Über Tensoren, Matrizen und Pseudovektoren

von Mike Bernhardt, mikebernhardt@web.de

Februar 2006

Inhaltsverzeichnis

Tensoren und Koordinatentransformationen

Ein Tensor ist dadurch definiert, dass sich seine Komponenten auf bestimmte Weise transformieren. So ist z.B. T dann ein Tensor zweiter Stufe, wenn sich seine beiden kontravarianten (1), kovarianten (2) bzw. gemischten (3) Komponenten so verhalten:

$$T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} T^{ab} \tag{1}$$

$$T_{a'b'} = \frac{\partial x^{a}}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^{b}}{\partial x^{b'}} T_{ab} \tag{2}$$

$$T^{a'}{}_{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b}}{\partial x^{b'}} T^{a}{}_{b} \tag{3}$$

Hierbei ist jeweils über a und b zu summieren[1].

Frage: Machen die Komponenten so etwas von selbst? Antwort: Nein! Wenn man sagt, die Komponenten transformieren sich so wie in Gleichung (1)–(3), dann meint man damit, bezüglich einer bestimmten Transformation. Besser gesagt, bezüglich einer Koordinatentransformation! Ein Tensor ist zunächst ein abstraktes Objekt; erst wenn man sich für ein Koordinatensystem entscheidet, kann man seine Komponenten bezüglich dieses Koordinatensystems hinschreiben. Wenn man nun eine Koordinatentransformation ausführt, also von der Koordinate x^a zu $x^{a'}$ übergeht, ändern sich auch die Komponenten des Tensors, und wenn sich diese Änderung nach Gleichung (1)–(3) vollzieht: Voilà, dann ist T ein Tensor!

(1)–(3) gelten für beliebige Koordinatentransformationen, also auch nichtlineare wie beispielsweise der Übergang zu Polar- oder Kugelkoordinaten. Im Falle von linearen Transformationen, wie z.B. Drehungen im Raum oder Lorentztransformationen, lassen sie sich auch anders (vielleicht einfacher) schreiben:

[1] Hier und im Folgenden wird von der Summenkonvention Gebrauch gemacht; über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren. Da wir konsequent zwischen ko- und kontravarianten Indizes unterscheiden, gilt immer: Die Summe ist zu bilden, wenn in einem Produkt der gleiche Index einmal als unterer (ko-) und einmal als oberer (kontravarianter) Index auftritt.

Tensoren und lineare Koordinatentransformationen

Eine lineare Koordinatentransformation wird durch eine Matrix A repräsentiert:

$$x^a \to x^{a'} = A^{a'}{}_a \, x^a$$

Wenn man diese Gleichung nach x^a ableitet, erhält man:

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} = A^{a'}{}_a$$

Koordinatentransformationen sind bijektiv. Wir können also wieder zurücktransformieren, indem wir die Inverse von A anwenden:

$$x^{a'} \to x^a = (A^{-1})^a{}_{a'} \, x^{a'}$$

Differentiation liefert:

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} = (A^{-1})^a{}_{a'}$$

In (1)–(3) eingesetzt ergibt das:

$$T^{a'b'} = A^{a'}{}_a \, A^{b'}{}_b \, T^{ab} \tag{4}$$

$$T_{a'b'} = (A^{-1})^a{}_{a'} \, (A^{-1})^b{}_{b'} \, T_{ab} \tag{5}$$

$$T^{a'}{}_{b'} = A^{a'}{}_a \, (A^{-1})^b{}_{b'} \, T^a{}_b \tag{6}$$

Manchmal sieht man Gleichung (4)–(6), oder eine davon, als „Definition“ eines Tensors. Dies ist aber nur ein Spezialfall für lineare Koordinatentransformationen. Allgemeiner sind (1)–(3).

Tensoren kann man nicht wegtransformieren!

Etwas weniger salopp ausgedrückt: Wenn ein Tensor in einem Koordinatensystem von Null verschiedene Komponenten besitzt, dann hat er auch in jedem anderen Koordinatensystem nichtverschwindende Komponenten. Diese Eigenschaft folgt direkt aus dem Transformationsverhalten von Tensoren, (1)–(3). An diesen Formeln kann man nämlich ablesen: Wenn es ein Koordinatensystem gibt, in dem <u>alle</u> $T^{ab} = 0$ sind, dann sind auch alle $T^{a'b'} = 0$, der Tensor ist also in allen anderen Koordinatensystemen auch Null!

Ein Beispiel aus der Elektrodynamik ist die kovariante Darstellung der Maxwellgleichungen mit Hilfe des Feldstärketensors. Dieser setzt sich aus den $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldern zusammen. Ist er Null, liegt weder ein elektrisches- noch ein magnetisches Feld vor, und aufgrund der Tensoreigenschaft (1)–(3) gilt das in jedem Koordinatensystem. Ist mindestens eine Komponente von $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ von Null verschieden, so hat der Feldstärketensor auch in allen anderen Bezugssystemen nichtverschwindende Komponenten. Durch Wechsel in ein bewegtes Bezugssystem, also eine Lorentztransformation, werden die Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zwar miteinander vermischt, aber man kann nicht alle Komponenten von $\vec{E}$ <u>und</u> $\vec{B}$ durch einen solchen Koordinatenwechsel zum Verschwinden bringen.

Die Symmetrieeigenschaften von Tensoren sind invariant!

Tensoren sind entweder symmetrisch, antisymmetrisch oder gar nicht symmetrisch. An der Transformationsformel kann man ablesen, dass diese Symmetrieeigenschaften bei Koordinatentransformationen erhalten bleiben. Dies können wir kurz am Beispiel der kovarianten Komponenten eines Tensors zweiter Stufe nachrechnen:

- symmetrisch: $T^{ab} = T^{ba}$

$$\Rightarrow \qquad T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} T^{ab} = \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} T^{ba} = T^{b'a'}$$

- antisymmetrisch: $T^{ab} = -T^{ba}$

$$\Rightarrow \qquad T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} T^{ab} = \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} (-T^{ba}) = -T^{b'a'}$$

Durch Symmetrien verringert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten eines Tensors. In drei Dimensionen hat ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe maximal 6 unabhängige Komponenten (in vier Dimensionen 10) und ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe maximal 3 (in vier Dimensionen 6); und das gilt in allen Koordinatensystemen!

Matrizen und Koordinatentransformationen

Mit einer Matrix können wir ein $\vec{x}$ in ein $\vec{y}$ verwandeln – die Matrix vermittelt eine lineare Abbildung:

$$\vec{y} = M\,\vec{x}$$

Betrachten wir nun die Wirkung der Matrix auf die Basisvektoren $\vec{n}_{(j)}$ des gewählten Koordinatensystems (der Index j bezeichnet den j-ten Basisvektor. Er steht in Klammern, damit man ihn nicht mit einem Komponentenindex verwechselt). Unsere Matrix möge den j-ten Basisvektor auf den Vektor $\vec{m}_{(j)}$ abbilden:

$$\vec{m}_{(j)} = M\,\vec{n}_{(j)}$$

In Komponentenschreibweise lautet das:

$$m^a_{(j)} = M^a{}_b\, n^b_{(j)} \tag{*}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir eine Orthonormalbasis; das Skalarprodukt aus zwei Basisvektoren ergibt dann das Kronecker-Delta:

$$\langle\, \vec{n}_{(i)}\,,\, \vec{n}_{(j)}\,\rangle = n^{(i)}_b\, n^b_{(j)} = \delta^i_j$$

Wir überlegen uns, wie $m^a_{(j)}$ noch geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} m^a_{(j)} &= m^a_{(i)}\,\delta^i_j \\ &= m^a_{(i)}\,\langle\, \vec{n}_{(i)}\,,\, \vec{n}_{(j)}\,\rangle \\ &= m^a_{(i)}\, n^{(i)}_b\, n^b_{(j)} \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (*) liefert:

$$M^a{}_b = m^a_{(i)}\, n^{(i)}_b \tag{7}$$

Die Matrix wird also eindeutig durch die (orthonormalen) Basisvektoren und deren Bilder bestimmt! (In (7) muss über i summiert werden.)

Die Bedeutung dieser wichtigen Gleichung wird besonders deutlich, wenn man als Basis die Standardbasis $\{\vec{e}_{(j)}\}$ mit $e^i_{(j)} = \delta^i_j$ wählt. Dann vereinfacht sich (7) zu:

$$M^a{}_b = m^a_{(i)}\, e^{(i)}_b = m^a_{(i)}\,\delta^i_b = m^a_{(b)}$$

Und man kann direkt ablesen: **Die Spalten von M sind die Bilder der Basisvektoren!**

Wir wissen bereits, wie sich die ko- und kontravarianten Vektorkomponenten transformieren, nämlich:

$$m^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, m^a \qquad \text{bzw.} \qquad n_{b'} = \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}}\, n_b$$

Das können wir in (7) einsetzen, um das Transformationsverhalten der Matrix M zu erhalten:

$$\begin{aligned} M^{a'}{}_{b'} &= m^{a'}_{(i)}\, n^{(i)}_{b'} \\ &= \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, m^a_{(i)}\, \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}}\, n^{(i)}_b \\ &= \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}}\, m^a_{(i)}\, n^{(i)}_b \end{aligned}$$

Also:

$$M^{a'}{}_{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}}\, M^a{}_b \tag{8}$$

Ein Vergleich mit (3) ergibt: Die Matrix einer linearen Abbildung besitzt das gleiche Transformationsverhalten bezüglich beliebiger Koordinatentransformationen wie ein gemischter Tensor zweiter Stufe.

Matrizen und lineare Koordinatentransformationen

Es ist interessant, sich das Verhalten einer Matrix M bezüglich linearer Koordinatentransformationen zu überlegen – ohne von den Ergebnissen des vorigen Abschnittes Gebrauch zu machen. Es gilt:

$$\vec{y} = M\,\vec{x} \tag{i}$$
$$\vec{y}\,' = M'\,\vec{x}\,' \tag{ii}$$

Betrachten wir wieder eine lineare Koordinatentransformation A. Diese ist eine Abbildung von $\vec{x}$ nach $\vec{x}\,'$, bzw. $\vec{y}$ nach $\vec{y}\,'$ und umgekehrt:

$$\vec{x}\,' = A\,\vec{x} \tag{iii}$$
$$\vec{y}\,' = A\,\vec{y} \tag{iv}$$
$$\vec{x} = A^{-1}\,\vec{x}\,' \tag{v}$$
$$\vec{y} = A^{-1}\,\vec{y}\,' \tag{vi}$$

Wenn wir diese Gleichungen in der Reihenfolge (ii), (iv), (i), (v) ausnutzen, kommt die Beziehung zwischen M und M', also das Verhalten unserer Matrix bezüglich der Koordinatentransformation A, heraus:

$$M'\,\vec{x}\,' = \vec{y}\,' = A\,\vec{y} = A\,M\,\vec{x} = A\,M\,A^{-1}\,\vec{x}\,'$$

Und da $\vec{x}\,'$ beliebig ist:

$$M' = A\,M\,A^{-1} \tag{9}$$

In Komponentenschreibweise werden die Gleichungen (i)–(vi) zu:

$$\begin{aligned}
y^a &= M^a{}_b\,x^b\\
y^{a'} &= M^{a'}{}_{b'}\,x^{b'}\\
x^{a'} &= A^{a'}{}_a\,x^a\\
y^{a'} &= A^{a'}{}_a\,y^a\\
x^a &= (A^{-1})^a{}_{a'}\,x^{a'}\\
y^a &= (A^{-1})^a{}_{a'}\,y^{a'}
\end{aligned}$$

Und aus (9) wird damit:

$$M^{a'}{}_{b'} = A^{a'}{}_a\,(A^{-1})^b{}_{b'}\,M^a{}_b \tag{10}$$

Dies ist mit (6) identisch, dem Verhalten eines gemischten Tensors zweiter Stufe bezüglich linearer Koordinatentransformationen.

Ist jede quadratische Matrix ein Tensor?

Wir haben in den letzten beiden Abschnitten gesehen, dass sich die Matrix einer linearen Abbildung in ihrem Transformationsverhalten formal nicht von einem Tensor unterscheidet. Eine Matrix kann jedoch mehrdeutig interpretiert werden – als lineare Abbildung, linearer Operator, Bilinearform, Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems, etc. Dass sich nicht jede quadratische Matrix wie ein Tensor transformiert, kann durch ein einfaches Beispiel gezeigt werden: Wir konstruieren zwei Matrizen M und N mit den Komponenten $M^{ab} = r^a\,v^b$ bzw. $N^{ab} = r^a\,r^a\,v^b$, wobei r^a und v^b jeweils die Komponenten von Tensoren 1. Stufe darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns darunter den Orts- und Geschwindigkeitsvektor eines Teilchens denken.

$$M = \begin{pmatrix} x\,v_x & x\,v_y & x\,v_z\\ y\,v_x & y\,v_y & y\,v_z\\ z\,v_x & z\,v_y & z\,v_z \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} x^2\,v_x & x^2\,v_y & x^2\,v_z\\ y^2\,v_x & y^2\,v_y & y^2\,v_z\\ z^2\,v_x & z^2\,v_y & z^2\,v_z \end{pmatrix}$$

Wir prüfen nun das Transformationsverhalten von M und N:

$$\begin{aligned}
M^{a'b'} &= r^{a'}\,v^{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\,r^a\,\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b}\,v^b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\,\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b}\,M^{ab}\\
N^{a'b'} &= r^{a'}\,r^{a'}\,v^{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\,r^a\,\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\,r^a\,\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b}\,v^b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\,\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\,\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b}\,N^{ab}
\end{aligned}$$

M ist ein Tensor, N allerdings nicht. Die Antwort auf die oben gestellte Frage lautet also: Nein!

Pseudovektoren

Die Frage, ob jede Matrix ein Tensor ist, kann auch eine Stufe tiefer gestellt werden: Ist jedes n-Tupel ein Vektor (in n Dimensionen)? Antwort: Nein! Es gibt eine Reihe von „Vektoren“, die nicht bezüglich jeder beliebigen Koordinatentransformation das selbe Transformationsverhalten haben (eben jenes, welches sie zu Vektoren macht). Bei Spiegelungen verhalten sich nämlich manche „Vektoren“ anders als normale Vektoren; daher nennt man diese auch Pseudo- oder axiale Vektoren. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, der Drehimpuls $\vec{L}$, das Magnetfeld $\vec{B}$ und jedes Kreuzprodukt zweier Vektoren sind Pseudovektoren. Am Beispiel der Winkelgeschwindigkeit soll dies kurz näher erläutert werden.

Bei einer Drehbewegung ergibt sich die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ im Abstand $\vec{r}$ von der Drehachse aus dem Kreuzprodukt von Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Abstandsvektor $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{11}$$

In Komponentenschreibweise lautet diese Gleichung:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y\, z - \omega_z\, y \\ \omega_z\, x - \omega_x\, z \\ \omega_x\, y - \omega_y\, x \end{pmatrix} \tag{**}$$

Betrachten wir nun eine Spiegelung an der y, z-Ebene. Mathematisch lässt sie sich durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellen. Diese Koordinatentransformation auf den Orts- und Geschwindigkeitsvektor angewandt liefert:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' = S\,\vec{r} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \vec{v}\,' = S\,\vec{v} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn zwischen den transformierten Vektoren $\vec{v}\,'$ und $\vec{r}\,'$ immer noch die Beziehung $\vec{v}\,' = \vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,'$ bestehen soll[2], folgt für das Transformationsverhalten von $\vec{\omega}$:

$$\begin{pmatrix} -v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_y\, z - \omega'_z\, y \\ -\omega'_z\, x - \omega'_x\, z \\ \omega'_x\, y + \omega'_y\, x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -\omega_y\, z + \omega_z\, y \\ \omega_z\, x - \omega_x\, z \\ \omega_x\, y - \omega_y\, x \end{pmatrix}$$

Wobei im letzten Schritt Gleichung (**) eingesetzt wurde. Es gilt also:

$$\vec{\omega}\,' = \begin{pmatrix} \omega_x \\ -\omega_y \\ -\omega_z \end{pmatrix} = -S\,\vec{\omega}$$

Die Winkelgeschwindigkeit transformiert sich bei dieser Spiegelung also anders als $\vec{r}$ und $\vec{v}$. Letztere sind Vektoren, $\vec{\omega}$ ist es nicht!

Zur Veranschaulichung dieses Beispiels denken wir uns eine in der x, y-Ebene liegende Scheibe, die um die z-Achse rotiert. Die Drehung erfolge, von oben betrachtet, im Gegenuhrzeigersinn (Rechtsdrehung), sodass $\vec{\omega}$ nach oben, also in positive z-Richtung, zeigt. Betrachten wir die rotierende Scheibe in einem Spiegel, der in der y, z-Ebene liegt – nichts anderes bedeutet die durch S repräsentierte Koordinatentransformation –, so wird aus der Rechtsdrehung eine Linksdrehung; $\vec{\omega}\,'$ muss also nach unten zeigen. Wäre $\vec{\omega}$ ein Vektor, so bliebe er beim Blick in diesen Spiegel unverändert, sein Spiegelbild zeigte ebenfalls nach oben.

[2] Und das muss der Fall sein, denn sonst würde Gleichung (11), die als Definition der Winkelgeschwindigkeit aufgefasst werden kann, gar keinen Sinn ergeben.

Tensordarstellung von Pseudovektoren

a) Winkelgeschwindigkeit

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Winkelgeschwindigkeit kein Vektor ist, weil sie sich bei Spiegelungen anders transformiert als normale Vektoren. Im Folgenden wird gezeigt, dass ω_x, ω_y und ω_z die Komponenten eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe sind, der automatisch das richtige Transformationsverhalten bei allen Koordinatentransformationen, inklusive Spiegelungen, besitzt.

Wir gehen wieder von der Beziehung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ aus, schreiben aber die Komponentendarstellung in etwas kompakterer Form:

$$v^a = \varepsilon^{abc}\, \omega_b\, r_c$$

Hierbei ist ε^{abc} der sogenannte Levi-Civita-Tensor mit den Werten:

$$\varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1 & \text{für } abc = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{für } abc = 132, 321, 213 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{12}$$

Durch den Ausdruck $\varepsilon^{abc}\, \omega_b$ wird eine Matrix Ω^{ac} definiert, deren Elemente wir aus (12) ablesen können:

$$\Omega^{ac} = \varepsilon^{abc}\, \omega_b \qquad \rightleftharpoons \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Damit kann die Gleichung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ in einer Form geschrieben werden, die auf Pseudovektoren verzichtet:

$$v^a = \Omega^{ab}\, r_b \qquad \rightleftharpoons \qquad \vec{v} = \Omega\, \vec{r} \tag{14}$$

Eine kurze Probe möge uns davon überzeugen, dass Gleichung (14) mit (**) identisch ist:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y\, z - \omega_z\, y \\ \omega_z\, x - \omega_x\, z \\ \omega_x\, y - \omega_y\, x \end{pmatrix}$$

Das Transformationsverhalten von Ω ergibt sich, wenn wir verlangen, dass bezüglich eines anderen Koordinatensystems die Beziehung $\vec{v}\,' = \Omega\,'\, \vec{r}\,'$ erfüllt ist:

$$v^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, v^a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, \Omega^{ab}\, r_b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, \Omega^{ab}\, \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b}\, r_{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b}\, \Omega^{ab}\, r_{b'} \overset{!}{=} \Omega^{a'b'}\, r_{b'}$$

Es gilt also:

$$\Omega^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}\, \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b}\, \Omega^{ab}$$

Die Komponenten von Ω transformieren sich bei beliebigen Koordinatentransformationen also wie die eines Tensors zweiter Stufe. Trotzdem wollen wir noch einmal nachrechnen, was bei der oben betrachteten Spiegelung S passiert:

$$\begin{aligned} \Omega\,' = S\, \Omega\, S^T &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Und somit gilt:

$$\vec{\omega}\,' = \begin{pmatrix} \omega_x \\ -\omega_y \\ -\omega_z \end{pmatrix} = -S\, \vec{\omega}$$

Was mit dem obigen Ergebnis übereinstimmt.

b) Drehimpuls

Ein weiteres Beispiel für einen Pseudovektor, dessen Komponenten einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe bilden, ist der Drehimpuls. Er ist definiert als das Kreuzprodukt aus Orts- und Impulsvektor:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{15}$$

Seine Komponenten lauten:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,p_z - z\,p_y \\ z\,p_x - x\,p_z \\ x\,p_y - y\,p_x \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors können wir das wie folgt ausdrücken:

$$L^a = \varepsilon^{abc}\, r_b\, p_c$$

Um daraus eine Matrix zu konstruieren, multiplizieren wir mit ε_{ija} und summieren über a:

$$\varepsilon_{ija}\, L^a = \varepsilon_{ija}\, \varepsilon^{abc}\, r_b\, p_c \tag{***}$$

Der Ausdruck $\varepsilon_{ija}\, L^a$ definiert die Matrix L_{ij}:

$$L_{ij} = \varepsilon_{ija}\, L^a \qquad \rightleftharpoons \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Das Produkt der beiden Levi-Civita-Tensoren in (***) können wir direkt ausrechnen. Dazu machen wir von der allgemeinen Beziehung

$$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon^{abc} = \delta_i^a\, \delta_j^b\, \delta_k^c + \delta_i^b\, \delta_j^c\, \delta_k^a + \delta_i^c\, \delta_j^a\, \delta_k^b - \delta_i^a\, \delta_j^c\, \delta_k^b - \delta_i^c\, \delta_j^b\, \delta_k^a - \delta_i^b\, \delta_j^a\, \delta_k^c$$

Gebrauch, ersetzten k durch a und führen die Summe über a aus:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ija}\, \varepsilon^{abc} &= \delta_i^a\, \delta_j^b\, \delta_a^c + \delta_i^b\, \delta_j^c\, \delta_a^a + \delta_i^c\, \delta_j^a\, \delta_a^b - \delta_i^a\, \delta_j^c\, \delta_a^b - \delta_i^c\, \delta_j^b\, \delta_a^a - \delta_i^b\, \delta_j^a\, \delta_a^c \\ &= \delta_i^c\, \delta_j^b + 3\, \delta_i^b\, \delta_j^c + \delta_i^c\, \delta_j^b - \delta_i^b\, \delta_j^c - 3\, \delta_i^c\, \delta_j^b - \delta_i^b\, \delta_j^c \\ &= \delta_i^b\, \delta_j^c - \delta_i^c\, \delta_j^b \end{aligned}$$

In (***) eingesetzt ergibt das:

$$L_{ij} = \left(\delta_i^b\, \delta_j^c - \delta_i^c\, \delta_j^b \right) r_b\, p_c = r_i\, p_j - p_i\, r_j$$

Damit haben wir eine zu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ alternative Schreibweise, welche keine Pseudovektoren enthält:

$$L_{ij} = r_i\, p_j - p_i\, r_j \qquad \rightleftharpoons \qquad L = \vec{r}\, \vec{p}^{\,T} - \vec{p}\, \vec{r}^{\,T} \tag{17}$$

Hierbei sind mit $\vec{r}$ bzw. $\vec{p}$ die Spaltenvektoren und mit $\vec{r}^{\,T}$ bzw. $\vec{p}^{\,T}$ die (transponierten) Zeilenvektoren gemeint[3]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\,p_x & x\,p_y & x\,p_z \\ y\,p_x & y\,p_y & y\,p_z \\ z\,p_x & z\,p_y & z\,p_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x\,x & p_x\,y & p_x\,z \\ p_y\,x & p_y\,y & p_y\,z \\ p_z\,x & p_z\,y & p_z\,z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x\,p_y - p_x\,y & x\,p_z - p_x\,z \\ y\,p_x - p_y\,x & 0 & y\,p_z - p_y\,z \\ z_{\,x} - p_z\,x & z\,p_y - p_z\,y & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dass sich L wie ein Tensor transformiert, kann durch Einsetzen der transformierten Orts- und Impulsvektorkomponenten verifiziert werden:

$$L_{i'j'} = r_{i'}\, p_{j'} - p_{i'}\, r_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, r_i\, p_j - \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, p_i\, r_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, L_{ij}$$

[3] Man beachte den Unterschied zum Skalarprodukt: $\vec{r}\, \vec{p}^{\,T} = r_i\, p_j$ ist eine Matrix und $\vec{r}^{\,T}\, \vec{p} = \langle \vec{r}, \vec{p} \rangle = r_a\, p^a$ ein Skalar!

c) Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit

Im Falle einer Rotation um eine feste Achse kann man den Drehimpuls auch in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit angeben:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,\vec{r} \times (\,\vec{\omega} \times \vec{r}\,) \tag{18}$$

Auch diese Gleichung kann mittels der oben eingeführten Tensoren der Winkelgeschwindigkeit Ω und des Drehimpulses L ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \varepsilon_{ija}\,L^a = \varepsilon_{ija}\,\varepsilon^{abc}\,r_b\,p_c = m\,\varepsilon_{ija}\,\varepsilon^{abc}\,r_b\,v_c \\ &= m\,\varepsilon_{ija}\,\varepsilon^{abc}\,r_b\,\Omega_{cd}\,r^d = m\left(\,\delta_i^b\,\delta_j^c - \delta_i^c\,\delta_j^b\,\right) r_b\,\Omega_{cd}\,r^d \\ &= m\,r_i\,\Omega_{jd}\,r^d - m\,r_j\,\Omega_{id}\,r^d = -m\,r_i\,r^d\,\Omega_{dj} - m\,\Omega_{id}\,r^d\,r_j \end{aligned}$$

Wobei im letzen Schritt die Antisymmetrie von Ω ausgenutzt wurde. Schließlich erhalten wir:

$$L_{ij} = -m\,r_i\,r^a\,\Omega_{aj} - m\,\Omega_{ia}\,r^a\,r_j \qquad \rightleftharpoons \qquad L = -m\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T}\,\Omega - m\,\Omega\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T} \tag{19}$$

Ausgeschrieben lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned} L &= -m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \Omega - m\,\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \\ &= -m \begin{pmatrix} x^2 & x\,y & x\,z \\ x\,y & y^2 & y\,z \\ x\,z & y\,z & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 & x\,y & x\,z \\ x\,y & y^2 & y\,z \\ x\,z & y\,z & z^2 \end{pmatrix} \\ &= -m \begin{pmatrix} 0 & xz\omega_x + yz\omega_y - (x^2+y^2)\omega_z & -xy\omega_x + (x^2+z^2)\omega_y - yz\omega_z \\ -xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z & 0 & -(y^2+z^2)\omega_x + xy\omega_y + xz\omega_z \\ xy\omega_x - (x^2+z^2)\omega_y + yz\omega_z & (y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eine alternative Herleitung der Gleichung (19) ergibt sich durch direktes Einsetzen des Winkelgeschwindigkeitstensors (14) in die Tensorgleichung (17):

$$\begin{aligned} L &= \vec{r}\,\vec{p}^{\,T} - \vec{p}\,\vec{r}^{\,T} = \vec{r}\,(m\,\vec{v})^{\,T} - (m\,\vec{v})\,\vec{r}^{\,T} = \vec{r}\,(m\,\Omega\,\vec{r})^{\,T} - (m\,\Omega\,\vec{r})\,\vec{r}^{\,T} \\ &= m\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T}\,\Omega^T - m\,\Omega\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T} = -m\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T}\,\Omega - m\,\Omega\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T} \end{aligned}$$

d) Drehimpuls und Trägheitstensor

Bei einer Rotation um eine feste Achse kann der Drehimpuls auch mit Hilfe des Trägheitstensors ausgedrückt werden: $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$. Zur Herleitung dieser Gleichung betrachten wir die Komponentendarstellung von Gleichung (18):

$$\begin{aligned} L^a &= \varepsilon^{abc}\,r_b\,p_c = m\,\varepsilon^{abc}\,r_b\,v_c = m\,\varepsilon^{abc}\,r_b\,\varepsilon_{cde}\,\omega^d\,r^e \\ &= m\left(\,\delta_d^a\,\delta_e^b - \delta_e^a\,\delta_d^b\,\right) r_b\,r^e\,\omega^d = m\,(\,\delta_d^a\,r_e\,r^e - r_d\,r^a\,)\,\omega^d \\ &= m\left(\,\vec{r}^{\,2}\,\delta_b^a - r^a\,r_b\,\right)\,\omega^b \\ &= I_b^a\,\omega^b \end{aligned}$$

Mit dem Trägheitstensor I:

$$I_b^a = m\left(\,\vec{r}^{\,2}\,\delta_b^a - r^a\,r_b\,\right) \qquad \rightleftharpoons \qquad I = m \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -x\,y & -x\,z \\ -x\,y & x^2+z^2 & -y\,z \\ -x\,z & -y\,z & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Auch die Gleichung $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ kann auf eine Form gebracht werden, die keine Pseudovektoren enthält. Dazu überlegen wir uns zunächst, wie die Umkehrung von $\Omega_{ac} = \varepsilon_{abc}\,\omega^b$ lautet. An der Definition des Levi-Civita-Tensors – Gleichung (12) – und der Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

können wir ablesen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{1bc}\,\Omega_{bc} &= \varepsilon^{123}\,\Omega_{23} + \varepsilon^{132}\,\Omega_{32} = \Omega_{23} - \Omega_{32} = -\omega_x - \omega_x = -2\,\omega_x \\
\varepsilon^{2bc}\,\Omega_{bc} &= \varepsilon^{231}\,\Omega_{31} + \varepsilon^{213}\,\Omega_{13} = \Omega_{31} - \Omega_{13} = -\omega_y - \omega_y = -2\,\omega_y \qquad \rightleftharpoons \qquad \omega^a = -\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\,\Omega_{bc} \\
\varepsilon^{3bc}\,\Omega_{bc} &= \varepsilon^{312}\,\Omega_{12} + \varepsilon^{321}\,\Omega_{21} = \Omega_{12} - \Omega_{21} = -\omega_z - \omega_z = -2\,\omega_z
\end{aligned}$$

Das nutzen wir nun aus:

$$\begin{aligned}
L_{ij} &= \varepsilon_{ija}\,L^a = \varepsilon_{ija}\,I^a_b\,\omega^b = \varepsilon_{ija}\,I^a_b\left(-\frac{1}{2}\,\varepsilon^{bcd}\,\Omega_{cd}\right) = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ija}\,\varepsilon^{bcd}\,I^a_b\,\Omega_{cd} \\
&= -\frac{1}{2}\,\left(\delta^b_i\,\delta^c_j\,\delta^d_a + \delta^c_i\,\delta^d_j\,\delta^b_a + \delta^d_i\,\delta^b_j\,\delta^c_a - \delta^b_i\,\delta^d_j\,\delta^c_a - \delta^d_i\,\delta^c_j\,\delta^b_a - \delta^c_i\,\delta^b_j\,\delta^d_a\right)\,I^a_b\,\Omega_{cd} \\
&= -\frac{1}{2}\,\left(I^a_i\,\Omega_{ja} + I^a_a\,\Omega_{ij} + I^a_j\,\Omega_{ai} - I^a_i\,\Omega_{aj} - I^a_a\,\Omega_{ji} - I^a_j\,\Omega_{ia}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\,\left(-I^a_i\,\Omega_{aj} + I^a_a\,\Omega_{ij} - \Omega_{ia}\,I^a_j - I^a_i\,\Omega_{aj} + I^a_a\,\Omega_{ij} - \Omega_{ia}\,I^a_j\right)
\end{aligned}$$

Und erhalten:

$$L_{ij} = I^a_i\,\Omega_{aj} + \Omega_{ia}\,I^a_j - I^a_a\,\Omega_{ij} \qquad \rightleftharpoons \qquad L = I\,\Omega + \Omega\,I - \mathrm{Spur}(I)\,\Omega \tag{20}$$

e) Zusammenfassung

In den Abschnitten a) bis d) wurde gezeigt, wie die Pseudovektoren der Winkelgeschwindigkeit und des Drehimpulses durch antisymmetrische Tensoren 2. Stufe ausgedrückt werden können, und an einigen Beispielen vorgerechnet, wie man damit aus physikalischen Pseudovektorgleichungen Tensorgleichungen erhält. Die Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen noch einmal zusammengefasst:

Pseudovektorgleichung	Tensorgleichung
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$\vec{v} = \Omega\,\vec{r}$ (14)
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$L = \vec{r}\,\vec{p}^{\,T} - \vec{p}\,\vec{r}^{\,T}$ (17)
$\vec{L} = m\,\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$	$L = -m\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T}\,\Omega - m\,\Omega\,\vec{r}\,\vec{r}^{\,T}$ (19)
$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$	$L = I\,\Omega + \Omega\,I - \mathrm{Spur}(I)\,\Omega$ (20)

Physikalische Größe	Tensor (ausgedrückt in der Standardbasis)
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^{\,T} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$
Winkelgeschwindigkeit	$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = -\Omega^T$ (13)
Ort	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{\,T} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$
Drehimpuls	$L = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix} = -L^T$ (16)
Impuls	$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \vec{p}^{\,T} = \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix}$
Trägheitstensor	$I = m\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -x\,y & -x\,z \\ -x\,y & x^2+z^2 & -y\,z \\ -x\,z & -y\,z & x^2+y^2 \end{pmatrix}$

Der Vorteil, physikalische Größen durch Tensoren darzustellen, liegt darin, dass diese automatisch das richtige Verhalten gegenüber beliebiger Koordinatentransformationen aufweisen. Von Nachteil ist, dass die physikalischen Tensorgleichungen weniger kompakt sind als die entsprechenden Pseudovektorgleichungen. Als abkürzende Schreibweisen haben die Pseudovektoren also durchaus eine Berechtigung; die zugehörigen Tensoren sind allerdings physikalisch tiefgründiger.