Kapitel 3

Mathematisch numerische Beschreibung externer Störungen an Kugelsternhaufen

Externe Störungen des Gravitationspotentials eines Kugelsternhaufens, etwa durch den Vorbeiflug massiver schwarzer Löcher oder durch die Wechselwirkung mit Zwerggalaxien, die auf ihrem Orbit dem Haufen sehr nahe kommen, können Aussehen und Bahnparameter des Kugelsternhaufens dramatisch verändern und sogar zu seiner völligen Zerstörung führen. In diesem Kapitel sollen Methoden beschrieben werden, diese Einflüsse auf den Kugelsternhaufen und dessen Reaktion darauf analytisch und numerisch zu approximieren.

Zunächst liegt es nahe, in einer direkten N-Körper Simulation die gemeinsame Wechselwirkung von externem Störpotential und den Sternen des Haufens selbstkonsistent zu integrieren. Diese Methode hat den Vorteil, im Rahmen der numerischen Fehlergrenzen das Vielkörperproblem exakt zu lösen und läßt die Verfolgung der Trajektorien von Einzelteilchen zu, so daß die dynamische Entwicklung des Systems recht gut darstellbar ist. Der Nachteil solcher Simulationen sind ihre Komplexität und Umfang, so dauert eine Rechnung mit 25000 Testteilchen typischerweise etwa 2 Stunden auf einer Cray-YMP, was der Untersuchung eines großen Parameterbereiches enge Grenzen setzt. Eine detailliertere Beschreibung des in dieser Arbeit verwandten N-Körper Programmes erfolgt aus Gründen der Übersicht nicht an dieser Stelle, sondern man findet sie im Anhang C.2 auf Seite 113.

Will man eine umfangreichere Parameterstudie unternehmen kommt man nicht umhin, die Wechselwirkung von Kugelsternhaufen und externem Störer analytisch zu nähern. In dieser Arbeit hat sich hierfür die Impulsapproximation als geeignet erwiesen. Diese liefert eine Abschätzung über den gesamten Impulsübertrag eines geradlinig gleichförmig bewegten Störkörpers auf eine ruhende Punktmasse. Ist die Wechselwirkungsdauer wesentlich kürzer als eine typische Orbitalperiode eines Haufensternes, läßt sich mit dieser Approximation die Energieänderung des Kugelsternhaufens durch diese Störung gut abschätzen. Vergleich mit den N-Körper-Simulationen zeigt, daß dies für einen weiten Parameterbereich der Fall ist. Da diese analytische Methode auf dem Rechner kaum Zeit in Anspruch nimmt, ist es möglich eine sehr große Anzahl von Anfangsbedingungen zu testen. Jedoch lassen sich keine Aussagen über den genauen Bahnverlauf von

Einzelsternen treffen und auch nicht bestimmen, in welchen neuen Gleichgewichtszustand das System übergeht. Für die Gültigkeit der Impulsapproximation ist auch wichtig, daß direkte 2-Körper-Stöße von Sternen untereinander während der kurzen Dauer der Wechselwirkung vernachlässigt werden können (zumindest für die nicht-corekollabierten Kugelsternhaufen, die in dieser Arbeit betrachtet werden). Diese Prozesse würden die Energie sehr effizient und schnell umverteilen und könnten in der Approximation nicht berücksichtigt werden.

Im ersten Teil dieses Kapitels wird kurz das Prinzip von N-Körper Rechnungen vorgestellt und im zweiten auf die Impulsapproximation und ihre rechnerische Realisierung eingegangen.

3.1 N-Körper-Rechnungen

Hat man ein selbstgravitierendes System von N Punktteilchen† der Masse m_i in einem äußeren Potential Φ^{ext}, so stellt sich das Potential am Ort $\mathbf{x}_i$ des Teilchens i dar als,

$$\Phi_i(\mathbf{x}_i) = -\sum_{j\neq i} \frac{Gm_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} + \Phi^{ext}(\mathbf{x}_i)\,. \tag{3.1}$$

Die Summe stellt den Wechselwirkungsterm mit allen anderen Systempartikeln dar. Die Beschleunigung des Teilchens i ist demnach

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} = -\nabla\Phi_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3} - \nabla\Phi^{ext}(\mathbf{x}_i)\,. \tag{3.2}$$

Selbstkonsistente Integration dieses Gleichungssystems bedeutet nun, die Zeitentwicklung in diskrete Einheiten zu unterteilen, in jedem dieser Schritte jeweils das Potential und Beschleunigung nach Gl. (3.1) und (3.2) an den aktuellen Positionen zu berechnen und anschließend die Teilchenorte entsprechend weiterzubewegen. Wählt man eine adäquate Schrittweite, so kann man die tatsächliche Teilchentrajektorie gut approximieren. Genauere Angaben zur numerischen Realisierung dieses Schemas kann man dem Anhang C.2 auf Seite 113 entnehmen.

Das Störpotential wird im Falle von schwarzen Löchern durch das Gravitationspotential eines punktförmigen Massenkörpers dargestellt,

$$\Phi^{ext}(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{r}\,, \tag{3.3}$$

mit M als Masse des schwarzen Loches und r dem Abstand zum schwarzen Loch. Im Falle eines ausgedehnten Störers, etwa einer Zwerggalaxie, wird dieser als Plummer-Sphäre beschrieben,

$$\Phi^{ext}(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + r_0^2}}\,, \tag{3.4}$$

wobei r_0^2 dem Kernradius der Zwerggalaxie entspricht.

†Verglichen mit den Dimensionen von Sternhaufen oder Galaxien, kann man Einzelsterne in sehr guter Näherung als Punktteilchen betrachten.

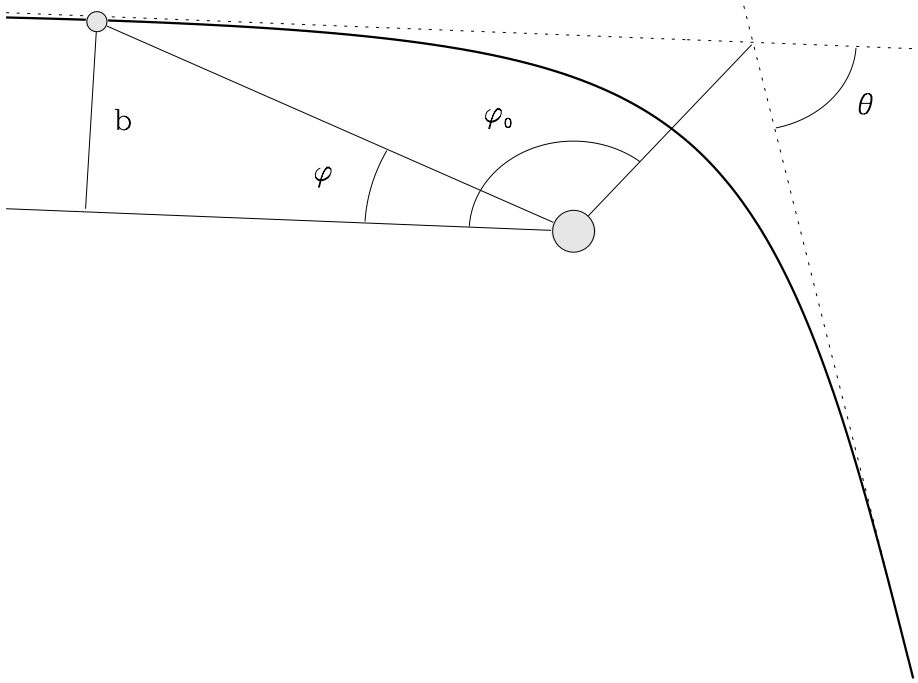

Abbildung 3.1: Streuung des reduzierten Teilchens am ortsfesten Potential

3.2 Die Impulsapproximation

Interessiert man sich für den Impuls- und Energieübertrag durch rein gravitative Wechselwirkung beim Vorbeiflug zweier Körper, so transformiert man das Problem am besten in das reduzierte Koordinatensystem, d. h. man separiert Relativ- und Schwerpunktsbewegung des Systems und verfolgt die Entwicklung des reduzierten Massenpartikels im statischen Potential als Einkörperproblem (siehe etwa Goldstein 1985, §3-1; oder Landau & Lifschitz 1976, §13).

3.2.1 Impulsapproximation bei Punktmassen

Zunächst soll die Impulsapproximation im Falle zweier Punktmassen hergeleitet werden. Sind $(m, \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m)$ und $(M, \mathbf{x}_M, \mathbf{v}_M)$ jeweils Masse, Ort und Geschwindigkeit der beiden Körper, dann sind $\mathbf{r} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_M$ und $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ Abstand und Geschwindigkeit dieser Körper relativ zueinander, siehe Bild 3.1. Der Abstandsvektor genügt der Bewegungsgleichung

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{Mm}{M+m}\right)\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}\,. \tag{3.5}$$

Hierbei ist $\mu = Mm/(M+m)$ die reduzierte Masse des Systems. Die Relativbewegung entspricht also der Bewegung des reduzierten Partikels im (ortsfesten) Potentialfeld $\Phi(r) = -G(M+m)r^{-1}$.

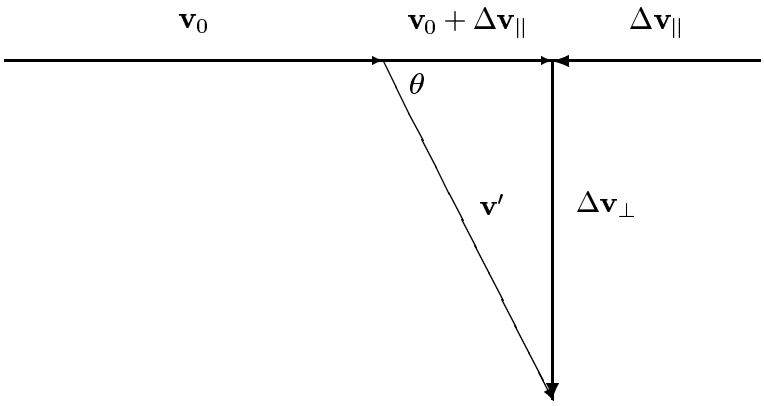

Abbildung 3.2: Zerlegung der asymptotischen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß.

Drehimpulserhaltung liefert für die elastische Streuung dieses Teilchens mit Stoßparameter b und Geschwindigkeit v_0 (im Unendlichen) die Gleichung

$$\frac{1}{r} = C\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{G(M+m)}{b^2 v_0^2}\,. \tag{3.6}$$

Dabei ist φ der Bahnwinkel und C und φ_0 sind die beiden Integrationskonstanten, die sich aus den Anfangsbedingungen b und v_0 errechnen (bei $t = -\infty$, d.h. $r = \infty$ und $\varphi = 0$):

$$0 = C\cos\varphi_0 + \frac{G(M+m)}{b^2 v_0^2} \qquad \text{(aus Gl. (3.6))} \tag{3.7.a}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t\to-\infty} = v_0 = Cbv_0\sin\varphi_0 \qquad \text{(aus Zeitableitung von Gl. (3.6))} \tag{3.7.b}$$

Eine detaillierte Herleitung findet man z.B. bei Binney & Tremaine (1987).

Das Teilchen kommt dem Zentrum am nächsten bei $\varphi = \varphi_0$ und die gesamte Bahnablenkung beträgt, $\theta = 2\varphi - \pi$. Energieerhaltung, d. h. $|\mathbf{v}(t=\infty)| = |\mathbf{v}(t=-\infty)| = |\mathbf{v}_0|$, liefert für die Komponenten der gesamten Geschwindigkeitsänderung $\Delta\mathbf{v}$ senkrecht und parallel zur ursprünglichen Richtung (siehe Bild 3.2):

$$\begin{aligned} |\Delta\mathbf{v}_\perp| &= v_0\sin\theta = v_o|\sin 2\varphi_0| \\ &= \frac{2bv_0^3}{G(M+m)}\left[1 + \frac{b^2v_0^4}{G^2(M+m)^2}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{3.8.a}$$

$$\begin{aligned} |\Delta\mathbf{v}_{||}| &= v_0\,[1-\cos\theta] = v_0\,[1+\cos 2\varphi_0] \\ &= 2v_0\left[1 + \frac{b^2v_0^4}{G^2(M+m)^2}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{3.8.b}$$

$\Delta\mathbf{v}_{||}$ weist immer entgegen der ursprünglichen Richtung $\mathbf{v}_0$. $\Delta\mathbf{v}_\perp$ liegt in der Streuebene. Obige Herleitung gilt *exakt*.

Die Änderung der absoluten Geschwindigkeit, etwa des Teilchens m, ergibt sich als

$$|\Delta\mathbf{v}_{m\perp}| = \frac{M}{M+m}|\Delta\mathbf{v}_\perp| = \frac{2Mbv_0^3}{G(M+m)^2}\left[1+\frac{b^2v_0^4}{G^2(M+m)^2}\right]^{-1} \quad \text{und} \tag{3.9.a}$$

$$|\Delta\mathbf{v}_{m||}| = \frac{M}{M+m}|\Delta\mathbf{v}_{||}| = \frac{2Mv_0}{M+m}\left[1+\frac{b^2v_0^4}{G^2(M+m)^2}\right]^{-1} . \tag{3.9.b}$$

Für das Teilchen M gilt entsprechendes, nur mit m und M vertauscht.

Bei sehr großem Massenunterschied ($m \ll M$) erfährt das schwerere Teilchen fast keine Ablenkung aus der ursprünglichen Bahn, die Ablenkung des leichteren Teilchens entspricht somit der des reduzierten Teilchens: $|\Delta\mathbf{v}_m| \simeq |\Delta\mathbf{v}|$ und $|\Delta\mathbf{v}_M| \simeq 0$. Davon überzeugt man sich, läßt man in Gl.'n (3.9.a,b) $m \to 0$ gehen.

Für große Stoßparameter ($b \to \infty$) dominiert der zweite Term in den eckigen Klammern und Gl.'n (3.9.a,b) gehen in die *klassische* Impulsapproximation über (Binney & Tremaine 1987), bei der ein Teilchen als ruhend und das andere als gleichförmig (d.h. geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit) bewegt genähert wird (geometrische Veranschaulichung in Bild 3.4 auf S. 48). Es gilt dabei

$$\left|\Delta\mathbf{v}_{m\perp}^{imp.}\right| = \frac{2GM}{bv_0} ; \tag{3.10.a}$$

$$\left|\Delta\mathbf{v}_{m||}^{imp.}\right| = 0 . \tag{3.10.b}$$

3.2.2 Skalenverhalten

Betrachtet man die Bewegungsänderung des reduzierten Teilchens, d. h. Gl.'n (3.9.a,b), dann erkennt man, daß die drei Systemparameter b, v_0 und $(M+m)$ jeweils in bestimmten Kombinationen eingehen. Dies erlaubt eine skalenunabhängige Analyse der Gleichungen (3.9.a,b).

Durch Einführung der Größe

$$\beta \equiv \frac{v_0^2 b}{G(M+m)} \tag{3.11}$$

stellen sich die Geschwindigkeitsänderungen $\Delta\mathbf{v}$ relativ zur Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ dar, als

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}_\perp|}{v_0} = 2\beta\,\frac{1}{1+\beta^2} \tag{3.12.a}$$

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}_{||}|}{v_0} = 2\,\frac{1}{1+\beta^2} , \tag{3.12.b}$$

bzw.

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}_\perp^{imp.}|}{v_0} = 2\,\beta^{-1} . \qquad \text{(klassische Impulsapproximation)} \tag{3.13}$$

Der Parameter β entspricht dem Verhältnis von kinetischer Energie der Teilchenbewegung $E_{kin} = \mu v_0^2$ und potentieller Energie $E_{pot} = G(M+m)\mu/b$ des reduzierten Teilchens μ im Gravitationsfeld. Ist $E_{kin} \gg E_{pot}$, d. h. $\beta \gg 1$, dann reproduziert sich wieder die klassische Impulsapproximation, Gl.'n (3.10.a,b).

Für ausgedehnte Objekte (etwa Kugelsternhaufen auf der einen Seite, bzw. diffuse Zwerggalaxien auf der anderen Seite) versagt diese Art der Skalierung. Hier sind die geometrischen Größen- und Winkelverhältnisse nicht mehr ohne weiteres von einem Parametersatz auf den anderen übertragbar, vielmehr spielen innere Dynamik und Dichteverteilung eine entscheidende Rolle. Beispielsweise ändert sich der Raumwinkel unter dem ein vorbeifliegendes schwarzes Loch einen Kugelsternhaufen „sieht" – eine Größe, die bei zwei Punktmassen gar nicht auftritt – mit dem Abstand der beiden Körper (siehe dazu Abb. 3.7). Aus diesen Gründen muß die einfache Impulsapproximation erweitert und modifiziert werden (Kap. 3.2.4 und 3.2.5).

3.2.3 Eigenschaften der Impulsapproximation

Der Verlauf des relativen Impulsübertrages in Abhängigkeit vom Parameter β soll an dieser Stelle diskutiert werden. Eine graphische Darstellung der relevanten Gl.'n (3.12.a,b) und (3.13) zeigt das folgende Bild 3.3:

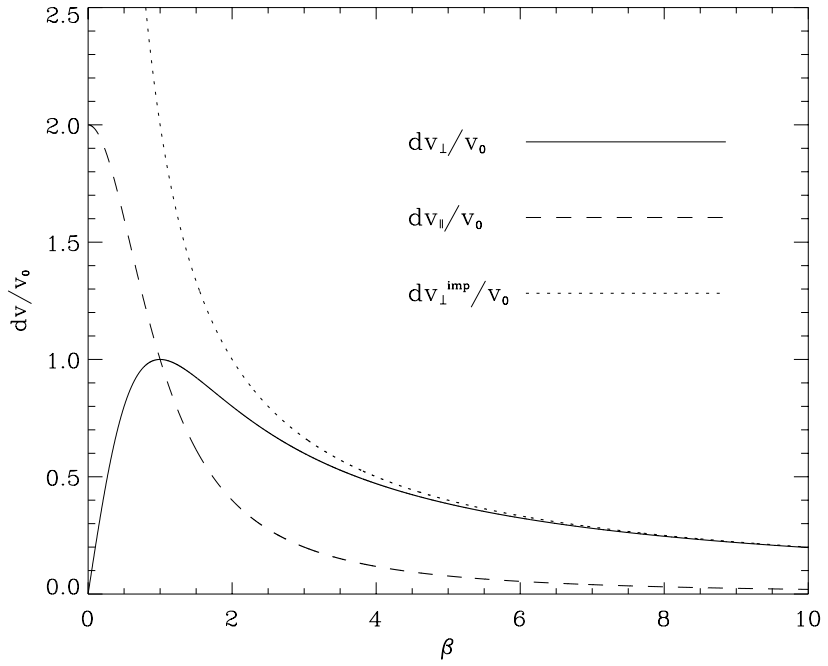

Abbildung 3.3: Relative Geschwindigkeitsänderungen senkrecht (durchgezogene Linie) und parallel (gestrichelt) zur anfänglichen Ausbreitungsrichtung in Abhängigkeit von β. Zum Vergleich ist der Verlauf der klassischen Impulsapproximation (gepunktet) wiedergegeben.

Der Impulsübertrag senkrecht zur ursprünglichen Richtung ($|\Delta\mathbf{v}_\perp|/v_0$) ist sehr gering für kleine Werte von β, erreicht ein Maximum bei $\beta = 1$ und fällt wieder ab für große β. Der parallele Anteil ($|\Delta\mathbf{v}_\parallel|/v_0$) ist maximal für $\beta \to 0$ und fällt für steigende β monoton ab.

Sehr kleine Stoßparameter (d.h. $b \ll b_\perp$) führen zu starker Rückstreuung (Streuwinkel $\theta \simeq 180°$), was maximale Werte von $|\Delta\mathbf{v}_\parallel|/v_0 \simeq 2$ bewirkt und $|\Delta\mathbf{v}_\perp|/v_0$ gegen Null gehen läßt. Bei einem Streuwinkel $\theta = 90°$ ist die senkrechte Änderung am größten und gleich der parallelen. Der Stoßparameter beträgt dann $b = b_\perp = G(M+m)/v_0^2$. Für größere b erhält man Vorwärtsstreuung und $|\Delta\mathbf{v}_\perp|/v_0$ und $|\Delta\mathbf{v}_\parallel|/v_0$ fallen beide monoton gegen Null ab.

Dies erklärt sich auch, betrachtet man die entsprechenden Energieverhältnisse (dazu hält man beispielsweise b und $(M+m)$ fest und variiert die Einfallgeschwindigkeit v_0). Ist die anfängliche kinetische Energie v_0^2 kleiner als die typische potentielle Energie $G(M+m)/b$, dann wird das Teilchen durch das attraktive Potential zurückgestreut. Sind beide gleich groß, beträgt $\theta = 90°$. Überwiegt die kinetische Energie, dann erhält man Vorwärtsstreuung.

3.2.4 Impulsapproximation bei ausgedehntem Störpotential

Will man die Bahnstörung einer Punktmasse m durch einen ausgedehnten Körper M (etwa die Bahnänderung von Sternen in Kugelsternhaufen beim Vorbeiflug einer diffusen Zwerggalaxie) im Rahmen der Impulsapproximation untersuchen, so muß diese modifiziert werden.

Werden die Schwerpunktsabstände $\mathbf{r} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_M$ kleiner als der Radius des diffusen Körpers, d. h. dringt die Punktmasse in das ausgedehnte Objekt ein, dann spührt diese nurmehr den gravitativen Einfluß der Masse $M(r)$, die sich innerhalb der Kugel mit Radius r um das Zentrum des Störers herum befindet. Für $\mathbf{r}$ gilt nun die modifizierte Bewegungsgleichung (vgl. mit Gl (3.5)),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M(r)+m)}{r^3}\mathbf{r}\,. \tag{3.14}$$

Für einen sphärisch symmetrischen Störer und unter der Annahme eines geradlinigen Vorbeifluges von M mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bei nur kurzer Wechselwirkungsdauer, d.h. unter den Bedingungen der klassischen Impulsapproximation, läßt sich für die auf m ($m \ll M(r)$) wirkende Beschleunigung folgender Ansatz finden (siehe dazu auch Aguilar & White 1985):

$$\begin{aligned} |\Delta\mathbf{v}_\perp| &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\,|\ddot{\mathbf{r}}_\perp(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{GM(r(t))\cos\varphi(t)}{r(t)^2} = GMb\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\gamma(\sqrt{b^2+v_0^2t^2})}{(b^2+v_0^2t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2GM}{bv_0}\int_1^{\infty} d\xi \frac{\gamma(b\xi)}{\xi^2\sqrt{\xi^2-1}} = \frac{2GM\Gamma(b)}{bv_0} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Der zweiten Schritt verwendet $r(t) = b/\cos\varphi(t) = \sqrt{b^2+v_0^2t^2}$ (siehe Bild 3.4). Im letzten Schritt wird auf die Integrationsvariable $\xi \equiv r(t)/b$ transformiert und die gerade Symmetrie des Zeitintegrals ausgenützt. Die Masse ist parametrisiert als $M(r) = M\,\gamma(r)$, wobei M die Gesamtmasse des Störers und $\gamma(r) \equiv 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2dr'/M$ den Massenanteil innerhalb des Radius r

bezeichnet. $t = 0$ charakterisiert den Zeitpunkt der geringsten Entfernung der beiden Körper voneinander ($r|_{t=0} = b$).

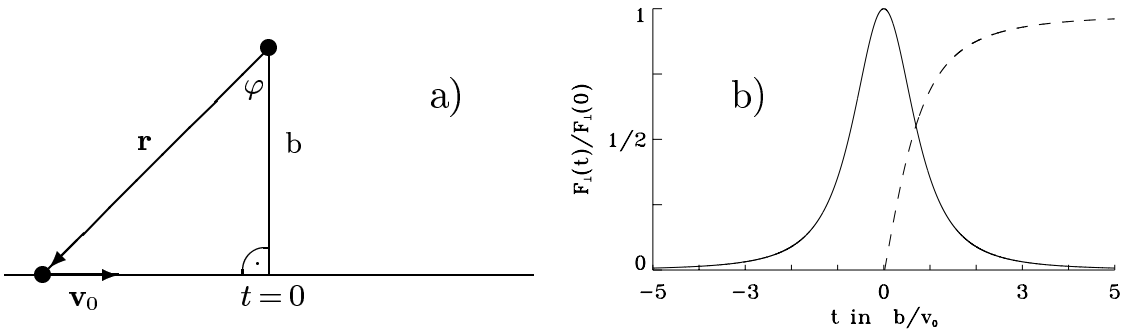

Abbildung 3.4: Geometrie der klassischen Impulsapproximation (a) und zeitlicher Verlauf der senkrechten Kraftkomponente $F_\perp$ (durchgezogen), bzw. der zeitlich integrierten Kraft $\int_0^t F_\perp(t')dt'$ (gestrichelt) (b). Bei $t \simeq 3b/v_0$ sind bereits 95% dieses Kraftübertrages erfolgt.

Die Funktion $\Gamma(b) = \int_1^\infty d\xi\, \gamma(b\xi)\xi^{-2}(\xi^2 - 1)^{-1/2}$ beschreibt somit den Einfluß der endlichen Ausdehnung eines Stoßpartners bei der elastischen 2-Körper-Streuung. Gilt $m \ll M$, was bei den in dieser Arbeit behandelten Problemen in der Regel der Fall ist (m ist in etwa eine Sonnenmasse und M die Masse der massiven Störobjekte), dann kann man den schwereren Körper in guter Näherung als geradlinig bewegt annnehmen. Ist das Störobjekt noch kugelsymmetrisch, dann kann man die Massenparametrisierung $\Gamma(b)$ auch auf den allgemeinen Fall übertragen. Man ersetzt in den Gl.'n (3.8.a,b), bzw. (3.9.a,b), M durch $M\Gamma(b)$. Den Verlauf der Massenkorrektur

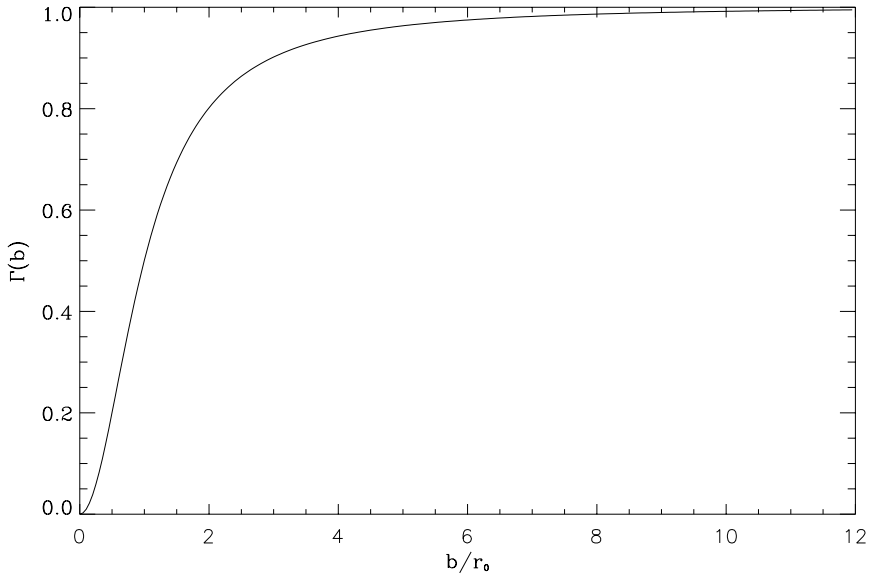

Abbildung 3.5: Abhängigkeit der Massenkorrektur zur Impulsapproximation $\Gamma(b)$ vom Stoßparameter b für ausgedehnte Objekte mit einem Plummer'schen Dichtegesetz (siehe Kap. 2.3.3). b ist als Vielfaches des Kernradius r_0 angegeben. Für $b \gtrsim 3\,r_0$ erreicht man den Sättigungsbereich des unkorrigierten Falles, $\Gamma \simeq 1$.

$\Gamma(b)$ in Abhängigkeit vom Stoßparameter b gibt Bild 3.5 für eine Massenverteilung nach Plummer wieder, d.h. $\rho(r) = (3M)/(4\pi r_0^3)\,(1+r^2/r_0^2)^{-5/2}$ (siehe Kap. 2.3.3). Man erkennt, daß für kleine Stoßparameter ($b \lesssim 2r_0$) die effektiv wechselwirkende Masse $M\Gamma(b)$ beträchtlich kleiner ist als die Gesamtmasse M und nach einem annähernd linearen Anstieg bei $b \gtrsim 3\,r_0$ in die Sättigung $M\Gamma(b) \to M$ übergeht. Dabei ist r_0 der Kernradius der Plummer-Sphäre. Für große b gilt $\Gamma \to 1$ und man erhält wieder die klassische Impulsapproximation (3.10.a).

3.2.5 Einfluß der Wechselwirkungsdauer

Essentiell für die klassische Impulsapproximation (und für die Anwendung ihrer Verallgemeinerung in Kap. 4 und 5) ist eine sehr kurze Wechselwirkungsdauer. D. h. der Vorbeiflug des einen Teilchens am anderen muß so schnell erfolgen, daß letzteres als ruhend genähert werden kann, bzw. der Impulsübertrag quasi instantan geschieht. Ist der linearen Schwerpunktsbewegung eines Teilchens eine periodische Schwingung überlagert (etwa die interne Bahn eines Sternes eines Kugelsternhaufens der Schwerpunktsbewegung des gesamten Haufens), dann muß die Zeitskala τ der äußeren Störung sehr viel kleiner sein als diese Schwingungsdauer t_{orb}. Nur dann ist es möglich der Orbitalbewegung eines solchen Teilchens Energie zuzuführen, d.h. die innere Energie des Haufens zu erhöhen.

Im adiabatischen Grenzfall, bei welchem ein Stern während der Einwirkung der äußeren Störung viele Orbitalperioden durchläuft, also für $\tau \gg t_{orb}$, kann die eigentliche Bahnbewegung des Sternes keine Energie aufnehmen. Der Störer „sieht“ den Stern über die ganze Umlaufbahn „ausgeschmiert“ und kann alleine mit dem Schwerpunkt des gesamten Orbits Energie austauschen. Der Bahnverlauf des Sternes wirkt wie ein starrer Körper. Im Falle eines Kugelsternhaufens mit seiner Vielzahl von Sternen bedeutet dies, eine adiabatische Störung kann nur Einfluß auf die Schwerpunktsbewegung des Haufens nehmen, jedoch nicht mit dessen Reservoir an innerer Energie wechselwirken.

In einem Kugelsternhaufen liegen zwischen den Orbitalperioden im Kernbereich und denen der Sterne der äußeren Hülle mehrere Größenordnungen Unterschied. So daß bei bestimmten Streuparametern die Impulsapproximation im Außenbereich gelten mag, jedoch im Haufeninneren bereits der adiabatische Grenzfall erreicht ist. Eine realistische Anwendung der Impulsapproximation auf Kugelsternhaufen muß dies berücksichtigen. Spitzer (1958) war einer der ersten, der versucht hat, eine entsprechende Korrektur einzuführen. Er führte eine relative Wechselwirkungsdauer ζ ein, definiert als Verhältnis von tatsächlicher Stoßdauer τ zu relevanter Orbitalperiode t_{orb}: $\zeta \equiv \tau/t_{orb}$. Unter der Annahme eines harmonischen Haufenpotentials konnte er daraus einen analytischen Ausdruck für einen Korrekturfaktor $\eta(\zeta)$ herleiten, der den Einfluß der Wechselwirkungsdauer parametrisiert:

$$\eta \equiv \frac{1}{2}(L_x + L_y + L_z)\,, \tag{3.16}$$

mit

$$L_x(\zeta) = \left[\zeta^2 K_1(\zeta) + \zeta K_0(\zeta)\right]^2 + \left[\zeta^2 K_1(\zeta)\right]^2\,, \tag{3.17.a}$$

$$L_y(\zeta) = \left[\zeta^2 K_0(\zeta)\right]^2 + \left[\zeta^2 K_1(\zeta)\right]^2\,, \tag{3.17.b}$$

$$L_z(\zeta) = [\zeta K_1(\zeta)]^2 \ . \tag{3.17.c}$$

Dabei sind die $K_n(\zeta)$ die modifizierten Bessel-Funktionen zweiter Gattung n-ter Ordnung, auch Macdonald'sche Funktionen genannt. Für große ζ gilt die asymptotische Formel $K_n(\zeta) = (\frac{1}{2}\pi\zeta^{-1})^{1/2} e^{-\zeta}\,[1 + \mathcal{O}(\zeta^{-1})]$ (Bronstein & Semendjajew 1987).

Für kleine Wechselwirkungszeiten $\tau \to 0$ (und damit $\zeta \to 0$) erhält man die (klassische) Impulsapproximation $\eta \to 1$ und für große Zeiten ($\zeta \to \infty$) den adiabatischen Grenzfall, d.h. η geht exponentiell gegen Null.

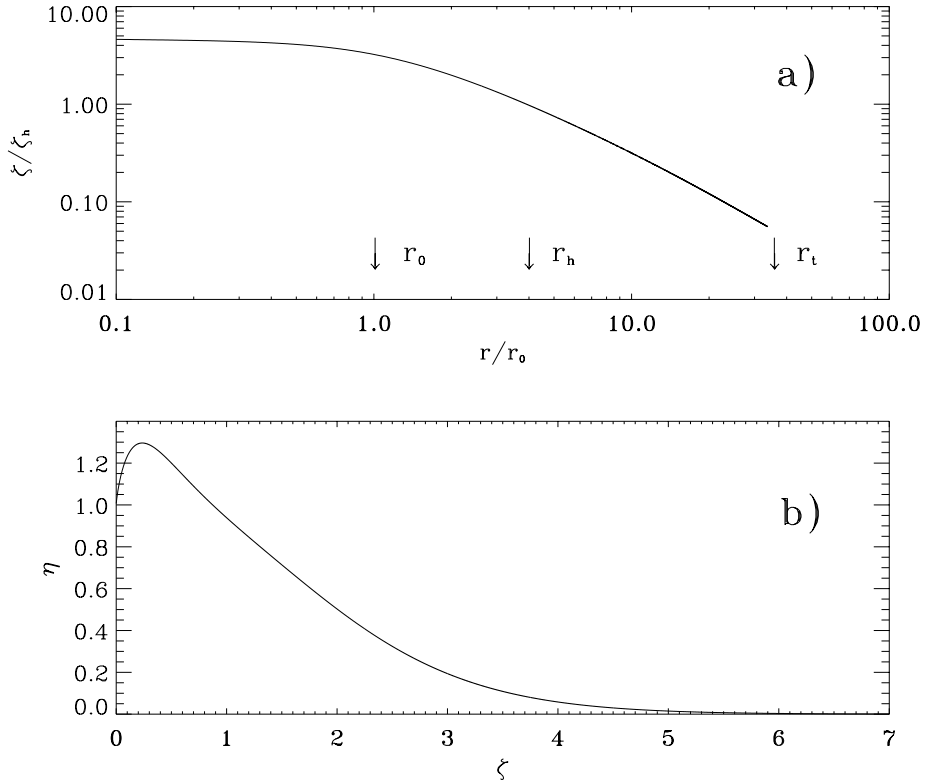

Abbildung 3.6: a) Das Verhältnis ζ von Wechselwirkungsdauer τ und Bahnperiode t_{orb} in Abhängigkeit vom Radius, für einen Kugelsternhaufen mit $\Psi(0)/\sigma^2 = 7$, normiert auf die Werte am Halblichtradius r_h (d.h. $\zeta_h = 1$). b) Korrekturfaktor η in Abhängigkeit von ζ.

Im Rahmen dieser Arbeit erweist es sich als günstig, die effektive Wechselwirkungsdauer τ als das Zeitintervall zu definieren, innerhalb dessen bei idealisierten Annahmen (ruhendes Teilchen, geradliniger Vorbeiflug des Störers; siehe Abb. 3.4) 95% des Kraftübertrages stattfinden. Es ist $\Delta t\,|_{95\%} \simeq 3\,b/v_0$ und damit

$$\tau \equiv 2\,\Delta t\,|_{95\%} = 6\frac{b}{v_0} \ . \tag{3.18}$$

Nimmt man an, die Sterne des Kugelsternhaufens bewegen sich auf zirkularen Orbits, dann ist

die Kreisgeschwindigkeit $v_c^2 = rd\Phi/dr = GM(r)/r$, im Potential $\Phi(r)$ der Masse $M(r) = M\gamma(r)$. Die Bahnperiode ist demnach

$$t_{orb} = \frac{2\pi r}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM\gamma(r)}}\,. \tag{3.19}$$

Damit ergibt sich die relative Zeitvariable ζ als

$$\zeta \equiv \frac{\tau}{t_{orb}} = \frac{3}{\pi}\frac{b}{v_0}\left(\frac{GM\gamma(r)}{r^3}\right)^{1/2} \simeq \frac{b}{v_0}\left(\frac{GM\gamma(r)}{r^3}\right)^{1/2}\,. \tag{3.20}$$

Die relative Wechselwirkungsdauer ζ ist also, bei festgehaltenem b und v_0, eine Funktion des Abstandes r zum Haufenzentrum. Gilt für einen Stern mit Radius r, $\zeta(r) \ll 1$, dann ist die Impulsapproximation eine gute Näherung; hat man $\zeta(r) \gg 1$, dann erhält man den adiabatische Grenzfall. Die radiale Abhängigkeit von ζ für das *Standardmodell* eines Kugelsternhaufens (King-Profil mit $\Psi(0)/\sigma^2 = 7$; siehe Kap. 2.5, speziell die Tabelle auf S.35) gibt Abb. 3.6.a wieder. Die Angaben sind normiert auf Werte von ζ_h beim Halblicht-Radius r_h (das ist der Radius innerhalb dem die Hälfte aller Sterne liegen; hier ist $r_h \simeq 3.9r_0$). Für den Korrekturfaktor $\eta(\zeta)$ selbst ergibt sich schließlich ein Verlauf, wie in Abb. 3.6.b dargestellt. Der leichte Erhöhung der Wechselwirkungseffizienz für $\zeta \lesssim 0.8$ folgt aus Resonanzeffekten von Bahn und Störpotential. Für große Wechselwirkungszeiten, $\zeta \gg 1$, schließlich erreicht man den adiabatischen Grenzfall, d.h. $\eta \to 0$.

3.2.6 Anwendung auf Kugelsternhaufen - Energieübertrag

Die bisherigen Modifikationen der Impulsapproximation berücksichtigen nur die Ausdehnung des Störpotentials und die endliche Wechselwirkungsdauer; das Teilchen auf welches diese äußere Störung wirkt, wird nach wie vor als *Punktmasse* betrachtet. Ziel ist es jedoch, den Einfluß einer vorbeiziehenden Zwerggalaxie oder eines massiven schwarzen Loches auf einen gesamten *Kugelsternhaufen* zu berechnen, also auf ein ausgedehntes Gebilde, das aus einer Vielzahl von Einzelsternen besteht und eine komplizierte innere Dynamik besitzt. Besonderes Interesse gilt dabei der Änderung der Haufenenergie.

Die Gesamtenergie des Haufens beträgt im virialisierten Zustand, also im Gleichgewicht (siehe Kap. 2.2.3, Gl. (2.22)), $E = K + W = -K = \frac{1}{2}W$. Im Schwerpunktsystem des Haufens ist die kinetische Energie gleich der internen Energie, $K = \Pi/2 = \frac{1}{2}M\sigma^2$. W bedeutet die potentielle Energie. Für einen typischen Kugelsternhaufen gilt $\sigma \simeq 5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (siehe Kap. 2.5, speziell Abb. 2.9.d) und damit $E = -K \simeq -10^{50}$ erg. Ist die Wechselwirkungsdauer sehr kurz, $\zeta \lesssim 1$, dann können sich die Sternpositionen nicht signifikant ändern die potentielle Energie bleibt gleich, $\Delta W \simeq 0$. Unmittelbar nach dem Stoß, bevor Relaxation einsetzen konnte, erhält man als Energieänderung des Systems,

$$\Delta E \equiv E' - E = K' - K = \Delta K = \frac{1}{2}M\left(\overline{\mathbf{v}}_{SP}^2 + \sigma'^2\right) - \frac{1}{2}M\sigma^2\,. \tag{3.21}$$

Einfach gestrichene Größen bezeichnen einen Parameter *unmittelbar nach* dem Stoß. $\overline{\mathbf{v}}_{SP}$ ist Schwerpunktsgeschwindigkeit, die der Haufen erhält. Durch die Wechselwirkung mit dem massereicheren System gewinnen die Sterne im Mittel kinetische Energie, so daß gilt $\sigma' > \sigma$, was einen Anstieg der Entropie bedeutet. Es ist also $\Delta K > 0$.

Der Zuwachs an kinetischer Energie ΔK durch die Wechselwirkung kann bei einigen Haufensternen deren Bindungsenergie übersteigen. Der Haufen wird in der nun folgenden Relaxation zurück ins Virialgleichgewicht diese Sterne, die sog. Escaper, abdampfen und somit Masse und Energie verlieren. Die restlichen Sterne ordnen sich um und erreichen schließlich wieder das dynamische Gleichgewicht. Die Escaper tragen kinetische und potentielle Energie davon: $\Delta E|_{esc} = \Delta K|_{esc} + \Delta W|_{esc}$. Ihr Anteil an der kinetischen und inneren Energie des Haufens ist relativ groß, da Escaper am oberen Ende des Geschwindigkeitsspektrums liegen. Verlassen sie den Haufen reduziert sich dessen innere Energie überproportional. Gleichzeit steigt die potentielle Energie des (Rest-)Haufens, d.h. der Potentialtopf wird flacher, da sich die Masse reduziert. Die endgültige Energiebilanz des restlichen Haufens lautet demnach (doppelt gestrichene Größen bezeichnen nun den Endzustand im dynamischen Gleichgewicht),

$$\Delta E \equiv E'' - E = \Delta K + \Delta E|_{esc} \ , \tag{3.22}$$

und kann sowohl positiv, als auch negativ sein. Im ersten Falle wird der Endzustand aufgeblähter und diffuser sein als der Anfangszustand, im zweiten wird der Haufen geschrumpft sein und dichter. Dies ist von der entsprechenden Wahl der Wechselwirkungsparameter abhängig. Erreicht der anfängliche Energiezuwachs die Größenordnung der Bindungsenergie des Haufens, $\Delta K \simeq E_B$, dann wird der Teilchenverlust sehr groß und der Stoß führt zur völligen Auflösung des Systems. Dieses kann durch interne Umordnungsprozesse kein neues Gleichgewicht mehr finden.

Zur Berechnung konkreter Werte für ΔE, beschränkt man sich hier auf die Situation unmittelbar nach dem Stoß, d.h. auf den Haufen vor dem Einsetzen der säkularen Entwicklung zurück ins Gleichgewicht (d. h. die Stoßdauer ist wesentlich kleiner als alle für die Dynamik des Kugelsternhaufen relevanten Zeitskalen), bzw. auf den Fall geringen Massenverlustes. Dann gilt $\Delta E = \Delta K$ und diese Terme setzen sich aus den Beiträgen aller einzelnen Sterne zusammen. Die Energieänderung ΔK_i^* eines einzelnen Sternes i der Masse m_i ist,

$$\Delta K_i^* = m_i \mathbf{v}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} m_i \Delta \mathbf{v}_i^2, \tag{3.23}$$

wobei $\mathbf{v}_i$ die ursprüngliche Geschwindigkeit des Sternes i im Haufen ist und $\Delta \mathbf{v}_i$ die gesamte Geschwindigkeitsänderung durch die Wechselwirkung. Der gesamte Energiezuwachs des Haufens ergibt sich nun als

$$\Delta K = \sum_i^N \Delta K_i^* = \sum_i^N \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} m_i \Delta \mathbf{v}_i^2 \right) \ , \tag{3.24.a}$$

bzw. durch Mittelung

$$\Delta K = M \overline{\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}} + \frac{1}{2} M \overline{\Delta \mathbf{v}^2} \ . \tag{3.24.b}$$

In den meisten Fällen ist der Abstand der beiden wechselwirkenden Körper weit größer als ihr Durchmesser. Dann ist die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\mathbf{v}$ bei allen Teilchen des Haufens annähernd dieselbe und jeweils der erste Term in Gl.'n (3.24.a,b) liefert keinen Beitrag. Es gilt $\overline{\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}\cdot\Delta\mathbf{v} = 0$, da im Schwerpunktsystem des Haufens $\overline{\mathbf{v}} = 0$ ist. Werden Abstand und Durchmesser vergleichbar, oder durchdringen sich beide Körper gar, dann variieren Richtung und Betrag von $\Delta\mathbf{v}$ in unterschiedlichen Bereichen des betrachteten Körpers und der erste Term wird nicht mehr zu Null und kann durchaus in der Größenordnung des zweiten liegen. Eine schematische Skizze dieser beiden Situationen liefert Bild 3.7. Man denke dabei an den Vorbeiflug eines schwarzen Loches an einem Kugelsternhaufen, wobei die Flugrichtung des schwarzen Loches senkrecht zur Papierebene liege. Im ersten Falle fliegt das schwarze Loch in geringem Abstand am Kugelsternhaufen vorbei und die Richtungen der Geschwindigkeitsüberträge $\Delta\mathbf{v}_\perp$ in der Ebene variieren um etwa 100°; im zweiten Falle ist der Abstand der beiden Körper sehr groß und die Winkelvariation von $\Delta\mathbf{v}_\perp$ ist sehr gering.

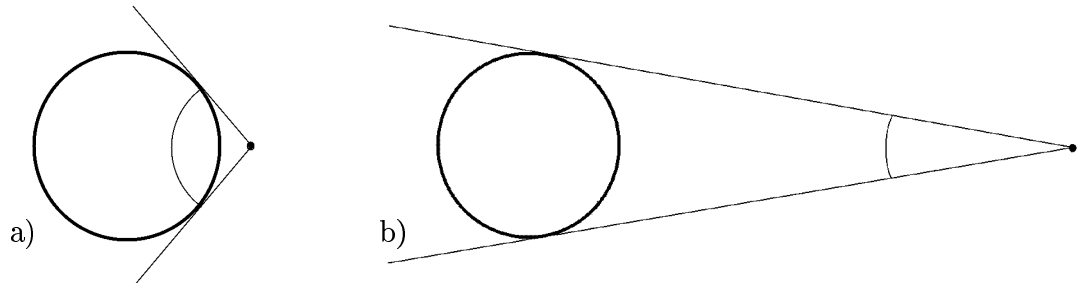

Abbildung 3.7: Veranschaulichung der geometrischen Verhältnisse beim Vorbeiflug eines Punktkörpers an einem ausgedehntem Objekt (Flugrichtung senkrecht zur Papierebene). Ist der Abstand vergleichbar mit dem Durchmesser des ausgedehnten Körpers (a), oder durchdringen sich beide, dann ist die Winkelvariation des Geschwindigkeitsübertrages $\Delta\mathbf{v}_\perp$ sehr groß (hier etwa 100°). Ist der Abstand sehr groß, ist $\Delta\mathbf{v}_\perp$ für alle Bereiche des ausgedehnten Körpers annähernd gleich.

3.2.7 Realisierung der Impulsapproximation

Anfängliche Versuche, Kugelsternhaufen im Rahmen der Impulsapproximation samt ihrer oben angeführten Modifikationen und Verfeinerungen als starre, nur durch ihre Dichteverteilung bestimmte Körper darzustellen, zeigten nur unbefriedigende Ergebnisse. Die Vernachlässigung der inneren Dynamik, sprich der internen Geschwindigkeitsdispersion σ, führte speziell bei kleinen Stoßparametern (bei denen Term 1 in Gl.'n (3.24.a,b) nicht vernachlässigt werden darf) zu großen Fehlern. Aus diesem Grunde erweist sich die Darstellung des Kugelsternhaufens als Ansammlung einzelner Sterne als vorteilhafter. In den Simulationsrechnungen besteht der Kugelsternhaufen aus jeweils 25 000 Testteilchen, deren lokale Anzahldichte im Phasenraum ein Maß für die Phasenraumdichte der Sterne des Kugelsternhaufens ist. Für das Standardmodell des Kugelsternhaufens bedeutet dies, ein Testteilchen stellt etwa vier reale Sternen dar. Die Testteilchen werden so im Phasenraum verteilt, daß sie eine dynamisch stabile† Konfiguration

†Stabil bedeutet, $df/dt = 0$.

ergeben, die einem tatsächlichen Kugelsternhaufen entspricht. Dichteverlauf und Geschwindigkeitsverteilung genügen demnach dem King-Modell (Kap. 2.3.5). Diese Konfiguration von 25 000 Testteilchen dient auch als Anfangsmodell für die N-Körper-Simulationen.

Jedes dieser Teilchen i hat somit eine Masse m_i, Position $\mathbf{x}_i$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ relativ zum Schwerpunktsystem des Haufens und für jedes dieser Teilchen i wird vermittels der Impulsapproximation und deren oben erläuterten Modifikationen die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\mathbf{v}_i$ bestimmt. Diese seien der Übersicht halber an dieser Stelle nochmals zusammengefaßt:

$$|\Delta\mathbf{v}_{i\perp}| = \frac{2M\Gamma(b)bv_0^3}{G(M\Gamma(b)+m_i)^2}\left[1+\frac{b^2v_0^4}{G^2(M\Gamma(b)+m_i)^2}\right]^{-1}\eta \tag{3.25.a}$$

$$|\Delta\mathbf{v}_{i\parallel}| = \frac{2M\Gamma(b)v_0}{M\Gamma(b)+m_i}\left[1+\frac{b^2v_0^4}{G^2(M\Gamma(b)+m_i)^2}\right]^{-1}\eta \tag{3.25.b}$$

$$\left|\Delta\mathbf{v}_{i\perp}^{imp.}\right| = \frac{2GM\Gamma(b)}{bv_0}\,\eta \qquad \text{(klassische Impulsapproximation)} \tag{3.25.c}$$

Die Massenkorrektur Γ ist definiert ist nach Kap. 3.2.4 und die Zeitkorrektur η entsprechend Kap. 3.2.5.

Die Gl.'n (3.25.a,b,c) verwendet man wenn man an der Änderung der inneren Energie des Haufens interessiert ist. Man berechnet dann mit ihrer Hilfe die Geschwindigkeitsdispersion σ nach dem Stoß und daraus die innere Energie $\Pi/2 = \frac{1}{2}M\sigma^2$. Allerdings wird man auf diese Weise nicht den wahren Wert des Zuwachses der Schwerpunktsenergie erfassen können; zumindest wenn die adiabatische Korrektur dabei eine bedeutende Rolle spielt. Adiabatische Prozesse können zwar die interne Struktur und Energie einer Teilchenbahn nicht beeinflussen (der gesamte Orbit wirkt wie ein starrer Körper), jedoch die Schwerpunktsbewegung signifikant verändern. Genau dieses wird bei Verwendung des Faktors η unterdrückt und man erhält zu niedrige Werte für das Anwachsen der Schwerpunktsenergie. Ist man speziell daran interessiert, muß man für diese Berechnung den Adiabatenfaktor $\eta = 1$ wählen und behält nur die Massenkorrektur bei. Diese Überlegungen wurden in Testrechnungen in Kap. 4 und Kap. 5 gut bestätigt.

Kapitel 4

Wechselwirkung mit massiven schwarzen Löchern

Hier soll das Verhalten eines Kugelsternhaufens untersucht werden beim nahen Vorbeiflug eines massiven schwarzen Loches. Bevor diese Reaktion in N-Körper-Rechnungen betrachtet wird (Kap. 4.2), wird im Unterkapitel 4.1 der Gleichgewichtszustand des Standardmodells diskutiert. In Kap. 4.3 folgt ein Vergleich der Ergebnisse der N-Körper-Rechnungen mit den analytischen Resultaten der Impulsapproximation und daran anschließend eine Zusammenfassungen dieser Ergebnisse (Kap. 4.4).

4.1 Stabilität des Standardmodelles

Zunächst sollen an dieser Stelle Eigenschaften und Stabilität des ungestörten Modells eines Kugelsternhaufens untersucht werden. Die Kugelsternhaufen werden numerisch durch 10 000, bzw. 25 000 Teilchen dargestellt, wobei im Standardmodell (Gesamtmasse $M = 1.05 \times 10^5\,\mathrm{M}_\odot$; siehe Seite 35) jedes Simulationspartikel einer Gruppe von Sternen der Masse $m = 10.4\,\mathrm{M}_\odot$, bzw. $m = 4.16\,\mathrm{M}_\odot$ entspricht. Bei einer Kerndichte von $\rho_0 = 4.2 \times 10^3\,\mathrm{M}_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}$ beträgt der Abstand zweier Simulationspartikel dort im Mittel 0.14 pc, bzw. 0.10 pc. Die mittlere Dichte ist $\overline{\rho} = 0.64\,\mathrm{M}_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}$, wodurch sich in den Außenbereichen des Systems in einem Würfel von 2.5 pc, bzw. 1.9 pc Kantenlänge im Schnitt ein Teilchen aufhält. Dem entsprechend wird der *Softening*-Parameter ϵ, der die räumliche Auflösung der Rechnung bestimmt (siehe dazu Kap. C.2.2), als 0.2pc gewählt. Bild 4.1 zeigt die äußere Erscheinung (a – c) und den Verlauf der Dichte (d – f) des ungestörten Haufens zu Beginn der Simulation ($t = 0$), nach zwei Freien-Fall-Zeiten ($t = 2\,\tau_{ff}$) und bei $t = 4\,\tau_{ff}$. Die Freie-Fall-Zeit τ_{ff} bestimmt die dynamische Zeitskala eines Systems und ist definiert nach Gl. (2.52). Im Standardhaufen beträgt sie 10^7 Jahre. Man erkennt keine nennenswerte Entwicklung, d. h. die räumliche Verteilung der Teilchen ist stabil. Abbildungen 4.1.g) bis i) geben die Geschwindigkeiten der Teilchen wieder. Man sieht, diese sind in etwa Maxwell-verteilt (nur der Hochgeschwindigkeitsanteil fehlt, er wird ja im King-Modell explizit unterdrückt) mit Maximum bei $v_{max} = \sigma = 5\,\mathrm{km\,s}^{-1}$ und die Verteilung ist zeitlich stabil.

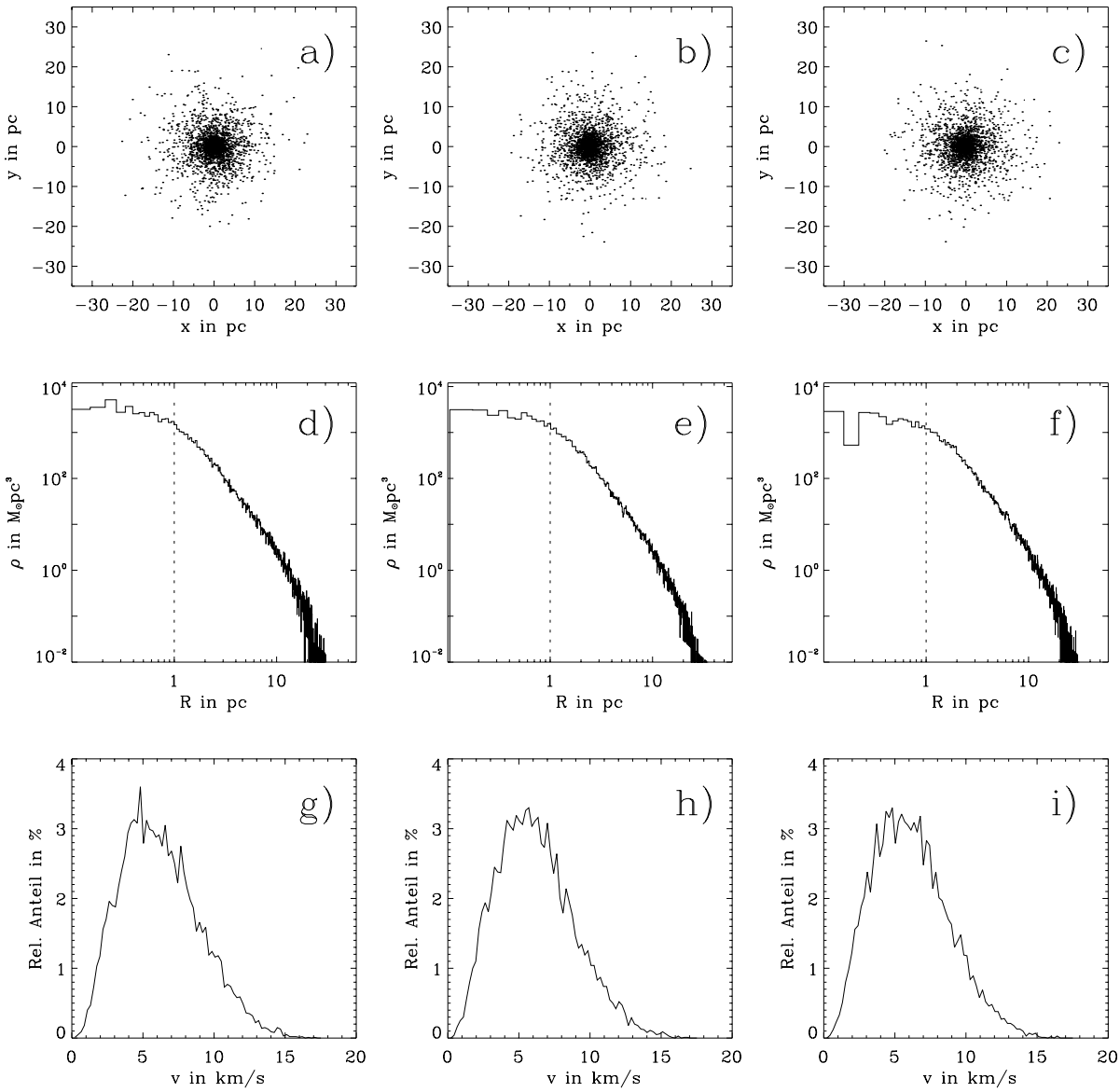

Abbildung 4.1: Zeitliche Entwicklung des ungestörten Standardmodelles. Figuren a) bis c) zeigen eine Projektion des Haufens in die xy-Ebene bei $t = 0$, $t = 2\,\tau_{ff}$ und $t = 4\,\tau_{ff}$ dar. Die jeweilige radiale Dichteverteilung ist in d) bis f) wiedergegeben. Man erkennt gut den typischen Verlauf des King-Profils. In g) bis i) sind entsprechend die Geschwindigkeiten der Testteilchen dargestellt. Sie sind Maxwell-verteilt.

Die darauffolgende Abbildung 4.2 zeigt die Entwicklung der Energie des Systems (a) und des Virialkoeffizienten η (siehe Def. (2.23)) (b). Auch hier sind alle Werte über einen Zeitraum von $4\,\tau_{ff}$ bis auf Abweichungen von maximal 2% erhalten. Energieerhaltung ist für ein reales abgeschlossenes System gefordert und stellt eine wichtige Bezugsgröße bei der Abschätzung der Güte einer numerischen Simulation (siehe Kap. C.2.4). Der Fehler von etwa $1 - 2$ % weist auf eine akzeptable Wahl der numerischen Parameter (Öffnungswinkel θ, Smoothing-Länge ϵ; siehe Kap.C.2.1 und C.2.2) und somit eine adäquate Beschreibung des realen Systems hin.

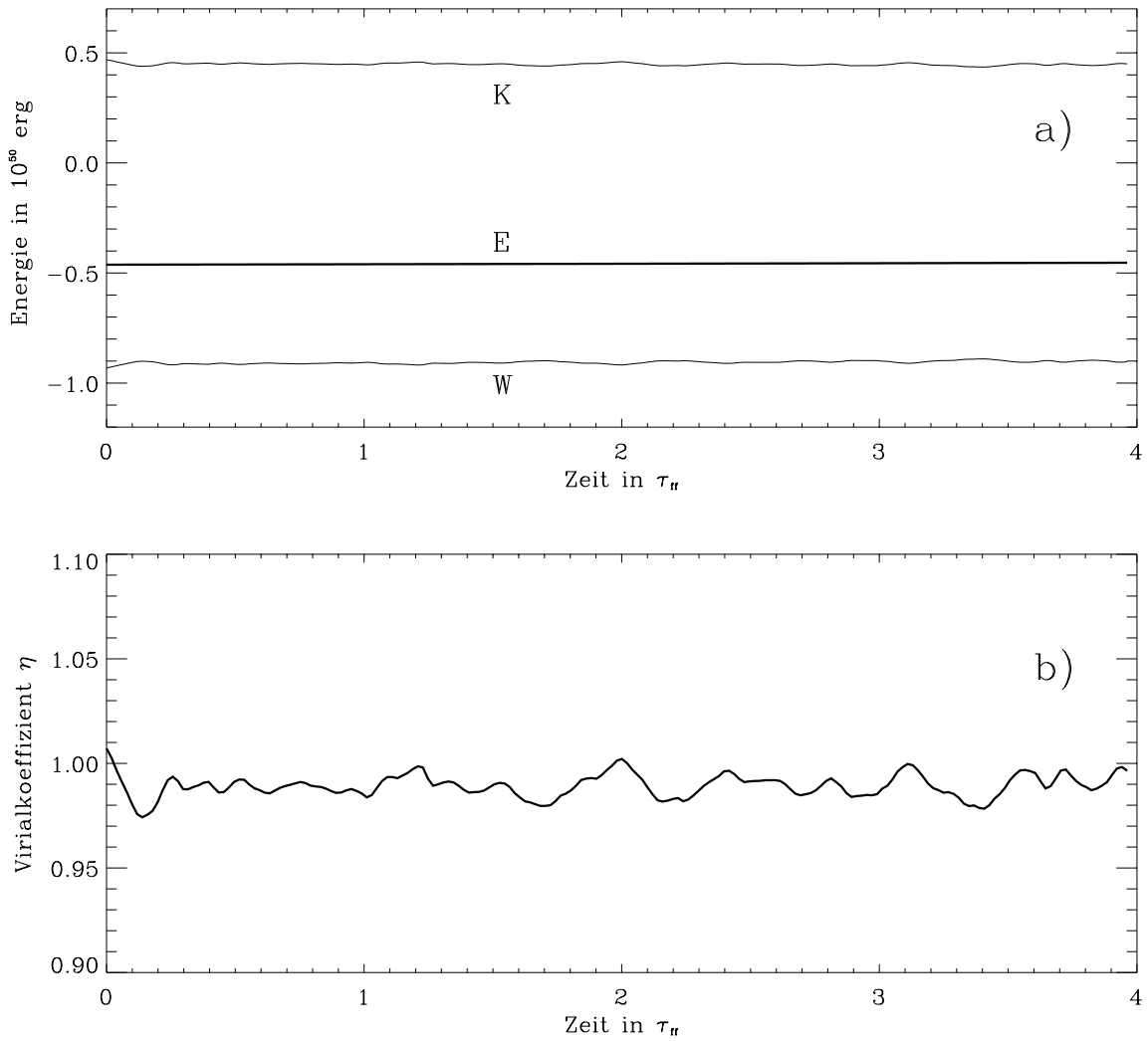

Abbildung 4.2: a) Gesamtenergie E (dicke Linie), kinetische (dünn, $K > 0$) und potentielle Energie (dünn, $W < 0$) des Haufens als Funktion der Zeit.
b) Zeitentwicklung des Virialkoeffizienten η.

In Abb. 4.3 wird für 4 000 zufällig ausgewählte Teilchen deren Energie nach Ablauf der Rechnung über dem Anfangswert aufgetragen. Ergäbe sich im Laufe der Entwicklung keine Änderung der Energie eines individuellen Teilchens, dann lägen alle Werte auf der Diagonalen (gepunktete Linie). Erfährt ein Teilchen auf seiner Bahn eine Ablenkung durch das Wechselspiel mit den anderen Teilchen, dann wird es von der Diagonalen abweichen; das Gebiet im $E_{init} - E_{final}$-Diagramm wird sich aufblähen. Die prozentuale Abweichung von der Diagonalen ist für alle Teilchen etwa gleichverteilt, egal ob sie sich im Kerngebiet befinden ($E_{init} \lesssim 2 \times 10^{45}$ erg) oder im äußeren Bereich des Haufens ($E_{init} \gtrsim 2 \times 10^{45}$ erg), und beträgt im Mittel 5%. Die absoluten Energieänderungen sind allerdings im Kern größer, da die Teilchen auch größere Bindungsenergien besitzen. Im Kern ist weiterhin die Streuung der Abweichungswerte etwas größer, was

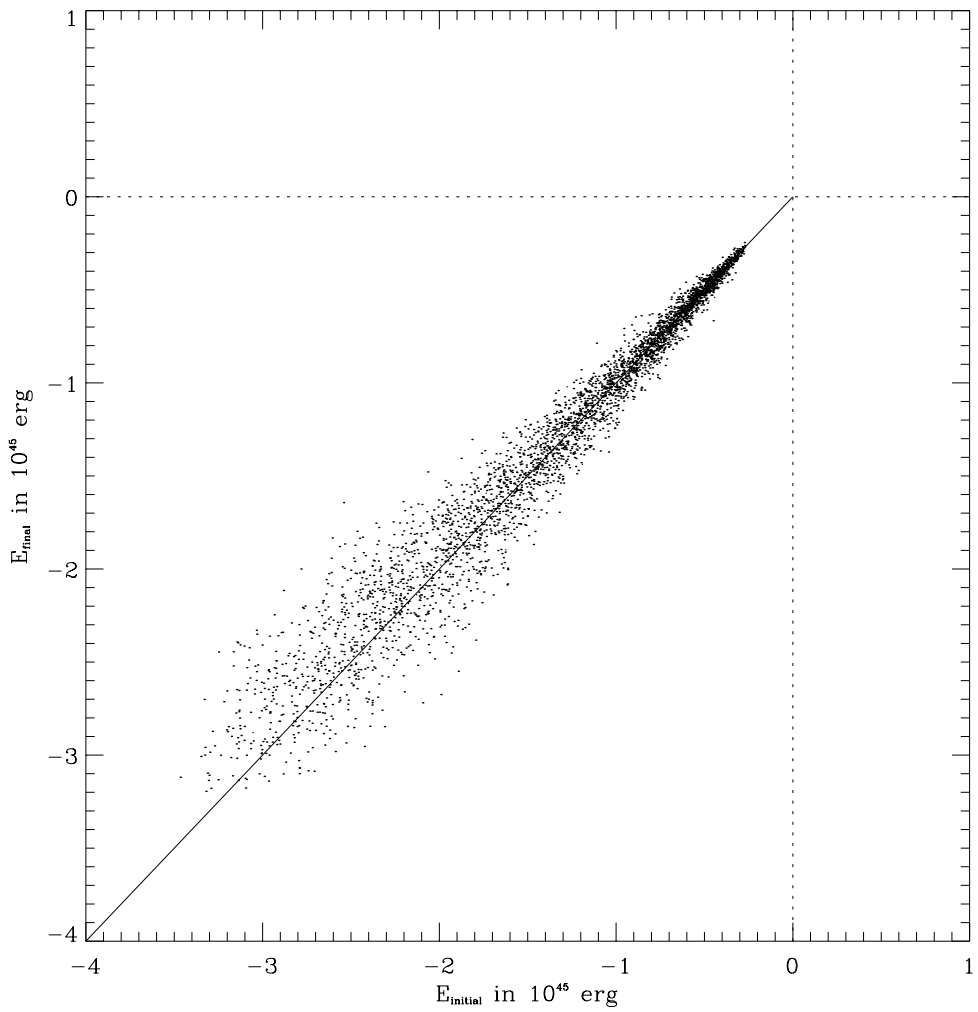

Abbildung 4.3: Anfangsenergie E_{init} aufgetragen über Endenergie E_{final}, für 4 000 Teilchen (normiert auf die Sonnenmasse $M_\odot$).

aus der höheren Teilchendichte im Kern und der deswegen kürzeren dynamischen Zeitskala folgt. Im großen und ganzen jedoch deutet die geringe Aufweitung der E_{init}-E_{final}-Verteilung darauf hin, daß individuelle 2-Körper-Stöße keine große Rolle spielen, so wie für reale (nicht core-kollabierten) Kugelsternhaufen gefordert, bzw. daß die Softening-Länge ϵ passend gewählt ist.

Zum Schluß seien in Bild 4.4 für 2 500 Teilchen der Masse $M_\odot$ die Energie über dem Radius aufgetragen, jeweils für $t = 0,2\,\tau_{ff}$ und $4\,\tau_{ff}$. Man erkennt deutlich den Potentialtopf, in dem die Teilchen sich bewegen. Auch hier zeigt sich keine nennenswerte globale Veränderung der Verteilung. Die Tiefe des Potentialtopfs beträgt $\Phi_0 = -3.4 \times 10^{45}\,\mathrm{erg/M_\odot}$ im Zentrum und beim Gezeitenradius $\Phi(r_t) = -0.3 \times 10^{45}\,\mathrm{erg/M_\odot}$. Das Modell erlaubt keine Teilchen mit Energien $E > \Phi(r_t)$.

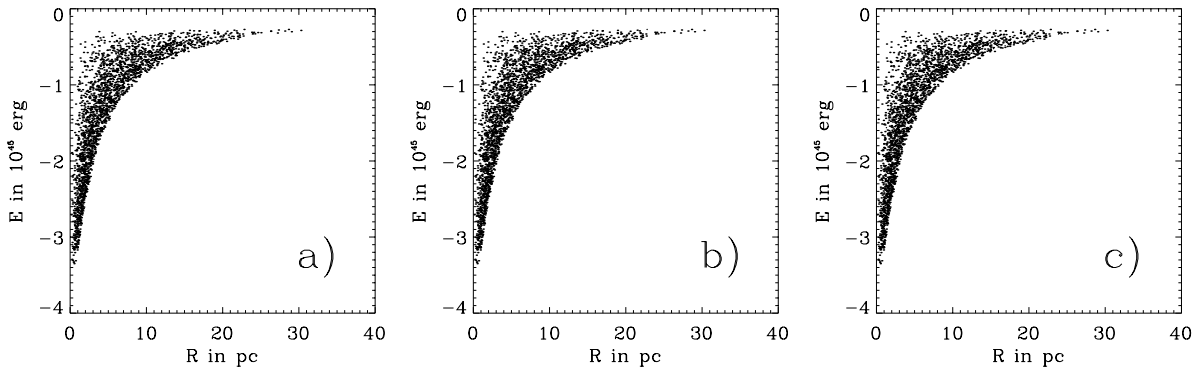

Abbildung 4.4: Energie von 2 500 Teilchen mit Masse $M_\odot$ aufgetragen über dem Radius, bei $t = 0$ (a), $t = 2\,\tau_{ff}$ (b) und $t = 4\,\tau_{ff}$ (c).

4.2 Untersuchungen mit N-Körper-Simulationen

4.2.1 Heftiger Stoß – Systemgrößen während des Stoßes

Durchdringt ein schwarzes Loch den Kugelsternhaufen und kommt es dem Kerngebiet sehr nahe, dann kann soviel Energie auf den Haufen übertragen werden, daß dieser sich anschließend auflöst. Ein solcher Vorgang soll am Beispiel des Stoßes eines schwarzen Loches der Masse $M_{SL} = 10^6\,M_\odot$ am Standardmodell für Kugelsterhaufen ($M = 1.05 \times 10^5\,M_\odot$) mit Stoßparameter $b = r_h = 3.9\,\mathrm{pc}$ und Relativgeschwindigkeit $v_0 = 250\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ erläutert werden. Abbildung 4.5 zeigt die Entwicklung der wichtigsten Energiekomponenten während der Wechselwirkung, d. h. von $t = -5 \times 10^5\,\mathrm{a}$ bis $t = +5 \times 10^5\,\mathrm{a}$, wobei bei $t = 0$ der geringste Abstand erreicht wird. Insgesamt steigt die Energie des Haufens von $E_{init} = -0.48 \times 10^{50}$ erg auf $E_{final} = +0.36 \times 10^{50}$ erg (4.5.a). Betrachtet man die schwerpunktsbereinigte Energie ($E - T$), so wird auch dieser Wert positiv. Der Haufen in seiner jetzigen Form ist nicht mehr gebunden. Etwa 1/4 aller Haufensterne erhalten im Stoß zum Teil sehr hohe positive Energien. Diese Sterne werden das System sofort verlassen. Gleichzeitig versuchen die restlichen Sterne des Haufens in das dynamische Gleichgewicht zurückzufinden. Dabei verliert der Resthaufen sukzessive noch mehr Sterne. Der erste Teil dieser säkularen Entwicklung wird in Kap. 4.2.2 kurz vorgestellt. Betrachtet man Abb. 4.5.b, so erkennt man, daß bei einer Gesamtänderung der kinetischen Energie $\Delta K = 0.87 \times 10^{50}$ erg, etwa ein Drittel in die Schwerpunktsbewegung des Haufens fließt ($\Delta T = 0.27 \times 10^{50}$ erg) und der Rest in die interne Energie ($\Delta\Pi/2 = 0.57 \times 10^{50}$ erg). Nach Gl. (2.20) ist $K \equiv T + \Pi/2$. In der weiteren Entwicklung wird $\Pi/2$ sinken, da beim Verlassen des Haufens die Sterne Arbeit gegen das Gravitationspotential leisten müssen und so ihre Geschwindigkeit geringer wird, siehe auch Kap. 4.2.2. Der Verlauf der gravitativen Energie des Systems bleibt bis $t \simeq 0$ relativ konstant (nach der Impulsapproximation ändern die Teilchen während des Stoßes ihre Position nur unwesentlich) und strebt dann zunächst einem neuen Minimum zu. Dieses entsteht dadurch, daß das schwarze Loch den Kugelsternhaufen durchdringt und aufgrund seiner großen Masse entlang seiner Bahn eine zusätzliche Anziehungskraft ausübt. Die Teilchen fliegen also zunächst aufeinander zu. Dadurch wird der innere Bereich des Hau-

fens noch kompakter und die Gravitationsenergie stärker negativ. Später kommt es zu einer Expansion des Systems aufgrund des starken Anwachsens der Geschwindigkeitsdispersion. Bei $t = 2 \times 10^5$ a erreicht die Gravitationsenergie einen minimalen Wert und steigt dann wieder an (Abb. 4.5.c). Die Entwicklung des Virialkoeffizienten schließlich zeigt Abb. 4.5.d.

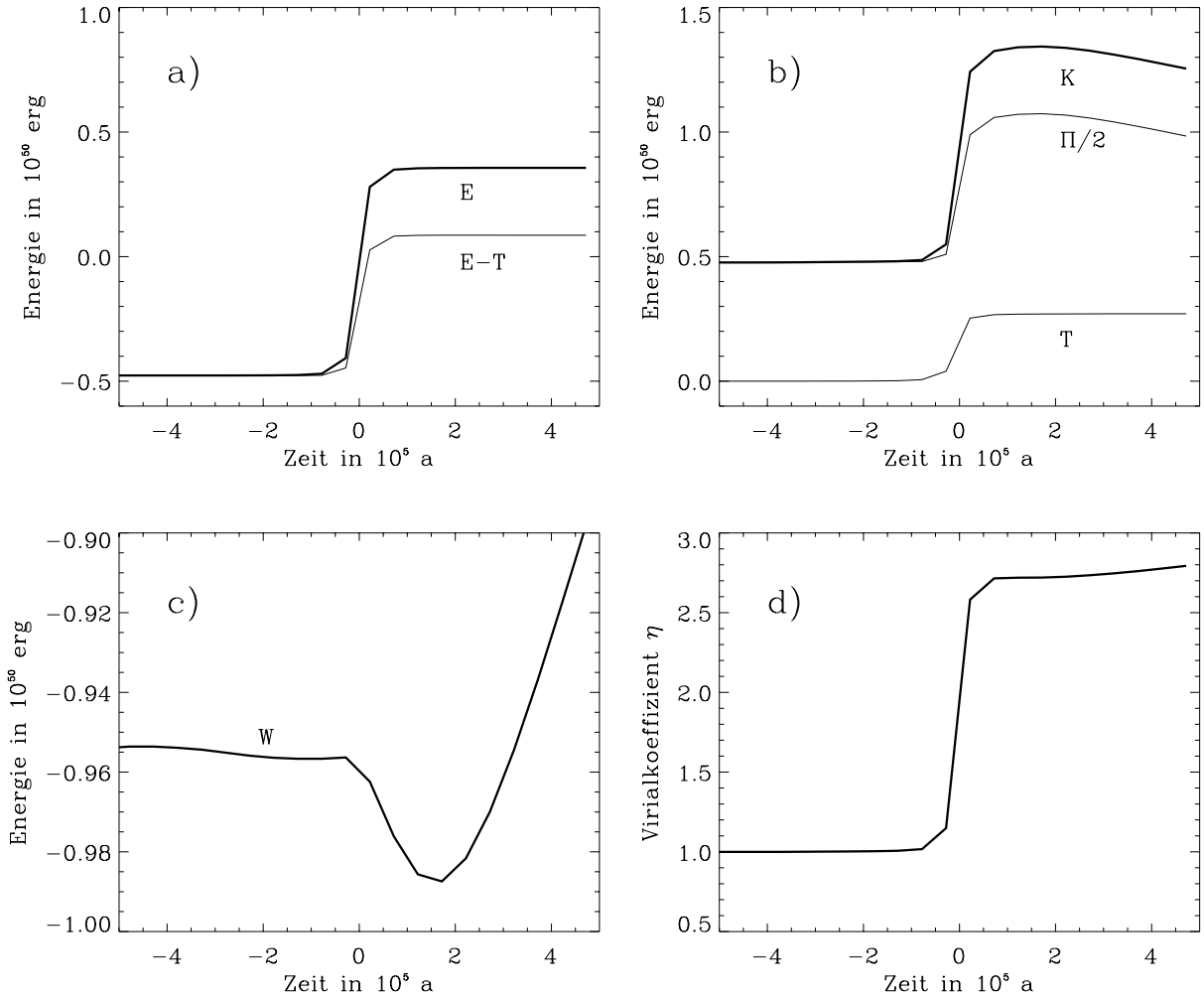

Abbildung 4.5: Zeitliche Entwicklung von gesamter Haufenenergie E (a), kinetischer Energie $K = T + \Pi/2$ (b) und potentieller Energie W (c) beim Stoß. Der dazugehörige Virialkoeffizient η ist in d) aufgetragen.

Innerhalb der simulierten 10^6 Jahre verändern sich die Sternpositionen nur sehr geringfügig, trotz der hohen Beschleunigungen die sich für einige Sterne ergeben. Der Haufen behält in dieser Zeit im wesentlichen seine ursprüngliche Form bei, siehe Abb. 4.1. Alleine der Haufenschwerpunkt bewegt sich um 2.5 pc entlang der x-Achse aufgrund der hohen Schwerpunktsgeschwindigkeit von $v_{SP} = 5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, die er im Stoß erhält. Den Verlauf von Schwerpunktsposition und -geschwindigkeit des Haufens zeigt Abb. 4.6. Die Langzeitentwicklung der Sternpositionen findet man in Abb. 4.10 im nächsten Kapitel dargestellt. Man erkennt dort gut das Auseinan-

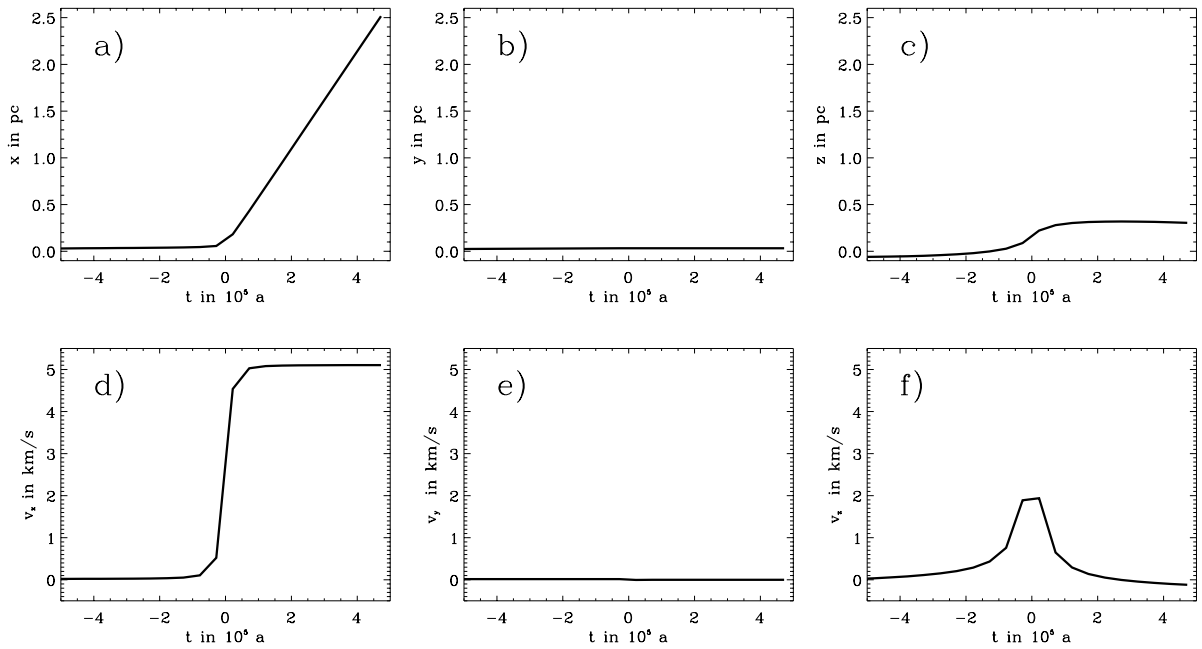

Abbildung 4.6: Verlauf der drei Koordinaten von Schwerpunktskoordinate (a-c) und Schwerpunktsgeschwindigkeit (d-f) des Kugelsternhaufens während des Stoßes. Das schwarze Loch befindet sich bei $t = 0$ an der Stelle $\mathbf{x} = (4\,\mathrm{pc}, 0, 0)$ und besitzt eine Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (0, 0, -250\,\mathrm{km\,s^{-1}})$. Aufgrund dieser geometrischen Verhältnisse findet der Hauptanteil des Impulsübertrags entlang der x-Achse statt.

derfallen des Haufens.

Bild 4.7 zeigt die Teilchenenergien (normiert auf die Masse $M = 1\,\mathrm{M}_\odot$) als Funktion der x-Koordinate. Bis $t \simeq -0.5 \times 10^5\,\mathrm{a}$ wird der Haufen vom schwarzen Loch kaum beeinflußt. Erst wenn dieses in den Kugelsternhaufen eindringt, werden entlang seiner Bahn (gestrichelte Linie) Sterne des Haufens massiv gestört und und auf sehr hohe Geschwindigkeiten beschleunigt. Gleichzeitig wirkt auf den Haufen als ganzes eine Kraft, die seine Schwerpunktsgeschwindigkeit auf $v_{SP} = 5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ erhöht. Man erkennt in der Folgeentwicklung, daß der gesamte Kugelsternhaufen entlang der x-Achse abdriftet. Die Sterne, die aufgrund ihres kleinen Stoßparameters positive Energien erhalten hatten, beginnen den Haufen zu verlassen. Sie befinden sich in Abb. 4.7 zunächst in enger Umgebung der Trajektorie des schwarzen Loches (Stoßparameter $b = r_h = 3.9\,\mathrm{pc}$; gestrichelte Linie). Aufgrund der hohen Geschwindigkeiten dieser energiereichen Teilchen beginnt sich dieses Gebiet rasch auszudehnen.

In Abb. 4.8 wird der anfänglichen Energie der Sterne E_{init} die Energie nach dem Stoß E_{final} gegenübergestellt. Das erste Bild zeigt E_{init} und E_{final} kurz vor dem Stoß. Man erkennt nur die schon in Abb. 4.3 festgestellte geringfügige Aufweitung der Verteilung. Das zweite Bild zeigt das System kurz nach dem Stoß. Man erkennt nun eine starke Aufweitung und eine Verschiebung zu positiven E_{final}-Werten, was aus der großen Zunahme der kinetischen Energie der Teilchen folgt. Diese Verschiebung ist um so größer, je größer die Anfangsenergie war, d.h. je geringer ein Stern zu Beginn gebunden war. Im letzten Bild erkennt man, daß die Energie

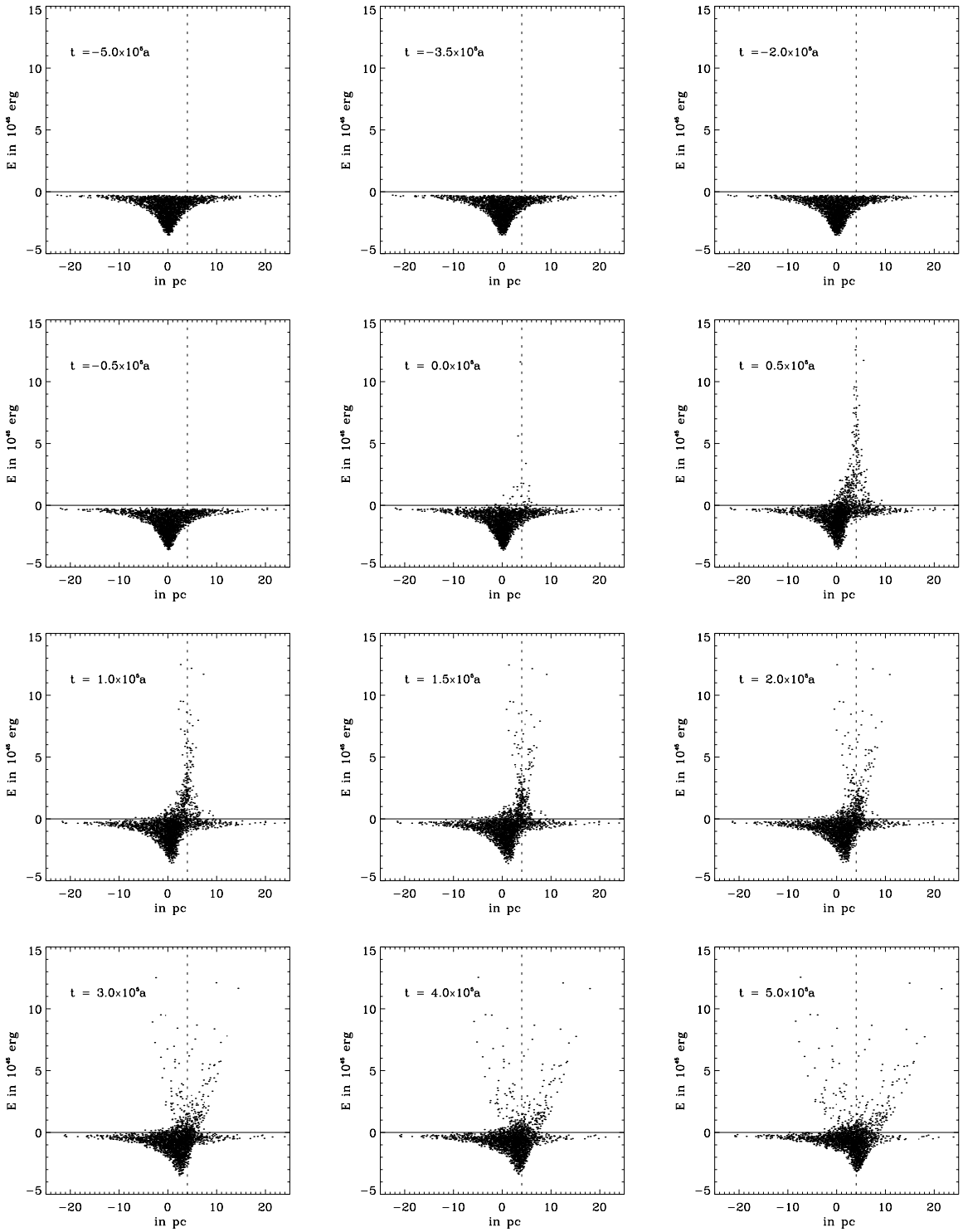

Abbildung 4.7: Verteilung der Energien der Haufensterne (normiert auf die Masse $M = 1\,\mathrm{M}_\odot$) als Funktion der x-Koordinate bei 12 verschiedenen Zeitpunkten während des Stoßes. Die gestrichelte Linie verdeutlicht den Stoßparamater $b = r_h = 3.9\,\mathrm{pc}$.

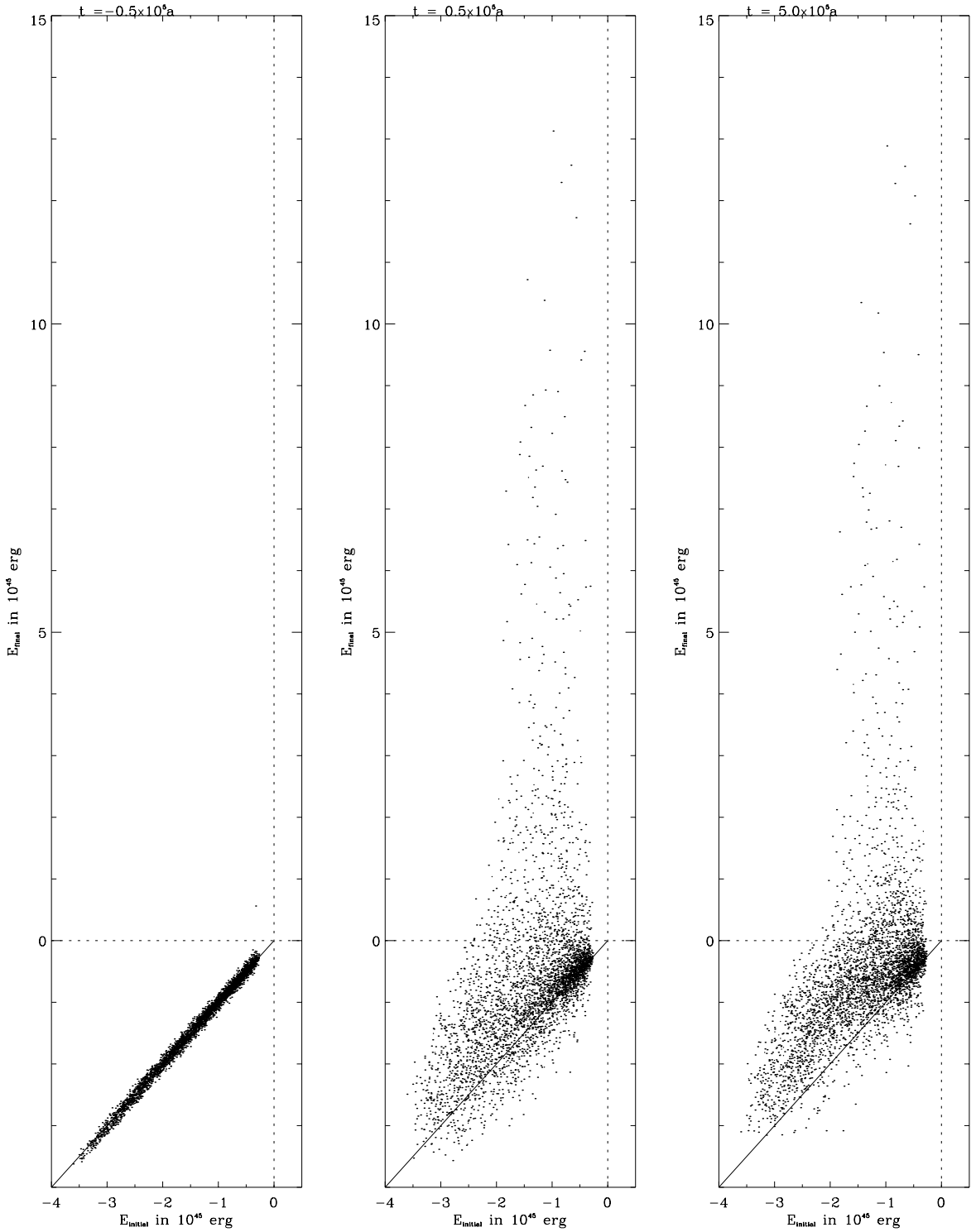

Abbildung 4.8: Gegenüberstellung von anfänglicher Energie E_{init} der Haufensterne und deren Endenergie E_{final} zur Zeit $t = -0.5 \times 10^5$ a, also kurz vor dem Stoß, zur Zeit $t = +0.5 \times 10^5$ a, also kurz nach dem Stoß und zur Zeit $t = +5.0 \times 10^5$ a, d.h. nachdem der Relaxationsprozess bereits eingesetzt hat.

der Haufensterne umverteilt wurde. Die Zahl der Sterne mit sehr hohen positiven Energien hat leicht abgenommen, dafür ist die Verteilung als ganzes etwas angehoben, was in etwa der Zunahme der Schwerpunktsbewegung des Haufens entspricht. Es gibt jetzt kaum mehr Sterne, die während des Stoßes Energie verloren haben. Diese Umschichtung ist ein erstes Zeichen des einsetzenden Relaxationsprozesses. Aufgrund der dem Stoß folgenden Expansion des Haufens wird interne Energie in potentielle umgewandelt ($\Pi/2$ sinkt wieder, wie in Abb. 4.5.b zu sehen), wohingegen die Schwerpunktsenergie T erhalten bleibt. Dieser Prozeß verstärkt sich in der weiteren Entwicklung noch (Kap.4.2.2).

Als wichtigste Größe zum Vergleich mit den Ergebnissen der Impulsapproximation in Kap. 4.3 seien in Abb. 4.9 die zeitliche Entwicklung der drei Komponenten der Geschwindigkeitsdispersion dargestellt. Man sieht, daß kinetische Energie dem System vor allem in der Ebene senkrecht zur Bahn des schwarzen Loches zugeführt wird. Dort steigt die Geschwindigkeitsdispersion zunächst um 67%, für σ_x, bzw. 73%, für σ_y. Die Dispersion parallel zur Bahn wird nur unwesentlich beeinflußt, sie steigt nur kurzzeitig um 3% an. Als Folge der Ausdehnung des Kugelsternhaufens nehmen anschließend auch σ_x und σ_y wieder ab, da dabei gegen die Anziehungskraft des Systems Arbeit geleistet werden muß.

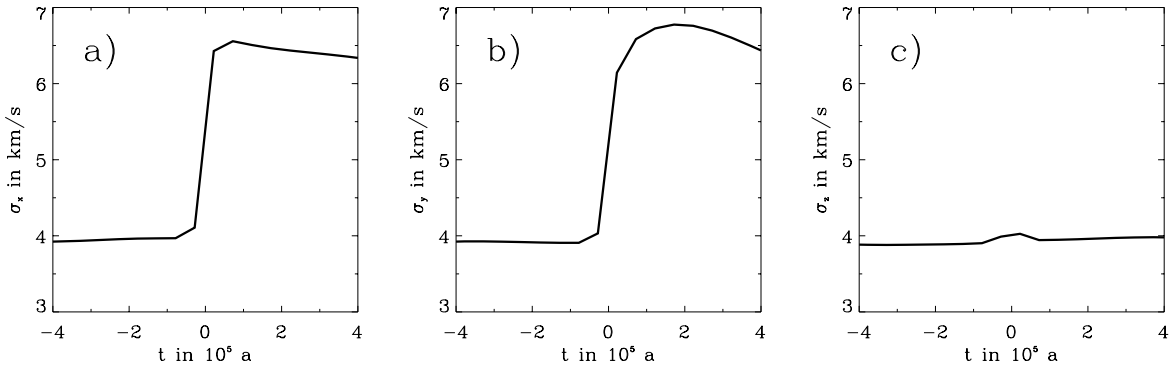

Abbildung 4.9: Zeitliche Entwicklung der drei Komponenten der Geschwindigkeitsdispersion σ während des Stoßes. Die maximalen Werte senkrecht zur Bewegungsrichtung des schwarzen Loches sind $\sigma_x^{max} = 6.6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $\sigma_y^{max} = 6.7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Parallel tritt kein nennenswerter Anstieg der Dispersion auf.

4.2.2 Heftiger Stoß – Säkulare Entwicklung

Dieses Kapitel behandelt die weitere Entwicklung des in Abschnitt 4.2.1 besprochenen stark gestörten Systems. Abbildung 4.10 zeigt die Sternpositionen zu verschiedenen Zeiten nach dem Stoß. Der Haufen bläht sich zunächst auf und sein Schwerpunkt beginnt nach rechts zu wandern. Mehr und mehr ungebundene Sterne verlassen dabei den Haufen und bilden einen diffusen, ausgedehnten Halo um den Resthaufen herum. Gleichzeitig beginnt sich dieser umzustrukturieren und zu kontrahieren. Er enthält noch etwa die Hälfte der ursprünglichen Sterne. Eine Vergrößerung des Resthaufens zeigt Abb. 4.11.a. Seine Dichteverteilung (Abb. 4.11.b) gleicht in grober Näherung einem King-Profil mit Konzentrationsindex $c = 1.3$, hat jedoch in den

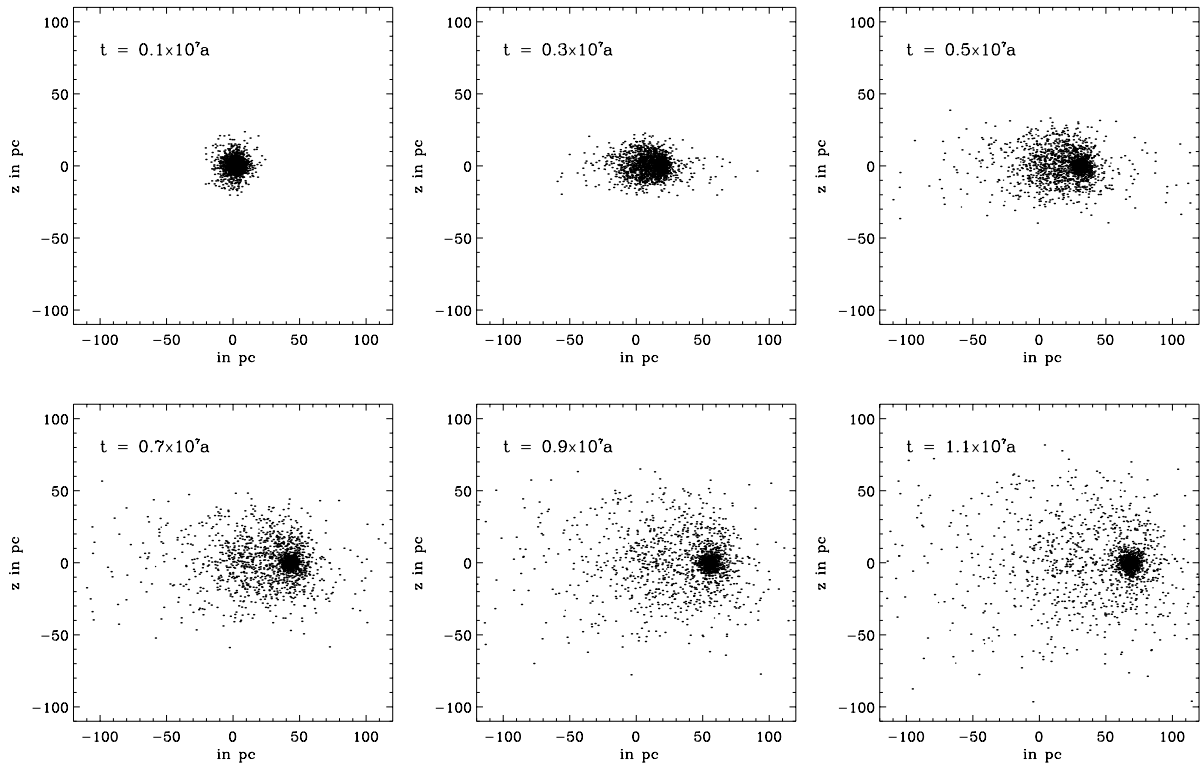

Abbildung 4.10: Sternpositionen zu sechs verschiedenen Zeiten nach dem Stoß. Der letzte dargestellte Zeitpunkt entspricht dem 1.1-fachen der Freien-Fall-Zeit τ_{ff} des ursprünglichen Systems.

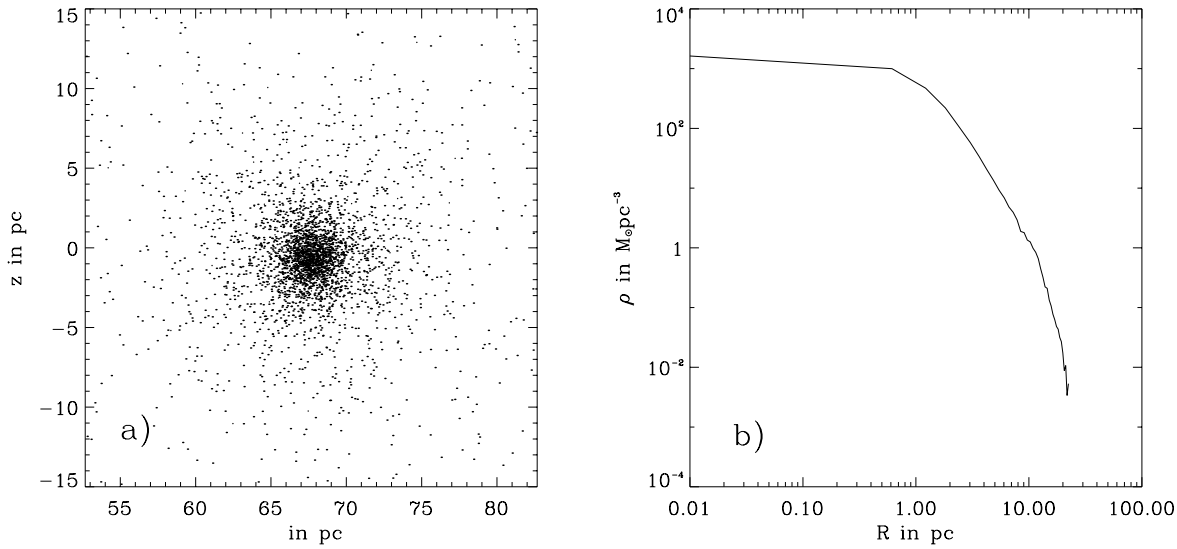

Abbildung 4.11: a) Der Resthaufen 1.1×10^7 Jahre nach dem Stoß. Das Bild stellt einen Ausschnitt (30 pc×30 pc) des letzten Teiles von Abb. 4.10 dar. b) Radiale Dichteverteilung desselben.

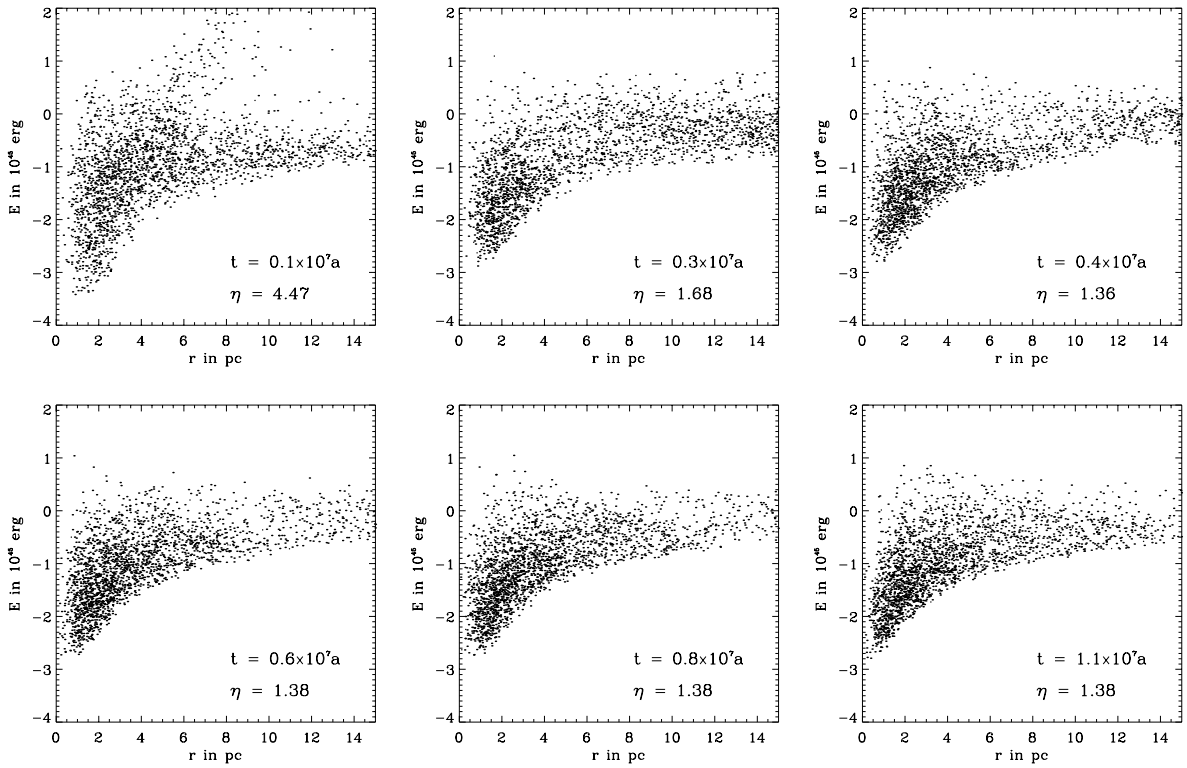

Abbildung 4.12: Schwerpunktsbereinigte Energie der Sterne des Resthaufens an sechs Zeitpunkten nach dem Stoß. Zusätzlich ist noch der Virialkoeffizient η des Resthaufens angegeben. Die Freie-Fall-Zeit des ursprünglichen Systems beträgt $t = 1.01 \times 10^7$ a.

Außenbereichen einen zu steilen Dichteabfall ($\rho \propto r^{-3.5}$ anstelle von $\rho \propto r^{-2}$ in weiten Radienbereichen beim King-Modell bei realen Kugelsternhaufen) und im Zentrum eine zu hohe Dichte. Diese Abweichungen deuten darauf hin, daß der Haufen auch 1.1×10^7 Jahre nach dem Stoß noch nicht vollständig relaxiert ist. Er besitzt immer noch zu viel kinetische Energie um im Gleichgewicht zu sein. So beträgt sein Virialkoeffizient zu diesem Zeitpunkt immer noch $\eta = 1.38$ Dies zeigt auch ein Blick auf Abb 4.12. Dort sind zu verschiedenen Zeitpunkten nach dem Stoß für die Sterne des Resthaufens ihre auf eine Sonnenmasse normierten schwerpunktsbereinigten Energiewerte über dem Abstand von Zentrum aufgetragen. Man erkennt, daß der Resthaufen den Energieüberschuß durch verstärktes Abdampfen der energiereichsten Sternen verliert. Der ebenfalls dargestellte zugehörige Virialkoeffizient η sinkt im Laufe dieser Prozesse stetig ab. Durch den Teilchenverlust kontrahiert der Resthaufen und sein Kernbereich wird dichter. Damit verkürzt sich auch die dynamische Zeitskala und die Entwicklung des Kugelsternhaufens verläuft immer schneller. Durch den Massenverlust wird zudem der Potentialtopf flacher und immer neue Sterne erhalten positive Gesamtenergie. Dies entspricht im Grunde der natürlichen Evolution eines Kugelsternhaufens in unserer Milchstraße (siehe Abschnitt 2.6) und es stellt sich die Frage, auf welchen Zeitskalen diese säkulare Entwicklung abläuft. D. h. wie lange wird der Resthaufen noch existieren, bzw. wie lange würde man ihn als Kugelsternhaufen identifizieren können? Eine Antwort darauf hängt in hohem Maße von den Bahnparametern des

Haufens in der Milchstraße ab. Diese bestimmen, wie stark die Gezeitenkräfte wirken und wie groß die Hintergrunddichte ist, durch die der Kugelsternhaufen sich bewegt. Entsprechend den Abschätzungen von Fall & Rees (1985) könnte der Kugelsternhaufen auf Radien $R \gtrsim 5\,\mathrm{kpc}$ über einen Zeitraum von 10^{10} Jahren überleben und würde für kleinere Abstände vom galaktischen Zentrum zerstört werden.

4.2.3 Schwacher Stoß

In den vorhergehenden beiden Unterkapiteln wurde eine Wechselwirkung zwischen schwarzem Loch und Kugelsternhaufen, die zur Zerstörung des Haufens führt, diskutiert. Nun soll ein etwas schwächerer Stoß beschrieben werden. Der Stoßparameter beträgt $b = r_t = 33.7\,\mathrm{pc}$, d.h. das schwarze Loch streift den Kugelsternhaufen gerade. Dieser ist wieder als Standardmodell dargestellt und Masse und Geschwindigkeit des schwarzen Lochs betragen $M_{SL} = 10^6\,\mathrm{M}_\odot$, bzw. $v_0 = 250\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Bei dieser Parameterwahl ist der Energieübertrag so gering, daß der Haufen

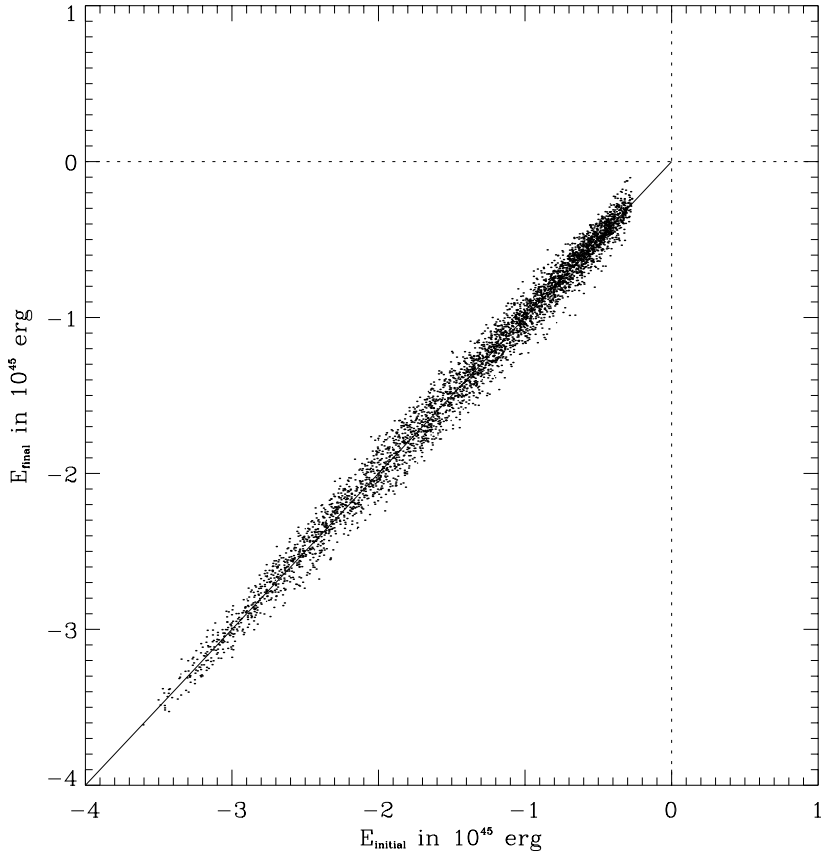

Abbildung 4.13: Anfangsenergie E_{init} aufgetragen über Endenergie E_{final}, für 4000 Teilchen (normiert auf die Sonnenmasse $\mathrm{M}_\odot$).

ohne Probleme in ein neues Gleichgewicht zurückfindet.

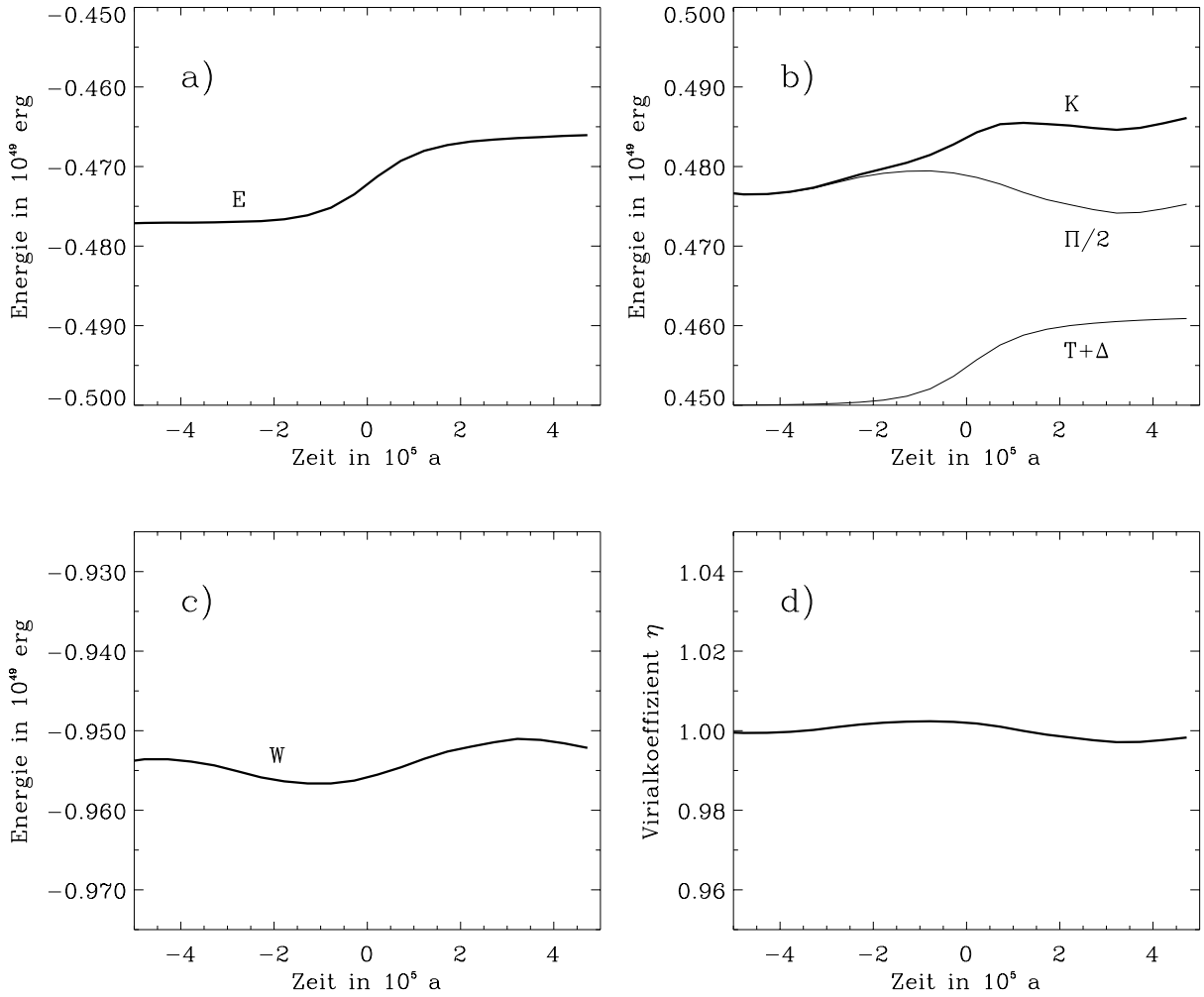

Abbildung 4.14: Zeitliche Entwicklung von gesamter Haufenenergie E (a), kinetischer Energie $K = T + \Pi/2$ (b) und potentieller Energie W (c) beim Stoß. Der dazugehörige Virialkoeffizient η ist in d) aufgetragen. Um die Schwerpunktsenergie T in b) darstellen zu können, ist sie um den Wert $\Delta = 0.45 \times 10^{50}$ erg noch oben verschoben.

In Abb. 4.13 ist die Anfangsenergie über der Endenergie für 4000 Teilchen aufgetragen. Ähnlich wie in Abb. 4.3 ist keine nennenswerte Entwicklung zu erkennen. Der einzige Unterschied zu Abb. 4.3 ist, daß die Streuung jetzt für höhere Energiewerte, d. h. für schwächer gebundene Sterne, größer ist, da auf diese der relative Einfluß des schwarzen Loches stärker wirkt und sie im Schnitt etwas Energie aufnehmen. Die radiale Verteilung der Teilchenenergien ist völlig analog zu Abb. 4.4. Die Energie, die auf den Haufen beim Stoß übertragen wird, fließt nun vor allem in die Schwerpunktsbewegung T des Haufens, siehe dazu Abb. 4.14. Die innere Energie $\Pi/2$ steigt zwar zunächst leicht an, pendelt sich aber dann wieder auf dem alten Wert ein. Ein ähnliches Verhalten zeigt die potentielle Energie. Der Virialkoeffizient η ist im Rahmen der

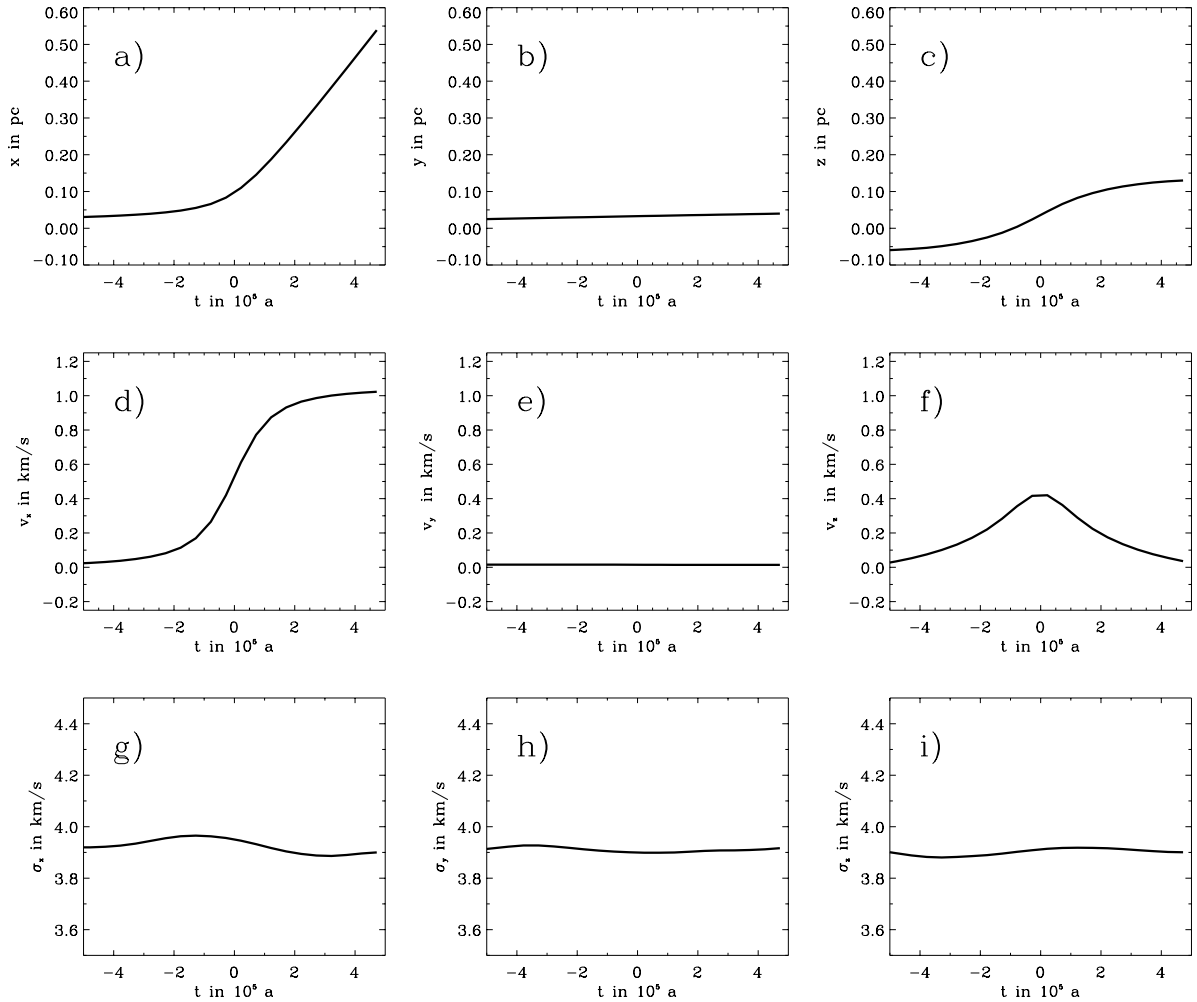

Abbildung 4.15: Verlauf der drei Koordinaten von Schwerpunktskoordinate (a-c), Schwerpunktsgeschwindigkeit (d-f) und Geschwindigkeitsdispersion (g-i) des Kugelsternhaufens während des Stoßes. Das schwarze Loch befindet sich bei $t = 0$ an der Stelle $\mathbf{x} = (33.7\,\mathrm{pc}, 0, 0)$ und besitzt eine Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (0, 0, -250\,\mathrm{km\,s^{-1}})$. Aufgrund dieser geometrischen Verhältnisse findet der Hauptanteil des Impulsübertrags entlang der x-Achse statt.

numerischen Genauigkeit konstant $\eta = 1$, d.h. der Kugelsternhaufen durchläuft stets Gleichgewichtszustände. In Abb. 4.15 schließlich ist die Zeitentwicklung von Schwerpunktskoordinaten und -geschwindigkeiten und der Geschwindigkeitsdispersion des Haufens dargestellt. Es stellt sich eine Schwerpunktsgeschwindigkeit von $v_{SP} = 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ ein, während die Geschwindigkeitsdispersion im wesentlichen gleich bleibt.

4.3 Vergleiche mit der Impulsapproximation

Mit der Impulsapproximation ist es möglich, bei nur geringer Rechenzeit, einen großen Bereich von Wechselwirkungsparametern zu erfassen. Dies erlaubt eine umfassende Studie der Stöße von massiven schwarzen Löchern an galaktischen Kugelsternhaufen. So zeigt Abb. 4.16 eine solche Studie für die Wechselwirkung eines $10^6\,\mathrm{M}_\odot$ schweren schwarzen Loches mit dem

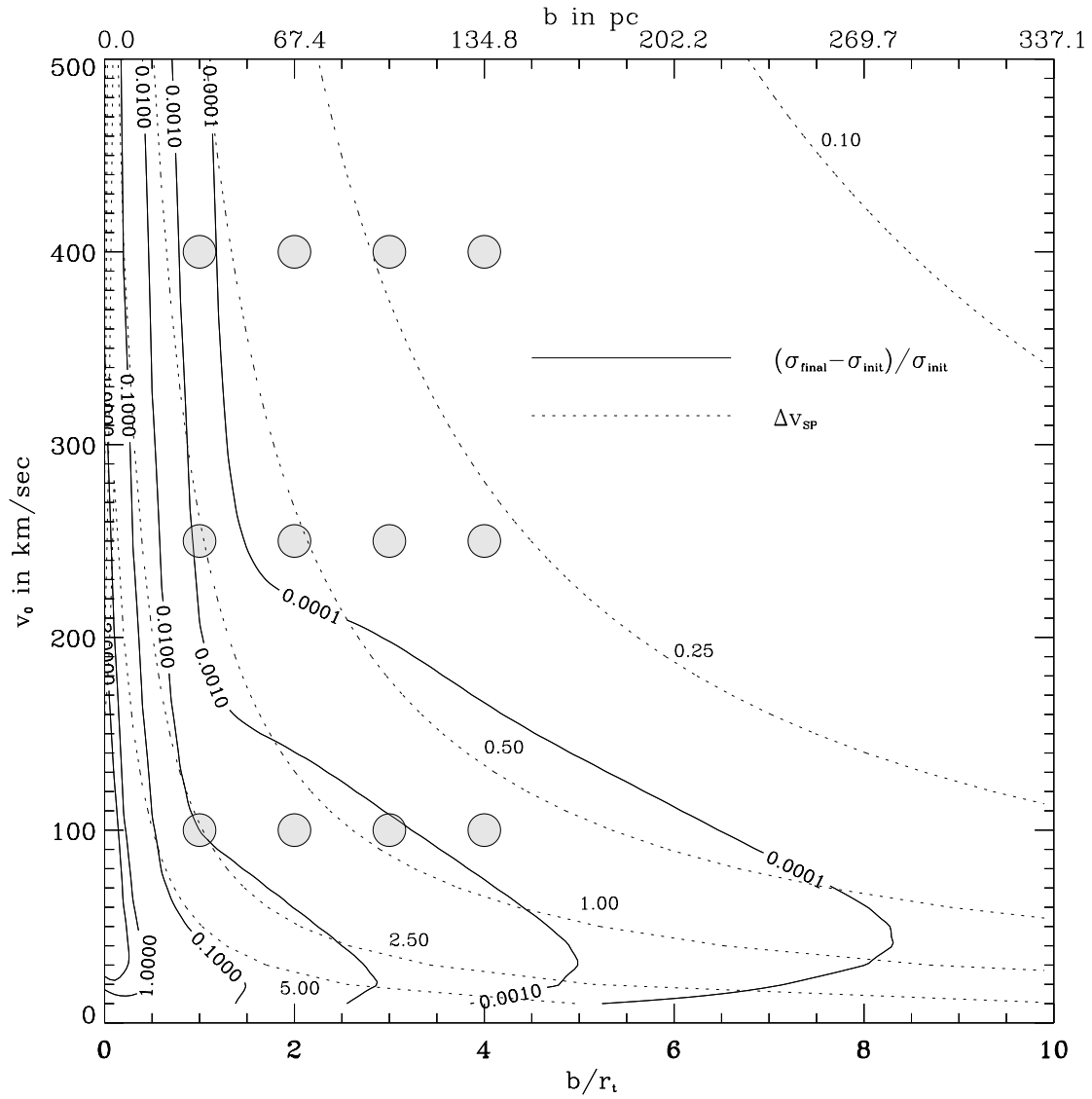

Abbildung 4.16: Relativer Zuwachs der Geschwindigkeitsdispersion $(\sigma_{final} - \sigma_{init})/\sigma_{init}$ (durchgezogene Linie) und Anstieg der Schwerpunktsgeschwindigkeit Δv_{SP} im Stoß (gepunktete Linie, Angaben in $\mathrm{km\,s^{-1}}$) als Funktion von Stoßparameter b, normiert auf den Gezeitenradius r_t des Kugelsternhaufens, und Relativgeschwindigkeit v_0 des schwarzen Loches. Die Berechnung erfolgt mittels der Impulsapproximation unter Verwendung der in Kap. 3.2.7 zusammengefaßten Korrekturen. Die Masse des Kugelsternhaufens beträgt $1.03 \times 10^5\,\mathrm{M}_\odot$ (Standardmodell mit $r_t = 33.71\,\mathrm{pc}$) und die des schwarzen Loches $10^6\,\mathrm{M}_\odot$.

Standardkugelsternhaufen. Dargestellt sind $(\sigma_{final} - \sigma_{init})/\sigma_{init}$, also der relative Zuwachs der Geschwindigkeitsdispersion, und der Zuwachs der Schwerpunktsgeschwindigkeit Δv_{SP} in $\mathrm{km\,s^{-1}}$ als Funktion vom Stoßparameter b und der Stoßgeschwindigkeit v_0. Die Werte errechnen sich für eine Darstellung des Kugelsternhaufens durch 25 000 Testteilchen nach den Formeln (3.25.a,b) in Kap. 3.2.7; also unter Anwendung der beiden Korrekturen zur Impulsapproximation zur Berechnung der Dispersion σ und unter Verwendung einzig der Massenkorrektur für die Schwerpunktsberechnung. Der Einfluß der Korrekturen zeigt sich deutlich für Geschwindigkeiten kleiner als etwa $250\,\mathrm{km\,s^{-1}}$:

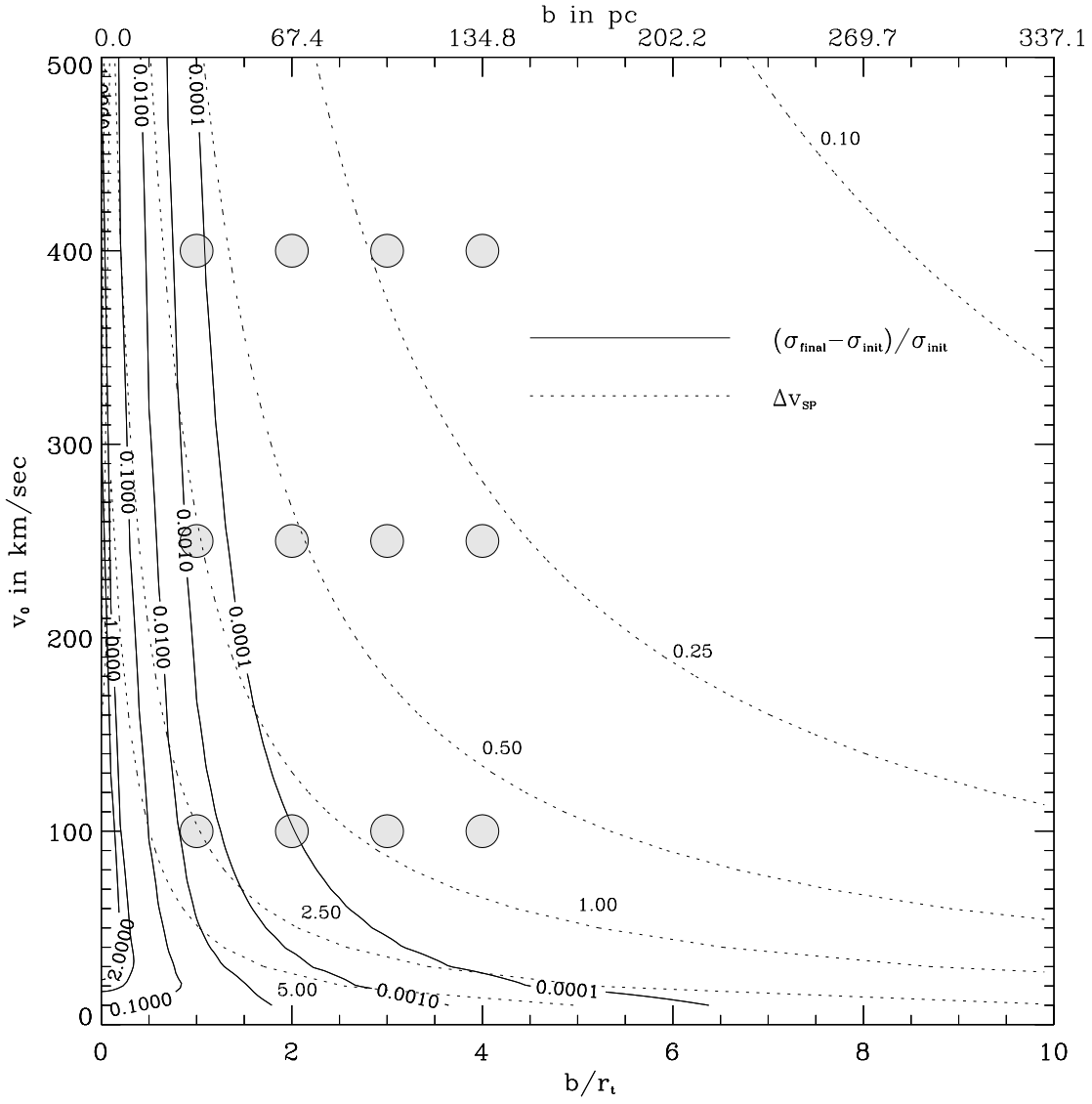

Abbildung 4.17: Relativer Zuwachs der Geschwindigkeitsdispersion $(\sigma_{final} - \sigma_{init})/\sigma_{init}$ (durchgezogene Linie) und Anstieg der Schwerpunktsgeschwindigkeit Δv_{SP} in $\mathrm{km\,s^{-1}}$ im Stoß (gepunktete Linie) wie er sich aus der Impulsapproximation ohne Korrekturen ergibt. Ansonsten ist die Parameterwahl wie in Abb. 4.16.

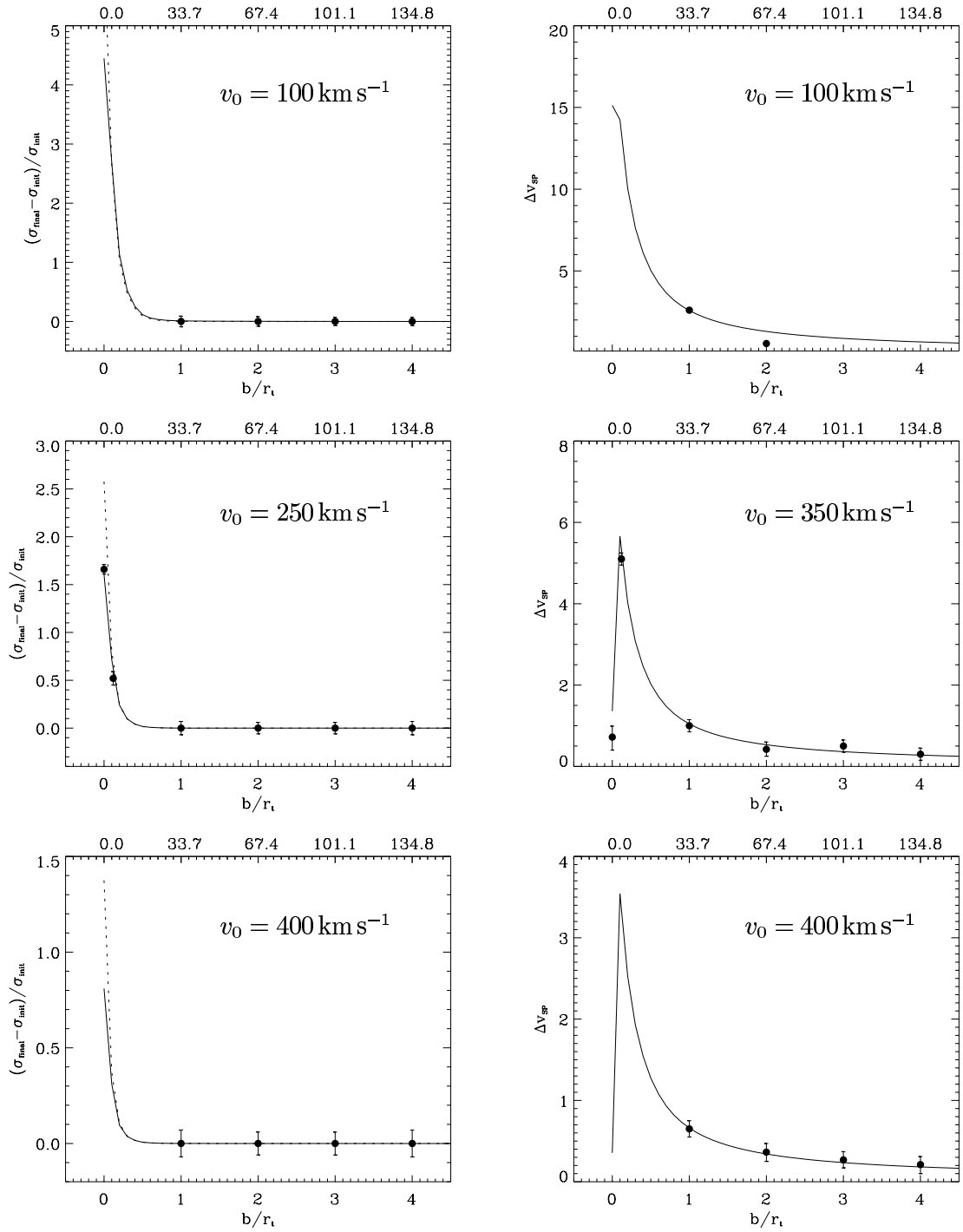

Abbildung 4.18: Vergleich von Impulsapproximation und N-Körper-Rechnungen, bei $v_0 = 100\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $v_0 = 250\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ und $v_0 = 400\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Die linke Spalte zeigt den relativen Zuwachs der Geschwindigkeitsdispersion und die rechte die Änderung der Schwerpunktsgeschwindigkeit. Die Werte der N-Körper-Simulation sind als ausgefüllte Kreise dargestellt; durchgezogene Linien zeigen die Impulsapproximation mit Korrekturtermen und gepunktete Linien ohne.

Die Verstärkung durch Resonanzeffekte im Faktor η (siehe Gl. (3.16), bzw. Abb.3.6) verschiebt die Linien gleichen Zuwachses der Dispersion nach größeren Stoßparametern b. Zum Vergleich sind in Abb. 4.17 die entsprechenden Zuwächse ohne Korrekturen für die endliche Wechselwirkungsdauer dargestellt. Im oberen Drittel, wo die Korrekturen nicht so relevant sind, stimmen beide Abbildungen gut überein. Man erkennt das nach Abb. 3.3 hyperbolische Verhalten für steigende b, bzw. v_0. Da ein schwarzes Loch bei den hier betrachteten Größenverhältnissen einer Punktmasse entspricht, kommt die Massenkorrektur in den Rechnungen nicht zum tragen und die resultierenden Schwerpunktsgeschwindigkeiten sind in beiden Abbildungen identisch. Die schattierten Kreise sind die Parameterpaare, für die der entsprechende Stoß auch in einer direkten N-Körper-Rechnung simuliert wurde. Aus dem Vergleich der Ergebnisse beider Methoden lassen sich Aussagen über Güte und Genauigkeit der Impulsapproximation gewinnen. Abbildung 4.18 zeigt eine Gegenüberstellung der entsprechenden Werte für das Anwachsen der Dispersion und der Schwerpunktsgeschwindigkeit. Die Ergebnisse der N-Körper-Rechnungen stimmen gut mit den Werten der korrigierten Impulsapproximation (durchgezogene Linien) Die Übereinstimmung mit der unkorrigierten Approximation ist nicht so gut, wie man aus den ersten beiden Datenpunkten in Abb. 4.18.c ersieht.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die korrigierte Fassung der Impulsapproximation ein adäquates Mittel darstellt, um Energieänderungen durch die hier betrachtete Wechselwirkung zu berechnen. Das für diese Arbeit entworfene Programm benötigt zur Erfassung des in Abb. 4.16 und Abb. 4.17 dargestellten Parameterraumes (50×50 Wertepaare für b und v_0) etwa eine Stunde reine CPU-Zeit auf einer *IBM RS-6000* Maschine, wohingegen eine N-Körper-Rechnung mit 25 000 Testteilchen für ein einziges Parameterpaar auf der *Cray-EL* des Rechenzentrums Garching zwischen 15 und 40 Stunden CPU-Zeit verbraucht, je nachdem ob die Stoßgeschwindigkeit $v_0 = 100\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ oder $v_0 = 400\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ beträgt. Die Anwendung der quasianalytischen Methode bedeutet demnach eine ganz beachtliche Reduzierung der Rechenzeit und erlaubt erst umfangreiche Parameterstudien.

Betrachtet man verschiedene Kugelsternhaufen – das Standardmodell stellt ja nur einen groben Mittelwert der galaktischen Verteilung dar – so ergeben sich folgende Schlüsse:

- Je kompakter ein Kugelsternhaufen ist, d. h. je größer der Konzentrationsindex c, desto besser kann der Haufen den plötzlichen Anstieg der Geschwindigkeitsdispersion im Stoß aufnehmen und desto stabiler erweist er sich gegenüber einer solchen Störung. Umgekehrt gilt bei gleicher Masse, je ausgedehnter und diffuser der Haufen ist (kleineres c), desto weniger stark ausgeprägt ist sein Potentialtopf und desto heftiger wird er auf externe Störungen reagieren. Er wird leichter Sterne verlieren und sich auflösen.

- Je größer bei sonst gleichen Parametern die Masse eines Haufens ist, desto größer ist seine Bindungsenergie und desto mehr Energie von außen kann er absorbieren, bevor er merklich reagiert. Aufgrund der höheren Masse stellt sich eine geringere Schwerpunktsgeschwindigkeit ($v_{SP}^2 = 2T/M$) ein als bei einem kleineren Haufen. Aufgrund der größeren Ausdehnung kommen Sterne in den Außenbereichen dem Störkörper näher als die Sterne in den Außenbereichen eines kleineren Haufens, so daß der Gesamtzuwachs der inneren Energie pro Einheitsmasse aufgrund diese geometrischen Verhältnisse bei ersterem etwas größer sein wird.

N-Körper-Rechnungen mit Haufen unterschiedlicher Masse M und Konzentrationsindices c bestätigen diese Ergebnisse.

4.4 Diskussion der Ergebnisse

Die vorherigen Überlegungen ermöglichen es nun, für einen beliebigen Kugelsternhaufen und gegebene Wechselwirkungsparameter b, v_0 und M_{SL}, den relativen Zuwachs seiner internen Geschwindigkeitsdispersion und damit seiner inneren Energie zu bestimmen. Kann man weiter die statistische Häufigkeit dieser Wechselwirkungen beschreiben, dann läßt sich damit das Anwachsen der internen Energie des Kugelsternhaufen als Funktion der Zeit berechnen. Übersteigt dieser Wert innerhalb des Alters des Haufens ($\gtrsim 10^{10}\,a$) die Bindungsenergie, löst sich der Haufen schon vorher auf und ist heute nicht mehr beobachtbar.

Das im nächsten Kapitel vorgestellte Massenmodell der Milchstraße erfordert einen Dunklen Halo mit der Dichteverteilung

$$\rho(r) = 0.134\,\frac{\mathrm{M}_\odot}{\mathrm{pc}^3}\left(1+\frac{r^2}{R_H^2}\right)^{-1} . \tag{4.1}$$

Dabei ist der Kernradius $R_H = 2.5\,\mathrm{kpc}$, vgl. Gl. (5.9.a). In Sonnennähe, d. h. für $r = R_\odot = 8.5\,\mathrm{kpc}$, ergibt sich damit eine Dichte dunklen Materials von $\rho(R_\odot) = 0.01\,\mathrm{M}_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}$. Folgt man den Überlegungen von Lacey & Ostriker (1985) und nimmt an, diese Materie läge in Form massiver schwarzer Löcher der Masse $M_{SL} = 10^6\,\mathrm{M}_\odot$ vor, dann müßten sich etwa 10 dieser Objekte in einem Gebiet von $1\,\mathrm{kpc}^3$ Volumen um die Sonne herum aufhalten. Im Zentrum der Milchstraße wären es $134\,\mathrm{kpc}^{-3}$. Der Dichteverlauf dieser Verteilung enspricht mit $\rho \propto r^{-2}$ dem einer isothermen Sphäre und es läßt sich unter Verwendung von Gl. (2.43) folgender Wert für deren Geschwindigkeitsdispersion herleiten:

$$\sigma = \sqrt{2\pi G r^2\,\rho(r)} \simeq 120\mathrm{km\,s}^{-1} . \tag{4.2}$$

Die Geschwindigkeiten der schwarzen Löcher entlang einer Raumrichtung sind also Gauß-verteilt um Null mit einer Standardabweichung von $120\,\mathrm{km\,s}^{-1}$.

Nimmt man weiter an, die Kugelsternhaufen bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v = v_c$ auf Kreisbahnen durch dieses Hintergrundmedium aus schwarzen Löchern – man will ja Scheibenheizungsprozesse studieren; geht also davon aus, daß die metallreichen Kugelsternhaufen der Milchstraße *in* der galaktischen Scheibe geboren werden und daher an der allgemeinen Rotation mit $v_c = 220\,\mathrm{km\,s}^{-1}$ teilnehmen –, dann ist das Raumvolumen, das der Haufen mit Impaktparametern $b \le \tilde{b}$ durchläuft, $V = \pi\tilde{b}^2\,v_c t$. Die Zahl der schwarzen Löcher der Masse M_{SL}, die innerhalb dieser Zeit t mit $b \le \tilde{b}$ an einem Haufen der galaktischen Position $(R, z = 0)$ vorbeiziehen, ist demnach

$$\begin{aligned} N(R;\tilde{b},t) &= \pi\tilde{b}^2\,v_c t\cdot\rho(R)/M_{SL} \\ &= 94.7\left(1+\frac{R^2}{R_H^2}\right)^{-1}\left[\frac{1\,\mathrm{M}_\odot}{M_{SL}}\right]\left[\frac{\tilde{b}}{1\,\mathrm{pc}}\right]^2\left[\frac{t}{10^6\,\mathrm{a}}\right] . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Bei einer Zeitdauer von 10^{10} Jahren und einer Masse von $10^6\,\mathrm{M}_\odot$ für das schwarze Loch ergeben sich folgende Werte für N:

$$\begin{aligned}
\tilde{b} &= 4\,\mathrm{pc} &&= r_h{}^\dagger &&\longrightarrow N = 1.2\\
\tilde{b} &= 16.8\,\mathrm{pc} &&= \tfrac{1}{2}\,r_t{}^\dagger &&\longrightarrow N = 21.4\\
\tilde{b} &= 33.7\,\mathrm{pc} &&= 1\,r_t{}^\dagger &&\longrightarrow N = 85.7\\
\tilde{b} &= 67.4\,\mathrm{pc} &&= 2\,r_t{}^\dagger &&\longrightarrow N = 342.7\\
\tilde{b} &= 168.5\,\mathrm{pc} &&= 5\,r_t{}^\dagger &&\longrightarrow N = 2\,141.6
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß ein Kugelsternhaufen mit der Ausdehnung des Standardhaufens im Laufe seines Lebens auf der Bahn durch die Milchstraße mindestens 85 mal von einem massiven schwarzen Loch getroffen würde. Er könnte ein solches Bombardement nicht überstehen. Um einen Wert für den gesamten Energiezuwachs durch solche Stöße zu gewinnen, hat man einfach die Faltung von $N(R;b,t)$ mit dem Dispersionsgewinn $(\sigma_{final}-\sigma_{init})/\sigma_{init}$ in Abhängigkeit von b und v_0 zu bilden. Vernachlässigt man zunächst die Geschwindigkeitsverteilung der schwarzen Löcher und betrachtet sie als ruhend, dann muß man nur die beiden Funktionen entlang der Linie $v_0 = v_c = 220\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ in Abb. 4.16 integrieren:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sigma_{final}-\sigma_{init}}{\sigma_{init}}\right](R;t) &= \int\limits_0^\infty db'\;\frac{\rho(R)\,2\pi b'\,v_c t\,r_t^2}{M_{SL}}\left[\frac{\sigma_{final}-\sigma_{init}}{\sigma_{init}}\right](b')\\
&= 94.7\left(1+\frac{R^2}{R_H^2}\right)^{-1}\left[\frac{1\,\mathrm{M}_\odot}{M_{SL}}\right]\left[\frac{r_t}{1\,\mathrm{pc}}\right]^2\left[\frac{t}{10^6\,\mathrm{a}}\right]\\
&\qquad\cdot\int\limits_0^\infty db'b'\left[\frac{\sigma_{final}-\sigma_{init}}{\sigma_{init}}\right](b')
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Integrand hinreichend schnell abfällt, so daß zum Integral nur Werte $b \ll R$ beitragen und über diesen Bereich die Dichte der schwarzen Löcher als konstant genähert werden kann. Weiter ist $b' = b/r_t$ der relative Stoßparameter, normiert auf den Haufenradius r_t. Abbildung 4.19 zeigt den Integranden $b'\,[(\sigma_{final}-\sigma_{init})/\sigma_{init}]\,(b')$ (gestrichelt) und das zugehörige Integral (durchgezogene Linie) als Funktion von b. Man erkennt deutlich, daß bereits innerhalb des Haufens, also für $b' < 1$ ein Sättigungswert erreicht wird. Dieser beträgt 0.024 und obige Voraussetzung ist erfüllt.

Wertet man Gl. (4.4) in Sonnenumgebung für $M_{SL} = 10^6\,\mathrm{M}_\odot$ aus und setzt $t = 10^{10}\,\mathrm{a}$, ergibt sich der Faktor

$$\left[\frac{\sigma_{final}-\sigma_{init}}{\sigma_{init}}\right](R_\odot;10^{10}\,\mathrm{a}) = 25.8\,. \tag{4.5}$$

Die interne Energie des Kugelsternhaufen erhöht sich durch die Wechselwirkung mit den massiven Haloobjekten auf dessen Bahn um das galaktische Zentrum mit Radius $R_\odot$ im Laufe von

†Die Wert beziehen sich jeweils auf das Standardmodell für Kugelsternhaufens

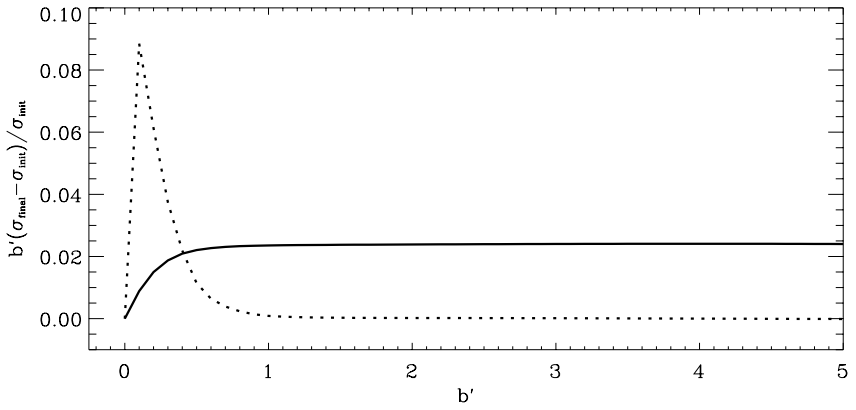

Abbildung 4.19: Die Funktion $b'\,[(\sigma_{final} - \sigma_{init})/\sigma_{init}]\,(b')$ (gestrichelt dargestellt) und das zugehörige Integral (durchgezogene Linie) als Funktion des relativen Stoßparameters $b' = b/r_t$ berechnet für das Standardmodell eines Kugelsternhaufens für $v_0 = v_c = 220\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

10^{10} Jahren auf das 26.8^2-fache der ursprünglichen Bindungsenergie. Das kann er nicht überleben, er hat sich spätesten nach etwas mehr als einer Orbitalperiode von $\sim 240 \times 10^6$ Jahren aufgelöst. Für kleinere Bahnradien verschärft sich dies Problem und auch für Abstände bis hin zum Rand der optischen Scheibe ($\sim 15\,\mathrm{kpc}$) kann kein Kugelsternhaufen 10^{10} Jahre überdauern. Bezieht man nun noch die Geschwindigkeitsverteilung der schwarzen Löcher mit ein, d.h. faltet man zusätzlich noch den zweiten Parameter v_0 mit einer Gaußkurve der Breite $120\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ um v_c, dann wird die Situation weiter verschärft, da der Anteil mit höheren Relativgeschwindigkeiten den mit geringeren überkompensiert. Da man in der Milchstraße etwa 140 Kugelsternhaufen beobachtet (und viele davon haben kleinere Masse als das hier diskutierte Standardmodell), kann der von Lacey & Ostriker (1985) vorgeschlagene Scheibenheizungsprozeß mit massiven schwarzen Löchern im galaktischen Halo nicht zutreffen. Einzig eine drastische Reduzierung der Massen dieser Haloobjekte auf $M \lesssim 1\,\mathrm{M}_\odot$ erlaubt die Stabilität aller bis heute bekannten Kugelsternhaufen. Diese Körper wären jedoch nicht mehr in der Lage, eine dünne galaktische Scheibe auf Skalenhöhen von 1 kpc aufzuheizen.

Das Fazit dieses Kapitels lautet also, Scheibenheizungsprozesse werden *nicht* von massiven kompakten Haloobjekten dominiert.