

**Zusammenfassung der Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik (WS2013/14)**

Cornelis Dullemond

Kapitel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Diskrete Zufallszahlen

Einen klassischen Würfel kann man als eine diskrete Zufallsvariable betrachten, die 6 mögliche Werte annehmen kann: 1,2,3,4,5 und 6. Jeder Wert hat die gleiche Wahrscheinlichkeit: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}$. Die Summe der Werte P_n ist, per Definition, 1. Im Allgemeinen kann man eine Zufallsvariable x_n definieren wo die Wahrscheinlichkeiten nicht notwendigerweise gleich sind. Zum Beispiel:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2} \quad \text{mit} \quad P_1 = 0.1, \quad P_2 = 0.5, \quad P_3 = 0.4 \quad (1)$$

Das heißt, es gibt 20% Chance, dass man $x = \frac{1}{2}$ findet, 50% Chance, dass man $x = 1$ findet, und 40% Chance, dass man $x = \frac{3}{2}$ findet. Die Wahrscheinlichkeiten P_n sind immer auf 1 normiert:

$$\sum_{n=1}^N P_n = 1 \quad (2)$$

wo N die Zahl der möglichen Werten der Zufallsvariable x ist (im o.g. Beispiel also $N = 3$, und für einen Würfel $N = 6$). Der *Erwartungswert* von irgendeiner Funktion f von n (also f_n), schreibt man mit $\langle \rangle$ -Klammern:

$$\langle f \rangle \equiv \sum_{n=1}^N f_n P_n \quad (3)$$

2 Poissonverteilung

Es gibt auch unlimitierte diskrete Zufallszahlen. Ein sehr oft vorkommendes Beispiel ist die Poisson-Verteilung. Diese Verteilung erhält man z.B. wenn man während eines Regengusses misst, wie viele Tröpfchen innerhalb von 10 Sekunden in eine Teetasse fallen. Im Durchschnitt, wenn man dieses Experiment tausende Male wiederholt (oder mit tausenden identischen Teetassen gleichzeitig macht), werden es z.B. 5.734 sein. Aber das heißt, dass es mal 5, mal 6, mal 3 oder mal 8 sind. Die Frage ist also, wie ist die Chance, dass es n Regentröpfchen sind? Die Antwort ist (ohne Beweis) die *Poissonverteilung*:

$$P_n = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \quad (4)$$

In diesem Fall kann $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ sein. Die Zahl μ ist der Durchschnittswert. Im o.g. Beispiel gilt $\mu = 5.734$. Auch hier sind die P_n auf 1 normiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = 1 \quad (5)$$

Und wenn man den Durchschnitt, also den Erwartungswert von n , berechnet, so erhält man μ :

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \mu \quad (6)$$

(siehe Übungen).

3 Stetige (kontinuierliche) Zufallszahlen

Oft werden wir mit nicht-diskreten Zufallszahlen konfrontiert. Zum Beispiel der Messwert x eines Experiments. Es ist klar, dass dieser Wert nicht ganz willkürlich ist: er wird (hoffentlich) nah an dem Wert liegen, der das Ergebnis des Experiments darstellt. Es handelt sich also um einen Messwert mit einem *Fehler*. Der Fehler wird bei jeder Messung anders sein, wird sich jedoch in einem gewissen Bereich aufhalten. Man könnte sich also fragen: Was ist die Chance, dass wir genau den Wert $x = x_1$ messen? Leider ist die Antwort "0", weil man nie mit unendlicher Präzision (also unendlich viele Nachkommastellen) *genau* x_1 erhalten würde (wenn wir überhaupt so genau messen könnten, aber das ist eine andere Sache). Stattdessen müssen wir fragen: Wie ist die Chance, dass der Messwert zwischen x_1 und x_2 liegt? Nennen wir dies $P(x_1, x_2)$. Um dies für jedes Paar x_1 und x_2 zu beschreiben, definieren wir die *Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion* $p(x)$, so dass

$$P(x_1, x_2) \equiv \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion ist auf 1 normiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (8)$$

oder, wenn wir wissen, dass x immer zwischen x_{\min} und x_{\max} liegt, so schreibt man

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x) dx = 1 \quad (9)$$

Für einen infinitesimal kleinen Bereich $x \in [x, x + dx]$ (also $x_1 = x$, $x_2 = x + dx$) gilt

$$P(x, x + dx) = p(x) dx \quad (10)$$

Es muss also immer $p(x) \geq 0$ gelten. Man kann $p(x)$ auch *Wahrscheinlichkeitsdichte* nennen.

4 Normalverteilung

Wenn man mehrere Messungen von x durchführt, so sind die Messfehler meist "normalverteilt". Das heisst, die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ der Messung kann man folgendermaßen schreiben:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (11)$$

wo x_0 der "richtige" Wert ist und x der gemessene Wert. Das Symbol σ heißt die *Standardabweichung*, und das Quadrat σ^2 die *Varianz* (oder Streuung, oder mittlere quadratische Abweichung). Je kleiner σ , desto genauer die Messung. Die Normierungskonstante $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ ist so gewählt, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Leider hat diese Form von $p(x)$ kein analytisches unbestimmtes Integral. Aber das bestimmte Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ ist analytisch bekannt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = \sqrt{2\pi} \quad (12)$$

Und das unbestimmte Integral, das nicht analytisch auszudrücken ist, ist aber in folgender Form als standard Funktion namens "Gaußsche Fehlerfunktion" (Eng.: gaussian error function) bekannt:

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (13)$$

Dies kann man aus entsprechenden Tabellen entnehmen oder per Computer ausrechnen lassen. Es gilt $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$ und (ganz wichtig für hier unten) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$. Mit der Gaußschen Fehlerfunktion kann man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, dass z.B. x kleiner ist als y :

$$P(x < y) = \int_{-\infty}^y p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right] dx \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y-x_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right] d(x-x_0) \quad (15)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(y-x_0)/\sigma\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right] d\left(\frac{x-x_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(y-x_0)/\sigma\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \quad (17)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(y-x_0)/\sigma\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{y-x_0}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (19)$$

Man definiert den *Erwartungswert* von irgendeiner Funktion $f(x)$:

$$\langle f \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \quad (20)$$

(ähnlich wie Gleichung 3 für den diskreten Fall). Man kann zeigen, dass $\langle x \rangle = x_0$ und $\langle (x-x_0)^2 \rangle = \sigma^2$ (siehe Übungen).

5 Fortpflanzung von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Nehmen wir an, dass wir eine Messvariable x mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$ haben. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass wir x zwischen x_1 und $x_1 + dx$

finden gleich $P(x_1)dx$ ist. Wenn wir nun eine Funktion $y(x)$ haben, wie lautet dann die korrespondierende Wahrscheinlichkeitsverteilung $\bar{P}(y)$?

Fangen wir erst mal mit einem einfachen Beispiel an: $P(x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$ und $P(x) = 0$ für alle anderen Werte von x . Mit anderen Worten: x ist limitiert auf den Bereich $[0, 1]$. Als Funktion nehmen wir zum Beispiel $y(x) = 2x$. Wird $\bar{P}(y)$ nun auch 1 sein? Das geht leider nicht. Man kann dies folgendermaßen sehen: der Bereich $x \in [0, 1]$ korrespondiert mit dem Bereich $y \in [0, 2]$, also mit einem zweimal so großen Bereich. Wenn $\bar{P}(y) = 1$ sein würde, dann würde $\bar{P}(y)$ nicht mehr auf 1 normiert sein: $\int_0^2 \bar{P}(y)dy = 2$. Um die korrekte Normierung von $\bar{P}(y)$ zu erhalten muss $\bar{P}(y) = \frac{1}{2}$ sein. Man sieht also dass nicht nur die funktionelle Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern auch deren Betrag sich ändert, wenn man von einer Variable (x) auf die Andere (y) umsteigt. Man kann also *nicht* sagen, dass $\bar{P}(y(x)) = P(x)$.

Machen wir es jetzt allgemein. Wir können zwar nicht sagen, dass $\bar{P}(y(x)) = P(x)$ gilt, aber wir *können* sagen, dass gilt:

$$\bar{P}(y(x))dy = P(x)dx \quad (21)$$

wenn dy zu dx gehört, sprich:

$$dy = \left(\frac{dy}{dx} \right) dx \quad (22)$$

Der Grund, warum Gl. (21) gilt ist, weil $P(x')dx'$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass x zwischen x' und $x' + dx$ liegt, was genau dieselbe Wahrscheinlichkeit sein muss, dass y zwischen $y'(x')$ und $y'(x' + dx)$ liegt. Also muss gelten:

$$\bar{P}(y(x))(y(x + dx) - y(x)) = P(x)dx \quad (23)$$

Es gilt

$$y(x + dx) \simeq y(x) + \left(\frac{dy}{dx} \right) dx \quad (24)$$

(wir werden dies später mit *Taylorreihen-Entwicklung* beweisen). Also kommt man von Gl. (23) via Gl. (24) auf Gl. (21). Wir erhalten daraus nun folgenden Ausdruck für $\bar{P}(y)$:

$$\bar{P}(y(x)) = P(x) \frac{dx}{dy} = \frac{1}{(dy/dx)} P(x) \quad (25)$$