Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2013/14)

Cornelis Dullemond

Kapitel 4: komplexe Zahlen

1 Warum komplexe Zahlen?

Wenn man Zahlen neu erfinden müsste, würde man wahrscheinlich zuerst die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc erfinden, um Gegenstände zu zählen. Bald würde man die 0 einführen, wenn es die Gegenstände nicht gibt. Um Mengen zu beschreiben (Liter Flüssigkeit, oder Gewicht eines Objektes), würde man die rationalen Zahlen und/oder die Zahlen mit Nachkommastellen erfinden. Und man würde irgendwann die negativen Zahlen einführen, weil man damit Vermessungen oder finanzielle Buchhaltung einfacher machen kann. Immer ist aber klar: Zahlen sind nichts anderes als Erfindungen um genaue Beschreibungen und Berechnungen machen zu können. Und jede Art von Zahl hat seinen Anwendungs-Bereich. Zum Beispiel kann man die Zahl 1,5 nicht verwenden, um Menschen zu Zählen, da es halbe Menschen nicht gibt.

Komplexe Zahlen, wie wir die unten definieren werden, sind einfach eine Erweiterung von den "normalen Zahlen", genau so wie rationale Zahlen eine Erweiterung sind von den natürlichen Zahlen. Und ähnlich wie bei dem o.g. Beispiel haben komplexe Zahlen auch nur eingeschränkte Anwendungsgebiete. Komplexe Zahlen kann man also nicht benutzen, um zu Vermessen, wie groß ein Fußballfeld ist. Aber es gibt mathematische und physikalische Probleme (zum Beispiel Schwingungen/Wellen), für die komplexe Zahlen aussergewöhnlich praktisch sind. In diesem Kapitel werden wir komplexe Zahlen einführen und lernen, einfache Berechnungen damit durchzuführen.

2 Die Zahl i und die komplexe Ebene

Aus der Schule wissen wir, dass die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht existiert, da das Quadrat einer beliebigen Zahl immer positiv ist. Lass uns jetzt eine imaginäre Zahl i einführen, für die gilt, dass

$$i^2 = -1 \tag{1}$$

Diese Zahl existiert nicht im Sinne wie wir es gewohnt sind. Aber wie oben schon erklährt wurde, dürfen wir eine neue Art von Zahlen einführen, wenn wir genau festlegen, wie man damit rechnet. Was man damit dann anfangt, dass ist natürlich die Frage. Aber, es wird sich herausstellen, dass die Einführung der imaginären Zahl i sehr interessante Anwendungen hat.

Die Zahl i benutzen wir genauso wie eine normale Zahl. Die folgenden Ausdrücke machen also Sinn:

$$5i \qquad \text{oder} \qquad 2 - 3i \tag{2}$$

Eine Zahl wie $2-3i$ heißt eine *komplexe Zahl*, die 2 ist der *reelle* Teil und -3 der *imaginäre* Teil. Jede komplexe Zahl kann man also als $a+bi$ schreiben, wo a der reelle Teil und b der imaginäre Teil ist. Man kann den reellen Teil oder den imaginären Teil einer komplexen Zahl folgendermaßen schreiben:

$$\mathrm{Re}(a+bi)=a \qquad , \qquad \mathrm{Im}(a+bi)=b \tag{3}$$

Es liegt jetzt auf der Hand, eine komplexe Zahl graphisch als eine Art Vektor im 2-D Raum darzustellen, wo a auf die x-Achse angebracht wird, und b auf die y-Achse. Diese 2-D Ebene wird die *komplexe Ebene* genannt. Es ist sehr hilfreich, komplexe Zahlen auf diese Weise graphisch darzustellen, und es wird ausdrücklich so empfohlen. *Aber eine komplexe Zahl ist kein 2-D Vektor im Sinne wie wir Vektoren definiert haben! Es ist, und bleibt, ein Skalar!*

3 Einfaches Rechnen mit komplexen Zahlen

Addition von zwei komplexen Zahlen funktioniert ähnlich wie bei Vektor-Addition:

$$(2+5i)+(-3-i)=2+5i-3-i=-1+4i \tag{4}$$

und Subtraktion auch:

$$(2+5i)-(-3-i)=(2+5i)+(3+i)=2+5i+3+i=5+6i \tag{5}$$

oder im Allgemeinen:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \tag{6}$$

Für Multiplikation benutzt man, dass $i^2=-1$:

$$(a+bi)*(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i \tag{7}$$

Das Quadrat einer komplexen Zahl ist also:

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+(2ab)i \tag{8}$$

Man kann auch zwei komplexe Zahlen durch einander teilen, oder die Wurzel berechnen, aber das ist etwas komplizierter, und deshalb machen wir das später.

Man kann auch komplexe Variable definieren, und man schreibt sie genau so wie bei normalen Variablen. Zum Beispiel, $u=3-2i$ ist eine komplexe Zahl. Man kann dann mit u wie üblich rechnen: Zum Beispiel: $v=3u-2=7-6i$.

4 Die Multiplikation genauer betrachtet

Da eine komplexe Zahl $a+bi$ in einer gewissen Weise als 2-D Vektor in der komplexen Ebene betrachtet werden kann, so kann man diese Zahl auch mit seiner Länge und seinem Winkel mit der x-Achse karakterisieren. Zum Beispiel: die komplexe Zahl u mit Länge r und Winkel θ ist:

$$u=r\cos\theta+ir\sin\theta \tag{9}$$

d.h., $\mathrm{Re}(u) = r\cos\theta$ und $\mathrm{Im}(u) = r\sin\theta$. Umgekehrt, kann man den Winkel und die Länge einer Zahl $u = a + bi$ bestimmen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2} && (10) \\ \theta &= \arctan(b/a) && (11) \end{aligned}$$

Die Länge einer komplexen Zahl heißt der *Betrag*:

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} \tag{12}$$

Mit diesem Wissen kann man die komplexe Multiplikation in einem anderen Licht betrachten. Wenn wir zwei komplexe Zahlen haben: $u = r\cos\theta + ir\sin\theta$ und $v = s\cos\phi + is\sin\phi$ und wir multiplizieren die laut Gleichung 7, so erhält man:

$$\begin{aligned} uv &= rs(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + rs(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)i && (13) \\ &= rs\cos(\theta+\phi) + rs\sin(\theta+\phi)i && (14) \end{aligned}$$

Man sieht:

1. Die Beträge von u und v werden multipliziert
2. Die Winkel von u und v werden addiert

So kann man die Multiplikation von komplexen Zahlen als Rotationen in der komplexen Ebene verstehen.

5 Komplexe Konjugation

Es ist manchmal praktisch, wenn man eine komplexe Zahl in der imaginären Richtung spiegeln kann, i.e. wenn man i durch $-i$ ersetzt. Dies heißt die komplexe Konjugation, und wird oft mit einem Sternchen u^* oder mit einem Balken $\bar{u}$ geschrieben. Wenn also $u = a + bi$, so ist $\bar{u} \equiv u^* = a - bi$. Es gilt auch, dass

$$(u+v)^* = u^* + v^* \qquad \text{und} \qquad (uv)^* = u^*v^* \tag{15}$$

Eine besondere Anwendung der komplexen Konjugation ist, dass der Betrag $|u|$ einer komplexen Zahl $u = a + ib$ folgendermaßen einfach zu bestimmen ist:

$$u^*u = (a-ib)(a+ib) = a^2 + b^2 = |u|^2 \tag{16}$$

6 Die Exponentialform einer komplexen Zahl

Für komplexes Rechnen hat die Zahl e sehr besondere Eigenschaften, die uns nachher sehr helfen werden, mit komplexen Zahlen zu rechnen. Um zu verstehen, um was für Eigenschaften es geht, betrachten wir erst mal die Zahl $e^{i\theta}$ wo θ eine reelle Zahl ist. Wir haben noch nicht definiert, wie man imaginäre Zahlen als Potenz benutzt; deshalb machen wir das hier. Wir definieren es so, dass die Taylor-Entwicklung gültig bleibt. Für eine Taylor-Entwicklung um $\theta = 0$ gilt dann

$$e^{i\theta} = e^0 + \left[\frac{de^{i\theta}}{d\theta}\right]_{\theta=0}\theta + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2e^{i\theta}}{d\theta^2}\right]_{\theta=0}\theta^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3e^{i\theta}}{d\theta^3}\right]_{\theta=0}\theta^3 + \mathcal{O}(\theta^4) \tag{17}$$

Die Ableitung ist genau so wie man denkt:

$$\frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta} \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2e^{i\theta}}{d\theta^2} = i^2e^{i\theta} = -e^{i\theta} \tag{18}$$

Also gilt für die Taylor-Entwicklung um $\theta = 0$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{i}{6}\theta^3 + \cdots \tag{19}$$

Hieraus sieht man sofort, dass

$$(e^{i\theta})^* = e^{-i\theta} \tag{20}$$

und damit, dass

$$(e^{i\theta})^* e^{i\theta} = e^{-i\theta}e^{i\theta} = e^{-i\theta+i\theta} = e^0 = 1 \tag{21}$$

Das heißt, der Betrag der Zahl $e^{i\theta}$ ist 1. Die Zahl $e^{i\theta}$ liegt auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene. Man kann auf ähnliche Weise beweisen, dass θ der Winkel ist.

Man kann also jede komplexe Zahl $u = a + bi$ *in Exponentialform* schreiben:

$$u = a + bi = re^{i\theta} \tag{22}$$

wo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\theta = \arctan(b/a)$.

7 Rechnen mit der Exponentialform

Mit der Exponentialform kann man einfach multiplizieren, teilen, Wurzel-Ziehen etc.:

$$\begin{aligned}
2(re^{i\theta}) &= (2r)e^{i\theta} = 2re^{i\theta} && (23)\\
(re^{i\theta})^2 &= r^2e^{2i\theta} && (24)\\
(re^{i\theta})(se^{i\phi}) &= (rs)e^{i(\theta+\phi)} && (25)\\
\sqrt{re^{i\theta}} &= \sqrt{r}e^{i\theta/2} && (26)\\
(re^{i\theta})^p &= r^pe^{ip\theta} && (27)
\end{aligned}$$

Nur Addition ist mit der Exponentialform schwieriger.

8 Beispiel einer Anwendung

Komplexe Zahlen werden oft benutzt, um Schwingungen und Wellen zu beschreiben. Eine Schwingung, z.B. die Position eines Pendels, lässt sich im Allgemeinen mit einem Cosinus und einem Sinus beschreiben:

$$x(t) = A\cos(2\pi t/P) + B\sin(2\pi t/P) \tag{28}$$

wo A und B die Amplituden der Cosinus und der Sinus-Komponente der Schwingung sind, P die Schwingungsperiode und t die Zeit. Es stellt sich allerdings heraus, dass es sich einfacher rechnet, wenn man eine komplexe Schwingungsfunktion einführt:

$$\psi(t) = Ce^{2\pi it/P} \qquad \text{und} \qquad x(t) = \mathrm{Re}(\psi(t)) \tag{29}$$

wo C die komplexe Amplitude ist. Siehe Vorlesung für mehr Information.