Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2012)

Cornelis Dullemond

Kapitel 2: Oberflächen- und Volumenintegrale

1. **Stadtplanung**
   Die Stadt X hat 1 Million Bewohner. Die Stadtgrenzen formen genau ein Quadrat zwischen -5 km$\leq x \leq 5$ km und -5 km$\leq y \leq 5$ km. Die Bevölkerungsdichtenfunktion $f(x,y)$ (die Anzahl der Bewohner pro Quadratkilometer) hat die folgende Form:

   $$f(x,y) = A \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{25}\right) \tag{1}$$

   wo x und y in Kilometer ausgedrückt sind. A ist die Normierungskonstante.

   (a) Was ist der Wert von A? Hinweis $\mathrm{erf}(1) = 0.843$.

   Nun beschliesst die Stadt, dass ab jetzt nur noch zur Stadt gehört, was innerhalb von 5 km vom Stadtzentrum liegt.

   (b) Wie viele Einwohner hat die Stadt nun?

   (c) Geben Sie die Verteilungsfunktion $\tilde{f}(r)$ die beschreibt, wie viele Bewohner es gibt zwischen r und $r+dr$.

2. **Maxwell-Boltzmannverteilung von Gasteilchen**
   Die Geschwindigkeit von Gasteilchen in einem Gas mit Temperatur T folgt der sogenannten *Maxwell-Boltzmannverteilung*. Diese Verteilungsfunktion werden wir hier nun herleiten. Wir gehen von zwei Annahmen aus. Die erste Annahme ist, dass die Geschwindigkeitsverteilungen in alle drei Richtungen unabhängig und identisch sind. Das heißt, dass wir, für beliebige v_y und v_z, eine Verteilungsfunktion $P(v_x)$ aufstellen können, und dass diese Funktion unabhängig von v_y und v_z ist. Die zweite Annahme ist, dass $P(v_x)$ die Form einer Gauß-Verteilung hat, und zwar folgender:

   $$P(v_x) = A \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}mv_x^2}{k_B T}\right) \tag{2}$$

   wo A die Normierungskonstante ist, m die Teilchenmasse und k_B die Boltzmannkonstante[1]. Dasselbe gilt für $P(v_y)$ und $P(v_z)$.

   (a) Welcher Wert muss A haben damit $\int_{-\infty}^{+\infty} P(v_x)dv_x = 1$ ist?

   (b) Ausgegangen von der Unabhängigkeit der drei Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z, wie lautet der Ausdruck für die 3-D Verteilungsfunktion $P(v_x,v_y,v_z)$? Bitte normieren Sie dies ordentlich, sodass $\int_{-\infty}^{+\infty} P(v_x,v_y,v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z = 1$.

[1] In SI Einheiten gilt $k_B = 1.38\times10^{-23}$ J K^{-1}, und in CGS Einheiten gilt $k_B = 1.38\times10^{-16}$ erg K^{-1}.

(c) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion $P(v_x, v_y, v_z)$ sphärisch symmetrisch ist.

(d) Wenn wir der Vektor (v_x, v_y, v_z) jetzt in Polarkoordinaten schreiben, mit $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ und mit θ und ϕ die zwei Richtungswinkel des Vektors, zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion $\tilde{P}(v)$, d.h. "die Chance, dass die Geschwindigkeit sich zwischen v und $v + dv$ befindet", gleich

$$\tilde{P}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \tag{3}$$

ist. Dies ist die berühmte *Maxwell-Boltzmann Verteilung.*