

# Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2013)

Cornelis Dullemond

## Kapitel 5: Gaußscher Satz, Stokesscher Satz

### 1. “Herleitung” Gaußscher Satz

In diesem Beispiel leiten wir den Gaußschen Satz her, wenn auch auf vereinfachte Weise, und nur in 2-D. Wir betrachten dazu ein Vektorfeld  $\mathbf{F}(x, y)$ , und definieren eine Oberfläche mit  $x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x$  und  $y_1 \leq y \leq y_1 + \Delta y$ . Wir wählen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  sehr klein im Vergleich zu dem Abstand über dem der Fluss variiert. Wir nehmen jetzt als Vereinfachung an, dass der senkrechte Fluss über jeder Zellen-Rand konstant ist. Das heisst zum Beispiel, dass  $F_x(x_1, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y) = F_x(x_1, y_1) = F_x(x_1, y_1 + \Delta y)$ , und ähnlich für  $F_x(x_1 + \Delta x, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$ ,  $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1)$ , und  $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \Delta y)$ . Mit dieser Annahme, lösen Sie bitte die folgenden Fragen.

- (a) Die Differential operator  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  kann man als diskrete Differenz annähern, wie das üblicherweise mit Differenzialen geht. Machen Sie dies an Hand von  $F_x(x_1, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$ ,  $F_x(x_1 + \Delta x, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$ ,  $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1)$ , und  $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \Delta y)$ .

Wenn man diese Zahl mit der Oberfläche des Quadrats  $\Delta x \Delta y$  multipliziert, so erhält man eine Annäherung des Integrals  $\int_S \nabla \cdot \mathbf{F} dS$  über dieses Quadrat.

- (b) Andererseits kann man auch eine Annäherung der Oberflächenintegral  $\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl$  machen, auch mit  $F_x(x_1, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$ ,  $F_x(x_1 + \Delta x, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$ ,  $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1)$ , und  $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \Delta y)$ . Machen Sie dies.
- (c) Zeigen Sie dass, für dieses einfache Beispiel, und den gerade auf vereinfachte Weise “hergeleitete” Integrale, der Satz von Gauß gilt.
- (d) Wenn wir nun beliebig viele Quadrate zusammenlegen, so dass eine Oberfläche mit beliebiger Form gebildet wird, zeigen Sie qualitativ wie hieraus der Gaußsche Satz für allgemeine Oberflächen folgt.

### 2. “Herleitung” Stokesscher Satz

Ähnlich können wir nun den Stokesschen Satz “herleiten”. Obwohl dieser Satz eigentlich nur in 3-D gültig ist (im Gegensatz zu dem Satz von Gauß, der in beliebig vielen Dimensionen gültig ist), kann man ein Beispiel machen, das in 2-D verständlich ist. Wenn wir nämlich ein Vektorfeld  $\mathbf{B}(x, y, z)$  nehmen das (a) nur von  $x$  und  $y$  abhängt, und (b) dessen  $z$ -Komponente null ist (d.h.  $B_z = 0$ ), so ist nur die  $z$ -Komponente von  $\nabla \times \mathbf{B}(x, y)$  nicht-null, und zwar:

$$[\nabla \times \mathbf{B}(x, y)]_z = \frac{\partial B_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial B_x(x, y)}{\partial y} \quad (1)$$

“Beweisen” Sie nun den Stokesschen Satz auf ähnlicher Weise wie oben bei dem Gaußschen Satz (natürlich nur für dieses Beispiel).

### 3. Elektrisches Feld eines Elektrons

Ein Elektron hat Ladung (im CGS System)  $e = -4.8 \times 10^{-10}$  Statcoulomb ( $= -1.6 \times 10^{-19}$  Coulomb in SI System). Mit

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi e \quad (2)$$

kann man nun das Feld  $\mathbf{E}$  bestimmen, indem man sich realisiert, dass das elektrische Feld um das Elektron sphärisch symmetrisch ist. Machen Sie dies.

### 4. Magnetisches Feld um ein Stromdraht

Benutzen Sie

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3)$$

(siehe Zusammenfassung), und Symmetrie-Argumente, um das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  um ein unendlich langen und unendlich dünnen Stromdraht mit Strom  $I$  zu bestimmen. Die Argumentation geht ähnlich wie oben bei dem elektrischen Feld eines Elektrons.