Übungen zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2014)

Cornelis Dullemond

Kapitel 6: Gaußscher Satz, Stokesscher Satz

1. **"Herleitung" Gaußscher Satz**
   In diesem Beispiel leiten wir den Gaußschen Satz her, wenn auch auf vereinfachte Weise, und nur in 2-D. Wir betrachten dazu ein Vektorfeld $\mathbf{F}(x,y)$, und definieren eine Oberfläche mit $x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x$ und $y_1 \leq y \leq y_1 + \Delta y$. Wir wählen Δx und Δy sehr klein im Vergleich zu dem Abstand über dem der Fluss variiert. Wir nehmen jetzt als Vereinfachung an, dass der senkrechte Fluss über jeder Zellen-Rand konstant ist. Das heisst zum Beispiel, dass $F_x(x_1, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y) = F_x(x_1, y_1) = F_x(x_1, y_1 + \Delta y)$, und ähnlich für $F_x(x_1 + \Delta x, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$, $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1)$, und $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \Delta y)$. Mit dieser Annahme, lösen Sie bitte die folgenden Fragen.

   (a) Die Differenzial operator $\nabla \cdot \mathbf{F}$ kann man als diskrete Differenz annäheren, wie das üblicherweise mit Differenzialen geht. Machen Sie dies an Hand von $F_x(x_1, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$, $F_x(x_1 + \Delta x, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$, $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1)$, und $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \Delta y)$.

   Wenn man diese Zahl mit der Oberfläche des Quadrats $\Delta x \Delta y$ multipliziert, so erhält man eine Annäherung des Integrals $\int_S \nabla \cdot \mathbf{F} dS$ über dieses Quadrat.

   (b) Anderseits kann man auch eine Annäherung der Oberflächenintegral $\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl$ machen, auch mit $F_x(x_1, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$, $F_x(x_1 + \Delta x, y_1 + \frac{1}{2}\Delta y)$, $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1)$, und $F_y(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, y_1 + \Delta y)$. Machen Sie dies.

   (c) Zeigen Sie dass, für dieses einfache Beispiel, und den gerade auf vereinfachte Weise "hergeleitete" Integrale, der Satz von Gauß gilt.

   (d) Wenn wir nun beliebig viele Quadrate zusammenlegen, so dass eine Oberfläche mit beliebiger Form gebildet wird, zeigen Sie qualitativ wie hieraus der Gaußsche Satz für allgemeine Oberflächen folgt.

2. **"Herleitung" Stokesscher Satz**
   Ähnlich können wir nun den Stokesschen Satz "herleiten". Obwohl dieser Satz eigentlich nur in 3-D gültig ist (im Gegensatz zu dem Satz von Gauß, der in beliebig vielen Dimensionen gültig ist), kann man ein Beispiel machen, das in 2-D verständlich ist. Wenn wir nämlich ein Vektorfeld $\mathbf{B}(x, y, z)$ nehmen das (a) nur von x und y abhängt, und (b) dessen z-Komponente null ist (d.h. $B_z = 0$), so ist nur die z-Komponente von $\nabla \times \mathbf{B}(x, y)$ nicht-null, und zwar:

$$[\nabla \times \mathbf{B}(x,y)]_z = \frac{\partial B_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial B_x(x,y)}{\partial y} \tag{1}$$

   "Beweisen" Sie nun den Stokesschen Satz auf ähnlicher Weise wie oben bei dem Gaußschen Satz (natürlich nur für dieses Beispiel).

3. **Elektrisches Feld eines Elektrons**
   Ein Elektron hat Ladung (im CGS System) $e = -4.8 \times 10^{-10}$ Statcoulomb ($= -1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb in SI System). Mit

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi e \tag{2}$$

   kann man nun das Feld $\mathbf{E}$ bestimmen, indem man sich realisiert, dass das elektrische Feld um das Elektron sphärisch symmetrisch ist. Machen Sie dies.

4. **Magnetisches Feld um ein Stromdraht**
   Benutzen Sie

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \tag{3}$$

   (siehe Zusammenfassung), und Symmetrie-Argumente, um das Magnetfeld $\mathbf{B}$ um ein unendlich langen und unendlich dünnen Stromdraht mit Strom I zu bestimmen. Die Argumentation geht ähnlich wie oben bei dem elektrischen Feld eines Elektrons.