

**Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2011/12)**

Cornelis Dullemond

Kapitel 1: Differenziation

1 Funktionen

Eine Funktion ist eine virtuelle “Maschine” die aus ihrem Argument (oder aus ihren Argumenten) einen eindeutigen Wert produziert. Nennen wir unsere Funktion f , so können wir sie zum Beispiel folgendermaßen definieren:

$$f(.) \quad : \quad f(x) = x^2 \tag{1}$$

In diesem Beispiel wird zu dem Argument x der Wert x^2 zugeordnet. Man kann es auch definieren wie $f(t) = t^2$, d.h. den Namen des Arguments darf man frei wählen. Den Namen der Funktion hat man allerdings mit der o.g. Definition festgelegt. Man kann auch Funktionen mehrerer Variablen definieren, z.B.

$$f(.,.) \quad : \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{2}$$

Ab jetzt werden wir die Schreibweise $f(.)$ oder $f(.,.)$ einfach weglassen. Oft werden Funktionen auch einfach mit den Zusammenhängen zweier Variablen definiert, z.B.:

$$y = x^2 \tag{3}$$

wobei es genauer gewesen wäre sie wie $y(x) = x^2$ zu schreiben.

2 Ableitung: Definition

Die Ableitung ist die Steigung einer Funktion. Sie wird folgendermaßen definiert:

$$f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Die Ableitung $f'(x)$ ist eine Funktion, wie auch $f(x)$. Sie ist also an jeder Stelle (d.h. für jeden Wert x) definiert, und kann an jeder Stelle einen anderen Wert haben. Eine andere Schreibweise für die Ableitung ist:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \tag{5}$$

Oder, wenn man salopp $y = x^2$ schreibt, so schreibt man

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{6}$$

Wenn die Funktion eine komplizierte Struktur hat, wird $\frac{d}{dx}$ auch oft als *Operator* geschrieben:

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{1+x^2}} \right) \quad (7)$$

Die Prozedur der Bestimmung der Ableitung heißt *Differenziation*. Nicht alle Funktionen sind differenzierbar. Wenn eine Funktion einen Sprung hat, dann ist sie an der Stelle nicht differenzierbar.

Eine etwas abstrakte Schreibweise stellt das *totale Differential* da. Nehmen wir z.B. die Funktion $f(x) = x^2$, so ist das totale Differential:

$$df = d(f(x)) = d(x^2) = 2x dx \quad (8)$$

Wenn man diesen Ausdruck durch das Differential dx teilt, so erhält man:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{2x dx}{dx} = 2x \frac{dx}{dx} = 2x \quad (9)$$

wie erwartet.

3 Ableitung: Standard Formel

Folgende Funktionen haben standard Ableitungen, die man sich merken sollte:

$$\frac{dx^p}{dx} = px^{p-1} \quad (10)$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \quad (11)$$

$$\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad (12)$$

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x) \quad (13)$$

$$\frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x) \quad (14)$$

$$\frac{d \sinh(x)}{dx} = \cosh(x) \quad (15)$$

$$\frac{d \cosh(x)}{dx} = \sinh(x) \quad (16)$$

$$(17)$$

4 Ableitung: Rechenregel

Ableitung einer Summe:

$$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} \quad (18)$$

Produkt:

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = f(x) \frac{dg(x)}{dx} + g(x) \frac{df(x)}{dx} \quad (19)$$

Kettenregel (Substitutionsregel):

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{d(f(g(x)))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (20)$$

Hier sieht man, dass es wichtig ist, zu fragen, nach was eine Funktion differenziert wird:

$$\frac{d(f(g(x)))}{dg(x)} = \frac{df(u)}{du} \quad \text{mit } u := g(x) \quad (21)$$

Beispiel

$$\frac{d\sqrt{1+x^2}}{dx} = \frac{d\sqrt{1+x^2}}{d(1+x^2)} \frac{d(1+x^2)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (22)$$

5 Ableitung: Tricks mit dem totalen Differenzial

Mit der freien Anwendung von dem Prinzip des totalen Differenzials kann man interessante Sachen machen. Zum Beispiel, was ist die Ableitung von:

$$y = \arcsin x \quad (23)$$

Indem man dies invertiert erhält man $x = \sin y$. Man kann dann dx/dy ausrechnen

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - (\sin y)^2} = \sqrt{1 - x^2} \quad (24)$$

Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1} \quad (25)$$

und also gilt für den Fall $y = \arcsin x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (26)$$

6 Höhere Ableitungen

Eine Differenziation kann man mehrmals ausführen. Zum Beispiel, die zweite Ableitung schreibt man folgendermaßen:

$$f''(x) \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (27)$$

Es ist wichtig, zu verstehen, dass

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \neq \frac{(df(x))^2}{dx^2} \quad (28)$$

Es handelt sich nämlich um den d^2 Differenzialoperator, was bedeutet, dass das d zwei mal angewendet wird. Die zweite Ableitung von $f(x)$ sagt aus, wie sehr die Funktion $f(x)$ gekrümmt ist. Man kann den Differenzialoperator beliebig oft anwenden:

$$f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (29)$$

das n steht hier in Klammern, damit es klar ist, dass es sich um die n -fache Ableitung handelt, nicht also die n -Potenz.

