaufbaus erfolgte unter Verwendung des α-Ansatzes in der Einzonennäherung. Besondere Beachtung galt dabei einem realistischen Temperaturverlauf der Opazität. Die Silikatkomponente kristallisiert in der heißen Innenzone und verändert auf diese Weise ihre optischen Eigenschaften. Die Staubdiffusion konnte folglich über die Staubopazität an das Scheibenmodell gekoppelt werden. Die Behandlung des annealing des amorphen Silikats erfolgte durch ein einfaches Modell, das sich auf Labordaten von annealing-Experimenten stützte.

Das Ziel dieser Arbeit war einerseits zu untersuchen, wie sich der diffusive Transport des Staubs auf die globale Entwicklung der Scheibe auswirkt und andererseits, wie groß das Ausmaß des diffusiven Staubtransportes über die Scheibe an sich ist.

5.1 Scheibenstruktur und globale Scheibenentwicklung

Die Struktur der protoplanetaren Scheibe wird durch die Staubdiffusion/-kristallisation nur in dem Bereich verändert, in dem die Opazität durch das annealing beeinflußt wird. Dieser Bereich erstreckt sich von der Grenze der Staubverdampfung ($\sim 1700\,K$) bis zur sog. Schneegrenze ($\sim 170\,K$). Gegenüber dem Modell ohne Staubdiffusion beträgt die Veränderung bei Größen wie der Flächendichte, der Zentraltemperatur und der Zentraldichte bis zu $\sim$10 %. Diese maximale Abweichung tritt nahezu konstant über die Scheibenevolution bei einer Zentraltemperatur von $\sim$600 K auf, entspricht dort also einer absoluten Temperaturverminderung von $\sim$60 K. Im Bezug auf das Sonnensystem könnte sich dadurch der Ort von bestimmten chemischen Prozessen im Bereich des inneren Planetensystems gegenüber den bisherigen Vorstellungen etwas verlagern (z. B. Phasenübergänge in Mineralverbindungen, Austrieb von schwach gebundenen oder flüchtigen Bestandteilen im Staub und Kondensation bestimmter Mineralverbindungen).

Der Extinktionskoeffizient erfährt zusammen mit der optischen Tiefe die deutlichste Änderung aller Scheibengrößen (Absenkung bis zu einem Faktor von annähernd zwei). Eine Auswirkung der Staubdiffusion auf die globale Scheibenentwicklung ist hingegen nicht festzustellen. Die viskose Entwicklungszeit der Scheibe bleibt unverändert. Als Konsequenz daraus verläuft die Entleerung der Scheibe und der Drehimpulstransport nach außen mit gleicher Geschwindigkeit wie bei Nicht-Berücksichtigung der Staubdiffusion.

5.2 Diffusion des Silikatstaubs

Der kristallisierte Silikatstaub wird in großem Maße über die Scheibe ausgebreitet. Der diffusive Transport ist umso effizienter, je größer die Wahl des Viskositätsparameters α ausfällt. In allen Modellen mit unterschiedlichem α beträgt die Konzentration der kristallisierten Silikatkomponente im Bereich des Asteroidengürtels (2 - 5 AE) über die Zeitspanne der Scheibenrechnung (1 Ma bei $\alpha = 10^{-2}$ und 10^{-3}, 0.5 Ma bei $\alpha = 10^{-1}$) mehr als 10 %.

Es ist bekannt, daß das Material der Matrix der ursprünglichsten Meteorite, der kohligen Chondrite (CI), z. T. eine komplizierte thermische Geschichte hinter sich hat. Für die meisten Chondrite wird der Ort von thermischen Überprägungen in den Mutterkörpern der Meteorite, also in den Asteroiden, angenommen (Buseck & Hua [6]). Bis dato läßt sich allerdings nicht eindeutig trennen, welcher Anteil der Matrix ursprüngliches Material aus der Zeit des solaren Urnebels darstellt (das vor seinem Einbau in größere Körper durchaus thermisch beeinflußt worden sein kann), und welcher nicht. So ist die grobkörnige Komponente der Matrix des Allende-Meteoriten einem Erhitzungsereignis ausgesetzt gewesen, das bei einer angenommen Temperatur von 1000 K etwa 10-100 Tage angedauert haben muß (Toriumi [59]). Staubdiffusion und annealing könnten somit die Herkunft zumindest eines Teils des thermisch modifizierten Materials in den kohligen Chondriten erklären.

Deutlichere Hinweise auf annealing im solaren Urnebel zeigt dagegen der Meteorit Allan Hills A77299 aus der Klasse der sog. *ordinary chondrites* (CO), die eigentlich als weniger ursprünglich im Vergleich zu den C1-Meteoriten gelten. In der Matrix von ALHA 77299 befindet sich ehemals amorphes Olivin, das offenbar unter geringen Drucken – also nicht in einem größeren Mutterkörper – kristallisiert ist (Brearley *et al*. [5]). Die Autoren schließen hier andere mögliche Entstehungsprozesse, wie z. B. Kristallisation bei der Staubkondensation oder bei einem Impaktereignis, aus.

Der ausgedehnte Transport des Staubs in der Akkretionsscheibe wirft zudem ein neues Licht auf die Frage nach der Herkunft der rätselhaften Chondrulen in den kohligen Chondriten. Diese sind auf jeden Fall im solaren Urnebel getrennt von den Mutterkörpern der Meteorite entstanden (Grossman [20]). Die globale Diffusion könnte den Herkunftsorts der Chondrulen in den inneren, heißen Bereich der Scheibe verlagern. Ein signifikanter Anteil des 'chondrulisch' prozessierten Materials würde dann von dort in die Zone des Asteroidengürtels getragen werden, um dort in die Urkörper des Sonnensystems eingebaut zu werden. Der Entstehungs*prozeß* der Chondrulen bleibt freilich weiterhin umstritten.

Vergleichbar mit der Bildung der Asteroiden stellt man sich auch die Bildung der Kometen vor, mit der Ausnahme, daß der Ort der Entstehung der Kometen sich hinter der Schneegrenze in der Scheibe befunden haben muß. Aus den IR-Spektren der Komae verschiedener Kometen weiß man, daß in einigen eine beträchtliche Menge an kristallinem Olivin vorhanden ist (C/Hale-Bopp 1995 01: Crovisier *et al*. [12]; andere Kometen: Hanner *et al*. [21]). So erhalten Hanner *et al*. [21] im Bereich von 8-13 μm durch Annäherung an Laborspektren gute Übereinstimmung mit den Spektren der Kometen P/Halley 1986 03, Bradfield 1987 29 und Levy 1990 20, wenn man einen Anteil von grob 25 % kristallinem Olivin, eingebettet in einer Matrix aus amorphem Olivin, annimmt. Anderen Kometen dagegen zeigen weniger ausgeprägte oder gar keine Anzeichen für die Anwesenheit von kristallinem Olivin.

Diese Unterschiede in der Zusammensetzung sind anscheinend auf unterschiedliche Entstehungsorte der Kometesimale im solaren Urnebel zurückzuführen. Konzentrationen des kristallisierten Olivins von 25% werden zu späten Entwicklungszeiten außerhalb der Schneegrenze (die dann bei wenigen AE liegt) durchaus in den hiesigen Modellen erreicht! Im Standardmodell beträgt im Gegensatz dazu die Konzentration des kristallinen Silikats nach 100 000 a Entwicklungszeit bei 50 AE ca. 10^{-3} und bei 100 AE ca. 10^{-6}. Je weiter außen in der Scheibe sich der Entstehungsort eines Kometen befunden hat, umso geringer sollte demnach sein Anteil an ausgeglühtem Silikat sein.

Chemische Prozesse in den Kometen während ihres Aufenthalts in der Oortschen Wolke (bzw. im Kuiper-Gürtel) dürften keine Rolle gespielt haben und erklären folglich nicht die beobachteten kristallinen Silikatteilchen.

Der Transport in turbulenten Konvektionszellen ist nicht die einzige in Frage kommende Erklärung für die weiträumige Ausbreitung des Staubs über die Scheibe. Nuth [41] erscheint dieser Transportprozeß als eher unwahrscheinlich und hält dagegen einen stetigen Materialfluß ober- und unterhalb der Scheibenmittelebene für den verantwortlichen Transportprozeß (Modell von Prinn [46] und Stevenson [57]). Der Ausschluß des einen oder anderen Modells scheitert momentan noch an der Unkenntnis der tatsächlich ablaufenden Mischungsprozesse in protoplanetaren Akkretionsscheiben. Die Ergebnisse dieser Arbeit machen den Transport via Konvektionszellen zumindest zu einem möglichen Prozeß!

Auch in den Spektren von Herbig AE/BE-Sternen ('debris discs') findet man deutliche Merkmale für die Anwesenheit von kristallinem Olivin und sogar einen Trend, daß der Anteil an kristallinem Material mit dem Entwicklungsalter zunimmt (Sitko *et al* [55], preprint). In den Staubscheiben dieser Objekte dürfte jedoch thermische Alteration innerhalb der Planetesimale wichtig sein und auf diese Weise kristallisiertes Silikat durch Kollisionen zwischen Großkörpern als feiner Staub freigelegt werden. Ob hier das annealing des Staubs in der Scheibe eine Rolle spielt, ist unklar.

5.3 Ausblick

Ein großer Schwachpunkt des hiesigen Modells für die Staubdiffusion in protoplanetaren Scheiben ist die Vernachlässigung des zweiten Terms auf der rechten Seite der ursprünglichen Diffusionsgleichnung für die Staubkonzentration (4.3). Hier würde die numerische Behandlung mittels einer finiten Differenzen-Methode bereits von (4.3) statt von Gleichung (4.4) Abhilfe schaffen, um dieser groben Näherung auszuweichen. Auf diese Weise könnte man gleichzeitig die Probleme bezüglich der Behandlung des Advektionsterms (Gleichung (4.33) bzw. Abbildungen 4.4 und 4.6) beheben. Die Driftgeschwindigkeit würde dann nämlich im Differenzen-Schema miteinbezogen sein (zweiter Term auf der *linken* Seite von (4.3)).

In dieser Arbeit wurde lediglich eine Staubsorte (Olivin) für die Staubdiffusion und das annealing berücksichtigt. Für zukünftige Rechnungen wären mehrere Staubsorten wünschenswert, neben Olivin ($Mg_{2x}Fe_{2(1-x)}SiO_4$) z. B. Pyroxen ($Mg_xFe_{1-x}SiO_3$)

und Quarz (SiO_2), falls es unter den physikalischen Bedingungen in protoplanetaren Scheiben vorkommt. Eine weitere Perspektive ist schließlich die Berücksichtigung der z-Richtung bei der Scheibenberechnung durch die 1+1- oder 2-dimensionale Näherung.

Es sei am Ende darauf hingewiesen, daß innerhalb der protoplanetaren Scheibe wichtige, den Staub betreffende Prozesse wie Kondensation, Verdampfung und Koagulation des Staubs wegen eines viel zu großen numerischen Aufwandes unberücksichtigt blieben. Dennoch zeigen die Ergebnisse eine gewisse Tendenz an, daß sich der Staub im solaren Urnebel großräumig verteilen konnte und ein solche diffusive Ausbreitung des Staubes in protoplanetaren Akkretionsscheiben noch heute stattfindet.

Anhang A

Opazität

Tabelle A.1: Frequenzgemittelte Näherung des Massenextinktionskoeffizienten in den verschiedenen Temperaturbereichen ($\kappa_{0,i}$ in Einheiten von $\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}$).

Bereich	i	$\kappa_{0,i}$ nach Bell & Lin [4]	a_i	b_i	$\kappa_{0,i}$ in dieser Arbeit	a_i	b_i
Staub mit Eismantel	1	$2 \cdot 10^{-4}$	0	2	$2 \cdot 10^{-4}$	0	2
Eisverdampfung	2	$2 \cdot 10^{16}$	0	-7	$2 \cdot 10^{16}$	0	-7
Staub	3	$1 \cdot 10^{-1}$	0	$\frac{1}{2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	0	$\frac{1}{2}$
Staubverdmpfung	4	$2 \cdot 10^{81}$	1	-24	$1.74 \cdot 10^{83}$	1	-24
Moleküle	5	$1 \cdot 10^{-8}$	$\frac{2}{3}$	3	$1.6 \cdot 10^{-2}$	0	0
H^--Ion	6	$1 \cdot 10^{-36}$	$\frac{1}{3}$	10	-		
gf- und ff-Übergänge	7	$1.5 \cdot 10^{20}$	1	$-\frac{5}{2}$	-		
Elektronenstreuung	8	$3.48 \cdot 10^{-1}$	0	0	-		

Der Massenextinktionskoeffizient wird abschnittsweise in der Form von Potenzgesetzen

$$\kappa_i = \kappa_{0,i}\, \rho^{a_i}\, T^{b_i} \tag{A.1}$$

mit den Koeffizienten $\kappa_{0,i}$ und den Potenzen a_i für die Dichte bzw. b_i für die Temperatur approximiert. Die κ_i stehen für die unterschiedlichen Temperaturbereiche i. Tab. A.1 zeigt die in dieser Arbeit und zum Vergleich die von Bell & Lin [4] verwendeten Werte der Approximationen.

Die Interpolation zwischen den einzelnen Bereichen

$$\kappa = \left[\left(\frac{1}{\kappa_1^4} + \frac{T_0^{10}}{T_0^{10} + T^{10}} \, \frac{1}{\kappa_2^4 + \kappa_3^4} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{\kappa_4^4 + \kappa_5^4 + \kappa_6^4} + \frac{1}{\kappa_7^4 + \kappa_8^4} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^{-1} \tag{A.2}$$

geht bei konstantem κ_5 für die Molekülextinktion über in (vergleiche Abb. 2.4)

$$\kappa = \left[\left(\frac{1}{\kappa_1^4} + \frac{T_0^{10}}{T_0^{10} + T^{10}} \, \frac{1}{\kappa_2^4 + \kappa_3^4} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{\kappa_4^4 + \kappa_5^4} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^{-1} , \tag{A.3}$$

wobei $T_0 = 3\,000$ ist. Die Wahl der 4. Potenz in den κ_i ist etwas willkürlich, sorgt aber bei der Interpolationskurve für schmale Übergangszonen zwischen den einzelnen Temperaturbereichen.

Behandelt man die einzelnen Staubkomponenten getrennt, so lassen sich für diese ebenfalls Interpolationsformeln für κ abhängig von der Temperatur angeben. Die Grundlage hierfür bilden Tabellen der optischen Konstanten der unterschiedlichen Staubsorten, mit deren Hilfe man auf Basis der Mie-Theorie das Rosselandmittel des Massenextinktionskoeffizienten im MRN-Modell berechnen kann. Die Interpolationsformeln stammen von Gail (private Mitteilung). Die Extinktionskoeffizienten sind jeweils in Einheiten von $\mathrm{cm^2\,g^{-1}}$.

Für Silikatstaub und Ruß folgt anhand der optischen Konstanten von Draine & Lee [14] bzw. Draine [15]

$$\kappa_{\mathrm{Sil,am}}(T) = \left[\frac{1}{(6.724 \cdot 10^{-5}\, T^{1.951})^4} + \frac{1}{(126.8\, T^{-0.71})^4 + (7.669 \cdot 10^{-4}\, T^{1.094})^4 + (1.772 \cdot 10^{-6}\, T^{1.882})^4} \right]^{-\frac{1}{4}} \tag{A.4}$$

und

$$\kappa_{\mathrm{Ruß}}(T) = \left[\frac{1}{(1.692 \cdot 10^{-4}\, T^{1.813})^4} + \frac{1}{(3.167 \cdot 10^{-2}\, T^{0.612})^4 + (2.938 \cdot 10^{-5}\, T^{1.75})^4} \right]^{-\frac{1}{4}} . \tag{A.5}$$

Die Approximationen gelten im Temperaturbereich $10 \le T \le 10\,000\,\mathrm{K}$ bzw. $10 \le T \le 5\,000\,\mathrm{K}$ mit einigen Prozent Genauigkeit.

Für kristallines Olivin folgt mit den optischen Konstanten von Huffman (private Mitteilung)

$$\kappa_{\mathrm{Sil,kr}}(T) = \left[\frac{1}{(6.147 \cdot 10^{-7}\, T^{2.444})^2} + \frac{1}{(69570\, T^{-2.329})^2 + \sqrt{(3.505 \cdot 10^{-4}\, T^{0.755})^4 + (1.043 \cdot 10^{-9}\, T^{2.523})^4}} \right]^{-\frac{1}{2}} . \tag{A.6}$$

Die Approximation gilt im Temperaturbereich $100 \le T \le 5\,000\,\mathrm{K}$.

Für Eisenstaub folgt mit den optischen Konstanten aus dem CRC-Handbuch (Lide [31]) für Wellenlängen $\lambda \leq 12.4\,\mu$m und aus Pollak *et al.* für $\lambda > 12.4\,\mu$m

$$\kappa_{\mathrm{Fe}}(T) = \left[\frac{1}{(3.341 \cdot 10^{-5}\, T^{1.632})^4} + \frac{1}{(6.405 \cdot 10^{-4}\, T^{0.777})^4 + (4.385 \cdot 10^{-7}\, T^{1.981})^4}\right]^{-\frac{1}{4}} . \tag{A.7}$$

Die Approximation gilt im Temperaturbereich $10 \leq T \leq 30\,000$ K.

Für Troilit folgt mit den optischen Konstanten aus Pollak *et al.* [43]

$$\kappa_{\mathrm{FeS}}(T) = \left[\frac{1}{(3.716 \cdot 10^{-5}\, T^{1.838})^2} + \frac{1}{(0.2522\, T^{-0.329})^2}\right]^{-\frac{1}{2}} + 4.526 \cdot 10^{-9}\, T^{2.456} . \tag{A.8}$$

Die Approximation gilt im Temperaturbereich $10 \leq T \leq 5\,000$ K.

Für Korund folgt mit den optischen Konstanten in Koike *et al.* [27]

$$\kappa_{\mathrm{Kor}}(T) = \left[\frac{1}{(3.662 \cdot 10^{-7}\, T^{2.122})^4} + \frac{1}{(17.53\, T^{-1.128})^4 + (1.203 \cdot 10^{-4}\, T^{0.719})^4 + (1.069 \cdot 10^{-9}\, T^{2.256})^4}\right]^{-\frac{1}{4}} . \tag{A.9}$$

Die Approximation gilt im Temperaturbereich $10 \leq T \leq 5\,000$ K.

Literaturverzeichnis

[1] Alexander, D. R., Ferguson J. W. (1994) Low-temperature Rosseland Opacities. Astrophysical J. **437**, p. 879-891

[2] Balbus S. A., Hawley J. F. (1991) A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. Astrophysical J. **376**, p. 214-233

[3] Bath G. T., Pringle J. E. (1981) The evolution of viscous discs - I. Mass transfer variations. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **194**, p. 967-986

[4] Bell K. R., Lin D. N. C. (1994) Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. Astrophysical J. **427**, p. 987-1004

[5] Brearley A. J., Scott E. R. D., Keil K., Clayton R. N., Mayeda T. K., Boynton W. V., Hill D. H. (1989) Chemical, isotopic and mineralogical evidence for the origin of matrix in ordinary chondrites. Geochimica et Cosmochimica Acta, **53**, p. 2081-2093

[6] Buseck P. R., Hua X. (1993) Matrices of carbonaceous chondrite meteorites. Ann. Rev. of Earth and Planetary Science **21**, p. 255-305

[7] Cabot W., Canuto V. M., Hubickyj O., Pollack J. B. (1987) The Role of Turbulent Convection in the Primitive Solar Nebula. Icarus **69**, p. 387-422 (I) und 423-457 (II)

[8] Calvet N., Hartmann L., Strom S. E. (1999) Evolution of disk accretion. In: Protostars & Planets IV. University of Arizona Press (in press)

[9] Cameron A. G. W. (1969) In: Millman P. M. (Eds) Meteroite Research. Reidel, Dordrecht, p. 7

[10] Cassen P. (1996) Models for the fractionation of moderately volatile elements in the solar nebula. Meteoritics and Planetary Science **31**, p. 793-806

[11] Crank J., Nicholson P. (1947) A practical method for numerical integration of solutions of partial differential equations of heat-conduction type. Proc. Cambridge Philos. Soc. **43**, p. 50

[12] Crovisier J., Leech K., Bockelée-Morvan D., Brooke T. Y., Hanner M. S., Altieri B., Keller H. U., Lellouch E. (1997) The spectrum of comet Hale-Bopp (C/1995 01) observed with the Infrared Space Observatory at 2.9 astronomical units from the sun. Science **275**, p. 1904-1907

[13] van Dishoeck E. F., Blake G. A., Draine B. T., Lunine J. I. (1993) The chemical evolution of protostellar and protoplanetary matter. In: Levy E. H., Lunine J. I. (Eds) Protostars & Planets III. University of Arizona Press, Tucson, p. 163-241

[14] Draine B. T., Lee H. M. (1984) Optical properties of interstellar graphite and silicate grains. Astrophysical J. **285**, p. 89-108

[15] Draine B. T. (1985) Tabulated optical properties of interstellar graphite and silicate grains. Astrophysical J. Suppl. **57**, p. 587-594

[16] Duschl W. J., Gail H.-P., Tscharnuter W. M. (1996) Destruction processes for dust in protoplanetary accretion discs. Astronomy & Astrophysics **312**, p. 624-642

[17] Fabian D., Jäger C., Henning T. (2000) Laboratory Study of the Thermal Evolution of Amorphous Magnesium Silicates and Silica. ISO beyond the peaks: The 2nd ISO workshop on analytical spectroscopy (VILSPA, 2.-4. Februar 2000)

[18] Gail H.-P. (1998) Chemical reactions in protoplanetary accretion disks IV. Astronomy & Astrophysics **332**, p. 1099-1122

[19] Goldreich P., Lynden-Bell D. (1965) Gravitational stability of uniformly rotating disks. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **130**, p. 97-124

[20] Grossman J. N. (1988) Formation of chondrules. In: Kerridge J. F., Matthews M. S. (Eds) Meteorites and the early solar system. University of Arizona Press, Tucson, p. 680-696

[21] Hanner M. S., Lynch D. K., Russel R. W. (1994) The 8-13 micron spectra of comets and the composition of silicate grains. Astrophysical J. **425**, p. 274-285

[22] Hartmann L. W. Kenyon S. J. (1996) The FU Orionis phenomenon. Annual Review of Astronomy and Astrophysics **34**, p. 207-240

[23] Hewins R. H., Jones R. H., Scott E. R. D. (1996) Chondrules and the protoplanetary disk. Cambridge University Press

[24] Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B. (1964) Molecular Theory of Gases and Liquids. Wiley, New York

[25] Iglesias C. A., Rogers F. J. (1996) Updated OPAL opacities. Astrophysical J. **464**, p. 943-953

[26] Jeans J. (1928) Astronomy and cosmogony. Cambridge University Press, p. 337

[27] Koike C., Kaito C., Yamamoto, T., Shibai H., Kimura S., Suto, H. (1995) Extinction Spectra of Corundum in the wavelengths from UV to FIR. Icarus **114**, p. 203-214

[28] Lattimer J. M., Schramm D. N., Grossmann L. (1978) Condensation in supernova ejecta and isotopic anomalies in meteorites. Astrophysical J. **219**, p. 230-249

[29] Lenzuni P., Gail H.-P., Henning T. (1995) Dust evaporation in protostellar cores. Astrophysical J. **447**, p. 848-862

[30] Lewis J. S. (1974) Science **186**, p. 440

[31] Lide R. D. (1995) CRC Handbook of Chemistry and Physics (78th ed.). CRC Press, Boca Raton etc.

[32] Lin D, N. C., Papaloizou J. (1980) On the structure and evolution of the primordial solar nebula. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **191**, p. 37-48

[33] Lin D, N. C., Papaloizou J. (1985) On the dynamical origin of the solar system. In: Black D. C., Matthews M. S. (Eds) Protostars & Planets II. University of Arizona Press, Tucson, p. 981-1072

[34] Marcy G. W., Butler R. P. (1998) Detection of extrasolar giant planets. Annual Review of Astronomy and Astrophysics **36**, p. 57-97

[35] Mathis J. S., Rumpl W., Nordsieck K. H. (1977) The size distribution of interstellar grains. Astrophysical J. **217**, p. 425-433

[36] Morfill G. E. (1985) Physics and chemistry in the primitive solar nebula. In: Lucas R., Omont A., Stora R. (Eds) Birth and infancy of stars. North-Holland Physics Publishing Division, Amsterdam, p. 693-792

[37] Morfill G. E., Tscharnuter W., Völk, H. J. (1985) Dynamical and chemical evolution of the protoplanetary nebula. In: Black D. C., Matthews M. S. (Eds) Protostars & Planets II. University of Arizona Press, Tucson, p. 493-533

[38] Nakamoto T., Nakagawa Y. (1995) Growth of protoplanetary disks around young stellar objects. Astrophysical J. **445**, p. 330-336

[39] Natta A. (1999) Star Formation. In: Casoli F., David F., Lequeux J. (Eds) Infrared space astronomy, to-day and to-morrow. Springer Verlag, p. 1-47

[40] Nuth J. A., Donn B. (1982) Laboratory measurements of amorphous silicate smokes and the infrared spectra of oxygen-rich stars. Astrophysical J. **257**, p. 103-105

[41] Nuth J. A. III; Hill H. G. M. (2000) The Formation Age of Comets: Predicted Physical and Chemical Trends. 31st Annual Lunar and Planetary Science Conference, March 13-17, 2000, Houston, Texas, abstract no. 1229

[42] Pollack J. B., McKay C. P., Christofferson, B. M. (1985) A calculation of the Rosseland mean opacity of dust grains in primordial solar system nebulae. Icarus **64**, p. 471-492

[43] Pollack J. B., Hollenbach D., Beckwith S., Simonelli D. P., Roush, T., Fong W. (1994) Composition and Radiative Properties of Grains in Molecular Clouds and Accretion Disks. Astrophysical J. **421**, p. 615-639

[44] Press W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. (1992) Numerical Recipes in Fortran (Second Edition). Cambridge University Press

[45] Pringle J. E. (1981) Accretion discs in Astrophysics. Ann. Rev. of Astronomy & Astrophysics **19**, p. 137-162

[46] Prinn R. G. (1990) On neglect of nonlinear momentum terms in solar nebula accretion disk models. Astrophysical J. **348**, p. 725-729

[47] Richtmyer R. D., Morton K. W. (1967) Difference methods for initial-value problems (Second Edition). Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons

[48] Ruden S.P., Pollack J.B. (1991) The dynamical evolution of the protosolar nebula. Astrophysical J. **375**, p. 740-760

[49] Ruden S.P. (1999) The Formation of Planets. In: Lada C.J., Kylafdis N.D. (Eds) The origins of Stars and Planetary Systems. Kluwer, Dordrecht, p. 643-679

[50] Shakura N.I., Sunyaev R.A. (1973) Black holes in Binary Systems. Observational Appearance. Astronomy & Astrophysics **24**, p. 337-355

[51] Sharp C.M., Huebner W.F. (1990) Molecular equilibrium with condensation. Astrophysical J. Suppl. **72**, p. 417-431

[52] Shu F.H., Tremaine S., Adams F.C., Ruden S.P. (1990) Sling amplification and eccentric gravitational instabilities in gaseous disks. Astrophysical J. **358**, p. 495-514

[53] Shu F.H., Johnstone D., Hollenbach D. (1993) Photoevaporation of the Solar Nebula and the Formation of the Giant Planets. Icarus **106**, p. 92-101

[54] Silk J. (1978) Fragmentation of molecular clouds. In: Protostars and planets: Studies of star formation and of the origin of the solar system. Tucson, University of Arizona Press, p. 172-187

[55] Sitko M., Grady C.A., Russell R.W., Lynch D.K., Hanner M.S., Perez M.R., Bjorkman K.S., DeWinter W. (1999) In: Mannings V., Matthews M.S. (Eds) Protostars & Planets V, University of Arizona press, Tuscon, preprint

[56] Stepinski T.F. (1998) New approach to diagnosing properties of protoplanetary disks. Astrophysical J. **507**, p. 361-370

[57] Stevenson D.J. (1990) Chemical heterogeneity and imperfect mixing in the solar nebula. Astrophysical J. **348**, p. 730-737

[58] Toomre A. (1964) On the gravitational stability of a disk of stars. Astrophysical J. **139**, p. 1217-1238

[59] Toriumi M. (1989) Grain size distribution of the matrix in the Allende chondrite. Earth and Planetary Science Letters **92**, p. 265-273

[60] Waldmann L. (1958) Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck. In: Flügge S. (eds) Encyclopedia of Physics, Vol. XII, Springer, Berlin, p. 295-514

[61] Weidenschilling S.J. (1977) Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **180**, p. 57-70

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. H.-P. Gail für die Bereitstellung des Themas und die engagierte Betreuung. Seine engagierte Unterstützung und ständige Bereitschaft Fragen zu beantworten haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. W. Duschl für die Erstellung des Zweitgutachtens.

Danken möchte ich Herrn Rainer Kürschner, zum einen für die Korrekturlesung der Arbeit und zum anderen für seine Hilfe als wandelndes Lexikon in Computerfragen.

Ich danke Andrea Ferrarotti, Gunter Kaliwoda und Christof Keller für die freundliche Zimmeratmosphäre und den argentinisch-mexikanischen Flair.

Ich danke Patrick Müller, Sabine Richling, Jan Schrage, Kerstin Weis und allen anderen Mitarbeitern des ITA für das freundliche Arbeitsklima im Institut, jegliche hilfreiche Unterstützung und jeden erfolgreichen Versuch mich von der Arbeit abzuhalten.

Ich danke Thomas Paul Schepansky und Christian Klatt, für das gute wohngemeinschaftliche Zusammenleben und die Schlafstätte in der letzten Phase der Arbeit.

Herzlich danken möchte ich auch allen Mitgliedern der EFG Heidelberg/Feuerbachstr. und des Golden Harps Gospelchoir für jedes aufbauende Wort und für jedes Gebet.

Meiner Familie danke ich herzlich für jegliche Unterstützung: meiner Mutter Doris Kühn, meiner Großmutter Annegret Ulrich, meinen Geschwistern Matthias, Angelika, Markus und Susanne und nicht zuletzt Karin und Hans Ulrich.

Ganz ausdrücklich möchte ich Barbara Lemm danken, für ihre Herzlichkeit und für die langen gemeinsamen Spaziergänge, verbunden mit hilfreichen Gesprächen.

Mein ganzer Dank mündet ein in Gott, dem Vater, dem Sohn Jesus Christus und dem heiligen Geist, der der Schöpfer der Welt und aller Naturgesetze ist.

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den ....

....