**Zusammenfassung der Vorlesung**
**Mathematische Methoden in der Physik II (SS 2014)**

Cornelis Dullemond

# Kapitel 4: Fourier-Transformationen

**Warnung:** Diese Zusammenfassungen sind nur extrem kurzgefasste Begleittexte, und sind nicht ausreichend als "Lehrbuch". In der Vorlesung wird viel an Zusätzlichem Wissen, sowie Beispiele und Erklärungen gegeben.

## 1 Von $[0, L]$ zu $\langle -\infty, +\infty \rangle$

Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, dass man eine willkürliche periodische Funktion als Summe von wellenförmigen Komponenten schreiben kann. In der Praxis aber gibt es oft Bedarf, *nicht-periodische* Funktionen in wellenförmige Komponenten zu zerlegen. Beispiel: Schallwellen (die Komponenten sind die verschiedene Töne von z.B. einer Stimme), oder elektromagnetische Wellen (die Komponenten sind die verschiedenen Farben des Lichtes). Unser Ohr is perfekt in der Lage, aus Schall die verschiedene Frequenzen herauszuhören. Und ein Spektrograf (z.B. ein Prisma) kann Licht in die Regenbogenfarben zerlegen. Dies sind Beispiele von *Fouriertransformationen.* Es ist die Zerlegung eines Signals in Einzelwellen. Nur ist es diesmal nicht ein diskreter Satz von Wellen mit Wellenlängen $\lambda = L/m$ mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty$, sondern ein *kontinuierlicher* Satz von Wellen. Jede Wellenlänge $\lambda$ darf vertreten sein. Dadurch dass wir die Randbedingung, dass die Funktion periodisch mit Periode $L$ sein muss, aufgegeben haben, gibt es nun keine *Quantisation* der Komponente mehr. Statt eine Summe von Komponenten gibt es nun ein *Integral*:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk \tag{1}$$

Statt diskrete Werte $A_m$ für $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty$ haben wir nun eine kontinuierliche Funktion $A(k)$ für $k \in \langle -\infty, +\infty \rangle$. Man kann jetzt auch nicht mehr so einfach sagen, dass $A(3)$ die Amplitude für Komponente $e^{3ix}$ ist, weil man dazu eigentlich ein kleines Interval $[3, 3 + dk]$ mit $dk \ll 3$ nehmen müsste, so dass $A(3)dk$ die Amplitude für Komponente $e^{3ix}$ ist (Gleichung 1 ist ja ein Integral und keine Summe).

## 2 Dirac Delta-Funktion

Um die Komponenten aus einer beliebigen Funktion $y(x)$ zu destillieren werden wir nachher ein ähnliches Integral durchführen wie wir schon bei den Fourierreihen gemacht haben. Nur brauchen wir dazu noch ein mathematisches Gerät das wir noch nicht besprochen haben: die Dirac-$\delta$-Function. Es ist die kontinuierliche Version des Kronecker $\delta$. Zur Erinnerung, das Kronecker $\delta_{mn}$ ist nur dann nicht-null (und zwar: 1) wenn $m = n$. Man kann dies auch so schreiben: $\delta_{0,m-n}$ ist nur dann nicht-null (und zwar: 1) wenn $m - n = 0$. Die

Dirac-$\delta$-Funktion $\delta(x)$ ist so definiert, dass

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ +\infty & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Das mit dem $+\infty$ sollte einem eigentlich etwas skeptisch machen... Wie kann man mit $+\infty$ überhaupt rechnen? Unendlich ist ja nicht sauber definiert. Zum Beispiel: $3 \times \infty = \infty$, was ja für wirkliche Zahlen nicht gilt (ausser für die Zahl Null). Der Trick ist, dass man die Funktion folgendermaßen normieren kann: Man *definiert* das Mass an "unendlich" so, dass folgendes gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \equiv 1 \tag{3}$$

Wie kann man sich dies vorstellen? Eine Möglichkeit ist, um zunächst folgende Blockfunktion zu definieren:

$$\Delta_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| > h \\ \frac{1}{2h} & \text{für} \quad |x| \leq h \end{cases} \tag{4}$$

Man kann sofort sehen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_h(x) dx = 1 \tag{5}$$

gilt, unabhängig von den Wert von $h$. Wenn wir $h$ immer kleiner machen, wird die Blockfunktion immer schmäler, aber gleichzeitig auch immer höher. Die Oberfläche unter der Funktion (i.e. das Integral über die Funktion) bleibt jedoch immer 1. Die Dirac-$\delta$-Funktion ist nun:

$$\delta(x) = \lim_{h \to 0} \Delta_h(x) \tag{6}$$

Eine alternative Methode, sie mit einem Limes zu definieren ist, sie als Gauss-Kurve zu sehen

$$\Delta_h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} h} \exp\left(-\frac{x^2}{h^2}\right) \tag{7}$$

wo man wieder wie Gleichung (6) den Limes für $h \to 0$ nimmt. Die Gaussfunktion wird immer dünner aber höher.

Dies alles mag auf den ersten Blick etwas seltsam vorkommen. Keine Sorgen: auch die Mathematiker in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts konnten sich schwer mit der Dirac-$\delta$-Funktion die Paul Dirac in seinem Buch über die Quantenmechanik eingeführt hat anfreunden. Aber inzwischen ist es einer der standard Werkzeuge von Mathematikern, Physikern und Ingenieuren.

Eine der vielen interessanten Eigenschaften der Dirac-$\delta$-Funktion ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x - x')dx = g(x') \tag{8}$$

Können Sie ahnen (qualitativ) warum dies so ist?

# 3 Destillieren der Komponente

Lassen Sie uns nun, ähnlich wie bei den Fourier-Reihen, folgendes Integral ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)e^{-ik'x}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx}dk\right)e^{-ik'x}dx && (9)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx}e^{-ik'x}dk\,dx && (10)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x}dx\right)dk && (11)
\end{aligned}$$

Nun brauchen wir folgende Identität die etwas weniger einfach herzuleiten ist, und die wir also hier ohne Beweis geben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dx = 2\pi\delta(k) \tag{12}$$

Nun machen wir weiter:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)e^{-ik'x}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x}dx\right)dk && (13)\\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\delta(k-k')dk && (14)\\
&= 2\pi A(k') && (15)
\end{aligned}$$

Und somit haben wir hier die Formel für die Zerlegung in Fourierkomponenten:

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)e^{-ikx}dx \tag{16}$$

Sie sehen, dass dies eine sehr ähnliche Formel wie Gleichung (1) ist, nur mit $1/2\pi$ davor, mit einem Minuszeichen inm Exponent und mit dem Integral über $k$ statt über $x$. Gleichung (16) ist die *Fouriertransformation* und Gleichung (1) die *inverse Fouriertransformation*.

# 4 Alternative Definition

Man sieht, dass die Fourtransformation einen Faktor $1/2\pi$ hat dass die inverse Fouriertransformation nicht hat. Sonst sind die Fouriertransformation und seine Inverse sehr komplementär. Um die Symmetrie zwischen den zwei komplementären Transformationen wiederherzustellen wird das Ganze oft subtil anders geschrieben, mit der inverse Fouriertransformation (die Zerlegung in Komponenten):

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(\xi)e^{i2\pi\xi x}d\xi \tag{17}$$

und die Fouriertransformation (die Destillation der Komponente):

$$\tilde{A}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)e^{-i2\pi\xi x}dx \tag{18}$$

Es gilt dass

$$2\pi\xi = k \tag{19}$$

und

$$\tilde{A}(\xi) = 2\pi A(k = 2\pi\xi) \tag{20}$$

Also die Funktion $\tilde{A}()$ ist etwas anders normiert als $A()$, sonst aber bleibt alles gleich. Wir werden aber die erste Definition benutzen (also $A$, nicht $\tilde{A}$).