Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2011/12)

Cornelis Dullemond

Kapitel 7: Matrizen

Hinweis: Bitte immer alles begründen/beweisen, wenn möglich mit Formeln! Nur qualitative Antworten zählen ab jetzt nicht mehr...

1. Führen Sie die folgenden linearen Transformationen durch:

   (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2. Führen Sie die folgenden Matrix-Matrix Multiplikationen durch:

   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{4}$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{5}$$

3. Bestimmen Sie die $N \times N$ Matrix E, die jeden N-dimensionalen Vektor unverändert lässt.

4. Bestimmen Sie die $N \times N$ Matrix E, die jeden N-dimensionalen Vektor zwei mal so lang macht.

5. Bestimmen Sie die 3×3 Matrix E, die die erste (x-) Komponente $2\times$ so groß macht, die zweite (y-) Komponente $4\times$ so groß macht und die dritte (z-) Komponente $8\times$ so groß macht.

6. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix im 3D Raum für eine Rotation um einen Winkel θ um:

(a) die x-Achse

(b) die y-Achse

(c) die z-Achse

Hinweis: Beachten Sie dabei, dass sie richtig festlegen, in welcher Richtung gedreht wird, wenn $\theta > 0$ (rechte-Hand-Regel).

7. Bleiben wir in 3-D und rotieren Sie[1]

   (a) $\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T$ um einen Winkel θ um die z-Achse

   (b) $\mathbf{v} = (1, 0, 3)^T$ um einen Winkel θ um die z-Achse

   (c) $\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T$ um einen Winkel θ um die x-Achse

   (d) $\mathbf{v} = (1, 0, 3)^T$ um einen Winkel θ um die x-Achse

8. (a) Warum wird die Inverse A^{-1} auf diese Weise (Gleichung 21) definiert?

   (b) Beispiel: Eine Rotation in 2-D:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

   Obwohl es im Allgemeinen sehr schwierig ist, die Inverse zu bestimmen, ist es in diesem Fall einfach. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

   (c) Anderes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

   Auch hier ist die Inverse einfach zu bestimmen. Machen Sie dies.

   (d) Letztes Beispiel: eine “hyperbolische Rotation”[2]:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{8}$$

   Auch hier ist die Inverse einfach zu bestimmen. Machen Sie dies (und bitte beweisen Sie, dass es stimmt!).

   (e) Begründen Sie, aufgrund ihrer Ergebnisse, das Vorzeichen im Matrixelement A_{12} bei der hyperbolischen Rotation[3].

9. Beweisen Sie, dass $A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$, wo A und B $N \times N$ Matrizen sind und $\mathbf{x}$ ein N-dimensionaler Vektor. Hinweis: Schreiben Sie dies mit $\sum_{i=1}^{N}$ etc aus.

[1] Eigentlich müssen Vektoren immer senkrecht geschrieben werden (als Spalte), aber es spart Platz im Text wenn es horizontal geschrieben wird (als Zeile). Oft wird es daher als $(1, 2, 3)^T$ (also Transponent) geschrieben.

[2] Relevant für spezielle Relativitätstheorie.

[3] Hier gibt es kein Minus-Zeichen, anders als bei der normalen Rotation.