Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik (WS2013/14)

Cornelis Dullemond

Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Die Poissonverteilung $P_n = \mu^n e^{-\mu}/n!$ ist so normiert, dass $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$. Leiten Sie daraus $\sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \mu$ her.

2. Man definiert die Standardabweichung einer diskreten Verteilung P_n mit $n = 0, 1, 2, \cdots, \infty$ folgendermaßen:
$$\sigma^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle n \rangle)^2 P_n \tag{1}$$
Für die Poissonverteilung wissen wir jetzt, dass $\langle n \rangle = \mu$. Zeigen Sie, für die Poissonverteilung, dass $\sigma = \sqrt{\mu}$.

3. Das radioaktive Element ^{238}U hat eine Zerfallszeit von 4.47 milliarden Jahren (=1.41×10^{17} Sekunden). In einem Milligramm Uran gibt es 2.5×10^{18} Uranatome. Wie ist die Chance, dass innerhalb einer Sekunde genau 4 Uranatome zerfallen?

4. ...Und wie groß ist die Chance, dass in einer Sekunde *kein* Uranatom zerfällt?

5. Wenn wir nicht wissen würden, wie groß die Zerfallszeit von ^{238}U ist, könnten wir sie experimentell messen. Wir messen über eine Zeitspanne T wieviele Uranatome zerfallen (nennen wir dies n) und wie viele es am Anfang gibt (N). Da $N \gg n$ vernachlässigen wir, dass N über die Zeitspanne T kleiner wird. Die Zerfallszeit τ kann man dann mit
$$\tau \simeq \frac{N}{n} T \tag{2}$$
abschätzen. Für das was kommt, ist es jedoch praktischer es folgendermaßen zu schreiben:
$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{n}{NT} \tag{3}$$
Wir messen dementsprechend $1/\tau$. Intuitiv ist klar, dass unser Messergebnis besser wird, je länger wir messen, also je größer T ist. Mit dem o.g. Ergebnis für den Poissonprozess ($\sigma = \sqrt{\mu}$) kann man dies sogar beweisen. Machen Sie dies. Tipp: vergleichen Sie σ mit μ für immer größer werdende Zeitspanne.

6. Sei $p(x)$ eine Normalverteilung mit Standardabweichung σ und Mittelwert x_0. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen $x_0 - \sigma$ und $x_0 + \sigma$ liegt? Tipp: $\mathrm{erf}(1/\sqrt{2}) = 0.6827$.

7. Zeigen Sie, für die Normalverteilung, dass $\langle x \rangle = x_0$.

8. Zeigen Sie, für die Normalverteilung, dass $\langle (x - x_0)^2 \rangle = \sigma^2$.