

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik (WS2013/14)

Cornelis Dullemond

Kapitel 6: Oszillationen mit Dämpfung

1. Gedämpfter Oszillator

Wie wir in der Vorlesung gesehen haben: Für den gedämpften harmonischen Oszillator ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = Ce^{i\omega_{(+)}t} + De^{i\omega_{(-)}t} \quad \text{mit} \quad \omega_{(\pm)} = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{-\Gamma^2 + 4mk}}{2m} \quad (1)$$

Wir sehen, dass wir zwei Fälle unterscheiden müssen:

$$\text{Fall 1} : \Gamma^2 < 4mk \quad (2)$$

$$\text{Fall 2} : \Gamma^2 \geq 4mk \quad (3)$$

- Was ist die physikalische Bedeutung vom reellen Teil von ω ?
- Was ist die physikalische Bedeutung vom imaginären Teil von ω ?
- Geben Sie den reellen Teil und den imaginären Teil von ω an, für die beiden Fälle.
- Zeigen Sie, dass im Fall 2 die Lösung gar nicht oszilliert (nur relaxiert) und im Fall 1 die Lösung eine gedämpfte Oszillation darstellt.

2. Angeregter gedämpfter Oszillator

Wir fügen nun noch eine Kraft hinzu: diesmal eine externe Kraft $f(t)$ gegeben durch

$$f(t) = Fe^{i\omega_0 t} \quad (4)$$

wo ω_0 eine von aussen festgelegte reelle Winkelfrequenz ist, und F eine komplexe Konstante. Somit erhalten wir die Gleichung des *angeregten* gedämpften Oszillators:

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + kx = Fe^{i\omega_0 t} \quad (5)$$

Unsere Lösung besteht nun aus der Summe eines *homogenen Teils* und eines *partikulären Teils*.

- Geben Sie den *homogenen Teil* der Lösung an (Achtung: dies sollte einfach sein!)
- Für den *partikulären Teil* fangen Sie mit dem Ansatz $x(t) = Ce^{i\omega_0 t}$ an und zeigen Sie, dass die partikuläre Lösung:

$$x_{\text{part}}(t) = \frac{Fe^{i\omega_0 t}}{-\omega_0^2 m + i\omega_0 \Gamma + k} \quad (6)$$

ist. (Achtung: ω_0 ist *nicht* gleich der ω aus dem homogenen Teil!).

- (c) Das Phänomen *Resonanz* kann man nun direkt aus Gleichung (6) sehen, indem man den Betrag von dem Nenner betrachtet:

$$\left| \frac{1}{-\omega_0^2 m + i\omega_0 \Gamma + k} \right| = \frac{1}{|-\omega_0^2 m + i\omega_0 \Gamma + k|} \quad (7)$$

Erklären Sie, an Hand dieser Gleichung, was das Phänomen *Resonanz* bedeutet (d.h.: was passiert wenn $\omega_0 \rightarrow \sqrt{k/m}$, und was ist der Einfluß von Γ auf das Ergebnis?).